

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με άθροισμα $\alpha + \beta = 1$ είναι τέτοιοι ώστε

$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = x, x \geq 2$, να προσδιορίσετε την τιμή του x έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^3 + \beta^3} = \frac{13}{6}.$$

Λύση

Από τη δεδομένη σχέση $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = x, x > 1$, έχουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 = x\alpha\beta \quad (1)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη της (1) διαδοχικά επί α και β , και πρόσθεση στη συνέχεια κατά μέλη των δύο σχέσεων που προκύπτουν, έχουμε:

$$\alpha^3 + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + \beta^3 = x\alpha^2\beta + x\alpha\beta^2 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \alpha\beta(\alpha + \beta) = x\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\stackrel{\alpha+\beta=1}{\Rightarrow} \alpha^3 + \beta^3 = (x-1)\alpha\beta. \quad (2)$$

Επομένως, έχουμε;

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{(x-1)\alpha\beta}{x\alpha\beta} = \frac{x-1}{x}$$

και ομοίως

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^3 + \beta^3} = \frac{x\alpha\beta}{(x-1)\alpha\beta} = \frac{x}{x-1}.$$

Επομένως η δεδομένη ισότητα γίνεται εξίσωση με άγνωστο το x :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x-1} &= \frac{13}{6} \Leftrightarrow 6\left[(x-1)^2 + x^2\right] = 13x(x-1) \Leftrightarrow 12x^2 - 12x + 6 = 13x^2 - 13x \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ (απορρίπτεται, αφού } x > 1) \text{ ή } x = 3. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, ω με $x - 2y + \omega > 0$, $2x - y + \omega > 0$ ισχύει:

$$x - 2y + \omega + \frac{1}{x - 2y + \omega} \leq 2 \quad (1)$$

$$2x - y + \omega + \frac{1}{2x - y + \omega} \leq 2, \quad (2)$$

να αποδείξετε ότι: $2020(x + y)^{2021} + \omega^2 - 2\omega \geq -1$.

Λύση

Είναι γνωστό ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha > 0$ ισχύει:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \text{ (με την ισότητα να ισχύει για } \alpha = 1).$$

Θέτοντας τώρα όπου α το $x - 2y + \omega$ και $2x - y + \omega$ στην προηγούμενη σχέση, προκύπτουν οι ανισοτικές σχέσεις:

$$x - 2y + \omega + \frac{1}{x - 2y + \omega} \geq 2 \quad (3)$$

$$2x - y + \omega + \frac{1}{2x - y + \omega} \geq 2 \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3), (4) συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι ισότητες:

$$x - 2y + \omega + \frac{1}{x - 2y + \omega} = 2 \quad (5)$$

$$2x - y + \omega + \frac{1}{2x - y + \omega} = 2, \quad (6)$$

οπότε $x - 2y + \omega = 1$ και $2x - y + \omega = 1$ από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι $x + y = 0$. Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\omega^2 - 2\omega \geq -1 \Leftrightarrow (\omega - 1)^2 \geq 0 \text{ (που ισχύει).}$$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β, γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:

- (i) ο $2\alpha - 1$ είναι πολλαπλάσιο του β , (ii) ο $2\beta - 1$ είναι πολλαπλάσιο του γ και
(iii) ο $\gamma - 1$ είναι πολλαπλάσιο του α .

Λύση

Για να ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες πρέπει να υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ, λ, μ τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

$$2\alpha - 1 = \kappa\beta, \quad 2\beta - 1 = \lambda\gamma, \quad \gamma - 1 = \mu\alpha.$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις λύνοντας ως προς α βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \kappa\beta + 1 = \kappa \left(\frac{\lambda\gamma + 1}{2} \right) + 1 = \kappa \left(\frac{\lambda(\mu\alpha + 1) + 1}{2} \right) + 1 \\ \Rightarrow 4\alpha &= \kappa\lambda\mu\alpha + \kappa\lambda + \kappa + 2 \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{\kappa\lambda + \kappa + 2}{4 - \kappa\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Επομένως, μία αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη λύσης είναι:

