ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ – ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2022

ΛΥΣΕΙΣ ΑΡΝΟΣ

Θέμα Α - Λύσεις

Α1. Απόδειξη σελίδα 186 Σχολικού Βιβλίου

Α2. Ορισμός σελίδα 142 Σχολικού Βιβλίου

Α3. Ορισμός σελίδα 161 Σχολικού Βιβλίου

Α4.

α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Λάθος

ε. Λάθος

Θέμα Β - Λύσεις

Έχουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις:

- $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, με f: $(-\infty,1] \to \mathbb{R}$
- $g(x) = \sqrt{x}$, μεg: $[0,+\infty) \to \mathbb{R}$

B1. Είναι $f(x) = (x^2 - 1)^2$. Πρέπει να βρούμε τα $x \in [0,+\infty)$, έτσι ώστε:

$$g(x) \in (-\infty,1], \text{ δηλαδή } \sqrt{x} \in (-\infty,1]$$

Επειδή $\sqrt{x} \geq 0$, πρέπει $\sqrt{x} \in [0,1]$, άρα $x \in [0,1]$

Το πεδίο ορισμού της fog είναι το [0, 1] και $fog(x) = f(g(x)) = (x-1)^2$.

Άρα

$$fog: [0,1] \to \mathbb{R}, \text{ με } fog(x) = (x-1)^2$$

B2. Έστω h(x) = h(y).Δηλαδή $(x-1)^2 = (y-1)^2$

Επειδή x-1, y-1≤ 0, θα είναι x-1 = y-1,που δίνει x=y. Άρα η h είναι «1-1».

Είναι $h(x) = y \Leftrightarrow (1-x)^2 = y$.

Θα πρέπει y ≥ 0

$$(1-x)^2 = y \Rightarrow 1-x = \sqrt{y} \Rightarrow x = 1-\sqrt{y}$$

Άρα: $h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}$

Το πεδίο τιμών της $h(x) = (1-x)^2$ είναι το [0, 1].

Άρα: $h^{-1}: [0,1] \to [0,1]$, με $h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}$

Β3.

i) Θα δείξουμε ότι η φ είναι συνεχής. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχής στο x = 1.

$$\lim_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{x}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}=\varphi(1)$$

Η φ είναι συνεχής .Επειδή φ(0) = 1, φ(1) = ½, είναι φ(0) ≠ φ(1).

Αρα πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος ενδιαμέσων Τιμών.

ii) Επειδή στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ η συνάρτηση $\eta\mu$ είναι γνησίως αύξουσα, θα έχουμε ότι:

$$\eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1$$

Είναι $\varphi(1)<\eta\mu\alpha<\varphi(0)$.

Επειδή φ συνεχής , το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών δίνει ότι υπάρχει x_o $\in(0,1)$ με $\varphi(x_o)=\eta\mu\alpha$

Θέμα Γ - Λύσεις

Γ1

Για $x<-1$ είναι $(\mathrm{f(x)}+2x)'=0$ και παίρνουμε $\mathrm{f(x)}+2x=c$

Για $x>-1$ είναι $(\mathrm{f(x)}-\mathrm{x}^3+x)'=0$ οπότε $\mathrm{f(x)}-\mathrm{x}^3+x=d$

Αφού περνάει από την αρχή των αξόνων είναι $\mathrm{f}(0)=0$

Συμπεραίνουμε ότι $d=0$

Άρα για $x>-1$ είναι $\mathrm{f(x)}=\mathrm{x}^3-x$

Αλλά η συνάρτηση είναι συνεχής στο -1

Θα πρέπει $\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+} f(x)$

Υπολογίζοντας τα όρια έχουμε $2+c=0$ δηλαδή $c=-2$

Επειδή και οι δύο κλάδοι στο -1 συμπίπτουν έχουμε

Το ζητούμενο.

