Κεφάλαιο 1 : Συστήματα

1.1. Γραμμικά Συστήματα

Λύσεις

Άσκηση 1 – Λύση

i. Το Σύστημα αποτελείται από δύο ευθείες για τις οποίες θα βρούμε τη σχετική τους θέση στο επίπεδο. Επιλύουμε το Σύστημα με τις τρείς μεθόδους ως εξής:

a) Με τη μέθοδο της αντικατάστασης $(\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \tau\eta\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\eta\ y)$ παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\left.\begin{aligned}2x+y=8\\3x-2y=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}y=8-2x\\3x-2y=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}y=8-2x\\3x-2(8-2x)=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}y=8-2x\\3x-16+4x=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}y=8-2x\\7x=17\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}y=8-2x\\x=\frac{17}{7}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}y=8-2\cdot\frac{17}{7}\\x=\frac{17}{7}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}y=\frac{22}{7}\\x=\frac{17}{7}\end{aligned}\right\}$$

Το Σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=\left(\frac{17}{7},\frac{22}{7}\right)$.

b) Πολλαπλασιάζοντας στο Σύστημα την 1η εξίσωση με τον συντελεστή 2, διατηρώντας ανέπαφη την 2η εξίσωση, δημιουργούμε ισοδύναμο Σύστημα με αντίθετους συντελεστές στην μεταβλητή y. Απαλοίφουμε την μεταβλητή y προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις ως εξής:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=8 \\ 3x-2y=1 \end{array}\right\} => \quad \left.\begin{array}{r} (2)\cdot 2x+y=8 \\ 3x-2y=1 \end{array}\right\} => \left.\begin{array}{r} 4x+2y=16 \\ 3x-2y=1 \end{array}\right\}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$7x+0y=17 \quad \text{άρα} \quad x=\frac{17}{7}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή της μεταβλητής x σε μία από τις δύο εξισώσεις και παίρνουμε την τιμή της μεταβλητής y. Οπότε έχουμε:

$$2\cdot\frac{17}{7}+y=8$$
$$\frac{34}{7}+y=8$$
$$34+7y=56$$
$$7y=22 \quad \text{άρα} \quad y=\frac{22}{7}$$

Το Σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=\left(\frac{17}{7},\frac{22}{7}\right)$.

c) Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος και την υπολογίζουμε ως εξής:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=2(-2)-3\cdot 1=-7\neq 0$$ {Το Σύστημα έχει μοναδική λύση}

Υπολογίζουμε τις D_x, D_y και παίρνουμε:

$$D_x=\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=8\cdot(-2)-1\cdot 1=-17$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot 1-8\cdot 3=-22$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{17}{7},\frac{22}{7}\right)$

ii. Το Σύστημα αποτελείται από δύο ευθείες για τις οποίες θα βρούμε τη σχετική τους θέση στο επίπεδο. Επιλύουμε το Σύστημα με τις τρείς μεθόδους ως εξής:

a) Με τη μέθοδο της αντικατάστασης $(\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \tau\eta\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\eta\ x)$ παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\left.\begin{matrix}6x = y+2\\ x-2y=3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}6(2y+3) = y+2\\ x=2y+3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}12y+18 = y+2\\ x=2y+3\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}12y-y = -18+2\\ x=2y+3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}11y = -16\\ x=2y+3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}y = \frac{-16}{11}\\ x=2y+3\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}y = \frac{-16}{11}\\ x=2\cdot\left(\frac{-16}{11}\right)+3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}y = \frac{-16}{11}\\ x=\frac{1}{11}\end{matrix}\right\}$$

Το Σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x, y) = \left(\frac{1}{11}, \frac{-16}{11}\right)$.

b) Πολλαπλασιάζοντας στο Σύστημα την 1η εξίσωση με τον συντελεστή (-2), διατηρώντας ανέπαφη την 2η εξίσωση, δημιουργούμε ισοδύναμο Σύστημα με αντίθετους συντελεστές στην μεταβλητή y. Απαλοίφουμε την μεταβλητή y προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις ως εξής:

$$\left.\begin{matrix}6x - y = 2\\ x-2y=3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}(-2)\cdot 6x - y = 2\\ x-2y=3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}-12x+2y = -4\\ x-2y=3\end{matrix}\right\}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$-11x + 0y = -1 \quad \text{άρα} \quad x = \frac{-1}{-11} = \frac{1}{11}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή της μεταβλητής x σε μία από τις δύο εξισώσεις και παίρνουμε την τιμή της μεταβλητής y. Οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{11} - 2y = 3$$
$$1 - 22y = 33$$
$$22y = -32 \quad \text{άρα} \quad y = \frac{-32}{22} = \frac{-16}{11}$$

Το Σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x, y) = \left(\frac{1}{11}, \frac{-16}{11}\right)$.

c) Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος και την υπολογίζουμε ως εξής:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) = -11 \neq 0$$ {Το Σύστημα έχει μοναδική λύση}

Υπολογίζουμε τις D_x, D_y και παίρνουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = -1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 16$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{1}{11}, \frac{-16}{11}\right)$.

Άσκηση 2 – Λύση

i. Το Σύστημα αποτελείται από δύο ευθείες για τις οποίες θα βρούμε τη σχετική τους θέση στο επίπεδο. Επιλύουμε το Σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών. Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών του Συστήματος ως εξής:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ \frac{1}{4} & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) + 4 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Υπολογίζουμε τις D_x, D_yκαι παίρνουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-4) = 4$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Το Σύστημα είναι αδύνατο διότι $D = 0, D_x \neq 0, D_y \neq 0$.

ii. Το Σύστημα αποτελείται από δύο ευθείες για τις οποίες θα βρούμε τη σχετική τους θέση στο επίπεδο. Επιλύουμε το Σύστημα αφού αρχικά απαλείψουμε τους παρανομαστές της 2ης εξίσωσης. Παίρνουμε το ισοδύναμο Σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 4x - y = 2 \\ 4x - y = 2 \end{aligned}\right\}$$

Οι ευθείες που παριστά το Σύστημα συμπίπτουν οπότε θα είναι αόριστο με άπειρες λύσεις που θα δίνονται από το ζεύγος $(x, y) = (x, 4x - 2)$.

Άσκηση 3 – Λύση

i. Παρατηρούμε ότι το Σύστημα των δύο ευθειών έχει ήδη την μεταβλητή y με αντίθετους συντελεστές. Οπότε προσθέτουμε απευθείας τις δύο εξισώσεις και παίρνουμε:

$$2x + 0y = 10 \ \text{ άρα } \ 2x = 10\text{ , οπότε } \ x = \frac{10}{2} = 5$$

Με αντικατάσταση της τιμής της μεταβλητής $x = 5$ σε μία από τις δύο εξισώσεις υπολογίζουμε και την τιμή της μεταβλητής y, ως εξής:

$$5 - y = 8 \ \text{ άρα } \ y = -3$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x, y) = (5, -3)$.

ii. Για να λύσουμε γραφικά το Σύστημα πρέπει να χαράξουμε σε κοινό Σύστημα Συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών.
Το σημείο τομής τους (αν αυτό υπάρχει) θα είναι το ζεύγος (x, y) που αντιστοιχεί στη μοναδική λύση του Συστήματος.
Δημιουργούμε πίνακα τιμών για κάθε μια ευθεία με τουλάχιστον δύο σταθερά σημεία ως εξής:

