ΑΡΝΟΣ βιβλία με στόχο!

Μαζί μας η Εκπαίδευση γίνεται παιχνίδι

Μαθηματικά

Τετράδιο Σπουδής

β τεύχος

Β'
Γυμνασίου

ΑΡΝΟΣ
Online Education

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ & ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΑΡΤΕΣΙΟΣ-ΡΕΝΕ ΝΤΕΚΑΡΤ
1596-1650

100%
επιτυχία
Μέθοδος
ΑΡΝΟΣ

Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο για Διδασκαλία & Μελέτη

Τετράδιο Σπουδής - Γιατί;

Το Τετράδιο Σπουδής ΑΡΝΟΣ είναι βασισμένο στη Μέθοδο ΑΡΝΟΣ, ένα σύστημα μάθησης με Στόχους – Υλοποίηση – Πιστοποίηση.
Βοηθάει το μαθητή να οικοδομήσει τη σκέψη του βήμα-βήμα, απλά και κατανοητά. Είναι Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο βάσει του οποίου γίνεται η διδασκαλία στο online μάθημα με «φυσικό» τρόπο. Ο δάσκαλος γράφει και υπογραμμίζει παράλληλα με το μαθητή.

Το Τετράδιο Σπουδής αποτελείται από:
- Οπτικοποιημένη Θεωρία με ροή & συνέχεια
- Ασκήσεις για Διδασκαλία και Εξάσκηση
- Συνδυαστικές και Επαναληπτικές Ασκήσεις
- Θέματα Προσομοίωσης Εξετάσεων

Πιστοποίηση Γνώσεων

Σε προγραμματισμένες ημερομηνίες διεξάγονται online ή/και δια ζώσης **Επαναληπτικά Τεστ Αξιολόγησης** στα οποία ο μαθητής πιστοποιεί και επαληθεύει τις γνώσεις του.

Για τους Γονείς

Πώς ο γονέας μπορεί να έχει εικόνα και εποπτεία στην πρόοδο του παιδιού του;
Το Τετράδιο Σπουδής είναι σχεδιασμένο με τέτοιον τρόπο για τη βήμα – βήμα εξάσκηση του μαθητή, μεταβαίνοντας με ασφάλεια από τα πιο απλά στα πιο σύνθετα. Επίσης, είναι ένας φυσικός τρόπος ο Γονέας να ελέγχει την πρόοδο του παιδιού του.

Πώς γίνεται η εποπτεία από το γονέα;

Σε κάθε μάθημα ελέγχει την ορθότητα των λύσεων, την κατανόηση και τη συμμετοχή του παιδιού στα μαθήματα.

Διδασκαλία στον ΑΡΝΟ σημαίνει:

- Απεριόριστη μελέτη με video lessons
- Αυτομάθηση στο App Arnos Learn
- Coaching εξατομικευμένο
- Μοτίβα Μάθησης και Εξάσκησης
- Κάθε Απορία για εμάς είναι Πρόκληση!

Μέθοδος ΑΡΝΟΣ

Η **Μέθοδος ΑΡΝΟΣ** οδηγεί κάθε μαθητή, ανεξαρτήτως γνώσεων ή επιπέδου, να μελετά από το επίπεδο όπου αισθάνεται άνετα, ώστε να διαμορφώσει γερές βάσεις για μάθηση.

Live Διδασκαλία Το online μάθημα γίνεται με φυσικό τρόπο, γιατί συνδυάζει την Τεχνολογία, το Πνεύμα, την Οργάνωση και την Εμπειρία.

Τετράδιο Σπουδής Είναι ο οδηγός για τη διδασκαλία του μαθήματος, την εξάσκηση του μαθητή και την πραγματοποίηση της online διδασκαλίας με Λόγο, Εικόνα και Παρατήρηση.

Καθηγητής Είναι ο σκηνοθέτης της διδακτικής πράξης, ο οποίος δρα σε ένα οργανωμένο εκπαιδευτικό οικοσύστημα με Στόχους, Μαθησιακό Πλάνο και Ευθύνη.

«Μέθοδος ΑΡΝΟΣ... το καταστάλαγμα μιας πορείας 35 ετών με εκπαιδευτικές και εκδοτικές επιτυχίες, με ταξίδια πολιτισμού, συμμετοχή σε Διεθνείς Εκθέσεις και αποτυχίες... μα, κυρίως, η παρακαταθήκη του ζευγολάτη πατέρα - Αρνού.»

Γιάννης Π. Κρόκος

ΑΡΝΟΣ Online Education
Σολωμού 29, Αθήνα 210 38 22 157 | 210 38 22 495
arnos.gr | info@arnos.gr

Τετράδιο Σπουδής

2ο Τεύχος

Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου

ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- Οδηγός για τη Διδασκαλία του Καθηγητή
- Οδηγός για τη Μελέτη του Μαθητή
- Διδασκαλία Online με φυσικό τρόπο
- Τόπος Εποπτείας Προόδου από το Γονέα
- Διδασκαλία με Πιστοποιημένους Καθηγητές ΑΡΝΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2022

ΑΡΝΟΣ
Online Education

Μαθηματικά Β’ Γυμνασίου – Λύσεις 2^{ου} Τετραδίου Σπουδής

Συντακτική Ομάδα Κέντρου ΑΡΝΟΣ

Διευθυντής σειράς: Ιωάννης Π. Κρόκος

Συνεργάστηκαν: Ιωάννης Μαρδάκης

Βασίλειος Κ. Τσιλιβής

ΑΡΝΟΣ ONLINE EDUCATION

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

Μέρος Α΄: Αριθμητική - Άλγεβρα

3ο Κεφάλαιο: Συναρτήσεις

4ο Κεφάλαιο: Περιγραφική Στατιστική

Κεφάλαιο 3 : Συναρτήσεις

3.1. Η Έννοια της Συνάρτησης

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

Θα πρέπει σε κάθε μία συνάρτηση, να επαληθεύσουμε τις αντίστοιχες τιμές των μεταβλητων x, y με τους αντίστοιχους τύπους των συναρτήσεων.

i. Για την συνάρτηση $y = \frac{3x-1}{2}$ αντιστοιχεί ο ακόλουθος πίνακας:

x	-1	0	1
y	-2	$-\frac{1}{2}$	1

Αντικαθιστούμε τις αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής x στον τύπο της συνάρτησης και έχουμε:

- Για $x = -1, \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ y = \frac{3x-1}{2} = \frac{3(-1)-1}{2} = \frac{-3-1}{2} = -\frac{4}{2} = -2$
- Για $x = 0,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ y = \frac{3x-1}{2} = \frac{3\cdot 0-1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$
- Για $x = 1,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ y = \frac{3\cdot 1-1}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

ii. Για την συνάρτηση $y = 2 - 7x$ αντιστοιχεί ο ακόλουθος πίνακας:

x	-1	0	1
y	9	2	-5

Αντικαθιστούμε τις αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής x στον τύπο της συνάρτησης και έχουμε:

- Για $x = -1$, παίρνουμε $y = 2 - 7(-1) = 2 + 7 = 9$
- Για $x = 0$, παίρνουμε $y = 2 - 7 \cdot 0 = 2$
- Για $x = 1$, παίρνουμε $y = 2 - 7 \cdot 1 = 2 - 7 = -5$

iii. Για την συνάρτηση $y = 2x^2 - 3$ αντιστοιχεί ο ακόλουθος πίνακας:

x	-1	0	1
y	-1	−3	-1

Αντικαθιστούμε τις αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής x στον τύπο της συνάρτησης και έχουμε:

- Για $x = -1$, παίρνουμε $y = 2(-1)^2 - 3 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$
- Για $x = 0$, παίρνουμε $y = 2 \cdot 0^2 - 3 = 0 - 3 = -3$
- Για $x = 1$, παίρνουμε $y = 2 \cdot 1^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

iv. Για την συνάρτηση $y = x^2 - 5x + 6$ αντιστοιχεί ο ακόλουθος πίνακας:

x	-1	0	1
y	12	6	2

Αντικαθιστούμε τις αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής x στον τύπο της συνάρτησης και έχουμε:

- Για $x = -1$, παίρνουμε $y = (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$
- Για $x = 0$, παίρνουμε $y = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$
- Για $x = 1$, παίρνουμε $y = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 5 + 6 = 2$

Ερώτηση Κατανόησης 2 - Απάντηση

i. Η αύξηση κατά 10% των αρχικών τιμών x θα δίνεται από την σχέση $\frac{10}{100}x = 0{,}1x$. Η τελική τιμή θα ισούται με το άθροισμα της αρχικής και της αύξησης της τάξεως του 10%. Οπότε προκύπτει η σχέση:

$$y = x + \frac{10}{100}x = x + 0{,}1x = 1{,}1x$$

Οπότε σωστή επιλογή η (ii).

ii. Έστω x η αρχική τιμή τότε η νέα τιμή y, θα δίνεται από τον τύπο:

$$y = x - 4000$$

Οπότε σωστή επιλογή η (iv).

iii. Η σχέση που δίνει το Εμβαδόν ενός τριγώνου ύψους x και βάσης y είναι: $E = \frac{x \cdot y}{2}$. Αντικαθισούμε και παίρνουμε:

$$E = \frac{x \cdot y}{2}$$
$$60 = \frac{x \cdot y}{2}$$
$$x \cdot y = 120$$
$$y = \frac{120}{x}$$

Οπότε σωστή επιλογή η (iv).

iv. Το νέο πλάτος θα είναι $4 + x$, από τον τύπο του Εμβαδού, θα έχουμε:

$$E = 5 \cdot (4 + x)$$
$$E = 20 + 5x$$

Οπότε σωστή επιλογή η (iv).

v. Κάθε συμμαθητής πήρε από δύο καραμέλες, οπότε οι x συμμαθητές θα έχουν σύνολο $2x$ καραμέλες. Οι καραμέλες που έμειναν στο κουτί τότε θα υπολογίζονται από τη συνάρτηση:

$$y = 50 - 2x$$

Οπότε σωστή επιλογή η (iv).

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Για να συμπληρώσουμε ένα πίνακα τιμών μιας συνάρτησης με δεδομένο τύπο, θα πρέπει να αντικαθιστούμε τη δοθείσα τιμη του x ή του y, και μέσω του τύπου της να υπολογίζουμε την άγνωστη ποσότητα ανά περίπτωση.

Άσκηση 1 – Λύση

Με αντικατάσταση στον τύπο της συνάρτησης $y = 4x - 3$ ή λύνοντας ως προς x τον τύπο

$x = \frac{y+3}{4}$, έχουμε:

- Για $x = -2$, παίρνουμε $y = 4 \cdot (-2) - 3 = -8 - 3 = -11$
- Για $y = -3$, παίρνουμε $x = \frac{-3+3}{4} = \frac{0}{4} = 0$
- Για $x = 3$, παίρνουμε $y = 4 \cdot 3 - 3 = 12 - 3 = 9$
- Για $y = 13$, παίρνουμε $x = \frac{13+3}{4} = \frac{16}{4} = 4$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-2	0	3	4
y	-11	-3	9	13

Άσκηση 2 – Λύση

Με αντικατάσταση στον τύπο της συνάρτησης $y = \frac{3x+1}{2}$, έχουμε:

- Για $x = -3$, παίρνουμε $y = \frac{3(-3)+1}{2} = \frac{-9+1}{2} = \frac{-8}{2} = -4$
- Για $x = 0$, παίρνουμε $y = \frac{3 \cdot 0+1}{2} = \frac{1}{2}$
- Για $x = 5$, παίρνουμε $y = \frac{3 \cdot 5+1}{2} = \frac{15+1}{2} = \frac{16}{2} = 8$
- Για $x = 9$, παίρνουμε $y = \frac{3 \cdot 9+1}{2} = \frac{27+1}{2} = \frac{28}{2} = 14$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-3	0	5	9
y	-4	$\frac{1}{2}$	8	14

Άσκηση 3 – Λύση

Με αντικατάσταση στον τύπο της συνάρτησης $y = x^2 + x$, έχουμε:

- Για $x = -2,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = (-2)^2 + (-2) = 4 - 2 = 2$
- Για $x = -1, \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$
- Για $x = 0,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = 0^2 + 0 = 0$
- Για $x = 3,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$
- Για $x = 5,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = 5^2 + 5 = 25 + 5 = 30$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-2	-1	0	3	5
y	2	0	0	12	30

Άσκηση 4 – Λύση

Με αντικατάσταση στον τύπο της συνάρτησης $y = x - \frac{3}{4}(x-1)$, ή λύνοντας ως προς x τον τύπο $x = 4y - 3$ έχουμε:

- Για $\mathrm{x} = -7, \text{παίρνουμε } \mathrm{y} = -7 - \frac{3}{4}(-7-1) = -7 - \frac{3}{4}(-8) = -7 + 6 = -1$
- Για $\mathrm{y} = 0,\ \text{παίρνουμε } \mathrm{x} = 4 \cdot 0 - 3 = -3$
- Για $\mathrm{x} = 5,\ \text{παίρνουμε } \mathrm{y} = 5 - \frac{3}{4}(5-1) = 5 - \frac{3}{4} \cdot 4 = 5 - 3 = 2$
- Για $\mathrm{y} = 6,\ \text{παίρνουμε } \mathrm{x} = 4 \cdot 6 - 3 = 24 - 3 = 21$
- Για $\mathrm{x} = 0,\ \text{παίρνουμε } \mathrm{y} = 0 - \frac{3}{4}(0-1) = -\frac{3}{4}(-1) = \frac{3}{4}$
- Για $\mathrm{y} = 1,\ \text{παίρνουμε } \mathrm{x} = 4 \cdot 1 - 3 = 1$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι:

x	-7	-3	5	21	0	1
y	-1	0	2	6	$\frac{3}{4}$	1

Άσκηση 5 – Λύση

Αρχικά θα υπολογίσουμε τις τιμές της μεταβλητής y, αντικαθιστώντας στον τύπο της συνάρτησης τις τιμές $x = 98, x = 678$.

- Για $x = 98$, παίρνουμε:

$$y = \frac{98+3}{2} + \frac{2 \cdot 98 - 1}{10} - \frac{3(98+2)}{5} = \frac{505}{10} + \frac{195}{10} - 60 = 60 - 60 = 0$$

- Για $x = 678$, παίρνουμε:

$$y = \frac{678+3}{2} + \frac{2 \cdot 678 - 1}{10} - \frac{3(678+2)}{5} = \frac{3405}{10} + \frac{1355}{10} - 408 = 476 - 408 = 68$$

Θα υπολογίσουμε τις τιμές της μεταβλητής x, αντικαθιστώντας στον τύπο της συνάρτησης τις τιμές $y = 15, y = 40$.

- Για $y = 15$, παίρνουμε $\frac{x+3}{2} + \frac{2x-1}{10} - \frac{3(x+2)}{5} = 15$

$$10 \cdot \frac{x+3}{2} + 10 \cdot \frac{2x-1}{10} - 10 \cdot \frac{3(x+2)}{5} = 10 \cdot 15$$
$$5(x+3) + (2x-1) - 6(x+2) = 150$$
$$5x + 15 + 2x - 1 - 6x - 12 = 150$$
$$5x + 2x - 6x = 150 - 15 + 1 + 12$$
$$x = 148$$

- Για $y = 40$, παίρνουμε $\frac{x+3}{2} + \frac{2x-1}{10} - \frac{3(x+2)}{5} = 40$

$$10 \cdot \frac{x+3}{2} + 10 \cdot \frac{2x-1}{10} - 10 \cdot \frac{3(x+2)}{5} = 10 \cdot 40$$
$$5(x+3) + (2x-1) - 6(x+2) = 400$$
$$5x + 15 + 2x - 1 - 6x - 12 = 400$$
$$5x + 2x - 6x = 400 - 15 + 1 + 12$$
$$x = 398$$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	98	678	148	398
y	0	68	15	40

*Η άσκηση μπορεί να λυθεί απλοποιώντας τον αρχικο τύπο, δημιουργώντας ομώνυμα κλάσματα και κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων. (βλέπε Ασκήσεις Μελέτης ασκ.5)

Άσκηση 6 – Λύση

a) Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης την τιμή $x = 3$ και έχουμε:

$$y = \frac{12}{3-2} = \frac{12}{1} = 12$$

Οπότε για $x = 3$, αντιστοιχεί η τιμή $y = 12$

b) Για την τιμή τιμή $x = 2$, δεν έχει νόημα η συνάρτηση γιατί μηδενίζεται ο παρανομαστής. Οπότε δεν υπάρχει και τιμή της μεταβλητής y.

c) Με αντικατάσταση στον τύπο της συνάρτησης $y = \frac{12}{x-2}$, έχουμε:

- Για $\mathrm{x} = -2$, παίρνουμε $\mathrm{y} = \frac{12}{-2-2} = \frac{12}{-4} = -3$
- Για $\mathrm{x} = -1$, παίρνουμε $\mathrm{y} = \frac{12}{-1-2} = \frac{12}{-3} = -4$
- Για $\mathrm{x} = 0$, παίρνουμε $\mathrm{y} = \frac{12}{0-2} = \frac{12}{-2} = -6$
- Για $\mathrm{x} = 1$, παίρνουμε $\mathrm{y} = \frac{12}{1-2} = \frac{12}{-1} = -12$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-2	-1	0	1
y	-3	-4	-6	-12

Άσκηση 7 – Λύση

Στην περίπτωση αυτή, έχουμε τρείς μεταβλητές που συσχετίζονται μεταξύ τους. Αρχικά θα υπολογίσουμε τις τιμές της μεταβλητής y από τον τύπο $y = 3x - 5$, για τις τιμές $x = -4$ και $x = 0$. Τις ίδιες τιμές της μεταβλητής x, θα αντικαταστήσουμε και στην συνάρτηση $z = 2x^2$, από οπου θα προκύψουν οι τιμές της μεταβλητής z.

- Για $\mathrm{x} = -4$, παίρνουμε $\mathrm{y} = 3(-4) - 5 = -12 - 5 = -17$
- Για $\mathrm{x} = 0$, παίρνουμε $\mathrm{y} = 3 \cdot 0 - 5 = -5$
- Για $\mathrm{x} = -4$, παίρνουμε $\mathrm{z} = 2 \cdot (-4)^2 = 2 \cdot 16 = 32$
- Για $\mathrm{x} = 0$, παίρνουμε $\mathrm{z} = 2 \cdot 0^2 = 2 \cdot 0 = 0$

Αντικαθιστούμε τις τιμές $y = -11$ και $y = 4$ στην συνάρτηση $y = 3x - 5$, υπολογίζουμε τις τιμές της μεταβλητής x. Οπότε έχουμε:

- Για $y = -11, \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ -11 = 3x - 5$ άρα $3x = -11 + 5$ άρα $x = \frac{-6}{3} = -2$
- Για $y = 4, \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ 4 = 3x - 5$ άρα άρα $x = \frac{9}{3} = 3$

Τις τιμές της μεταβλητής x που υπολογίσαμε, τις αντικαθιστούμε στην συνάρτηση $z = 2x^2$ και έχουμε:

- Για $\mathrm{x} = -2$, παίρνουμε $\mathrm{z} = 2(-2)^2 = 2 \cdot 4 = 8$
- Για $\mathrm{x} = 3$, παίρνουμε $\mathrm{z} = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-4	-2	0	3
y	-17	-11	-5	4
z	32	8	0	18

Άσκηση 8 – Λύση

Ο Φ.Π.Α. σε οποιοδήποτε προϊόν, δηλώνει αύξηση της αρχικής του τιμής κατά ένα συγκεκριμένο ποσοστό, υπολογισμένο επί της αρχικής τιμής. Έστω x η αρχική τιμή χωρίς Φ.Π.Α. και y, η τελική τιμή με Φ.Π.Α. Τότε η αύξηση θα είναι $\frac{19}{100}x$ και η τελική τιμή προκύπτει από το άθροισμα της αρχικής και της αύξησης. Δηλαδή η συνάρτηση θα είναι:

$$y = x + \frac{19}{100}x = x + 0{,}19x = 1{,}19x$$

Οπότε η συνάρτηση τελικής με αρχική τιμή θα έχει τύπο:

$$y = 1{,}19x$$

Άσκηση 9 – Λύση

a) Έστω x τα χιλιόμετρα που θα διανύσει το πούλμαν. Οπότε το συνόλικο ποσό για τα διανυόμενα χιλιόμετρα θα είναι 0,5x €. Το συνολκό κόστος , μαζί με το πάγιο κόστος ενοικίασης, θα δίνεται από την συνάρτηση:

$$\mathrm{y} = 200 + 0{,}5\mathrm{x}$$

b) Θα αντικαταστήσουμε στον τύπο της συνάρτησης τις τιμές της μεταβλητής x, οπότε έχουμε:

- Για $\mathrm{x} = 100€$, παίρνουμε $\mathrm{y} = 200 + 0{,}5 \cdot 100 = 200 + 50 = 250€$
- Για $\mathrm{x} = 200€$, παίρνουμε $\mathrm{y} = 200 + 0{,}5 \cdot 200 = 200 + 100 = 300€$
- Για $\mathrm{x} = 300€$, παίρνουμε $\mathrm{y} = 200 + 0{,}5 \cdot 300 = 200 + 150 = 350€$
- Για $\mathrm{x} = 500€$, παίρνουμε $\mathrm{y} = 200 + 0{,}5 \cdot 500 = 200 + 250 = 450€$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	100	200	300	500
y	250	300	350	450

Άσκηση 10 – Λύση

Έστω x το μήκος της μικρής βάσης. Τότε η μεγάλη βάση θα είναι $3x$, ως τριπλάσια της μικρής βάσης και το ύψος θα είναι $2x$, ως διπλάσιο της μικρής βάσης. Το Εμβαδόν ενός τραπεζίου δίνεται από τον τύπο $E = \frac{(\beta+B)\cdot\upsilon}{2}$, όπου β το μήκος της μικρής βάσης, B το μήκος της μεγάλης βάσης και υ το ύψος του τραπεζίου. Με έκφραση του τύπου ως προς την μικρή βάση, έχουμε:

$$E = \frac{(x+3x)\cdot 2x}{2} = \frac{4x\cdot 2x}{2} = 4x^2$$

Οπότε η συνάρτηση Εμβαδού σε σχέση με την μικρή βάση είναι:

$$E = 4x^2$$

Άσκηση 11 – Λύση

a) Τα ποσά «κιλά σταφυλιών» και «κιλά σε κρασί», είναι ανάλογα. Σχηματίζουμε τον πίνακα αναλογίας και εφαρμόζοντας το χιαστί γινόμενο, έχουμε:

100	40
800	y

$100\cdot y = 40\cdot 800$ άρα $y = \frac{32.000}{100} = 320$ κιλά κρασί

b) Αφού τα ποσά είναι ανάλογα θα συνδέονται μεταξύ τους με την συνάρτηση αναλογίας, $y = ax$. Για να βρούμε τον συντελεστή αναλογίας α,αρκεί να υπολογίσουμε το πηλίκο $\frac{y}{x}$.

$$a = \frac{y}{x} = \frac{40}{100} = 0,4$$

Άρα η συνάρτηση που συνδέει την ποσοτητα σταφυλιών σε κιλά (x) με την ποσότητα κρασιού σε κιλά (y), είναι: $y = 0,4x$

c) Στην συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος θα αντικαταστήσουμε την τιμή $y = 500$ και θα λύσουμε ως προς x. Με αντικατάσταση παίρνουμε:

$500 = 0,4x$ άρα $x = \frac{500}{0,4} = 1.250$ κιλά σταφυλιών

Άσκηση 12 – Λύση

a) Η Περίμετρος του ισοπλεύρου τριγώνου θα είναι ίση με το άθροισμα των τριών ίσων πλευρών του. Αν x, η κάθε μία πλευρά τότε η περίμετρος θα δίνεται από την συνάρτηση με τύπο:

$$\Pi = x + x + x$$

$$\boldsymbol{\Pi = 3x}$$

b) Θα αντικαταστήσουμε τις τιμές του x στην συνάρτηση $\Pi = 3\mathrm{x}$ και έχουμε:

- Για $\mathrm{x} = 5\ \mathrm{cm}$, παίρνουμε $\Pi = 3 \cdot 5 = 15\ \mathrm{cm}$
- Για $\mathrm{x} = 10\ \mathrm{cm}$, παίρνουμε $\Pi = 3 \cdot 10 = 30\ \mathrm{cm}$
- Για $\mathrm{x} = 15\ \mathrm{cm}$, παίρνουμε $\Pi = 3 \cdot 15 = 45\ \mathrm{cm}$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	5	10	15
y	15	30	45

Άσκηση 13 – Λύση

a) Μετά από χρόνο t η αρχική ποσότητας των 200 λίτρων θα έχει μειωθεί κατά $2t$. Οπότε η συνάρτηση που εκφράζει τον όγκο του νερού V που απομένει μετα από χρόνο θα είναι:

$$V = 120 - 2t$$

Με τον περιορισμό $t \leq 60$,δηλαδή μέχρι τον χρόνο μηδενισμού του όγκου του νερού.

b) Αρχικά αντικαθιστούμε τις τιμές $t = 2$ και $t = 45$ στον τύπο της συνάρτησης και έχουμε:

- Για $\mathrm{t} = 2\ \mathrm{min}$, παίρνουμε $\mathrm{V} = 120 - 2 \cdot 2 = 116\ \mathrm{L}$
- Για $\mathrm{t} = 45\ \mathrm{min}$, παίρνουμε $\mathrm{V} = 120 - 2 \cdot 45 = 30\ \mathrm{L}$

Αντικαθιστούμε τις τιμές $V = 110, V = 0$ στον τύπο που έχουμε εκφράσει ως προς t, δηλαδή $t = \frac{120-V}{2}$ και έχουμε:

- Για $V = 110\ L, παίρνουμε\ t = \frac{120-110}{2} = \frac{10}{2} = 5\ \ min$
- Για $V = 0\ L, παίρνουμε\ t = \frac{120}{2} = 60\ \ min$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

t	2	5	45	60
V	116	110	30	0

Άσκηση 14 – Λύση

a) Οι τιμές του πίνακα επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης. Παρατηρούμε ένα συμπληρωμένο ζεύγος τιμών (x, y) στον πίνακα του ερωτήματος b. Θα αντικαταστήσουμε τις τιμές $x = 4$ και $y = 1$ στον τύπο και θα λύσουμε ως προς την παράμετρο α. Οπότε έχουμε:

$$1 = 3 - 2(4 + \alpha) \quad \text{άρα} \quad 1 = 3 - 8 - 2\alpha \quad \text{άρα} \quad 2\alpha = 3 - 8 - 1$$
$$2\alpha = -6 \quad \text{άρα} \quad \alpha = \frac{-6}{2} = -3$$

b) Η συνάρτηση γράφεται:

$$y = 3 - 2(x - 3) = 3 - 2x + 6 \ \text{άρα} \ \boldsymbol{y = -2x + 9}$$

Αρχικά αντικαθιστούμε τις τιμές $y = 15$ και $y = 0$ στον τύπο της συνάρτησης εκφρασμένο ως προς x, δηλαδη $x = \frac{9-y}{2}$ και έχουμε:

- Για $y = 15$, παίρνουμε $x = \frac{9-15}{2} = \frac{-6}{2} = -3$
- Για $y = 0$, παίρνουμε $x = \frac{9-0}{2} = \frac{9}{2}$

Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης την τιμή $x = 0$ και έχουμε:

- Για $x = 0$, παίρνουμε $y = -2 \cdot 0 + 9 = 9$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	4	-3	0	$\frac{9}{2}$
y	1	15	9	0

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 – Λύση

Αντικαθιστούμε τις αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής x στον τύπο της συνάρτησης $y = 8 - 3x$ και έχουμε:

- Για $x = -3$, παίρνουμε $y = 8 - 3 \cdot (-3) = 8 + 9 = 17$
- Για $x = -1$, παίρνουμε $y = 8 - 3 \cdot (-1) = 8 + 3 = 11$
- Για $x = 0$, παίρνουμε $y = 8 - 3 \cdot 0 = 8$
- Για $x = 2$, παίρνουμε $y = 8 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$
- Για $x = 5$, παίρνουμε $y = 8 - 3 \cdot 5 = 8 - 15 = -7$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-3	-1	0	2	5
y	17	11	8	2	-7

Άσκηση 2 – Λύση

Αντικαθιστούμε τις αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής $x = -1, x = 3$ στον τύπο της συνάρτησης $y = 4 - \frac{3x+1}{2}$ και έχουμε:

- Για $x = -1$, παίρνουμε $y = 4 - \frac{3\cdot(-1)+1}{2} = 4 - \frac{-3+1}{2} = 4 - \frac{-2}{2} = 4 + 1 = 5$
- Για $x = 3$, παίρνουμε $y = 4 - \frac{3\cdot 3+1}{2} = 4 - \frac{9+1}{2} = 4 - \frac{10}{2} = 4 - 5 = -1$

Λύνοντας την συνάρτηση ως προς x, καταλήγουμε στον τύπο $x = \frac{7-2y}{3}$ στον οποίο θα αντικαταστήσουμε τις τιμές $y = \frac{7}{2}, y = -4$ και έχουμε:

- Για $y = \frac{7}{2}$, παίρνουμε $x = \frac{7-2\cdot\frac{7}{2}}{3} = \frac{7-7}{3} = 0$
- Για $y = -4$, παίρνουμε $x = \frac{7-2\cdot(-4)}{3} = \frac{7+8}{3} = \frac{15}{3} = 5$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-1	0	3	5
y	5	$\frac{7}{2}$	-1	-4

Άσκηση 3 – Λύση

Αντικαθιστούμε τις αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής x στον τύπο της συνάρτησης

$y = x^2 + 2x - 3$ και έχουμε:

- Για $x = -3$, παίρνουμε $y = (-3)^2 + 2(-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$
- Για $x = -1$, παίρνουμε $y = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$
- Για $x = 0$, παίρνουμε $y = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$
- Για $x = 2$, παίρνουμε $y = 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$
- Για $x = 4$, παίρνουμε $y = 4^2 + 2 \cdot 4 - 3 = 16 + 8 - 3 = 21$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι:

x	-3	-1	0	2	4
y	0	-4	-3	5	21

Άσκηση 4 – Λύση

Αρχικά αντικαθιστούμε τις τιμές $x = -3, x = 2, x = 5$ στην συνάρτηση με τύπο $y = \frac{5(x+3)}{2}$, υπολογίζοντας τις τιμές της μεταβλητής y. Οπότε έχουμε:

- Για $x = -3$, παίρνουμε $y = \frac{5(-3+3)}{2} = \frac{5 \cdot 0}{2} = 0$
- Για $x = 2$, παίρνουμε $y = \frac{5(2+3)}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$
- Για $x = 5$, παίρνουμε $y = \frac{5(5+3)}{2} = \frac{5 \cdot 8}{2} = \frac{40}{2} = 20$

Υπολογίζουμε και τις τιμές της μεταβλητής x αντικαθιστώντας τις τιμές $y = 5, y = 15, y = 25$ στον τύπο $x = \frac{2y-15}{5}$ εκφρασμένο ως προς την μεταβλητή x και έχουμε:

- Για $y = 5$, παίρνουμε $x = \frac{2 \cdot 5-15}{5} = \frac{10-15}{5} = \frac{-5}{5} = -1$
- Για $y = 15$, παίρνουμε $x = \frac{2 \cdot 15-15}{5} = \frac{30-15}{5} = \frac{15}{5} = 3$
- Για $y = 25$, παίρνουμε $x = \frac{2 \cdot 25-15}{5} = \frac{50-15}{5} = \frac{35}{5} = 7$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-3	-1	2	3	5	7
y	0	5	$\frac{25}{2}$	15	20	25

Άσκηση 5 – Λύση

Στην συνάρτηση θα εκτελέσουμε πράξεις, μετατρέποντας τα κλάσματα σε ομώνυμα και κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων, με σκοπό να έχουμε μια απλούστερη μορφή της. Οπότε ο τύπος μετασχηματίζεται ως εξής:

$$y = \frac{5x+6}{6} - \frac{x-8}{2} - \frac{x+6}{3}$$
$$y = \frac{5x+6}{6} - \frac{3(x-8)}{6} - \frac{2(x+6)}{6}$$
$$y = \frac{5x+6-3x+24-2x-12}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση, έπειτα από πράξεις, είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής x οπότε για οποιαδήποτε τιμή της, η μεταβλητή y θα έχει σταθερή τιμή και πάντα ίση με 3.

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	999	2.022	1.951	2.080
y	3	3	3	3

Άσκηση 6 – Λύση

Ο τύπος της συνάρτησης περιέχει τετραγωνική ρίζα οπότε θα πρέπει να εξετάσουμε για ποιες τιμές της μεταβλητής x, η συνάρτηση θα έχει νόημα. Θα πρέπει να ισχύει η ανισότητα:

$$x - 3 \geq 0$$

$$\mathbf{x \geq 3}$$

α. Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης την τιμή $x = 3$ και παίρνουμε:

$$y = \sqrt{3-3} = \sqrt{0} = 0$$

β. Από τον περιορισμό της συνάρτησης $x \geq 3$ είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε την τιμή $x = 2$ στον τύπο της συνάρτησης.

γ. Αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 3, x = 4, x = 28$ και $x = 84$ στην συνάρτηση με τύπο $y = \sqrt{x-3}$. Οπότε έχουμε τα ακόλουθα:

- Για $x = 3$, παίρνουμε $y = \sqrt{3-3} = \sqrt{0} = 0$
- Για $x = 4$, παίρνουμε $y = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$
- Για $x = 28$, παίρνουμε $y = \sqrt{28-3} = \sqrt{25} = 5$
- Για $x = 84$, παίρνουμε $y = \sqrt{84-3} = \sqrt{81} = 9$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	3	4	28	84
y	0	1	5	9

Άσκηση 7 – Λύση

α. Το συνολικό βάρος (σε κιλά) των x σε πλήθος κιβωτίων θα είναι 50x .Οπότε το συνολικό βάρος του φορτηγού με τα κιβώτια (σε κιλά) θα δίνεται από την συνάρτηση $y = 2.500 + 50x$.