Γ2

Αφού $x_0>-1$ θα είναι $f'(x_0)=3x_0^2-1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=x_0^3-x_0+(3x_0^2-1)(x-x_0)$$

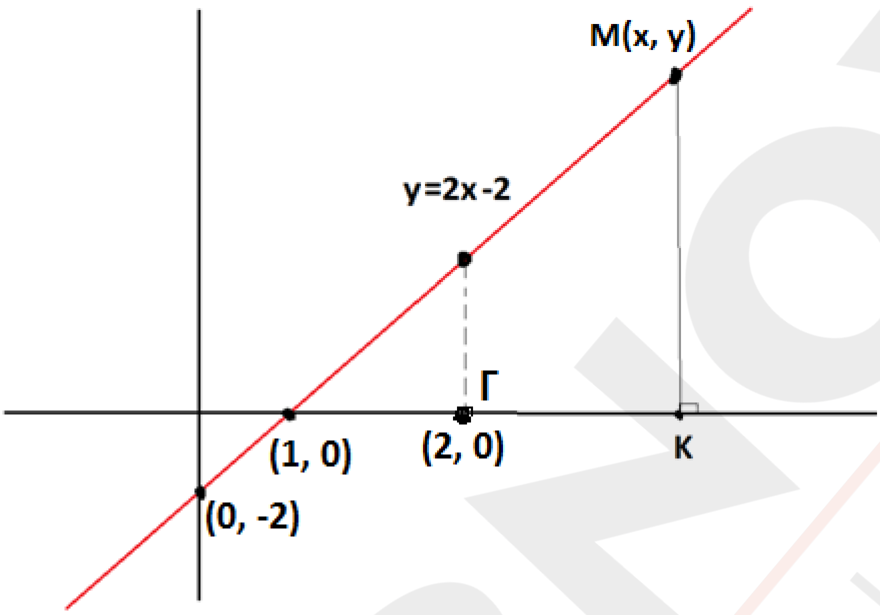
Για $x=0$ πρέπει να δίνει $y=-2$

Έτσι θα είναι $-2=x_0^3-x_0-3x_0^2+x_0$

Προκύπτει ότι $x_0=1$ οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y=2(x-1)=2x-2$$

Γ3.



Έχουμε ότι $x = x(t), y = y(t)$

Το εμβαδό του τριγώνου ΜΚΓ είναι

$$\mathrm{E}(t) = \frac{1}{2}(x(t)-2)y(t) = \frac{1}{2}(x(t)-2)2(x(t)-1) =$$

$$= (x(t)-2)(x(t)-1) = x^2(t) - 3x(t) + 2$$

Την χρονική στιγμή t_0 είναι $x(t_0) = 3, x'(t_0) = 2$.

Αφού $\mathrm{E}'(t) = 2x\ (t)x'(t) - 3x'(t)$

θα είναι

$$\mathrm{E}'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) - 3x'(t_0) = 2\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot 2 = 12 - 6 = 6 \text{τ.μ/sec}$$

Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής.

Γ4.

Θα το σπάσουμε σε δύο όρια

Για $x<-1$ είναι $f(x)=-2x-2$.

Επειδή $-\dfrac{1}{|f(x)|}\le\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\le\dfrac{1}{|f(x)|}$ το κριτήριο παρεμβολής μας δίνει ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0$$

Όταν $x\to-\infty$ είναι $-x>0$.

Έτσι θα έχουμε ότι $\dfrac{f(-x)}{1-x^3}=\dfrac{(-x)^3-(-x)}{1-x^3}=\dfrac{x^3+x}{x^3-1}$

και είναι άμεσο ότι

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x}{x^3-1}=1$$

Άρα το ζητούμενο όριο είναι $0+1=1$.

Θέμα Δ - Λύσεις

Δ1

i) Είναι $f(x) = x - \ln x - \ln 3$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Άμεσα διαπιστώνουμε ότι στο σημείο 1 έχει ολικό ελάχιστο, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

Είναι $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να δείξουμε την ύπαρξη ακριβώς δύο ριζών.