- Για την ευθεία (ε_1): $x - y = 8$

x	4	5
y	-4	-3

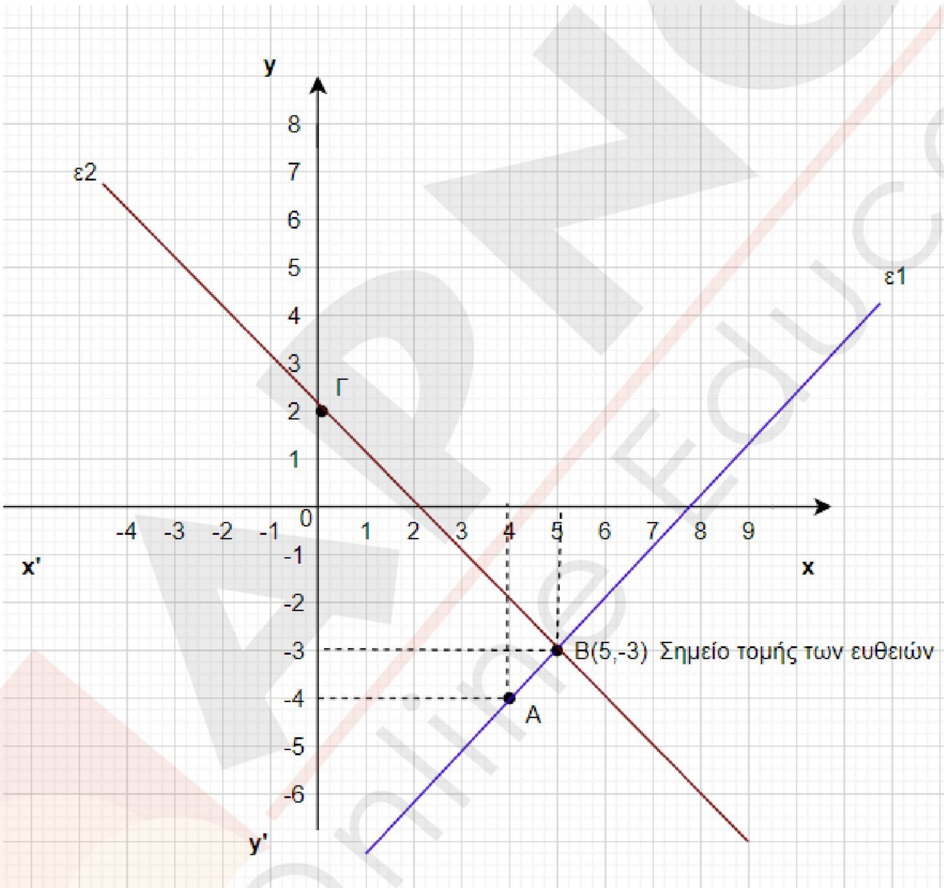
Τα σημεία $A(4, -4)$ $και$ $B(5, -3)$

- Για την ευθεία (ε_2): $x + y = 2$

x	0	5
y	2	-3

Τα σημεία $\Gamma(0,2)$ $και$ $B(5,-3)$

Η κοινή γραφική παράσταση έχει τη μορφή:



Η λύση του Συστήματος είναι το σημείο τομής των ευθειών, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (5, -3)$

Άσκηση 4 – Λύση

i. Θα λύσουμε το Σύστημα των δύο ευθειών με τη μέθοδο των οριζουσών. Σχηματίζουμε και υπολογίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών ως εξής:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 9 \neq 0$$ {Το Σύστημα έχει μοναδική λύση}

Υπολογίζουμε τις D_x, D_y και παίρνουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 11 \cdot (-1) = 9$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 4 \cdot 11 - 1 \cdot (-1) = 45$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = (1,5)$.

ii. Για να λύσουμε γραφικά το Σύστημα πρέπει να χαράξουμε σε κοινό Σύστημα Συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών. Το σημείο τομής τους (αν αυτό υπάρχει) θα είναι το ζεύγος (x, y) που αντιστοιχεί στη μοναδική λύση του Συστήματος. Δημιουργούμε πίνακα τιμών για κάθε μια ευθεία με τουλάχιστον δύο σταθερά σημεία ως εξής:

- Για την ευθεία (ε_1): $4x - y = -1$

x	0	1
y	1	5

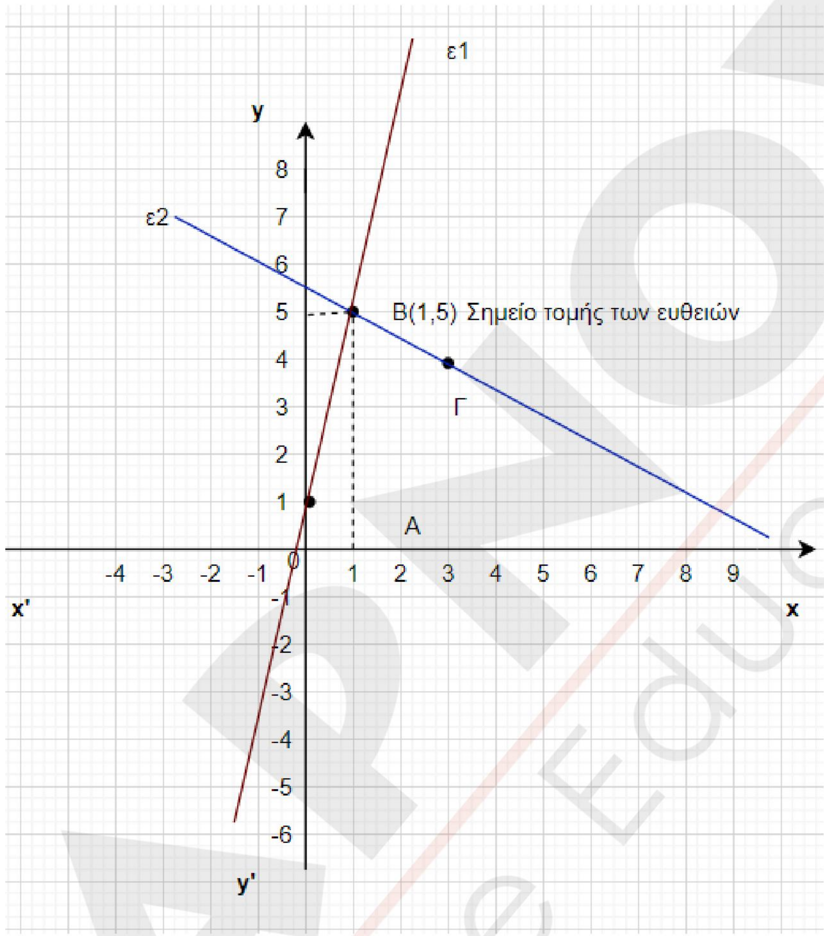
Τα σημεία $A(0,1)$ $και$ $B(1,5)$

- Για την ευθεία (ε_2): $x + 2y = 11$

x	1	3
y	5	4

Τα σημεία $\Gamma(3,4)$ $και$ $B(1,5)$

Η κοινή γραφική παράσταση έχει τη μορφή:



Η λύση του Συστήματος είναι το σημείο τομής των ευθειών, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (1,5)$

Άσκηση 5 – Λύση

Απαλοίφουμε τους παρανομαστές της 1ης εξίσωσης και παίρνουμε το ισοδύναμο Σύστημα :

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y=6 \\ x+y=7 \end{array}\right\}$$

i. Θα λύσουμε το Σύστημα των δύο ευθειών με τη μέθοδο των ορίζουσών. Σχηματίζουμε και υπολογίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών ως εξής:

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot 1-1\cdot(-2)=5\neq 0$$ {Το Σύστημα έχει μοναδική λύση}

Υπολογίζουμε τις D_x, D_y και παίρνουμε:

$$D_x=\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}=6\cdot 1-7\cdot(-2)=20$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}=3\cdot 7-6\cdot 1=15$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=(4,3)$.