$$4 - \kappa\lambda\mu > 0 \Leftrightarrow \kappa\lambda\mu < 4.$$

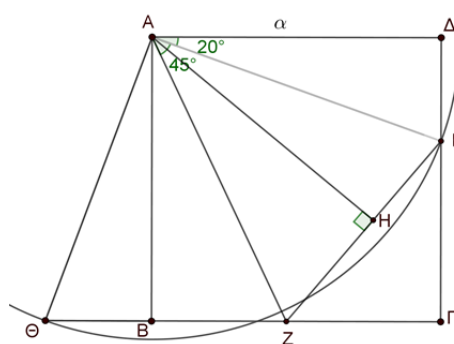
Οι κ, λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, αφού $2\alpha - 1 > 0$, $2\beta - 1 > 0$ και $\gamma - 1 > 0$. Επιπλέον, οι κ, λ πρέπει να είναι περιττοί, όπως προκύπτει από τις δύο πρώτες εξισώσεις. Επομένως, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\kappa = \lambda = \mu = 1$. Τότε $\alpha = \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$, άτοπο.
- $\kappa = \lambda = 1, \mu = 2$. Τότε:
 $\alpha = 2, \gamma - 1 = 2\alpha = 4, 2\beta - 1 = \gamma \Rightarrow \alpha = 2, \gamma = 5, \beta = 3 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 5)$
- $\kappa = 3, \lambda = \mu = 1$. Τότε:
 $\alpha = 8, \gamma - 1 = \alpha, 2\beta - 1 = \gamma \Rightarrow \alpha = 8, \gamma = 9, 2\beta = 10 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (8, 5, 9).$

- $\kappa=1, \lambda=3, \mu=1$. Τότε:
 $\alpha=6, \gamma-1=\alpha, 2\beta-1=3\gamma \Rightarrow \alpha=6, \gamma=7, 2\beta=22 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma)=(6, 11, 7)$.
- $\kappa=\lambda=1, \mu=3$. Τότε:
 $\alpha=4, \gamma-1=3\alpha, 2\beta-1=\gamma \Rightarrow \alpha=6, \gamma=13, 2\beta=14 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma)=(4, 7, 13)$.

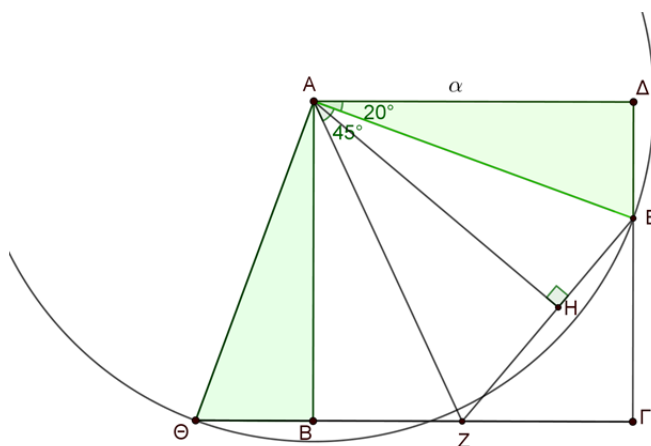
Πρόβλημα 4

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α . Θεωρούμε σημείο E πάνω στην πλευρά $\Gamma\Delta$ και σημείο Z πάνω στην πλευρά $B\Gamma$ έτσι ώστε $\angle A\hat{E} = 20^\circ$ και $\angle E\hat{A}Z = 45^\circ$. Ο κύκλος γ κέντρου A και ακτίνας AE τέμνει την προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ προς το μέρος του B σε σημείο Θ έτσι ώστε το B να βρίσκεται μεταξύ των σημείων Z και Θ . Φέρουμε και το ύψος AH του τριγώνου AZE . Να αποδείξετε ότι $Z\Theta = ZE$ και υπολογίσετε το μήκος του ύψους AH συναρτήσει του α .



Σημείωση: Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.

Λύση



Σχήμα 3

Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Theta$ είναι ορθογώνια με $\angle A\hat{\Delta}E = \angle A\hat{B}\Theta = 90^\circ$ και επιπλέον έχουν:

- $A\Delta = AB = \alpha$
- $AE = A\Theta$ (ακτίνες του κύκλου γ)

Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε θα έχουν: $\angle B\hat{A}\Theta = \angle A\hat{\Delta}E = 20^\circ$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι: $\angle B\hat{A}Z = \angle B\hat{A}\Delta - \angle Z\hat{A}E - \angle E\hat{A}\Delta = 90^\circ - 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$, οπότε

$$\angle \Theta\hat{A}Z = \angle \Theta\hat{A}B + \angle B\hat{A}Z = 20^\circ + 25^\circ = 45^\circ$$

Τα τρίγωνα $A\Theta Z$ και AZE έχουν:

- $AZ = AZ$, κοινή πλευρά
- $AE = A\Theta$ (ακτίνες του κύκλου)
- $\angle \Theta\hat{A}Z = 45^\circ = \angle Z\hat{A}E$

Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε θα έχουν: $Z\Theta = ZE$

και επιπλέον $\angle \Theta\hat{O}Z = \angle A\hat{E}Z$.

Τέλος τα τρίγωνα $AB\Theta$ και AHE είναι ορθογώνια με $\hat{A}\hat{B}\hat{\Theta} = \hat{A}\hat{H}\hat{E} = 90^0$ και έχουν:

- $AE = A\Theta$ (ακτίνες του κύκλου γ)
- $\hat{A}\hat{\Theta}\hat{B} = \hat{A}\hat{\Theta}\hat{Z} = \hat{A}\hat{E}\hat{Z} = \hat{A}\hat{E}\hat{H}$

Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $AH = AB = \alpha$.