

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της πραγματικής παραμέτρου $\lambda \neq 0$, για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{\lambda(x+3)} + \frac{6\lambda-3}{x(3-x)(x+3)} = \frac{1}{x(3-x)}$$

έχει δυο λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους που ικανοποιούν τη σχέση: $|x_1 - x_2| = 7$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(x+3)} + \frac{6\lambda-3}{x(3-x)(x+3)} &= \frac{1}{x(3-x)} \\ \Leftrightarrow x(3-x) + 6\lambda^2 - 3\lambda &= \lambda(x+3) \Leftrightarrow 3x - x^2 + 6\lambda^2 - \lambda x - 6\lambda = 0, \quad x \neq 0, \pm 3 \\ \Leftrightarrow x^2 + (\lambda-3)x + 6\lambda - 6\lambda^2 &= 0, \quad x \neq 0, \pm 3. \end{aligned}$$

Η τελευταία έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4(6\lambda - 6\lambda^2) = 25\lambda^2 - 30\lambda + 9 = (5\lambda - 3)^2 \geq 0$$

και για $\lambda \neq \frac{3}{5}$, έχει δυο λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους

$$x_1 = 2\lambda, \quad x_2 = 3 - 3\lambda.$$

Λόγω του περιορισμού:

$$x_1 \neq 0, \pm 3, \text{ οπότε } \lambda \neq 0, \pm \frac{3}{2} \text{ και } x_2 \neq 0, \pm 3, \text{ οπότε } \lambda \neq 0, 1, 2.$$

Επομένως, για $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{0, 1, 2, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right\}$, πρέπει να ισχύει:

$$|x_1 - x_2| = 7 \Leftrightarrow |5\lambda - 3| = 7 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ (απορρίπτεται)} \text{ ή } \lambda = -\frac{4}{5},$$

οπότε η ζητούμενη τιμή είναι $\kappa = -\frac{4}{5}$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x, y) = x^7 + x^6 y + x^5 y^2 + x^4 y^3 + x^3 y^4 + x^2 y^5 + x y^6 + y^7, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x, y)$ ως γινόμενο πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2.

(β) Αν $xy = 1, x, y > 0$, να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x, y)$ και τις τιμές των x, y για τις οποίες λαμβάνεται.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}
P(x, y) &= x^7 + x^6y + x^5y^2 + x^4y^3 + x^3y^4 + x^2y^5 + xy^6 + y^7 \\
&= x(x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6) + y(x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6) \\
&= (x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6)(x + y) = [x^4(x^2 + y^2) + y^4(x^2 + y^2)](x + y) \\
&= (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y) = (x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2y^2)(x^2 + y^2)(x + y) \\
&= [(x^2 + y^2)^2 - (\sqrt{2}xy)^2](x^2 + y^2)(x + y) \\
&= (x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2)(x + y).
\end{aligned}$$

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε την παραγοντοποίηση

$$P(x, y) = (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y).$$

Θεωρώντας $xy = 1$, $x, y > 0$, έχουμε τις ανισότητες:

$$x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2 = 2 \quad (\text{η ισότητα ισχύει όταν } x = y = 1),$$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy = 2 \quad (\text{η ισότητα ισχύει όταν } x = y = 1),$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2 \quad (\text{η ισότητα ισχύει όταν } x = y = 1),$$

από τις οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$P(x, y) = (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y) \geq 8,$$

όπου η ισότητα ισχύει για $x = y = 1$.

Πρόβλημα 3

Ο Γιάννης διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για το μέσο όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- Από τις 1 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.
- Από τις 11 μέχρι και τις 25 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.
- Από τις 16 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.

(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 16 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 20, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

Λύση

(α) Επειδή στα δεδομένα χρονικά διαστήματα υπάρχουν κοινές μέρες θεωρούμε τους μέσους όρους των σελίδων που διαβάστηκαν σε κατάλληλα υποδιαστήματα ως εξής:

- από τις 1 μέχρι και τις 10 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν α ,
- από τις 11 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν β ,
- από τις 16 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν γ ,
- από τις 21 μέχρι και τις 25 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν δ ,
- από τις 26 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν ε .