ii. Για να λύσουμε γραφικά το Σύστημα πρέπει να χαράξουμε σε κοινό Σύστημα Συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών. Το σημείο τομής τους (αν αυτό υπάρχει) θα είναι το ζεύγος (x,y) που αντιστοιχεί στη μοναδική λύση του Συστήματος. Δημιουργούμε πίνακα τιμών για κάθε μια ευθεία με τουλάχιστον δύο σταθερά σημεία ως εξής:

- Για την ευθεία (ε_1): $3x-2y=6$

x	0	4
y	-3	3

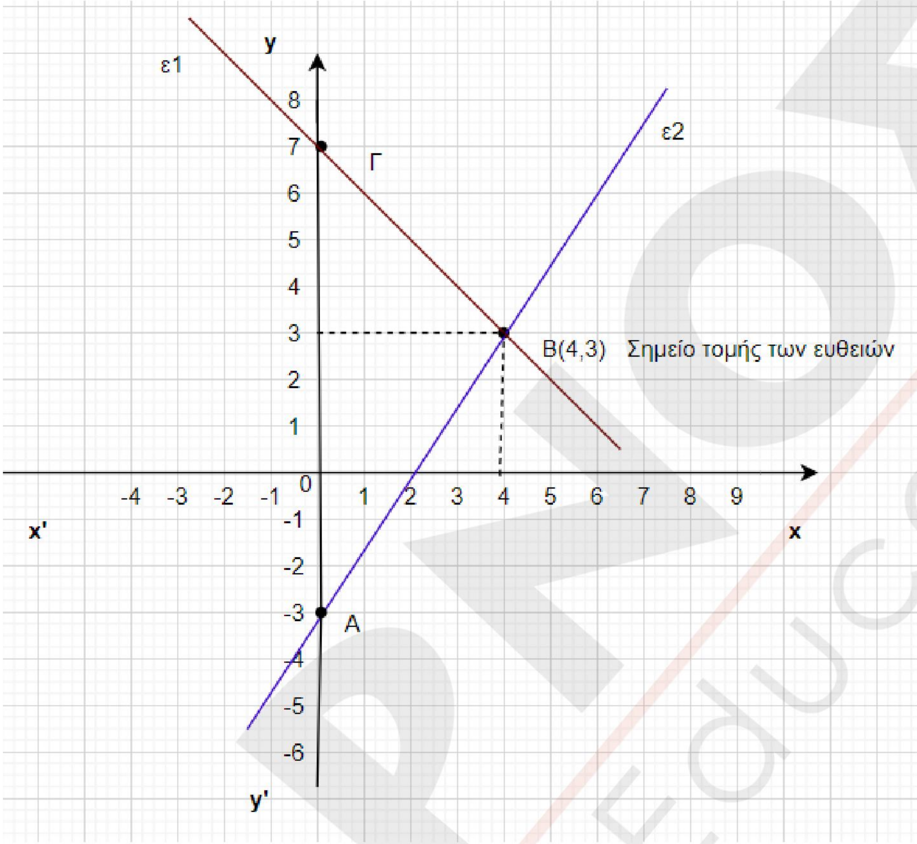
Τα σημεία $A(0,-3)$ $και$ $B(4,3)$

- Για την ευθεία (ε_2): $x+y=7$

x	0	4
y	7	3

Τα σημεία $\Gamma(0,7)$ $και$ $B(4,3)$

Η κοινή γραφική παράσταση έχει τη μορφή:



Η λύση του Συστήματος είναι το σημείο τομής των ευθειών, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (4,3)$

Άσκηση 6 – Λύση

i. Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων και υπολογίζουμε ως εξής:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -9 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-6) - 2 \cdot (-9) = -18 + 18 = 0$$

Το Σύστημα θα είναι αόριστο ή αδύνατο. Υπολογίζουμε και την ορίζουσα D_x και έχουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -6 \cdot 10 - 2 \cdot 5 = -60 - 10 = -70 \neq 0$$

Το Σύστημα είναι αδύνατο και οι εξισώσεις που το αποτελούν είναι ευθείες παράλληλες στο επίπεδο.

ii. Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων και υπολογίζουμε ως εξής:

$$D=\begin{vmatrix}6 & -7\\ 8 & 11\end{vmatrix}=6\cdot 11-8\cdot(-7)=66+56=122\neq 0$$

Το Σύστημα θα έχει μοναδική λύση.

iii. Παρατηρούμε ότι αν διαιρέσουμε την $2^η$ εξίσωση του συστήματος με τον αριθμό 3, παίρνουμε την $1^η$ εξίσωση. Οι ευθείες που αποτελούν το Σύστημα συμπίπτουν οπότε το Σύστημα είναι αόριστο.

Άσκηση 7 – Λύση

Έστω x ο αριθμός των χαρτονομισμάτων με αξία 20€ και y ο αριθμός των χαρτονομισμάτων με αξία 50€ αντίστοιχα. Από τα δεδομένα του προβλήματος σχηματίζουμε τις εξής σχέσεις:

- Το πλήθος των χαρτονομισμάτων είναι 10 άρα: $x+y=10$
- Το συνολικό ποσό είναι 320€ άρα: $20x+50y=320$ ή $απλοποιώντας$ $2x+5y=32$

Λύνουμε το Σύστημα $\left.\begin{aligned}2x+5y=32\\ x+y=10\end{aligned}\right\}$ με τη μέθοδο των οριζουσών. Υπολογίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών και υπολογίζουμε ως εξής:

$$D=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\cdot 1-5\cdot 1=-3$$ {Το Σύστημα έχει μοναδική λύση}

Υπολογίζουμε τις D_x, D_y και παίρνουμε:

$$D_x=\begin{vmatrix}32 & 5\\ 10 & 1\end{vmatrix}=32\cdot 1-5\cdot 10=-18$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2 & 32\\ 1 & 10\end{vmatrix}=2\cdot 10-32\cdot 1=-12$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=(6,4)$.
Διαθέτει 6 χαρτονομίσματα αξίας 20€ και 4 χαρτονομίσματα αξίας 50€.

Άσκηση 8 – Λύση

Έστω x ο όγκος σε mL από το πρώτο βαρέλι και y ο όγκος σε mL από το δεύτερο. Το 1ο βαρέλι έχει περιεκτικότητα 14% σε αλκοόλ, δηλαδή $14\ ml$ αλκοόλ ανα $100\ ml$. Οπότε στα $x\ mL$ θα έχουμε: $\frac{14x}{100} = 0{,}14x\ mL$ αλκοόλ.

Ομοίως από το 2ο βαρέλι το αλκοόλ θα είναι: $\frac{11{,}5y}{100} = 0{,}115y\ mL$ αλκοόλ.

Συνολικά θα έχουμε: $0{,}14x + 0{,}115y\ mL$ αλκοόλ στην τελική ανάμειξη.

Για να προκύψει διάλυμα με περιεκτικότητα 12% θα πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$$(x + y)12 = 100(0{,}14x + 0{,}115y\ )$$

$$12x + 12y = 14x + 11{,}5y$$

$$2x = 0{,}5y$$

$$4x = y$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει την αναλογία των όγκων της ανάμειξης.

Άσκηση 9 – Λύση

i. Θα επιλύσουμε το Σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών. Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών και υπολογίζουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -(\sqrt{7}-1) \\ \sqrt{7}+1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 + (\sqrt{7}-1)\cdot(\sqrt{7}+1) = 6 + (7-1) = 12$$

Υπολογίζουμε τις D_x, D_y και παίρνουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -(\sqrt{7}-1) \\ \sqrt{7}+1 & 1 \end{vmatrix} = D = 12$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ \sqrt{7}+1 & \sqrt{7}+1 \end{vmatrix} = 6\cdot(\sqrt{7}+1) - 6\cdot(\sqrt{7}+1) = 0$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = (1{,}0)$.

ii. Θα επιλύσουμε το Σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών. Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών και υπολογίζουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - \left(\sqrt{3}-1\right) \cdot \left(\sqrt{3}+1\right) = 2 - (3-1) = 0$$

Υπολογίζουμε τις D_x, D_y και παίρνουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 & 1 \end{vmatrix} = D = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(\sqrt{3}+1\right) - 2 \cdot \left(\sqrt{3}+1\right) = 0$$

Το Σύστημα είναι αόριστο αφού ισχύει: $D = D_x = D_y = 0$.

Άσκηση 10 – Λύση

Αποδεικνύουμε το ευθύ:

Έστω ότι το Σύστημα έχει μοναδική λύση. Τότε θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι διάφορη του μηδέν. Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών και υπολογίζουμε:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha} \cdot \beta - \frac{1}{\beta} \cdot \alpha = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta}$$

Οπότε θα πρέπει να ισχύει $\boldsymbol{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta} \neq 0}$ δηλαδή $\boldsymbol{\beta^2 - \alpha^2 \neq 0}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\beta^2 - \alpha^2 \neq 0$$

$$\beta^2 \neq \alpha^2$$

$$\sqrt{\beta^2} \neq \sqrt{\alpha^2}$$

$$|\beta| \neq |\alpha|$$

Αποδεικνύουμε το αντίστροφο:

Έστω ότι ισχύει $|\beta| \neq |\alpha|$ τότε θα ισχύει και $\beta^2 \neq \alpha^2$. Από τον υπολογισμό της ορίζουσας καταλήγουμε $D = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha} \cdot \beta - \frac{1}{\beta} \cdot \alpha = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta}$ οπότε $D \neq 0$ και το Σύστημα έχει μοναδική λύση.

Για να βρούμε το κοινό σημείο υπολογίζουμε τις D_x, D_yκαι παίρνουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\beta} \\ 1 & \beta \end{vmatrix} = 1 \cdot \beta - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta^2 - 1}{\beta}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha} \cdot 1 - \alpha = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha}$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{\frac{\beta^2 - 1}{\beta}}{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta}}, \frac{\frac{1 - \alpha^2}{\alpha}}{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta}}\right) = \left(\frac{\alpha(\beta^2 - 1)}{\beta^2 - \alpha^2}, \frac{\beta(1 - \alpha^2)}{\beta^2 - \alpha^2}\right)$$

Άσκηση 11 – Λύση

Σε κάθε παραμετρικό Σύστημα σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών και εξετάζουμε για ποιες τιμές της παραμέτρου αυτή μηδενίζεται.
Για τις τιμές αυτές εξετάζουμε και τις τιμές που παίρνουν οι ορίζουσες D_x και D_y και συμπεραίνουμε αν το Σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο. Για τις υπόλοιπες τιμές της παραμέτρου για τις οποίες ισχύει $D \neq 0$, θα έχουμε μοναδική (παραμετρική) λύση την οποιά και θα υπολογίζουμε.
Για το δεδομένο Σύστημα έχουμε:

- $D = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha \cdot 1 - 1 = \alpha - 1$
  Η ορίζουσα των συντελεστών μηδενίζεται όταν $\alpha = 1$.

- Υπολογίζουμε τις παραμετρικές τιμές των οριζουσών D_x $και$ D_y
  $D_x = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \alpha \cdot 1 - 1 \cdot 2 = \alpha - 2$

  $D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \alpha \cdot 2 - \alpha \cdot 1 = 2\alpha - \alpha = \alpha$

1η περίπτωση: Αν $\alpha = 1$ τότε $D = 0, D_x = -1$ $και$ $D_y = 1$ οπότε το Σύστημα είναι αδύνατο.

2η περίπτωση: Αν $\alpha \neq 1$ τότε $D \neq 0$ και το Σύστημα έχει μοναδική λύση που θα δίνεται από $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = (\frac{\alpha-2}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1})$ για κάθε α $\in R - \{1\}$.

Άσκηση 12 – Λύση

Θυμίζουμε από την Γεωμετρία Α' Λυκείου ότι τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου και προς αυτόν, είναι μεταξύ τους ίσα. Οπότε ισχύουν οι σχέσεις:

- $A\Gamma + y = AB + x$ δηλαδή $\boldsymbol{\beta + y = \gamma + x}$
- $B\Gamma = x + y$ δηλαδή $\boldsymbol{x + y = \alpha}$

Θεωρώντας γνωστές τις πλευρές του Τριγώνου $AB\Gamma$ δημιουργούμε, με αγνώστους τα τμήματα x $και$ y, το Σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x - y = \beta - \gamma \\ x + y = \alpha \end{aligned}\right\}$$

Θα επιλέξουμε να προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις αφού στη μεταβλητή y υπάρχουν ήδη αντίθετοι συντελεστές. Παίρνουμε την εξίσωση ως προς την μεταβλητή x:

$$2x + 0y = \alpha + \beta - \gamma \ \text{ άρα: } \ x = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$$

Υπολογίζουμε και την τιμή της μεταβλητής y από την 2η εξίσωση του συστήματος αντικαθιστώντας $x = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$ και παίρνουμε:

$$y = \alpha - \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} = \frac{2\alpha - \alpha - \beta + \gamma}{2} = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = \left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}, \frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\right)$.

Άσκηση 13 – Λύση

a) Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών και υπολογίζουμε την παραμετρική τιμή της:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 8 \\ \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\cdot(\lambda+3) - 8\lambda = \lambda^2 + 4\lambda + 3 - 8\lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

Λύνουμε την εξίσωση $\boldsymbol{D = 0}$:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \ \text{ άρα } \ (\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

Οπότε $\lambda = 1$ ή $\lambda = 3$.

Υπολογίζουμε τις παραμετρικές τιμές των οριζουσών D_x και D_y:

$$D_x = \begin{vmatrix} 4\lambda & 8 \\ 3\lambda-1 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 4\lambda\cdot(\lambda+3) - 8\cdot(3\lambda-1) = 4\lambda^2 + 12\lambda - 24\lambda + 8 =$$

$$= 4\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 4(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 4\lambda \\ \lambda & 3\lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\cdot(3\lambda-1) - 4\lambda^2 = 3\lambda^2 - \lambda + 3\lambda - 1 - 4\lambda^2 =$$

$$= -\lambda^2 + 2\lambda - 1 = -(\lambda-1)^2$$

1η περίπτωση: Αν $\lambda = 1$ τότε $D = 0, D_x = 0$ και $D_y = 0$ οπότε το Σύστημα είναι αόριστο και λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 8y = 4 \\ x + 4y = 2 \end{array}\right\}$$

το οποίο αποτελείται από συμπίπτουσες ευθείες και ειδικά από την ευθεία $x + 4y = 2$.

Οι γενικές του λύσεις θα δίνονται από το ζεύγος $(x,y) = \left(x, \frac{2-x}{4}\right)$.

2η περίπτωση: Αν $\lambda = 3$ τότε $D = 0, D_x = 8$ και $D_y = -4$ οπότε το Σύστημα είναι αδύνατο.

3η περίπτωση: Για κάθε $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 3$ το Σύστημα θα έχει μοναδική λύση που θα δίνεται από:

$$(x,y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{4(\lambda-2)}{\lambda-3}, \frac{-(\lambda-1)}{\lambda-3}\right) \text{ για κάθε } \lambda \in R - \{1,3\}.$$

b) Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών και υπολογίζουμε την παραμετρική τιμή της:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & \lambda \\ 2\lambda & 18 \end{vmatrix} = 4 \cdot 18 - 2\lambda \cdot \lambda = 72 - 2\lambda^2 = 2(6-\lambda)(6+\lambda)$$

Λύνουμε την εξίσωση $\boldsymbol{D = 0}$:

$$2(6-\lambda)(6+\lambda) = 0 \quad \text{άρα } \lambda = 6 \text{ ή } \lambda = -6$$

Υπολογίζουμε τις παραμετρικές τιμές των οριζουσών D_x $και$ D_y:

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & \lambda \\ -27 & 18 \end{vmatrix} = 9 \cdot 18 + 27\lambda = 27(\lambda + 6)$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 2\lambda & -27 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-27) - 18\lambda = -18(\lambda + 6)$$

1η περίπτωση: Αν $\lambda = -6$ τότε $D = 0, D_x = 0 \; και \; D_y = 0$ οπότε το Σύστημα είναι αόριστο και λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\left.\begin{array}{r} 4x - 6y = 9 \\ -12x + 18y = -27 \end{array}\right\}$$

το οποίο αποτελείται από συμπίπτουσες ευθείες και ειδικά από την ευθεία $4x - 6y = 9$.

Οι γενικές του λύσεις θα δίνονται από το ζεύγος $(x, y) = \left(x, \frac{4x-9}{6}\right)$.

2η περίπτωση: Αν $\lambda = 6$ τότε $D = 0$, $D_x = 324 \; και \; D_y = -216$ οπότε το Σύστημα είναι αδύνατο.

3η περίπτωση: Για κάθε $\lambda \neq 6 \; και \; \lambda \neq -6$ το Σύστημα θα έχει μοναδική λύση που θα δίνεται από τους τύπους:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{27}{2(6-\lambda)}, \frac{-9}{6-\lambda}\right) \text{ για κάθε } \lambda \in R - \{-6, 6\}$$

Άσκηση 14 – Λύση

Αρχικά θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες $D_x \; και \; D_y$ με τις παραμετρικές τιμές τους:

- $D = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 \cdot \alpha - \alpha = \alpha^3 - \alpha = \alpha(\alpha-1)(\alpha+1)$

- $D_x = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} = 1 \cdot \alpha - \alpha^2 = \alpha(1-\alpha)$

- $D_y = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 \cdot \alpha - 1 = \alpha^3 - 1 = (\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)$

α) Για να έχει το Σύστημα μοναδική λύση πρέπει να ισχύει $D \neq 0$ ή $\alpha(\alpha-1)(\alpha+1) \neq 0$ δηλαδή για τις τιμές: $\alpha \neq 0 \; και \; \alpha \neq 1 \; και \; \alpha \neq -1$

β) Θα πρέπει να βρούμε τις παραμετρικές λύσεις του Συστήματος για $\alpha \neq 0 \; και \; \alpha \neq 1 \; και$

$\alpha \neq -1$:

$$x_o = \frac{D_x}{D} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)} = \frac{-1}{\alpha+1}$$

$$y_o = \frac{D_y}{D} = \frac{(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)} = \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)}$$

Για την λύση αυτή πρέπει να ισχύει:

$2x_o + 3y_o = 3$

$\frac{-2}{\alpha+1} + \frac{3(\alpha^2+\alpha+1)}{\alpha(\alpha+1)} = 3$

$\frac{-2\alpha}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{3\alpha^2+3\alpha+3}{\alpha(\alpha+1)} = 3$

$\frac{3\alpha^2+\alpha+3}{\alpha(\alpha+1)} = 3$

$3\alpha^2 + \alpha + 3 = 3\alpha^2 + 3\alpha$

$2\alpha = 3$ άρα $\alpha = \frac{3}{2}$

γ) Για να είναι το Σύστημα αδύνατο θα πρέπει να ισχύει $D = 0$ και τουλάχιστον μία από τις D_x $και$ D_y να είναι διάφορη του μηδέν. Οπότε το Σύστημα είναι αδύνατο για $\alpha = 0$ ή $\alpha = -1$ διότι έχουμε:

- Για $\alpha = 0$: $D = 0, D_x = 0$ και $D_y = -1$
- Για $\alpha = -1$: $D = 0, D_x = -2$ και $D_y = -2$

***Για $\alpha = 1$ το Σύστημα είναι αόριστο γιατί ισχύει: $D = 0, D_x = 0$ και $D_y = 0$**

Άσκηση 15 – Λύση

Αρχικά θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες D_x $και$ D_y με τις παραμετρικές τιμές τους.

- $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & -\beta^2 \end{vmatrix} = -\beta^2\alpha - \alpha^2\beta = -\alpha\beta(\beta+\alpha) \neq 0$ αφού οι αριθμοί α $και$ β είναι

  ομόσημοι

- $D_x = \begin{vmatrix} 2\alpha & \beta \\ \alpha^2+\beta^2 & -\beta^2 \end{vmatrix} = -2\alpha\beta^2 - \beta(\alpha^2+\beta^2) = -2\alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 - \beta^3 =$

  $-\beta(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = -\beta(\alpha+\beta)^2$

- $D_y = \begin{vmatrix} \alpha & 2\alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2+\beta^2 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha^2+\beta^2) - 2\alpha^3 = \alpha(\alpha^2+\beta^2-2\alpha^2) = \alpha(\beta^2-\alpha^2) =$

  $\alpha(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)$

Θα βρούμε τις παραμετρικές λύσεις του Συστήματος από τους τύπους:

$$x_o = \frac{D_x}{D} = \frac{-\beta(\alpha+\beta)^2}{-\alpha\beta(\beta+\alpha)} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$$

$$y_o = \frac{D_y}{D} = \frac{\alpha(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)}{-\alpha\beta(\beta+\alpha)} = \frac{\alpha-\beta}{\beta}$$

Για τις λύσεις αυτές πρέπει να ισχύει:

$x_o + y_o \geq 2$

$\frac{\alpha+\beta}{\alpha} + \frac{\alpha-\beta}{\beta} \geq 2$ {Πολλαπλασιάζουμε τους όρους με $\alpha\beta > 0$}

$\alpha\beta\frac{(\alpha+\beta)}{\alpha} + \alpha\beta\frac{(\alpha-\beta)}{\beta} \geq 2\alpha\beta$

$\beta(\alpha+\beta) + \alpha(\alpha-\beta) - 2\alpha\beta \geq 0$

$\alpha\beta + \beta^2 - \alpha\beta + \alpha^2 - 2\alpha\beta \geq 0$

$\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta \geq 0$

$(\alpha-\beta)^2 \geq 0$

η οποία ισχύει για κάθε $\alpha, \beta \in R$.

Άσκηση 16 – Λύση

Αρχικά θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 3\lambda-2 & -(\lambda-2) \end{vmatrix} = -(\lambda+1)\cdot(\lambda-2) + 3\lambda - 2 = -\lambda^2 + \lambda + 2 + 3\lambda - 2 = 4\lambda - \lambda^2 =$$

$$= \lambda(4-\lambda)$$

Η ορίζουσα των συντελεστών μηδενίζεται για $\lambda = 0$ ή $\lambda = 4$. Διάκρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda = 0$ το Σύστημα γίνεται: $\left.\begin{aligned} x - y = -1 \\ -2x + 2y = 6 \end{aligned}\right\}$

  Υπολογίζουμε την ορίζουσα $D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4 \neq 0$ και το Σύστημα είναι αδύνατο.

- Αν $\lambda = 4$ το Σύστημα γίνεται: $\left.\begin{aligned} 5x - y = 3 \\ 10x - 2y = 6 \end{aligned}\right\}$ και παρατηρούμε ότι η $2^η$ εξίσωση προκύπτει από την $1^η$ αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό 2. Οπότε το Σύστημα είναι αόριστο αφού οι δύο εξισώσεις συμπίπτουν.

  Για την τιμή $\lambda = 4$ Το (Σ_2) γίνεται: $\left.\begin{aligned} 3x + y = 7 \\ 6x + 2y = 8 \end{aligned}\right\}$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 0$$

Υπολογίζουμε την τιμή της ορίζουσας D_x:

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 8 = 6 \neq 0$$

Οπότε όταν το (Σ_1) είναι αόριστο (για την τιμή της παραμέτρου $\lambda = 4$) το (Σ_2) είναι αδύνατο.

Άσκηση 17 – Λύση

i. $$\left.\begin{array}{lr} [E_1] & 2x - y + 3z = -9 \\ [E_2] & x + 3y - z = 10 \\ [E_3] & 3x + y - z = 8 \end{array}\right\}$$

Με κατάλληλες γραμμοπράξεις θα απαλείψουμε την μεταβλητή z καταλήγοντας σε ένα Σύστημα $2x2$ με μεταβλητές $x\ και\ y$.

- $E_1 + 3 \cdot E_2 \Rightarrow 5x + 8y = 21\ (1)$
- $E_3 - E_2 \Rightarrow 2x - 2y = -2\ (2)$

Δημιουργούμε το $2x2$ Σύστημα με μεταβλητές $x\ και\ y$:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 8y = 21 \\ 2x - 2y = -2 \end{array}\right\}$$

το οποίο θα λύσουμε με τη μέθοδο των οριζουσών. Αρχικά σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - 8 \cdot 2 = -26 \neq 0$$

Υπολογίζουμε τις τιμές των οριζουσών $D_x\ και\ D_y$:

$$D_x = \begin{vmatrix} 21 & 8 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 21 \cdot (-2) + 8 \cdot 2 = -26$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 21 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - 2 \cdot 21 = -52$$

Το Σύστημα θα έχει μοναδική λύση που θα δίνεται από:

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=(\frac{-26}{-26},\frac{-52}{-26})=(1,2).$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές στην E_1 και λαμβάνουμε τα ακόλουθα:

$2x-y+3z=-9$

$2\cdot 1-2+3z=-9$

$3z=-9$ άρα $z=\frac{-9}{3}=-3$

Η τριάδα της λύσης είναι: $(x,y,z)=(1,2,-3)$

ii. $$\left.\begin{array}{lr} [E_1] & 5x+5y-z=0 \\ [E_2] & 10x+5y+2z=0 \\ [E_3] & 5x+15y-9z=0 \end{array}\right\}$$

Με κατάλληλες γραμμοπράξεις θα απαλείψουμε την μεταβλητή z καταλήγοντας σε ένα Σύστημα $2x2$ με μεταβλητές $x\ και\ y$.

- $2\cdot E_1+E_2 \Rightarrow 20x+15y=0\ (1)$
- $9\cdot E_1-E_3 \Rightarrow 40x+30y=0\ (2)$

Δημιουργούμε το $2x2$ Σύστημα με μεταβλητές $x\ και\ y$:

$$\left.\begin{array}{r} 20x+15y=0 \\ 40x+30y=0 \end{array}\right\}$$

το οποίο θα λύσουμε με τη μέθοδο των οριζουσών. Αρχικά σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών:

$$D=\begin{vmatrix}20 & 15\\ 40 & 30\end{vmatrix}=20\cdot 30-15\cdot 40=0$$

Υπολογίζουμε τις τιμές των οριζουσών $D_x\ και\ D_y$:

$$D_x=\begin{vmatrix}0 & 15\\ 0 & 30\end{vmatrix}=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix}20 & 0\\ 40 & 0\end{vmatrix}=0$$

Το Σύστημα είναι αόριστο και οι γενικές λύσεις θα προκύψουν από:

$$5x + 5y - z = 0 \; και \; 20x + 15y = 0$$

- $20x + 15y = 0 \; τότε \; y = \frac{-4}{3}x$
- Άρα $5x + 5y - z = 0 \; τότε \; z = 5x + 5\left(\frac{-4}{3}x\right) = \frac{-5}{3}x$

Η γενική λύση θα είναι: $(x, y, z) = (x, \frac{-4}{3}x, \frac{-5}{3}x)$

Άσκηση 18 – Λύση

i. Αρχικά θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες $D_x \; και \; D_y$ με τις παραμετρικές τιμές τους.

- $D = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = (1-a)(1+a)$

- $D_x = \begin{vmatrix} 1-a & -1 \\ a-\alpha^2 & -a \end{vmatrix} = (1-\alpha)(-\alpha) + a - \alpha^2 = \alpha^2 - \alpha + a - \alpha^2 = 0$

- $D_y = \begin{vmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1 & a-\alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha - \alpha^2) - (1-\alpha) = \alpha^2 - \alpha^3 - 1 + \alpha =$

$$= \alpha^2(1-\alpha) - (1-\alpha) = (1-\alpha)(\alpha^2 - 1) = -(\alpha-1)^2(\alpha+1)$$

Λύνουμε την εξίσωση $D = 0$ και παίρνουμε:

$$(1-a)(1+a) = 0 \quad \text{άρα} \quad \boldsymbol{\alpha = -1} \text{ ή } \boldsymbol{\alpha = 1}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha = -1$ έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ οπότε το Σύστημα είναι αόριστο και παίρνει τη μορφή:

$$\left.\begin{array}{r} -x - y = 2 \\ x + y = -2 \end{array}\right\}$$

Το Σύστημα αποτελείται από ευθείες που συμπίπτουν και ειδικά την ευθεία $x + y = -2$.
Η γενική λύση του Συστήματος θα είναι:

$$(x, y) = (x, -2 - x) \;\; για \; κάθε \; x \in R$$

- Αν $\alpha = 1$ έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ οπότε το είναι αόριστο και το Σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\left.\begin{matrix} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{matrix}\right\}$$

Το Σύστημα αποτελείται από ευθείες που συμπίπτουν και ειδικά την ευθεία $x = y$. Η γενική λύση του Συστήματος θα είναι:$(x, y) = (x, x)\ για\ κάθε\ x \in R$

- Για $\alpha \neq 1\ και\ \alpha \neq -1$ έχουμε $D \neq 0$ και το Σύστημα έχει μοναδική λύση που δίνεται από τους τύπους:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = (0, \alpha - 1)$$

ii. Αρχικά θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες $D_x\ και\ D_y$ με τις παραμετρικές τιμές τους.

$$\bullet D = \begin{vmatrix} (\alpha-1)^2 & (\alpha^2-1) \\ 2\alpha-1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+1) - (\alpha^2-1) \cdot (2\alpha-1) =$$

$$= (\alpha-1)(\alpha+1)[(\alpha-1) - (2\alpha-1)] = -\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)$$

$$\bullet D_x = \begin{vmatrix} (\alpha+1)^2 & (\alpha^2-1) \\ \alpha^2-1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = (\alpha+1)^2 \cdot (\alpha+1) - (\alpha^2-1) \cdot (\alpha^2-1) =$$

$$= (\alpha+1)^2[(\alpha+1) - (\alpha-1)^2] = (\alpha+1)^2[\alpha + 1 - \alpha^2 + 2\alpha - 1] =$$

$$= (\alpha+1)^2(-\alpha^2 + 3\alpha) = \alpha(\alpha+1)^2(3-\alpha)$$

$$\bullet D_y = \begin{vmatrix} (\alpha-1)^2 & (\alpha+1)^2 \\ 2\alpha-1 & \alpha^2-1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2(\alpha^2-1) - (\alpha+1)^2(2\alpha-1) =$$

$$= (\alpha+1)[(\alpha-1)^3 - (\alpha+1)(2\alpha-1)] =$$

$$= (\alpha+1)[\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 - 2\alpha^2 + \alpha - 2\alpha + 1] =$$

$$= (\alpha+1)(\alpha^3 - 5\alpha^2 + 2\alpha) = \alpha(\alpha+1)(\alpha^2 - 5\alpha + 2)$$

Λύνουμε την εξίσωση $D = 0$ και παίρνουμε:

$$-\alpha(\alpha-1)(\alpha+1) = 0 \quad άρα \quad \boldsymbol{\alpha = -1}\ ή\ \boldsymbol{\alpha = 1}\ ή\ \boldsymbol{\alpha = 0}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha = -1$ έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ και το Σύστημα είναι αόριστο και παίρνει τη μορφή:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 0y = 0 \\ -3x + 0y = 0 \end{array}\right\}$$

  Το Σύστημα αποτελείται από ευθείες που συμπίπτουν και ειδικά την ευθεία $x = 0$. Η γενική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x, y) = (0, y)\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ y \in R$

- Αν $\alpha = 1$ έχουμε $D = 0, D_x = 8, D_y = -4$ οπότε το Σύστημα είναι αδύνατο.

- Αν $\alpha = 0$ έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ και το Σύστημα είναι αόριστο και παίρνει τη μορφή:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \end{array}\right\}$$

  Το Σύστημα αποτελείται από ευθείες που συμπίπτουν και ειδικά την ευθεία $x - y = 1$. Η γενική λύση του Συστήματος θα είναι:

$$(x, y) = (x, x - 1)\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in R$$

- Αν $\alpha \neq 1\ \kappa\alpha\iota\ \alpha \neq -1$ τοτε $D \neq 0$ τότε το Σύστημα έχει μοναδική λύση που θα δίνεται από τους τύπους:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{\alpha(\alpha+1)^2(3-\alpha)}{-\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)}, \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha^2-5\alpha+2)}{-\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)}\right)$$

$$= \left(\frac{(\alpha-3)(\alpha+1)}{\alpha-1}, \frac{-(\alpha^2-5\alpha+2)}{\alpha-1}\right).$$

Άσκηση 19 – Λύση

Αρχικά θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες D_x $και$ D_y με τις παραμετρικές τιμές τους.

- $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta = \alpha\beta(\beta - \alpha)$
- $D_x = \begin{vmatrix} \alpha^2\beta & \beta \\ \alpha\beta^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = \alpha^2\beta^3 - \alpha\beta^3 = \alpha\beta^3(\alpha - 1)$
- $D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2\beta \\ \alpha^2 & \alpha\beta^2 \end{vmatrix} = \alpha^2\beta^2 - \alpha^4\beta = \alpha^2\beta(\beta - \alpha^2)$

Λύνουμε την εξίσωση $D = 0$ και παίρνουμε:

$$\alpha\beta(\beta - \alpha) = 0 \text{ άρα } \boldsymbol{\alpha = \beta} \text{ ή } \boldsymbol{\alpha = 0} \text{ ή } \boldsymbol{\beta = 0}$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1η περίπτωση:
Αν $\alpha = 0$ $και$ $\beta = 0$ έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ οπότε το Σύστημα είναι αόριστο και επαληθεύται για κάθε ζεύγος (x, y) $με$ $x, y \in R$

2η περίπτωση:
Αν $\alpha = 0$ $και$ $\beta \neq 0$ έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ οπότε το Σύστημα θα έχει τη μορφή $\left.\begin{matrix} \beta y = 0 \\ \beta^2 y = 0 \end{matrix}\right\}$
άρα θα είναι αόριστο και επαληθεύται για κάθε ζεύγος $(x, 0)$ $για$ $κάθε$ $x \in R$

3η περίπτωση:
Αν $\alpha \neq 0$ $και$ $\beta = 0$ έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ οπότε το Σύστημα θα έχει τη μορφή $\left.\begin{matrix} \alpha x = 0 \\ \alpha^2 x = 0 \end{matrix}\right\}$
άρα θα είναι αόριστο και επαληθεύται για κάθε ζεύγος $(0, y)$ $για$ $κάθε$ $y \in R$

4η περίπτωση:
Αν $\alpha = \beta \neq 0$ έχουμε $D = 0, D_x = \alpha^4(\alpha - 1), D_y = \alpha^3(\alpha - \alpha^2) = \alpha^4(1 - \alpha)$
Στην περίπτωση αυτή πρέπει να εξετάσουμε την υποπερίπτωση $\alpha = \beta = 1$ $και$ $την$ $\alpha = \beta \neq 1$

- Αν $\alpha = \beta = 1$ τότε καταλήγουμε σε $D = 0, \quad D_x = 0, \quad D_y = 0$ και έχουμε το ισοδύναμο Σύστημα $\left.\begin{matrix} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\}$ δηλαδή στην ευθεία $\boldsymbol{x + y = 1}$.

  Ειναι αόριστο και οι γενικές λύσεις του Συστήματος θα δίνονται από το ζεύγος:

$$(x, y) = (x, 1 - x) \; για \; κάθε \;\; x \; \in R.$$

- Αν $\alpha = \beta \neq 1$ τότε καταλήγουμε σε $D = 0, D_x \neq 0, D_y \neq 0$ και το Σύστημα είναι αδύνατο.

5η περίπτωση:

Αν $\alpha \neq \beta \neq 0$ έχουμε $D \neq 0$ τότε το Σύστημα έχειμοναδική λύση που δίνεται από τους τύπους:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{\alpha\beta^3(\alpha - 1)}{\alpha\beta(\beta - \alpha)}, \frac{\alpha^2\beta(\beta - \alpha^2)}{\alpha\beta(\beta - \alpha)}\right) = \left(\frac{\beta^2(\alpha - 1)}{\beta - \alpha}, \frac{\alpha(\beta - \alpha^2)}{\alpha(\beta - \alpha)}\right)$$

Άσκηση 20 – Λύση

Αρχικά θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες $D_x \; και \; D_y$ με τις παραμετρικές τιμές τους.

- $D = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda + 2 - \lambda = 2 \neq 0$ {Το Σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε λ$\in R$}
- $D_x = \begin{vmatrix} 3\lambda & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\lambda + 1$
- $D_y = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 3\lambda \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} = -\lambda - 2 - 3\lambda^2 = -(3\lambda^2 + \lambda + 2)$

Το Σύστημα θα έχει μοναδική λύση που θα δίνεται από:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = (\frac{3\lambda + 1}{2}, \frac{-(3\lambda^2 + \lambda + 2)}{2})$$

Για τη μοναδική λύση του Συστήματος θα ισχύει:

$$x_o = \frac{D_x}{D} = \frac{3\lambda + 1}{2}$$

$$y_o = \frac{D_y}{D} = \frac{-(3\lambda^2 + \lambda + 2)}{2}$$

Για την παράμετρο λ ισχύει: $1<\lambda<2$. Οπότε με τις ιδιότητες ανισώσεων παίρνουμε:

- $1<\lambda<2$
  $3\cdot 1<3\lambda<3\cdot 2$
  $3+1<3\lambda+1<6+1$
  $\frac{4}{2}<\frac{3\lambda+1}{2}<\frac{7}{2}$
  $2<x_o<\frac{7}{2}$

- Το τριώνυμο $-(3\lambda^2+\lambda+2)$ έχει Διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4(-3)(-2)=-23<0$. Το πρόσημο του θα είναι αρνητικό για κάθε $\lambda\in(1,2)$ εφόσον ικανοποιούνται οι συνθήκες: $\Delta<0\ και\ \alpha<0$.
  Οπότε καταλήγουμε στο εξής:

$$-(3\lambda^2+\lambda+2)<0 \quad \text{άρα} \quad \frac{-(3\lambda^2+\lambda+2)}{2}<0 \quad \text{οπότε} \quad y_o<0$$

