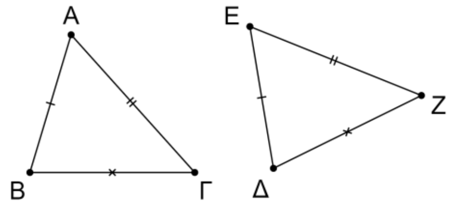
Ερωτήσεις Κατανόησης (με απαντήσεις)

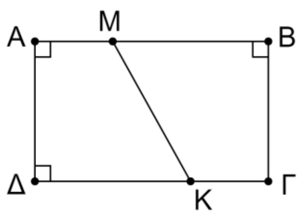
1. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΔΖ$ είναι ίσα και ισχύουν $ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΖΕ, ΒΓ = ΔΖ$. Να βρείτε τις αντίστοιχες ίσες γωνίες.



Απάντηση: $\hat{Γ} = \hat{Ζ},\ \hat{Β} = \hat{Δ},\ \hat{Α} = \hat{Ε}$

Αιτιολόγηση:
Σε ίσα τρίγωνα, απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες. Άρα:
Αφού $ΑΒ = ΔΕ$, ισχύει $\hat{Γ} = \hat{Ζ}$.
Αφού $ΑΓ = ΖΕ$, ισχύει $\hat{Β} = \hat{Δ}$.
Αφού $ΒΓ = ΔΖ$, ισχύει $\hat{Α} = \hat{Ε}$.

2. Δίνεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ = 12cm$. Στις πλευρές $ΑΒ$ και $ΓΔ$ παίρνουμε τα σημεία $Μ$ και $Κ$ αντίστοιχα ώστε $ΒΜ = \frac{2}{3}ΑΒ$ και $ΔΚ = 2ΚΓ$. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $ΑΜΚΔ$ και $ΓΚΜΒ$ είναι ίσα.



Απόδειξη:
Έχουμε $ΔΚ + ΚΓ = ΔΓ$. Αλλά $ΔΚ = 2ΚΓ$. Άρα:

$$2ΚΓ + ΚΓ = ΔΓ \text{ ή } 3ΚΓ = ΔΓ \text{ ή } ΚΓ = \frac{1}{3}ΔΓ$$

Επίσης, $ΑΜ + ΜΒ = ΑΒ$. Αλλά $ΒΜ = \frac{2}{3}ΑΒ$. Άρα:

$$ΑΜ + \frac{2}{3}ΑΒ = ΑΒ \text{ ή } ΑΜ = ΑΒ - \frac{2}{3}ΑΒ \text{ ή } ΑΜ = \frac{1}{3}ΑΒ$$

Επειδή το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει $ΑΒ = ΔΓ$. Άρα:

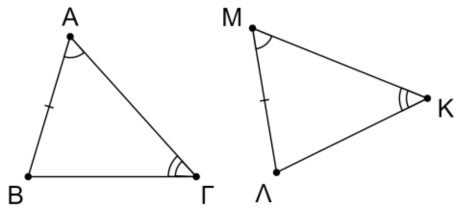
$$AM = K\Gamma \text{ και } BM = \Delta K$$

Επιπλέον, ισχύει $A\Delta = B\Gamma$. Άρα τα τετράπλευρα $AMK\Delta$ και ΓKMB έχουν ίσες τις πλευρές τους μία προς μία.

Ακόμα, $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$ ως ορθές γωνίες, ενώ $A\widehat{M}K = M\widehat{K}\Gamma$ ως εντός-εναλλάξ γωνίες των παράλληλων ευθειών AB και $\Delta\Gamma$, τεμνόμενες από την MK.

Άρα τα δύο τετράπλευρα είναι ίσα.

3. Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $M\Lambda K$ με $AB = \Lambda M$, $\hat{A} = \widehat{M}$, $\hat{\Gamma} = \widehat{K}$. Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα είναι ίσα.



Απάντηση: Είναι ίσα λόγω Γ-Π-Γ.

Αιτιολόγηση:

Γνωρίζουμε ότι τα τρίγωνα έχουν ίση τη μία πλευρά τους. Οι γωνίες $\hat{A}$, $\widehat{M}$ είναι προσκείμενες στις πλευρές αυτές, αλλά οι $\hat{\Gamma}$, $\widehat{K}$ δεν είναι.

Ωστόσο, αφού γνωρίζουμε τις δύο γωνίες κάθε τριγώνου, μπορούμε να βρούμε την τρίτη.

