ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2021 - 2022

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

Βασικά Εργαλεία και Μέθοδοι για τον Έλεγχο της Ποιότητας [ΔΙΠ 50]

1η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΠΟΝΗΣΗ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ ΣΤΗ ΘΕ ΔΙΠ 50

1. Κατά τη διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους δίνονται πέντε (5) γραπτές εργασίες (ΓΕ). Κάθε ΓΕ βαθμολογείται στην κλίμακα 0-10. Για να κατοχυρώσετε δικαίωμα συμμετοχής στις εξετάσεις θα πρέπει να υποβάλετε τουλάχιστον τέσσερις (4) ΓΕ και να συγκεντρώσετε συνολική βαθμολογία τουλάχιστον 25 μονάδων (το δυνητικό άριστα είναι 50 μονάδες).
2. Κάθε φοιτητής συμπληρώνει το ειδικό **«Φύλλο Απαντήσεων»** της ΓΕ που είναι ηλεκτρονικό αρχείο docx και το υποβάλλει αποκλειστικά μέσω του Ψηφιακού Χώρου Εκπαίδευσης (study.eap.gr). Συνιστάται η υποβολή του «Φύλλου Απαντήσεων» της ΓΕ και σε ηλεκτρονικό αρχείο μορφής pdf. Άλλοι τύποι ηλεκτρονικών αρχείων (π.χ., jpg), ή χειρόγραφες εργασίες, δε λαμβάνονται υπόψη.
3. Πρέπει να τηρείται η προθεσμία υποβολής των ΓΕ επειδή μετά το πέρας της καταληκτικής ημερομηνίας υποβολής κάθε ΓΕ δεν παρέχεται δυνατότητα εκπρόθεσμης υποβολής.
4. Μην αντιγράφετε τις εκφωνήσεις στο «Φύλλο Απαντήσεων».
5. Σε κάθε ερώτημα να δίνετε έναν (1) μόνο τρόπο λύσης.
6. Αν σε ένα ερώτημα χρησιμοποιείτε το στατιστικό πακέτο **MINITAB**, θα πρέπει να περιέχεται οπωσδήποτε στην απάντησή σας:

   (α) αντίγραφο της εκτύπωσης του session window του MINITAB και ενδεχομένως σχήματα, και

   (β) σχολιασμός ή ερμηνεία του αποτελέσματος του MINITAB.
7. Δε θα βαθμολογούνται απαντήσεις στις οποίες γίνεται χρήση άλλου στατιστικού πακέτου (εκτός του MINITAB). Επιτρέπεται η χρήση του Excel για τη διενέργεια μόνο απλών αριθμητικών υπολογισμών.
8. Στις προτάσεις τύπου «Σωστή - Λάθος» πρέπει απαραίτητα να γράφετε την επιλογή σας («Σωστή» ή «Λάθος»). Στις προτάσεις που επιλέγετε την απάντηση «Λάθος» να δίνετε σαφή αιτιολόγηση η οποία να περιέχει εντοπισμό του λάθους, και όχι να παραπέμπετε αποκλειστικά σε ολόκληρες παραγράφους ή σελίδες του εκπαιδευτικού υλικού.

   Ομοίως, στα ερωτήματα «Πολλαπλής Επιλογής», πρέπει απαραίτητα να επιλέγετε τη σωστή επιλογή, π.χ. «η επιλογή (ii) είναι η Σωστή» και να αιτιολογείτε με σαφήνεια την επιλογή σας όταν αυτό ζητείται. Αν δεν υπάρχει ξεκάθαρη επιλογή σε μία πρόταση «Σωστή - Λάθος», ή σε ένα ερώτημα «Πολλαπλής Επιλογής», το ερώτημα θα μηδενίζεται.
9. Στους υπολογισμούς να γίνεται χρήση τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.
10. Εάν υποβληθούν από δύο ή περισσότερους φοιτητές πανομοιότυπες απαντήσεις σε μια ή περισσότερες ασκήσεις (έστω και με μικροαλλαγές για να φαίνονται δήθεν διαφορετικές), θα μηδενίζονται οι εργασίες όλων των εμπλεκόμενων φοιτητών.

Βαθμολόγηση: *Στις ΓΕ οι μονάδες που αντιστοιχούν σε κάθε άσκηση και σε κάθε ερώτημα χωριστά δίνονται μέσα σε παρένθεση (σύνολο 100 μονάδες). Ο βαθμός της ΓΕ προκύπτει από το πηλίκο*

$$\text{Βαθμός ΓΕ} = \frac{\text{Συνολικές μονάδες}}{10}$$

με στρογγυλοποίηση ενός δεκαδικού ψηφίου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ης ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Άσκηση 1 (15 μονάδες)

Δώστε την κατάλληλη απάντηση (ΣΩΣΤΗ ή ΛΑΘΟΣ) στις παραγράφους (α)-(ι). Αιτιολογήστε σύντομα μόνο τις απαντήσεις στις οποίες επιλέξατε ΛΑΘΟΣ.