Ο ένας είναι :

Έχουμε $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - \ln\frac{3}{4} > 0$ και $f(2) = 2 - \ln 6 > 0$ αφού $e^2 > (2,5)^2 > 6$.

Από Bolzano υπάρχουν $\frac{1}{4} < x_1 < 1, 1 < x_2 < 2$ με $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$.

Άρα έχει τουλάχιστον δύο ρίζες.

Αν είχε παραπάνω από δύο ο Rolle θα έδινε ότι η $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες.

Τότε όμως ο Rolle για την $f'(x)$ θα έδινε ότι η $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Αλλά $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$.ΑΤΟΠΟ.

Άρα έχει ακριβώς δύο ρίζες.

ii) Αφού $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ η συνάρτηση είναι κυρτή.

Δ2.

Είναι φανερό ότι για $x\in(x_1,x_2)$ είναι $f(x)<0$.

Έτσι θα έχουμε ότι

$$E=-\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=-\int_{x_1}^{x_2}(x-\ln x-\ln 3)dx=(x_2-x_1)\ln 3-\frac{1}{2}((x_2)^2-(x_1)^2)+\int_{x_1}^{x_2}\ln x dx$$

Επειδή είναι

$$\int_{x_1}^{x_2}\ln x dx=\int_{x_1}^{x_2}(x)'\ln x dx=x_2\ln x_2-x_1\ln x_1-\int_{x_1}^{x_2}dx=x_2\ln x_2-x_1\ln x_1-(x_2-x_1)$$

θα πάρουμε

$$E=(x_2-x_1)\ln 3-\frac{1}{2}((x_2)^2-(x_1)^2)+x_2\ln x_2-x_1\ln x_1-(x_2-x_1)$$

Αλλά από την $x_2-\ln x_2-\ln 3=0$ παίρνουμε ότι

$x_2\ln x_2=(x_2)^2-x_2\ln 3$ και όμοια $x_1\ln x_1=(x_1)^2-x_1\ln 3$

Αντικαθιστώντας το εμβαδό είναι

$$E=(x_2-x_1)\ln 3-\frac{1}{2}((x_2)^2-(x_1)^2)+((x_2)^2-x_2\ln 3)-((x_1)^2-x_1\ln 3)-(x_2-x_1)$$

$$=\frac{1}{2}((x_2)^2-(x_1)^2)-(x_2-x_1)=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$$

Δ3

Επειδή για $x\in(x_1,x_2)$ είναι $f(x)<0$ και για $x\notin(x_1,x_2)$ είναι $f(x)\geq 0$, θα έχουμε $f(2-x_1)<0\Leftrightarrow x_1<2-x_1<x_2$

Αλλά επειδή $x_1<1$ η αριστερή ισχύει.

Η δεξιά είναι ισοδύναμη με την $2<x_2+x_1$

Αυτή ισχύει γιατί προκύπτει από το τύπο που βρήκαμε για

το εμβαδό στο Δ3.

Δ4.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης στο x_2 είναι

$$y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$$

Επειδή η συνάρτηση είναι κυρτή θα έχουμε

$$f(x) > f'(x_2)(x - x_2) \text{ για } x \neq x_2.$$

Επειδή στο 1 η συνάρτηση έχει ολικό ελάχιστο θα είναι

$$f(x) > f(1) = 1 - \ln 3 \text{ για } x \neq 1$$

Προσθέτοντας θα πάρουμε ότι

$$2f(x) > 1 - \ln 3 + f'(x_2)(x - x_2)$$

δηλαδή

$$2f(x) + \ln 3 > 1 + f'(x_2)(x - x_2)$$

Η τελευταία ισχύει για κάθε $x \neq 1, x_2$.

Προφανώς ισχύει και για $x = 1$ η $x = x_2$

Άρα ισχύει για κάθε $x > 0$

Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση.