Κεφάλαιο 1 : Συστήματα

1.1. Γραμμικά Συστήματα

Στόχοι της παραγράφου:

- ✓ Να αναγνωρίζουμε και να λύνουμε γραμμικές εξισώσεις της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$
- ✓ Να λύνουμε γραμμικά συστήματα (2x2 και 3x3), εφαρμόζοντας κατά περίπτωση μία από τις ακόλουθες μεθόδους:
  - Μέθοδος της Αντικατάστασης
  - Μέθοδος των Ανίθετων Συντελεστών (Μέθοδος της Απαλοιφής)
  - Μέθοδος των Οριζουσών
  - Γραφική Επίλυση
- ✓ Να υπολογίζουμε τις παραμέτρους ενός συστήματος το οποίο ικανοποιεί συγκεκριμένη δοθείσα συνθήκη.

Θεωρία:

Έστω ότι αναζητούμε τα ζεύγη (x, y) αριθμών που επαληθεύουν ταυτόχρονα δύο γραμμικές εξισώσεις $\alpha_1 \cdot x + \beta_1 \cdot y = \gamma_1$ και $\alpha_2 \cdot x + \beta_2 \cdot y = \gamma_2$. [1]

Τότε λέμε ότι έχουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ή αλλιώς ένα ***2×2 γραμμικό σύστημα*** και κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει ταυτόχρονα τις δύο εξισώσεις του συστήματος το λέμε *λύση του συστήματος*.

Η επίλυση ενός 2x2 γραμμικού συστήματος της μορφής:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot x + \beta_1 \cdot y = \gamma_1 \\ \alpha_2 \cdot x + \beta_2 \cdot y = \gamma_2 \end{cases} \quad [2]$$

επιτυγχάνεται δια της μετατροπής του σε άλλο, απλούστερο σύστημα το οποίο έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το αρχικό. Τα δύο αυτά συστήματα τα λέμε *ισοδύναμα συστήματα*.

Για την επίλυση ενός συστήματος σαν το [2], έχουμε σε προηγούμενη τάξη χρησιμοποιήσει τη **μέθοδο της *αντικατάστασης*** και εκείνη των ***αντίθετων συντελεστών*** (ή της *απαλοιφής*). Ας τις θυμηθούμε επιλύοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y = 5 \\ x + 2 \cdot y = 4. \end{cases} \quad [3]$$

Κατά τη μέθοδο της αντικατάστασης, λύνουμε τη μία εκ των δύο εξισώσεων ως προς κάποιον από τους αγνώστους και αντικαθιστούμε στην άλλη. Εδώ είναι ευκολότερο να λύσουμε τη δεύτερη εξίσωση ως προς x και ν΄ αντικαταστήσουμε στην πρώτη. Το σύστημα παίρνει την ακόλουθη ισοδύναμη μορφή:

$$\begin{cases} 2 \cdot (4 - 2 \cdot y) + 3 \cdot y = 5 \\ x = 4 - 2 \cdot y. \end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση του τελευταίου συστήματος περιέχει μόνο τον y ως άγνωστο. Η επίλυσή της δίνει κατά τα γνωστά y = 3, οπότε η δεύτερη εξίσωση δίνει x = -2.

Τελικά, η λύση του αρχικού συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (-2, 3)$.

Κατά τη μέθοδο της απαλοιφής και αναφορικά πάντα με το σύστημα [3], προσπαθούμε να εμφανίσουμε κάποιον από τους αγνώστους με αντίθετους συντελεστές στις δύο εξισώσεις του συστήματος. Το ευκολότερο που έχουμε να κάνουμε είναι να πολλαπλασιάσουμε τη δεύτερη εξίσωση επί -2.

Έτσι το σύστημα [3] παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} 2\cdot x+3\cdot y=5 \\ -2\cdot x-4\cdot y=-8. \end{cases}$$

Οι συντελεστές του x στις δύο εξισώσεις είναι τώρα αντίθετοι και εάν τις προσθέσουμε κατά μέλη, ο x απαλείφεται, αφού από την πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει η εξίσωση $-y=-3$. Διατηρούμε και την κατά τη γνώμη μας ευκολότερη από τις εξισώσεις του συστήματος [3] και λαμβάνουμε:

$$\begin{cases} -y=-3 \\ x+2\cdot y=4. \end{cases}$$

Το τελευταίο αυτό σύστημα δίνει:

$$\begin{cases} y=3 \\ x+6=4 \end{cases}$$

οπότε παίρνουμε πάλι τη λύση $(x,y)=(-2,3)$. Δε θα ήταν εξάλλου δυνατόν, οι διαφορετικές μέθοδοι επίλυσης να δώσουν διαφορετικές λύσεις.

Γραφική επίλυση του 2×2 γραμμικού συστήματος

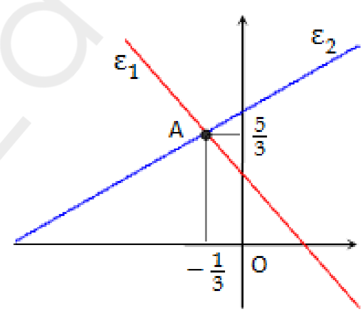
Όπως είναι σαφές, οι δύο εξισώσεις του συστήματος [2] παριστάνουν, υπό κάποιες προϋποθέσεις, δύο ευθείες οι οποίες μπορεί να τέμνονται σε ένα σημείο, να είναι παράλληλες ή να ταυτίζονται. Στην πρώτη περίπτωση το σύστημα έχει ως ***μοναδική λύση*** το ζεύγος που αντιστοιχεί στο σημείο τομής των δύο ευθειών.

Στην περίπτωση που οι ευθείες είναι παράλληλες, το σύστημα δεν έχει λύση˙ είναι ***αδύνατο***. Στην περίπτωση που οι δύο εξισώσεις του συστήματος παριστάνουν δύο ευθείες που συμπίπτουν, το σύστημα έχει ***άπειρες λύσεις***, τα ζεύγη που αντιστοιχούν στα άπειρα κοινά σημεία των δύο ευθειών.

Ας αποσαφηνίσουμε όμως όλ' αυτά μελετώντας τα επόμενα παραδείγματα:

Παράδειγμα 1. Οι εξισώσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 2\cdot x + y = 1 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

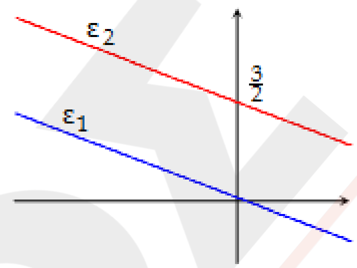


παριστάνουν τις ευθείες $\varepsilon_1: y = -2\cdot x + 1$ και $\varepsilon_2: y = x + 2$ του σχήματος 4 που, έχοντας διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης, τέμνονται.

Το σημείο τομής τους είναι το $A\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ του οποίου τις συντεταγμένες προσδιορίζουμε επιλύοντας αλγεβρικά το σύστημα, με κάποια απ' τις μεθόδους που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο (κατά προτίμηση με απαλοιφή, μιας και οι συντελεστές του y είναι ήδη αντίθετοι).

Εάν εμμέναμε στη γραφική επίλυση, δε θα μπορούσαμε παρά να πάρουμε *προσεγγιστικές λύσεις*.

Παράδειγμα 2. Οι εξισώσεις του συστήματος:



$$\begin{cases} 2\cdot x+3\cdot y=0 \\ 4\cdot x+6\cdot y=9 \end{cases}$$

παριστάνουν τις ευθείες $\varepsilon_1: y=-\frac{2}{3}\cdot x$ και $\varepsilon_2: y=-\frac{2}{3}\cdot x+\frac{3}{2}$ του σχήματος 5 που έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης και άρα είναι παράλληλες.

Οι δύο ευθείες λοιπόν δεν έχουν κοινά σημεία και το σύστημα είναι **αδύνατο**.

Παράδειγμα 3. Το σύστημα $\begin{cases} 9\cdot x+3\cdot y=3 \\ 6\cdot x+2\cdot y=2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις αφού οι εξισώσεις του παριστάνουν δύο ευθείες που συμπίπτουν με την ευθεία $\varepsilon: y=1-3\cdot x$.

Οι άπειρες λύσεις του τελευταίου αυτού συστήματος είναι όλα τα ζεύγη της μορφής $(x, 1-3\cdot x)$ με $x\in R$, που αντιπροσωπεύουν τα άπειρα σημεία της (ε).

Η 2×2 ορίζουσα

Μια παράσταση της μορφής $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \overset{\text{ορσ.}}{=} \alpha\cdot\delta-\beta\cdot\gamma$, όπου α, β, γ, δ∈R, καλείται 2×2 ορίζουσα (με 2 γραμμές και 2 στήλες).

Για παράδειγμα, είναι:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot4-2\cdot1=10,\qquad \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=\tfrac{3}{2}\cdot(-2)-1\cdot4=-7 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}=\sqrt{6}\cdot1-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=0.$$

Σε ένα σύστημα σαν το $\begin{cases} \alpha_1\cdot x+\beta_1\cdot y=\gamma_1 \\ \alpha_2\cdot x+\beta_2\cdot y=\gamma_2 \end{cases}$ αντιστοιχούν, και θα δούμε αμέσως με ποιον τρόπο, οι ορίζουσες:

- $D=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ που έχει ως στήλες τους συντελεστές των αγνώστων και καλείται *ορίζουσα του συστήματος*,
- $D_x=\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ που προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε τους συντελεστές του x στη D με τους σταθερούς όρους και
- $D_y=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ που προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε τους συντελεστές του y στη D με τους σταθερούς όρους.

Για τη λύση, έχουμε:

Εάν **D ≠ 0**, τότε το σύστημα έχει ως **μοναδική λύση** το ζεύγος $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$.

Εάν **D = 0**, τότε το σύστημα είναι είτε **αδύνατο**, είτε με **άπειρες λύσεις**.