Άσκηση 21 – Λύση

Αρχικά για να έχει νόημα η 1η εξίσωση του Συστήματος θα πρέπει να έχουμε τον περιορισμό:

$$\boldsymbol{\alpha\neq\beta \quad και \quad \alpha\neq-\beta}$$

Θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες D_x, D_y με τις παραμετρικές τιμές τους.

$$\bullet\, D=\begin{vmatrix}\frac{1}{\alpha+\beta} & \frac{1}{\alpha-\beta}\\ 1 & -1\end{vmatrix}=\frac{-1}{\alpha+\beta}-\frac{1}{\alpha-\beta}=\frac{-(\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=\frac{-\alpha+\beta-\alpha-\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=\frac{-2\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$$

$$\bullet\, D_x=\begin{vmatrix}2\alpha & \frac{1}{\alpha-\beta}\\ 4\alpha\beta & -1\end{vmatrix}=-2\alpha-\frac{4\alpha\beta}{\alpha-\beta}=\frac{-2\alpha(\alpha-\beta)-4\alpha\beta}{\alpha-\beta}=\frac{-2\alpha^2+2\alpha\beta-4\alpha\beta}{\alpha-\beta}=\frac{-2\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha-\beta}=\frac{-2\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}$$

$$\bullet\, D_y=\begin{vmatrix}\frac{1}{\alpha+\beta} & 2\alpha\\ 1 & 4\alpha\beta\end{vmatrix}=\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}-2\alpha=\frac{4\alpha\beta-2\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}=\frac{4\alpha\beta-2\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{2\alpha\beta-2\alpha^2}{\alpha+\beta}=\frac{2\alpha(\beta-\alpha)}{\alpha+\beta}$$

Λύνουμε την εξίσωση $D = 0$ και παίρνουμε:

$$\frac{-2\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} = 0 \quad \text{άρα} \quad -2\alpha = 0 \;\; \text{οπότε} \;\; \alpha = 0$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1η Περίπτωση:

Αν $\alpha = 0 \; και \; \beta \neq 0 \; (λόγω \; του \; αρχικού \; περιορισμού)$ θα έχουμε έχουμε $D = 0,\; D_x = 0, D_{\;y} = 0$. Το Σύστημα είναι αόριστο και θα παίρνει τη μορφή $\left.\begin{matrix} \frac{x}{\beta} - \frac{y}{\beta} = 0 \\ x - y = 0 \end{matrix}\right\}$.

Παρατηρούμε ότι η 1η εξίσωση προκύπτει από τη 2η, πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με την ποσότητα $\frac{1}{\beta}$.

Οπότε θα ισχύει $x = y$ και οι γενικές λύσεις του Συστήματος θα δίνονται από το ζεύγος:

$$(x, y) = (x, x) \; για \; κάθε \;\; x \; \in R \,.$$

2η Περίπτωση:

Αν $\alpha \neq 0 \; και \; \alpha \neq \beta, \alpha \neq -\beta \; (λόγω \; του \; αρχικού \; περιορισμού)$ θα έχουμε έχουμε

$$D \neq 0, \quad D_x \neq 0, \quad D_y \neq 0$$

Το Σύστημα έχει μοναδική λύση που θα προκύπτει από τους ακόλουθους τύπους:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{\frac{-2\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}}{\frac{-2\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}}, \frac{\frac{2\alpha(\beta-\alpha)}{\alpha+\beta}}{\frac{-2\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}}\right) = ((\alpha+\beta)^2, (\alpha-\beta)^2)$$

Άσκηση 22 – Λύση

Θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες D_x, D_y με τις παραμετρικές τιμές τους.

- $D = \begin{vmatrix} \alpha^2+\beta^2 & \alpha^2-\beta^2 \\ \alpha+\beta & \alpha-\beta \end{vmatrix} = (\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta) - (\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta) =$
  $= \alpha^3 - \alpha^2\beta + \beta^2\alpha - \beta^3 - \alpha^3 - \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \beta^3 = -2\alpha^2\beta + 2\beta^2\alpha = 2\alpha\beta(\beta-\alpha)$

- $D_x = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha^2-\beta^2 \\ \alpha & \alpha-\beta \end{vmatrix} = \alpha^2(\alpha-\beta) - \alpha(\alpha^2-\beta^2) = \alpha(\alpha-\beta)[\alpha-(\alpha+\beta)] = \alpha\beta(\beta-\alpha)$

- $D_y = \begin{vmatrix} \alpha^2+\beta^2 & \alpha^2 \\ \alpha+\beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha^2+\beta^2) - \alpha^2(\alpha+\beta) = \alpha[\alpha^2+\beta^2-\alpha(\alpha+\beta)] =$

  $= \alpha[\alpha^2+\beta^2-\alpha^2-\alpha\beta] = \alpha\beta(\beta-\alpha)$

Λύνουμε την εξίσωση $D = 0$ και λαμβάνουμε τα ακόλουθα:

$$2\alpha\beta(\beta-\alpha) = 0 \quad \text{άρα} \quad \alpha = 0 \ \text{ή} \ \beta = 0 \ \text{ή} \ \alpha = \beta$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1η Περίπτωση:

Αν $\alpha = 0 \; και \; \beta \neq 0$ θα έχουμε έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$. Το Σύστημα είναι αόριστο και θα παίρνει τη μορφή: $\left.\begin{matrix} \beta^2 x - \beta^2 y = 0 \\ \beta x - \beta y = 0 \end{matrix}\right\}$.

Παρατηρούμε ότι η 1η εξίσωση προκύπτει από τη 2η, πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με την ποσότητα β.

Οπότε θα ισχύει $x = y$ και οι γενικές λύσεις του Συστήματος θα δίνονται από το ακόλουθο ζεύγος:

$$(x, y) = (x, x) \; για \; κάθε \; x \in R$$

2η Περίπτωση:

Αν $\beta = 0\ και\ \alpha \neq 0$ θα έχουμε έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$. Το Σύστημα είναι αόριστο και θα παίρνει τη μορφή $\left.\begin{matrix} \alpha^2 x + \alpha^2 y = \alpha^2 \\ \alpha x + \alpha y = \alpha \end{matrix}\right\}$ ή $\left.\begin{matrix} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\}$.

Οπότε θα ισχύει $y = 1 - x$ και οι γενικές λύσεις του Συστήματος θα δίνονται από το ακόλουθο ζεύγος:

$$(x, y) = (x, 1 - x)\ για\ κάθε\ x \in R$$

3η Περίπτωση:

Αν $\alpha = \beta = 0$ θα έχουμε έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$. Το Σύστημα είναι αόριστο και επαληθεύεται για κάθε ζεύγος $(x, y)\ οταν\ x, y \in R$.

4η Περίπτωση:

Αν $\alpha = \beta \neq 0$ θα έχουμε έχουμε $D = 0,\ D_x = 0,\ D_y = 0$. Το Σύστημα είναι αόριστο και λαμβάνει τη μορφή: $\left.\begin{matrix} 2\alpha^2 x = \alpha^2 \\ 2\alpha x = \alpha \end{matrix}\right\}$ ή $\left.\begin{matrix} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$ και επαληθεύεται για κάθε ζεύγος:

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, y\right) για\ κάθε\ y \in R$$

5η Περίπτωση:

Αν $\alpha \neq \beta \neq 0$ θα έχουμε έχουμε $D \neq 0, D_x \neq 0, D_y \neq 0$. Το Σύστημα έχει μοναδική λύση που θα προκύπτει από τους ακόλουθους τύπους:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{\alpha\beta(\beta - \alpha)}{2\alpha\beta(\beta - \alpha)}, \frac{\alpha\beta(\beta - \alpha)}{2\alpha\beta(\beta - \alpha)}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$