Τότε, σύμφωνα με τους δεδομένους μέσους όρους, θα έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{10\alpha + 5\beta + 5\gamma}{20} = 30 \\ \frac{5\beta + 5\gamma + 5\delta}{15} = 20 \\ \frac{5\gamma + 5\delta + 5\varepsilon}{15} = 10 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + \beta + \gamma = 120 \\ \beta + \gamma + \delta = 60 \\ \gamma + \delta + \varepsilon = 30 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Αν Σ είναι ο αριθμός των σελίδων του βιβλίου, τότε λόγω των (1) και (3), θα έχουμε:

$$\Sigma = 10\alpha + 5\beta + 5\gamma + 5\delta + 5\varepsilon = 5 \cdot [(2\alpha + \beta + \gamma) + (\gamma + \delta + \varepsilon) - \gamma] = 5(150 - \gamma). \quad (4)$$

Από την (3) προκύπτει ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του γ είναι $\gamma_{\max} = 30$, η οποία μπορεί να ληφθεί, αν πάρουμε $2\alpha + \beta = 120$, $\beta + \delta = 30$, $\delta + \varepsilon = 0$, με μία πιθανή λύση $\alpha = 45$, $\beta = 30$, $\delta = \varepsilon = 0$.

Επιπλέον, η μικρότερη δυνατή τιμή του γ είναι $\gamma_{\min} = 0$, η οποία μπορεί να ληφθεί, αν πάρουμε $2\alpha + \beta = 120$, $\beta + \delta = 60$, $\delta + \varepsilon = 30$ με μία πιθανή λύση $\alpha = \beta = 40$, $\delta = 20$, $\varepsilon = 10$.

Επομένως, από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\Sigma_{\min} = 5(150 - \gamma_{\max}) = 5(150 - 30) = 600,$$

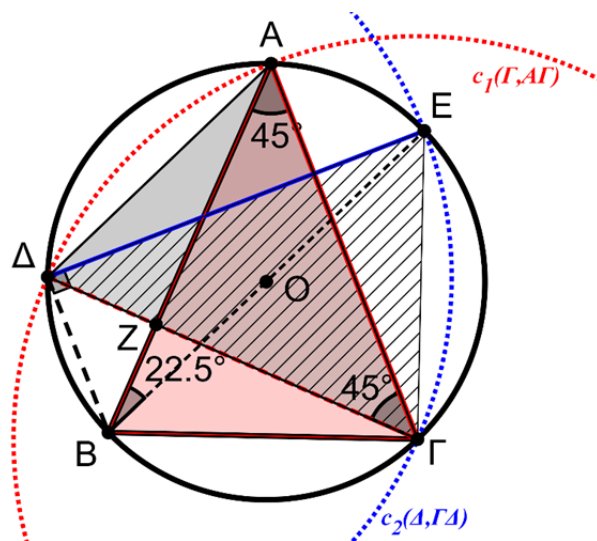
$$\Sigma_{\max} = 5(150 - \gamma_{\min}) = 5(150 - 0) = 750.$$

(β) Αν δίνεται ότι $\gamma = 10$, τότε $\Sigma = 5(150 - 10) = 650$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ με $\hat{A} = 45^\circ$. Ο κύκλος $c_1(\Gamma, A\Gamma)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο Δ . Ο κύκλος $c_2(\Delta, \Gamma\Delta)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο E . Αν η $\Gamma\Delta$ τέμνει την AB στο Z , να αποδείξετε ότι τα σημεία B, O, E είναι συνευθειακά και ότι η OZ είναι παράλληλη στην ΔE .

Λύση



Σχήμα 4

Από την εκφώνηση του προβλήματος ισχύουν οι παρακάτω ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων: $AB = A\Gamma$ ($AB\Gamma$ ισοσκελές), $\Gamma\Delta = A\Gamma$ (ακτίνας του κύκλου c_1) και $\Gamma\Delta = \Delta E$

(ακτίνες του κύκλου c_2)

Από τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$AB = AG = GD = DE \quad (1).$$

Ισχύουν επίσης οι ισότητες γωνιών:

$$\hat{AGB} = \hat{ABG} = \hat{GDA} = \hat{DAG} = \hat{DEG} \quad (2)$$

Επομένως τα ισοσκελή τρίγωνα ABG , GDA και DGE είναι ίσα, οπότε θα είναι:

$$\hat{GDE} = \hat{DGA} = \hat{BAG} = 45^\circ.$$

Επομένως, είναι $\hat{ABE} = \hat{ABG} - \hat{EBG} = 67,5^\circ - 45^\circ = 22,5^\circ$ και επιπλέον ισχύει:

$$\hat{ABO} = \frac{180^\circ - \hat{AOB}}{2} = \frac{180^\circ - 135^\circ}{2} = 22,5^\circ$$

Από την ισότητα $\hat{ABE} = \hat{ABO}$, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία B, O, E είναι συνευθειακά.

Αφού τα σημεία B, O, E είναι συνευθειακά, η γωνία BDE είναι ορθή, οπότε: $AB \perp DE$.

Επίσης $\hat{BAZ} = \hat{BZD} = 45^\circ \Rightarrow Z$ ανήκει στη μεσοκάθετο του BD , οπότε $AB \perp OZ$. Από τις καθετότητες $AB \perp DE$ και $AB \perp OZ$, συμπεραίνουμε $DE \parallel OZ$.