Παραδείγματα:

1. Για το σύστημα $\begin{cases} 3\cdot x-2\cdot y=1 \\ 2\cdot x+y=3 \end{cases}$ έχουμε: $D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=7\neq 0$ και άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Περαιτέρω υπολογίζουμε: $D_x=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=7$ και $D_y=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=7$

Έπεται πως η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=(1,1)$.

2. Η ορίζουσα του συστήματος $\begin{cases} 4\cdot x-3\cdot y=5 \\ 8\cdot x-6\cdot y=7 \end{cases}$ είναι $D=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{vmatrix}=0$ και άρα αυτό είναι είτε αδύνατο, είτε με άπειρες λύσεις.

Παρατηρούμε πως αν διαιρέσουμε τα μέλη της δεύτερης εξίσωσης δια 2, παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} 4\cdot x-3\cdot y=5 \\ 4\cdot x-3\cdot y=\frac{7}{2} \end{cases}$$

που προφανώς είναι αδύνατο.

3. Το σύστημα $\begin{cases} 3\cdot x+2\cdot y=3 \\ 9\cdot x+6\cdot y=9 \end{cases}$ έχει ορίζουσα $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=0$, οπότε είναι ή αδύνατο ή με άπειρο πλήθος λύσεων. Διαιρώντας κι εδώ στη δεύτερη εξίσωση δια 3, παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} 3\cdot x+2\cdot y=3 \\ 3\cdot x+2\cdot y=3 \end{cases}$$

που έχει άπειρες λύσεις τα άπειρα σημεία της ευθείας $3\cdot x+2\cdot y=3$.

Οι λύσεις είναι τα ζεύγη της μορφής $\left(x,\ \frac{3-3\cdot x}{2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

Το 3×3 γραμμικό σύστημα

Μια εξίσωση της μορφής

$$\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma\cdot z=\delta, \qquad [4]$$

με έναν τουλάχιστον εκ των συντελεστών α, β, γ διάφορο του μηδενός, είναι μια *γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους* και κάθε τριάδα (x_0, y_0, z_0) αριθμών που επαληθεύει την [4] είναι μια *λύση* της. Π.χ. η τριάδα $(1,2,3)$ είναι μια λύση της γραμμικής εξίσωσης $3\cdot x+5\cdot y-z=10$.

Όταν αναζητούμε τις κοινές λύσεις τριών γραμμικών εξισώσεων σαν την [4], λέμε ότι έχουμε ένα ***3×3 γραμμικό σύστημα***. Ένα τέτοιο θα έχει τη μορφή:

$$\begin{cases}\alpha_1\cdot x+\beta_1\cdot y+\gamma_1\cdot z=\delta_1\\ \alpha_2\cdot x+\beta_2\cdot y+\gamma_2\cdot z=\delta_2\\ \alpha_3\cdot x+\beta_3\cdot y+\gamma_3\cdot z=\delta_3\end{cases} \qquad [5]$$

και κάθε τριάδα αριθμών που επαληθεύει ταυτόχρονα τις τρεις εξισώσεις του συστήματος την καλούμε ***λύση του συστήματος***.

Παίρνοντας κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό των δύο εξισώσεων του συστήματος [5], απαλείφουμε κάποιον άγνωστο. Παίρνοντας κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό άλλων δύο εξισώσεων απαλείφουμε τον ίδιο άγνωστο. Καταλήγουμε έτσι σε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα. Η επίλυση λοιπόν ενός 3×3 γραμμικού συστήματος, ανάγεται στην επίλυση ενός 2×2 γραμμικού συστήματος και ως εκ τούτου, ένα 3×3 γραμμικό σύστημα είτε έχει μοναδική λύση, είτε είναι αδύνατο, είτε έχει άπειρες λύσεις.

Ας αποσαφηνίσουμε όμως όλ' αυτά μελετώντας το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1. Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} 4\cdot x+y-3\cdot z=11 & [E_1] \\ 2\cdot x-3\cdot y+2\cdot z=9 & [E_2] \\ x+y+z=-3. & [E_3] \end{cases}$$

Ο γραμμικός συνδυασμός $3\cdot E_1+E_2$ οδηγεί, με την απαλοιφή του y από τις E_1 και E_2, στην εξίσωση:

$$14\cdot x-7\cdot z=42 \Leftrightarrow 2\cdot x-z=6. \quad [E_4]$$

Ο γραμμικός συνδυασμός E_1-E_3 οδηγεί, με την απαλοιφή πάλι του y από τις E_1 και E_3, στην εξίσωση:

$$3\cdot x-4\cdot z=14. \quad [E_5]$$

Οι εξισώσεις $[E_4]$ και $[E_5]$ αποτελούν το 2×2 γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} 2\cdot x-z=6 \\ 3\cdot x-4\cdot z=14 \end{cases}$$

του οποίου λύση είναι το ζεύγος $(x,z)=(2,-2)$.

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές των x, z π.χ. στην $[E_3]$, παίρνουμε $y=-3$.

Τελικά η λύση του συστήματος [6] είναι η τριάδα $(x,y,z)=(2,-3,-2)$.