(α-1.5) Εάν Α, Β και Γ τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθούν τουλάχιστον δύο από τα Α, Β, Γ εκφράζεται σαν:

$$(A \cap B \cap \Gamma') \cup (A \cap B' \cap \Gamma) \cup (A' \cap B \cap \Gamma)$$

ΛΑΘΟΣ: Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθούν τουλάχιστον δύο από τα Α, Β, Γ εκφράζεται σαν:

$$(A \cap B \cap \Gamma') \cup (A \cap B' \cap \Gamma) \cup (A' \cap B \cap \Gamma) \cup (A \cap B \cap \Gamma)$$

(β-1.5) Έξι επιβατικά και πέντε φορτηγά αυτοκίνητα πρόκειται να παρκάρουν κατά μήκος ενός δρόμου. Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να παρκάρουν τα οχήματα, εάν τα επιβατικά θα παρκάρουν μαζί σε συνεχόμενες θέσεις και τα φορτηγά μαζί, είναι 39916800.

ΛΑΘΟΣ: Τα επιβατικά μπορούν να παρκάρουν μαζί κατά 6! διαφορετικούς τρόπους. Ανάλογα τα φορτηγά μπορούν να παρκαρουν μαζί κατά 5! διαφορετικούς τρόπους. Υπάρχουν όμως και 2! διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να παρκάρουν οι δύο κατηγορίες οχημάτων (επιβατικά, φορτηγά), οπότε τελικά θα έχουμε 2! 6! 5! = 172800 διαφορετικούς τρόπους (39916800=11! είναι οι διαφορετικοί τρόποι που μπορούν να παρκάρουν τα οχήματα όταν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στο πως θα παρκάρουν).

(γ-1.5) Δεν υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές Χ,Υ για τις οποίες $Cov(X,Y) = 20, Var(X) = 9$ και $Var(Y) = 25$.

ΣΩΣΤΟ: Εάν υπήρχαν τ.μ. με τις παραπάνω ιδιότητες, τότε ο συντελεστής συσχέτισής τους:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}} = \frac{20}{3 \cdot 5} = \frac{4}{3} > 1$$

που δεν ισχύει γιατί $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.

(δ-1.5) Έστω Α και Β δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύουν τα εξής: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$. Τότε $P(B) = \frac{3}{8}$

ΛΑΘΟΣ: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =>$

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{2}P(B) => P(B) = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} \neq \frac{3}{8}$$

(ε-1.5) Έστω Χ μια τ.μ. τέτοια ώστε $P(X = 1) = p$, $P(X = -1) = 1 - p$, $0 < p < 1$. Εάν $Y = X^2$, τότε $E(X) = E(Y)$.

ΛΑΘΟΣ: $E(X) = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1 - p) = 2p - 1 \neq 1$. Ακόμα, η τ.μ $Y = X^2$ έχει σαν (μόνη) δυνατή τιμή την 1 με πιθανότητα 1. Επομένως $E(Y) = 1 \cdot 1 = 1$, οπότε $E(X) \neq E(Y)$.

(στ-1.5) Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) δίνεται από τον τύπο:

$$f(x,y) = \frac{x + y}{21}, x = 1,2,3 \;\; y = 1,2$$

Η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της Y όταν $X = 2$ είναι $f_{Y|X=2}(y) = \frac{y+2}{21}, y = 1,2$.

ΛΑΘΟΣ: Η $f_{Y|X=x}(y) = \frac{\frac{x+y}{21}}{f_X(x)}$ και $f_X(x) = \frac{(x+1)+(x+2)}{21} = \frac{2x+3}{21}$. Επομένως, $f_{Y|X=x}(y) = \frac{x+y}{2x+3}, y = 1,2$, οπότε $f_{Y|X=2}(y) = \frac{2+y}{7}, y = 1,2$.

(ζ-1.5) Οι πινακίδες κυκλοφορίας των taxi αποτελούνται από 3 γράμματα (λατινικοί χαρακτήρες), από τα οποία το πρώτο γράμμα είναι πάντα Τ και το δεύτερο Α, και τέσσερες αριθμούς. Το πλήθος των δυνατών πινακίδων κυκλοφορίας των taxi, στις οποίες το 1ο ψηφίο δεν είναι 0, είναι ίσο με 140000.

ΛΑΘΟΣ: Το Λατινικό αλφάβητο έχει 26 χαρακτήρες (δυνατές επιλογές για το 3ο γράμμα της πινακίδας). Για το πλήθος των δυνατών πινακίδων κυκλοφορίας των taxi, στις οποίες το 1ο ψηφίο δεν είναι 0, έχουμε τις εξής δυνατότητες:

γράμματα				**αριθμοί**			
Τ	Α	26	---------	9	10	10	10
1ο	2ο	3ο		1ος	2ος	3ος	4ος

Άρα, από τη Βασική Αρχή Απαρίθμησης, υπάρχουν:

$$26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 234000 \text{ πινακίδες taxi}$$

(η-1.5) Η διάμεσος δ μιάς συνεχούς τ.μ υπάρχει πάντα, είναι η λύση της εξίσωσης $F(\delta) = 0.5$ και είναι μοναδική.

ΛΑΘΟΣ: Η διάμεσος δ μιάς συνεχούς τ.μ υπάρχει πάντα, είναι η λύση της εξίσωσης $F(\delta) = 0.5$ αλλά δεν είναι μοναδική (σελ. 89, τελευταία παράγραφος, τόμος Α). Μοναδική είναι πάντα στην περίπτωση που η $F(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

(θ-1.5) Έστω X συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{8}{x^3}$, $x > 2$. Για την $P(X < 3)$ ισχύει $P(X < 3) = \int_0^3 \frac{8}{x^3} dx$.

ΛΑΘΟΣ: Η $P(X < 3)$ ισούται με:

$$P(X < 3) = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = \int_0^2 0\, dx + \int_2^3 \frac{8}{x^3}\, dx = \int_2^3 \frac{8}{x^3}\, dx$$

(ι-1.5) Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε $P(B) = 1$. Τότε $P(A \cup B) = 1$ και τα Α, Β είναι ανεξάρτητα (προσοχή, το Β δεν είναι απαραίτητα ίσο με το δειγματοχώρο Ω).

ΣΩΣΤΟ: Ισχύει $P(A \cup B) \geq P(B)$ οπότε $P(A \cup B) = 1$. Ακόμα, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) => 1 = P(A) + 1 - P(A \cap B) => P(A \cap B) = P(A) = P(A) \cdot 1 = P(A) \cdot P(B)$, επομένως τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ανεξάρτητα

Άσκηση 2 (14 μονάδες)

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση, ανάμεσα στις (i), (ii), (iii) ή (iv), των παρακάτω παραγράφων (α)-(ζ). Αιτιολογήστε σύντομα την απάντησή σας.

(α-2) Σε ένα δοχείο υπάρχουν 9 σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 έως το 9. Εξάγουμε 6 σφαιρίδια το ένα μετά το άλλο και καταγράφουμε τον 6ψήφιο αριθμό που προκύπτει. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

(i) Το πλήθος των αριθμών που σχηματίζονται και δεν περιέχουν το 2 είναι 60480.

(ii) Το πλήθος των αριθμών που σχηματίζονται και διαιρούνται με το 10 είναι 6720.

(iii) Το πλήθος των αριθμών που σχηματίζονται και διαιρούνται με το 5 είναι 6720.

(iv) Το πλήθος των αριθμών που σχηματίζονται και των οποίων το πρώτο και το τελευταίο ψηφίο είναι 3 είναι 1680.

Σωστή απάντηση είναι η (iii) γιατί, ένας αριθμός διαιρείται με το 5 αν το τελευταίο του ψηφίο είναι 0 ή 5. Δεν μπορεί να είναι 0 (αφού τα ψηφία επιλέγονται από τα σφαιρίδια αριθμημένα απο το 1 έως το 9) θα πρέπει επομένως να είναι 5. Το πλήθος των αριθμών που σχηματίζονται με τελευταίο ψηφίο το 5 είναι το πλήθος διατάξεων των 8 αριθμών ανά 5, δηλαδή $\frac{\mathbf{8!}}{\mathbf{(8-5)!}} = \frac{\mathbf{8!}}{\mathbf{3!}} = \mathbf{6720}$.

(β-2) Για τις από κοινού κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές X,Y ισχύει $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$. Τότε, τι από τα παρακάτω ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ;

(i) Η συνδιασπορά των τ,μ. $Cov(X,Y) = 0$.

(ii) $Var(3X + 6Y) = 9 \cdot Var(X) + 36 \cdot Var(Y)$

(iii) Οι τ.μ. X και Y συνδέονται με μια γραμμική σχέση.

(iv) ο συντελεστής συσχέτισης $\boldsymbol{\rho(X,Y) = 0}$.

Σωστή απάντηση είναι η (iii), γιατί στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y)}} = \frac{E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y)}} = 0$ (επομένως η (iv) ισχύει) που σημαίνει ότι οι τ.μ. ΔΕΝ συνδέονται με μια γραμμική σχέση (σελ. 86, τόμος Α). Ακόμα $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y)}} = 0 =>$ $Cov(X,Y) = 0$, οπότε η (i) ισχύει. Τέλος, $Var(3X + 6Y) = 9 \cdot Var(X) + 36 \cdot Var(Y) + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot Cov(X,Y) = 9 \cdot Var(X) + 36 \cdot Var(Y)$ (σχέση 3.35, σελ. 85, τόμος Α.), δηλαδή και η (ii) ισχύει.

(γ-2) Αν Α και Β δύο ενδεχόμενα για τα οποία ισχύει $P(A \cap B') = 0 = P(A' \cap B)$, τότε τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για τα ενδεχόμενα Α και Β;

(i) $P(A) = P(B)$

(ii) $P(A \cup B) = P(A \cap B)$

(iii) $P(A\Delta B) = 0$ όπου $A\Delta B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

(iv) Ισχύουν όλα τα παραπάνω

Σωστή απάντηση είναι η (iv)

Η (i) ισχύει αφού, $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0 => P(A) = P(A \cap B)$ Ανάλογα, $0 = P(A' \cap B) => P(B) = P(A \cap B)$, οπότε $P(A) = P(B)$.

Η (ii) ισχύει αφού $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + 0 = P(A) = P(A \cap B)$.

Τέλος η (iii) ισχύσει αφού $P(A\Delta B) = P\big((A \cap B') \cup (A' \cap B)\big) = P(A \cap B') + P(A' \cap B) = 0$ (επειδή τα ενδεχόμενα $(A \cap B')$, $(A' \cap B)$ είναι ασυμβίβαστα).

(δ-2) Ένα εξάρτημα παρουσιάζει δύο ειδών βλάβες, τύπου α και β οι οποίες εμφανίζονται ανεξάρτητα η μιά από την άλλη. Η πιθανότητα να εμφανιστεί βλάβη τύπου α είναι 12%, ενώ η πιθανότητα να εμφανιστεί βλάβη τύπου β είναι 15%. Ποιό από τα παρακάτω ενδεχόμενα έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα;

(i) να εμφανιστούν και οι δύο βλάβες συγχρόνως.

(ii) να μην εμφανιστεί καμιά από τις δύο βλάβες.

(iii) να εμφανιστεί μια τουλάχιστον από τις βλάβες.

(iv) να εμφανιστεί βλάβη τύπου β αν είναι γνωστό ότι έχει εμφανιστεί βλάβη τύπου α.

Σωστή απάντηση είναι η (ii) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α={το εξάρτημα παρουσιάζει βλάβη τύπου α} και Β={το εξάρτημα παρουσιάζει βλάβη τύπου β}.

Από υπόθεση τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα (επομένως και τα Α' και Β').

(i) $P(\text{εμφανίζονται και οι δύο βλάβες}) = \mathrm{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)} = 0.12 \cdot 0.15 = \mathbf{0.018}$

(ii) $P(\text{δεν εμφανίζεται καμιά από τις δύο βλάβες}) = \mathrm{P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')} = 0.88 \cdot 0.85 =$ $\mathbf{0.748}$

(iii) $P(\text{εμφανίζεται μιά τουλάχιστον από τις δύο βλάβες}) = \mathrm{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} =$ $\mathrm{P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)} = 0.12 + 0.15 - 0.018 = \mathbf{0.252}$

(iv) $P(\text{εμφανίζεται βλάβη τύπου β δεδομένου ότι έχει εμφανιστεί βλάβη τύπου α}) = P(B|A) =$ $P(B) = \mathbf{0.15}$

(ε-2) Για την τ.μ. X δίνεται ότι $\boldsymbol{E(X) = 3}$ και $\boldsymbol{Var(X) = 15}$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

(i) $E(X^2) = 18$

(ii) Εάν $Y = 2X^2 + 3$ τότε $E(Y) = 39$

(iii) $\mathrm{Var(2X + 3)} = 63$

(iv) Δεν ισχύει τίποτε από τα παραπάνω

Σωστή απάντηση είναι η (iv). Η (i) δεν είναι σωστή γιατί $Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \Rightarrow$ $E(X^2) = Var(X) + (E(X))^2 = 15+3^2 = 24$. Η (ii) δεν είναι σωστή γιατί $E(Y) = 2 \cdot E(X^2) + 3 = 2 \cdot 24 + 3 = 51$. Τέλος, η (iii) δεν είναι σωστή γιατί $\mathrm{Var(2X+3)} = 2^2 \cdot \mathrm{Var(X)} = 4 \cdot 15 = 60$.

(στ-2) Η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{f(x,y) = \beta^2 e^{-\beta(x+y)}, x > 0, y > 0}$$

όπου $\boldsymbol{\beta}$ είναι μία σταθερά.

(i) Η τιμή της σταθεράς $\beta = 2$

(ii) Η τιμή της σταθεράς β μπορεί να είναι οποιαδήποτε θετική πραγματική τιμή.

(iii) Δεν υπάρχει πραγματική τιμή της σταθεράς β ώστε η f να αποτελεί (κοινή) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X.

(iv) Η τιμή της σταθεράς β μπορεί να είναι οποιαδήποτε πραγματική τιμή.

Σωστή απάντηση είναι η (ii) γιατί, για να είναι η $f(x,y)$ (κοινή) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα πρέπει $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \beta^2 e^{-\beta(x+y)} dy\, dx = 1$. Αλλά

$$\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} \beta^2 e^{-\beta(x+y)} dy\right] dx = \beta^2 \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} e^{-\beta y} dy\right] dx$$
$$= \beta^2 \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta y} dy\right) dx = \beta^2 \left(-\frac{1}{\beta} e^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty}\right)\left(-\frac{1}{\beta} e^{-\beta y}\Big|_0^{+\infty}\right) = \beta^2 \frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta}$$
$$= 1$$

Για το παραπάνω αρκεί μόνο β>0 έτσι ώστε, πχ. $\lim_{\beta \to +\infty} e^{-\beta x} = 0$.

(ζ-2) Εάν A και B δύο ενδεχόμενα για τα οποία ισχύει $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.2$ και $P(A' \cap B') = 0.40$, τότε τι από τα παρακάτω ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ:

(i) $P(A \cup B) = 0.60$

(ii) τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα

(iii) τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα

(iv) $P(A \cap B') = 0.40$

Σωστή απάντηση είναι η (iii), αφού εάν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα τότε $P(A \cap B) = 0$ και $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) = 0.2 + 0.5 = 0.7$ που δεν ισχύει γιατί $0.40 = P(A' \cap B') = P\big((A \cup B)'\big) = 1 - P(A \cup B) => P(A \cup B) = 0.60$

Η (i) ισχύει αφού, $0.40 = P(A' \cap B') = P\big((A \cup B)'\big) = 1 - P(A \cup B) => P(A \cup B) = 0.60$.
Η (ii) ισχύει αφού $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) => 0.60 = 0.5 + 0.2 - P(A \cap B) => P(A \cap B) = 0.1 = 0.5 \cdot 0.2 = P(A) \cdot P(B)$ δηλαδή τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα.
Η (iv) ισχύει αφού $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.10 = 0.40$.

Άσκηση 3 (19 μονάδες)

Στο Γενικό Τμήμα ενός Πολυτεχνείου υπάρχουν 15 καθηγητές (άνδρες ή γυναίκες) με τις εξής ειδικότητες: 8 Μαθηματικού, 4 Φυσικού και 3 Χημικού. Πρόκειται να σχηματίσουμε μια τριμελή επιτροπή από αυτά, για ένα μειοδοτικό διαγωνισμό.
(**α-3**) Ποιά η πιθανότητα, στην επιτροπή που σχηματίζεται, να συμμετέχει ένας καθηγητής από κάθε ειδικότητα;
(**β-3**) Ποιά η πιθανότητα, στην επιτροπή που σχηματίζεται να συμμετέχει ένας τουλάχιστον καθηγητής με ειδικότητα Μαθηματικού;
(**γ-3**) Εάν 4 από τους Μαθηματικούς, 1 από τους Φυσικούς και 2 από τους Χημικούς είναι γυναίκες, ποιά η πιθανότητα στην επιτροπή να συμμετέχουν δύο άτομα του ίδιου φύλου;
(**δ**) Εάν η επιτροπή αποτελείται από πρόεδρο, γραμματέα και μέλος:
(**i-3**) Ποιά η πιθανότητα ο πρόεδρος να έχει ειδικότητα Φυσικού;
(**ii-3**) Εάν η αντιπρύτανης οικονομικών υποθέσεων του Πολυτεχνείου (η οποία δεν είναι μέλος του Τμήματος) συμμετέχει πάντα σαν πρόεδρος της επιτροπής, ποιά η πιθανότητα το μέλος να έχει ειδικότητα Μαθηματικού;
(**iii-4**) Ποιά η πιθανότητα στην επιτροπή που σχηματίζεται να συμμετέχει ένας καθηγητής από κάθε ειδικότητα;
(παρατήρηση: στα υποερωτήματα του (δ) δεν μας ενδιαφέρει το φύλο των καθηγητών).

(**α-3**) Το πλήθος των δυνατών επιτροπών είναι ίσο με $\binom{15}{3} = \frac{15!}{3!12!} = 455$, ενώ το πλήθος των δυνατών επιτροπών που περιέχουν έναν καθηγητή από κάθε ειδικότητα ισούται με $\binom{8}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} = 8 \cdot 4 \cdot 3 = 96$. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$P(\eta \text{ επιστροπή έχει ένα μέλος Δ.Ε.Π. από κάθε ειδικότητα}) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{96}{455} = 0.21$$

(**β-3**) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α={η επιτροπή που σχηματίζεται έχει τουλάχιστον έναν Μαθηματικό} οπότε

Α'={η επιτροπή που σχηματίζεται δεν έχει κανένα Μαθηματικό}

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{7}{3}}{\binom{15}{3}} = 1 - \frac{35}{455} = 1 - 0.077 = 0.923$$

(**γ-3**) Υπάρχουν 8 καθηγητές που είναι άνδρες και 7 καθηγητές που είναι γυναίκες.

Ορίζουμε τα γεγονότα:

A={η επιτροπή που σχηματίζεται έχει σαν μέλη δύο άνδρες και μιά γυναίκα} και

B={η επιτροπή που σχηματίζεται έχει σαν μέλη δύο γυναίκες και έναν άνδρα}.

Τα γεγονότα A,B είναι ασυμβίβαστα. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Αλλά

$$P(A) = \frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{28\cdot 7}{455} = 0.43$$

Και

$$P(B) = \frac{\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{8\cdot 21}{455} = 0.37$$

Τελικά $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.43 + 0.37 = 0.80.$

(δ-3) Επειδή η επιτροπή θα έχει πρόεδρο, γραμματέα και μέλος, τα υποερωτήματα είναι προβλήματα διατάξεων. Ο αριθμός των δυνατών επιτροπών σε αυτή την περίπτωση είναι $\frac{15!}{(15-3)!} = 13\cdot 14\ \cdot 15 = 2730$.

(i-3) Εδώ πρέπει να επιλεγεί ένας καθηγητής από τους 4 με ειδικότητα Φυσικού κατά 4 διαφορετικούς τρόπους, και δύο από τους υπόλοιπους 14 καθηγητές κατά $\frac{14!}{(14-2)!} = 13\ \cdot 14 = 182$ διαφορετικούς τρόπους. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$P(\text{ο πρόεδρος να έχει ειδικότητα Φυσικού }) = \frac{4\cdot 182}{2730} = 0.266$$

(ii -3) Το μέλος με ειδικότητα Μαθηματικού μπορεί να επιλεγεί κατά 8 διαφορετικούς τρόπους, ενώ ο/η γραμματέας μπορεί να επιλεγεί (από τους 14 καθηγητές που απομένουν) κατά 14 τρόπους. Οι δυνατοί τρόποι για την περίπτωση αυτή είναι 1*15*14=210 διότι ο πρόεδρος δεν επιλέγεται από το τμήμα. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$P(\text{η αντιπρύτανης είναι πρόεδρος και το μέλος έχει ειδικότητα Μαθηματικού}) = \frac{8\cdot 14}{210} = 0.533$$

(iii-4) Το πλήθος των επιτροπών στην οποία θα συμμετέχει ένας καθηγητής από κάθε ειδικότητα είναι ίσο με $8\cdot 4\cdot 3 = 96$. Υπάρχουν όμως και 3! διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να διαταχθούν οι 3 ειδικότητες (Μαθηματικός, Φυσικός, Χημικός) για να δώσουν η 1η τον πρόεδρο, η 2η το γραμματέα και η 3η το μέλος. Επομένως το πλήθος των διαφορετικών επιτροπών με ένα καθηγητή από κάθε ειδικότητα είναι $3!\cdot 8\cdot 4\cdot 3 = 6\cdot 96 = 576$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$P(\text{ένας καθηγητής από κάθε ειδικότητα}) = \frac{576}{2730} = 0.211$$

<u>Άσκηση 4 (14 μονάδες)</u>

Η Δημόσια Επιχείρηση Πετρελαίου (Δ.Ε.ΠΕ) πρέπει να αποφασίσει αν θα κάνει ή όχι γεωτρήσεις σε διαφορετικές περιοχές της Ηπείρου. Σύμφωνα με την κρίση των υπευθύνων της εταιρείας, η οποία βασίζεται τόσο σε προηγούμενη εμπειρία αλλά και σε αρχική ανάλυση των χαρακτηριστικών των περιοχών, μια περιοχή μπορεί να βρεθεί (χαρακτηριστεί) σε ένα από ακόλουθα τρία ενδεχόμενα-καταστάσεις: ξερή τρύπα, περιοχή με μέτρια κοιτάσματα πετρελαίου και περιοχή με μεγάλα κοιτάσματα πετρελαίου με πιθανότητες 0.65, 0.30 και 0.05 αντίστοιχα. Οι εταιρείες εξόρυξης πετρελαίου χρησιμοποιούν ένα σεισμικό τεστ για την ανίχνευση ύπαρξης πετρελαίου. Το τεστ αυτό έχει θετικά αποτελέσματα στο 80% των περιπτώσεων ύπαρξης μεγάλου κοιτάσματος, στο 60% των περιπτώσεων ύπαρξης μετρίου κοιτάσματος και στο 20% στις περιοχές ξερής τρύπας.

(α-3) Εάν η Δ.Ε.ΠΕ κάνει ένα σεισμικό τεστ, ποια η πιθανότητα το τεστ να βγει θετικό;

(β-2) Ποια είναι η πιθανότητα ένα σεισμικό τεστ, που γίνεται σε μια από τις περιοχές, να βγει θετικό και η περιοχή να περιέχει μέτρια κοιτάσματα πετρελαίου;

(γ-3) Εάν ένα σεισμικό τεστ που κάνει η Δ.Ε.ΠΕ έχει θετικό αποτέλεσμα, ποιά η πιθανότητα να έχει γίνει σε περιοχή που χαρακτηρίζεται ξερή τρύπα;

(δ-2) Είναι τα γεγονότα «το αποτέλεσμα του σεισμικού τεστ είναι αρνητικό» και η «περιοχή έχει μεγάλη ποσότητα πετρελαίου» ανεξάρτητα;

(ε-4) Εάν ένα σεισμικό τεστ έχει θετικό αποτέλεσμα, ποιά η πιθανότητα να έχει γίνει σε περιοχή με μέτρια ή μεγάλη ποσότητα πετρελαίου;

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

$\Pi_1 = \{$η περιοχή χαρακτηρίζεται σαν ξερή τρύπα$\}$

$\Pi_2 = \{$η περιοχή διαθέτει μέτρια κοιτάσματα πετρελαίου$\}$

$\Pi_3 = \{$η περιοχή διαθέτει μεγάλα κοιτάσματα πετρελαίου$\}$

Θ= {το σεισμικό τεστ έχει αποτέλεσμα θετικό},

A= {το σεισμικό τεστ έχει αποτέλεσμα αρνητικό}=Θ',

Από τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει ότι:

$$P(\Pi_1) = 0.65, \quad P(\Pi_2) = 0.30, \quad P(\Pi_3) = 0.05$$
$$P(\Theta|\Pi_1) = 0.2, \quad P(\Theta|\Pi_2) = 0.6, \quad P(\Theta|\Pi_3) = 0.8,$$

(α-3) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(\Theta)$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας 2.13 (σελ. 41, Τόμος Α) παίρνουμε:

$$P(\Theta) = P(\Theta|\Pi_1)\cdot P(\Pi_1) + P(\Theta|\Pi_2)\cdot P(\Pi_2) + P(\Theta|\Pi_3)\cdot P(\Pi_2) = 0.2\cdot 0.65 + 0.6\cdot 0.30 + 0.8\cdot 0.05 = 0.35$$

(β-2) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η:

$$P(\Theta \cap \Pi_2) = P(\Theta|\Pi_2)\cdot P(\Pi_2) = 0.6\cdot 0.30 = 0.18$$

(γ-3) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(\Pi_1|\Theta)$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του *Bayes* παίρνουμε:

$$P(\Pi_1|\Theta) = \frac{P(\Theta|\Pi_1)\cdot P(\Pi_1)}{P(\Theta)} = \frac{0.2\cdot 0.65}{0.35} = 0.37$$

(δ-2) Τα δύο ενδεχόμενα δεν είναι ανεξάρτητα αφού:

$$P(A \cap \Pi_3) = P(A|\Pi_3) \cdot P(\Pi_3) = 0.2 \cdot 0.05 = 0.01 \neq P(A) \cdot P(\Pi_3) = \big(1 - P(\Theta)\big) \cdot P(\Pi_3)$$
$$= 0.65 \cdot 0.05 = 0.0325$$

(ε-4) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(\Pi_2 \cup \Pi_3|\Theta)$. Αλλά

$$P(\Pi_2 \cup \Pi_3|\Theta) = \frac{P\big((\Pi_2 \cup \Pi_3) \cap \Theta\big)}{P(\Theta)} = \frac{P\big((\Pi_2 \cap \Theta) \cup (\Pi_3 \cap \Theta)\big)}{P(\Theta)} = \frac{P(\Pi_2 \cap \Theta) + P(\Pi_3 \cap \Theta)}{P(\Theta)}$$
$$= P(\Pi_2|\Theta) + P(\Pi_3|\Theta) = 0.5143 + 0.1143 = 0.6286$$

γιατί τα γεγονότα $\Pi_2 \cap \Theta$ και $\Pi_3 \cap \Theta$ είναι ασυμβίβαστα και

$$P(\Pi_2|\Theta) = \frac{P(\Theta|\Pi_2) \cdot P(\Pi_2)}{P(\Theta)} = \frac{0.6 \cdot 0.30}{0.35} = 0.5143$$

και

$$P(\Pi_3|\Theta) = \frac{P(\Theta|\Pi_3) \cdot P(\Pi_3)}{P(\Theta)} = \frac{0.8 \cdot 0.05}{0.35} = 0.1143$$

Άσκηση 5 (19 μονάδες)

Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

όπου c μια σταθερά.

(α-2) Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς c.

(β-4) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X

(γ-4) Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X .

(δ-2) Να υπολογιστεί η πιθανότητα η X να παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 0.25.

(ε-3) Αν είναι γνωστό πως η X είναι μεγαλύτερη του 0.5, ποια είναι η πιθανότητα να είναι μικρότερη του 0.75;

(στ-4) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(6X^2 > 5X - 1)$,

(α-2) Για να είναι η $f(x)$ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σελ. 50, Τόμος Α) θα πρέπει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} c(1-x)dx = c\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = c\left(1 - \frac{1}{2}\right) = c\frac{1}{2} = 1$$

Επομένως $c = \mathbf{2}$

(β-4) Από τις σχέσεις (3.19) και (3.29) (σελ. 78 και 82 αντίστοιχα, τόμος Α) έχουμε:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 2x(1-x)dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \frac{1}{9} = \int_0^1 2x^2(1-x)dx - \frac{1}{9} = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 - \frac{1}{9} =$$

$$2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{9} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \mathbf{\frac{1}{18}}$$

(γ-4) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι ίση με (σελ. 63, Τόμος Α):

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t 2(1-x)dx & 0 \le t \le 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^t & 0 \le t \le 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t - t^2 & 0 \le t \le 1 \\ 1 & t > 1. \end{cases}$$

(δ-2) Για τη ζητούμενη πιθανότητα

$$P(X \ge 0.25) = \int_{0.25}^1 2(1-x)dx = 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{0.25}^1 = 0.5625$$

(ε-4) Η πιθανότητα που ζητείται είναι η

$$P(X \le 0.75 | X \ge 0.5) = \frac{P(X \le 0.75, X \ge 0.5)}{P(X \ge 0.5)} = \frac{P(0.5 \le X \le 0.75)}{P(X \ge 0.5)} = \frac{P(0.5 < X \le 0.75)}{P(X \ge 0.5)}$$

Με τη βοήθεια της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής που βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$$P(X \le 0.75 | X \ge 0.5) = \frac{P(X \le 0.75,\ X \ge 0.5)}{X \ge 0.5} = \frac{F(0.75) - F(0.5)}{1 - F(0.5)} = \frac{1.5 - 0.75^2 - 1 + 0.5^2}{1 - 1 + 0.5^2}$$
$$= 0.75$$

(στ-4) Για τη ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(6X^2 > 5X - 1) = P(6X^2 - 5X + 1 > 0) = P\left(6\left(X - \frac{1}{3}\right)\left(X - \frac{1}{2}\right) > 0\right) =$$

$$P\left(X < \frac{1}{3} \text{ ή } X > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(\frac{1}{3} \le X \le \frac{1}{2}\right) = 1 - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 2(1-x)dx = 1 - 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/3}^{1/2} = \frac{29}{36}$$

<u>Άσκηση 6 (19 μονάδες)</u>

Έστω (X, Y) ένα διδιάστατο τυχαίο διάνυσμα με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(**α-5**) Βρείτε τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X, Y.

(**β-2**) Εξετάστε αν οι μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες ή όχι.

(**γ-3**) Υπολογίστε τη μέση τιμή της X.

(**δ-2**) Βρείτε τη δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ X όταν $Y = 2$.

(**ε-4**) Βρείτε την πιθανότητα $P(X > \frac{2}{3}|Y = 2)$

(**στ-3**) Βρείτε τη διάμεσο της τ.μ Χ.

(α-5) Για την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X. :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{+\infty} xe^{-x(1+y)}dy = -x\left[\frac{1}{x}e^{-x(1+y)}\right]_0^{+\infty} = e^{-x}, \qquad x > 0$$

Για την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x(1+y)}dx = -\frac{1}{1+y}\int_0^{+\infty} xde^{-x(1+y)}$$
$$= -\left[\frac{x}{1+y}e^{-x(1+y)}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{1+y}\int_0^{+\infty} e^{-x(1+y)}dx = -\frac{1}{(1+y)^2}\left[e^{-x(1+y)}\right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{(1+y)^2}, \qquad y > 0$$

(β-2) Για να είναι ανεξάρτητες οι τ.μ. μεταβλητές X, Y θα πρέπει να ισχύει $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ για κάθε $(x,y) \in R^2$. Επειδή

$$f_X(1) \cdot f_Y(1) = e^{-1}\frac{1}{(1+1)^2} = e^{-1}\frac{1}{4} \neq 1e^{-2x} = f(1,1)$$

οι τ.μ. X και Y **δεν είναι ανεξάρτητες**.

(γ-3) Άμεσα, με εφαρμογή του τύπου (3.19), Τόμος Α, σελ. 78, λαμβάνουμε

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} xde^{-x} = [-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 0 + [-e^{-x}]_0^{+\infty}$$
$$= 1$$

(δ-2) Η δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ X όταν $Y = 2$ ισούται με

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{xe^{-x(y+1)}}{\frac{1}{(1+y)^2}} = x(1+y)^2 e^{-x(y+1)}, x > 0$$

Για $Y = 2$, θα είναι

$$f_{X|Y=2}(y) = 9xe^{-3x}, x > 0$$

(ε-4) Η ζητούμενη πιθανότητα, χρησιμοποιώντας τη δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ Χ όταν $Y = 2$ που υπολογίσαμε, είναι ίση με:

$$P\left(X > \frac{2}{3}|Y = 2\right) = \int_{\frac{2}{3}}^{+\infty} 9xe^{-3x}\,dx = -3\int_{\frac{2}{3}}^{+\infty} xde^{-3x} = -3[xe^{-3x}]_{\frac{2}{3}}^{+\infty} + 3\int_{\frac{2}{3}}^{+\infty} e^{-3x}\,dx =$$

$$-3\left(0-\frac{2}{3}e^{-2}\right)-\left[e^{-3x}\right]_{\frac{2}{3}}^{+\infty}=2e^{-2}-0+e^{-2}=3e^{-2}$$

(στ-3) Η διάμεσος της τ.μ. X είναι η λύση της εξίσωσης $\int_0^{\delta} f_X(x)\,dx=\frac{1}{2}$

Αλλά $\int_0^{\delta} f_X(x)\,dx=\int_0^{\delta} e^{-x}\,dx$=$-e^{-x}|_0^{\delta}=1-e^{-\delta}=\frac{1}{2}=>e^{-\delta}=\frac{1}{2}=>\delta=-ln\left(\frac{1}{2}\right)=0.69$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!