Για το τρίγωνο $AB\Gamma$, ισχύει:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° \text{ ή } \hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{\Gamma}$$

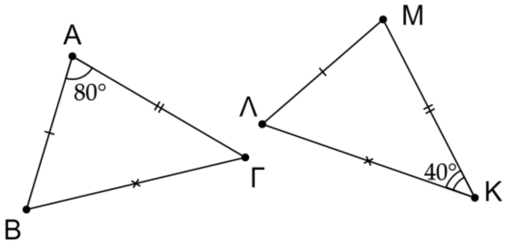
Για το τρίγωνο $M\Lambda K$, ισχύει:

$$\widehat{M} + \hat{\Lambda} + \widehat{K} = 180° \text{ ή } \hat{\Lambda} = 180° - \widehat{M} - \widehat{K}$$

Όμως αφού $\hat{A} = \widehat{M}$, $\hat{\Gamma} = \widehat{K}$, θα ισχύει ότι $\hat{B} = \hat{\Lambda}$.

Οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Lambda}$ είναι προσκείμενες στις ίσες πλευρές AB, ΛM, άρα εφαρμόζοντας το κριτήριο ισότητας τριγώνων Γ-Π-Γ συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $M\Lambda K$ είναι ίσα.

4. Δίνονται δύο ίσα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΜΛΚ$, με $ΑΒ = ΜΛ,\ ΒΓ = ΛΚ,\ ΑΓ = ΜΚ$, $\hat{A} = 80°,\ \hat{K} = 40°$. Να υπολογίσετε τα μέτρα όλων των γωνιών των δύο τριγώνων.



Απάντηση: $\hat{A} = \hat{M} = 80°,\ \hat{B} = \hat{Λ} = 60°,\ \hat{Γ} = \hat{K} = 40°$

Αιτιολόγηση:

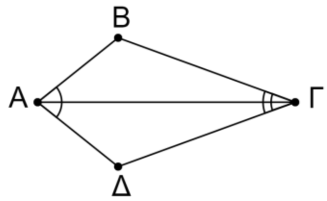
Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

Αφού $ΑΒ = ΜΛ$, ισχύει $\hat{Γ} = \hat{K} = 40°$.

Αφού $ΒΓ = ΚΛ$, ισχύει $\hat{A} = \hat{M} = 80°$.

Αφού $ΑΓ = ΜΚ$, ισχύει $\hat{B} = \hat{Λ} = 180° - 80° - 40° = 60°$.

5. Στο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ του παρακάτω σχήματος, η διαγώνιος $ΑΓ$ διχοτομεί τις γωνίες $Β\hat{Α}Δ$ και $Δ\hat{Γ}Β$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα.



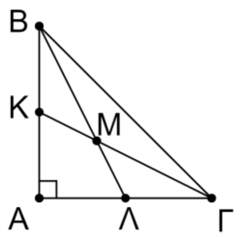
Απόδειξη:

Συγκρίνουμε τα δύο τρίγωνα:

- $ΑΓ$ κοινή πλευρά
- $Β\hat{Α}Γ = Δ\hat{Α}Γ$ (αφού η $ΑΓ$ είναι διχοτόμος)
- $Β\hat{Γ}Α = Δ\hat{Γ}Α$ (αφού η $ΑΓ$ είναι διχοτόμος)

Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες ίσες. Εφαρμόζοντας το κριτήριο ισότητας τριγώνων Γ-Π-Γ συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα.

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Α}$ ορθή και $\hat{Β} = 45°$. Φέρουμε τις διαμέσους $ΒΛ$ και $ΓΚ$.
   α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΒΑΛ$ και $ΓΑΚ$ είναι ίσα.
   β. Αν $Μ$ είναι το σημείο τομής των διαμέσων, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΒΜΓ$ είναι ισοσκελές.



Απόδειξη:

α.

Αφού $\hat{Β} = 45°$, ισχύει ότι $\hat{Γ} = 45°$, δηλαδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές ($ΑΒ = ΑΓ$).

Επιπλέον, τα σημεία $Κ$ και $Λ$ είναι μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, άρα:

$$ΑΚ = ΒΚ = \frac{ΑΒ}{2} \text{ και } ΑΛ = ΓΛ = \frac{ΑΓ}{2}$$

και $ΑΚ = ΑΛ$.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΒΑΛ$ και $ΓΑΚ$:

- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΑΚ = ΑΛ$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο ισότητας τριγώνων Γ-Π-Γ συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα $ΒΑΛ$ και $ΓΑΚ$ είναι ίσα.

β.

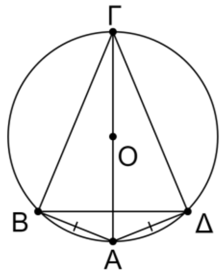
Από την ισότητα των τριγώνων $ΒΑΛ$ και $ΓΑΚ$ συμπεραίνουμε ότι $Α\hat{Β}Λ = Κ\hat{Γ}Α$.

Όμως $Α\hat{Β}Γ = Β\hat{Γ}Α$. Άρα:

$$Μ\hat{Β}Γ = Β\hat{Γ}Μ$$

και το τρίγωνο $ΒΜΓ$ είναι ισοσκελές.

7. Στο παρακάτω σχήμα, η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου και οι χορδές AB και $A\Delta$ είναι ίσες. Να αποδείξετε ότι:
   α. τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα,
   β. η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του $B\Delta$.



Απόδειξη:

α.

Οι εγγεγραμμένες γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$ βαίνουν σε ημικύκλια, άρα είναι ορθές.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$:

- $A\Gamma$ κοινή
- $AB = A\Delta$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων Π-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα.

β.

Παρατηρούμε ότι $AB = A\Delta, \Gamma B = \Gamma\Delta, OB = O\Delta$, άρα γνωρίζουμε τρία σημεία της ευθείας $A\Gamma$ που ισαπέχουν από τα B και Δ. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχουν από τα άκρα του. Άρα θα πρέπει η ευθεία $A\Gamma$ να είναι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Delta$.

Ερωτήσεις Κατανόησης (προς εξάσκηση)

1. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:
   α. Ένα σκαληνό τρίγωνο δεν μπορεί να είναι ίσο με ένα ισοσκελές τρίγωνο.
   β. Ένα ισοσκελές τρίγωνο είναι δυνατόν να είναι ίσο με ένα ορθογώνιο τρίγωνο.
   γ. Οι περίμετροι ίσων τριγώνων είναι ίσες.
   δ. Αν οι περίμετροι δύο τριγώνων είναι ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
   ε. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
   στ. Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και δύο αντίστοιχες γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
   ζ. Δύο ισοσκελή τρίγωνα με ίσες βάσεις είναι ίσα.
   η. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία κάθετη πλευρά ίση και η μία από τις οξείες γωνίες τους είναι 45°, τότε είναι ίσα.
   θ. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντοτε ίσα.
   ι. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στην επόμενη πρόταση:
   Αν τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΚΛΜ$ είναι ίσα και ισχύει ότι $\hat{Γ} = \hat{M}$, τότε σίγουρα ισχύει ότι:
   α. $ΒΓ = ΛΜ$
   β. $ΑΓ = ΚΜ$
   γ. $ΑΒ = ΚΛ$
   δ. Τίποτε από τα παραπάνω

3. Δύο τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ έχουν $ΑΒ = ΔΖ$, $Β\hat{Α}Γ = Ε\hat{Δ}Ζ$ και $Β\hat{Γ}Α = Ζ\hat{Ε}Δ$. Είναι ίσα;

4. Να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν ώστε τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ να είναι ίσα:

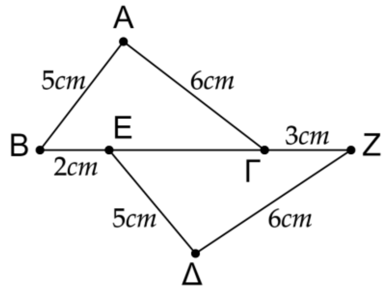
   α. $ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ$ και …

   β. $\hat{Α} = \hat{Δ}, \hat{Β} = \hat{Ε}$ και …

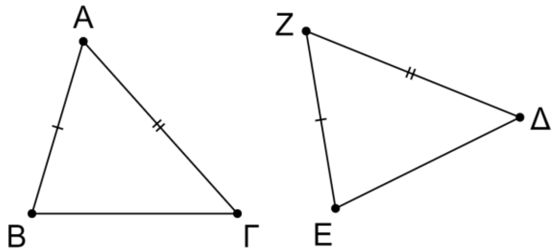
   γ. $\hat{Γ} = \hat{Ζ}, ΑΓ = ΔΖ$ και …

   δ. $\hat{Β} = \hat{Ε}$, … και …

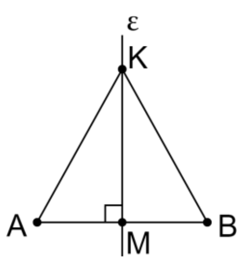
5. Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ του παρακάτω σχήματος είναι ίσα. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



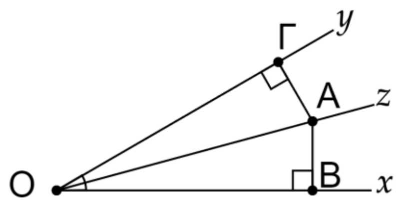
6. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΖΔΕ$ του παρακάτω σχήματος είναι ίσα και ισχύουν $ΑΒ = ΖΔ$ και $ΑΓ = ΖΕ$. Να βρείτε τα αντίστοιχα ίσα κύρια στοιχεία τους.



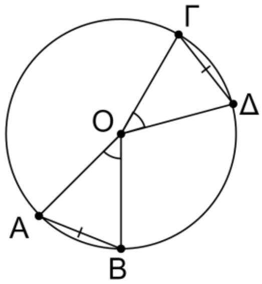
7. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.



8. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μίας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές τις γωνίας.



9. Να αποδείξετε ότι σε ίσες χορδές ενός κύκλου αντιστοιχούν ίσα τόξα.



10. Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος AB. Αν Γ και Δ είναι δύο διαφορετικά σημεία της μεσοκαθέτου, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ είναι ίσα.