β. Αρχικά αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 2, x = 10$ στην συνάρτηση με τύπο $y = 2.500 + 50x$, υπολογίζοντας τις τιμές της μεταβλητής y. Οπότε έχουμε:

- Για $x = 2$, παίρνουμε $y = 2.500 + 50 \cdot 2 = 2.500 + 100 = 2.600$ kg
- Για $x = 10$, παίρνουμε $y = 2.500 + 50 \cdot 10 = 2.500 + 500 = 3.000$ kg

Υπολογίζουμε και τις τιμές της μεταβλητής x αντικαθιστώντας τις τιμές $y = 2.750, y = 3.500$, στον τύπο $x = \frac{y-2.500}{50}$, εκφρασμένο ως προς την μεταβλητή x και έχουμε:

- Για $y = 2.750$ kg, παίρνουμε $x = \frac{2.750-2.500}{50} = \frac{250}{50} = 5$ κιβώτια
- Για $y = 3.500$ kg, παίρνουμε $x = \frac{3.500-2.500}{50} = \frac{1.000}{50} = 20$ κιβώτια

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	2	5	10	20
y	2.600	2.750	3.000	3.500

Άσκηση 8 – Λύση

α. Γνωρίζουμε ότι η Περίμετρος ενός ορθογωνίου ισούται με το άθροισμα του διπλάσιου του μήκους με το διπλάσιο του πλάτους. Συμφωνα με τα δεδομένα θεωρώντας το μήκος ως x και το πλάτος ως y, η συνάρτηση δίνεται ως:

$$\Pi = 2(x + y)$$

$$50 = 2(x + y)$$

$$x + y = \frac{50}{2} = 25$$

$$\mathbf{y = 25 - x}$$

Έστω ότι το μηκος x ισούται με 8 cm, αντικαθιστώντας στον τύπο της συνάρτησης το πλάτος ισούται με:

$$y = 25 - 8 = 17\text{cm}$$

*Το ίδιο αποτέλεσμα θα παίρναμε αν θεωρούσαμε το πλάτος y ως μέτρο 8 cm. Οπότε σε κάθε περίπτωση οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 8 cm μήκος (ή πλάτος) και 17 cm πλάτος (ή μήκος).

β. Το Εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο του μήκους επί το πλάτος του. Από τα δεδομένα του προβλήματος η συνάρτηση δίνεται ως:

$$x \cdot y = 240$$

$\mathbf{y = \frac{240}{x}}$**,** όταν για τις διαστάσεις ισχύει $\mathbf{x > 0 \text{ και } y > 0}$

Έστω ότι το μηκος x ισούται με 15 cm, αντικαθιστώντας στον τύπο της συνάρτησης το πλάτος ισούται με:

$$y = \frac{240}{15} = 16 \text{ cm}$$

* Ισχύει η ίδια παρατήρηση με το ερώτημα α.

Άσκηση 9 – Λύση

α. Θεωρούμε x τον μισθό του υπαλλήλου,τότε η αύξηση κατά 5% εκφράζεται ως $\frac{5}{100}\mathrm{x}$. Το συνολικό ποσό μετά την αύξηση θα ισούται με το άθροισμα του αρχικού μισθού και της αύξησης. Οπότε η συνάρτηση του νέου μισθού σε σχέση με τον παλιό θα δίνεται από:

$$\mathrm{y} = \mathrm{x} + \frac{5}{100}\mathrm{x}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{x} + 0{,}05\mathrm{x}$$

$$\mathbf{y = 1,05x}$$

β. Αρχικά αντικαθιστούμε τις τιμές $\mathrm{x} = 800, \mathrm{x} = 1.120$ στην συνάρτηση με τύπο $\mathrm{y} = 1{,}05\mathrm{x}$, υπολογίζοντας τις τιμές της μεταβλητής y. Οπότε έχουμε:

- Για $\mathrm{x} = 800€$, παίρνουμε $\mathrm{y} = 1{,}05 \cdot 800 = 840€$
- Για $\mathrm{x} = 1.120€$, παίρνουμε $\mathrm{y} = 1{,}05 \cdot 1.120 = 1.176€$

Υπολογίζουμε και τις τιμές της μεταβλητής x αντικαθιστώντας τις τιμές $\mathrm{y} = 950, \mathrm{y} = 1.350$, στον τύπο $\mathrm{x} = \frac{\mathrm{y}}{1{,}05}$, εκφρασμένο ως προς την μεταβλητή x και έχουμε:

- Για $\mathrm{y} = 950€$, παίρνουμε $\mathrm{x} = \frac{950}{1{,}05} = 904{,}76 \cong 905€$
- Για $\mathrm{y} = 1.350€$, παίρνουμε $\mathrm{x} = \frac{1.350}{1{,}05} = 1.285{,}71 \cong 1.286€$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	800	905	1.120	1.286
y	840	950	1.176	1.350

Άσκηση 10 – Λύση

α. Αφού σε κάθε ώρα διανύει 450 χιλιόμετρα τότε λόγω αναλογίας, σε τρεις ώρες θα διανύσει:

$$3 \cdot 450 = 1.350 \text{ χιλιόμετρα}$$

β. Θεωρώντας ότι η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι σταθερή, το διάστημα S που θα διανύει σε σχέση με το χρόνο σε ώρες θα δίνεται την συνάρτηση:

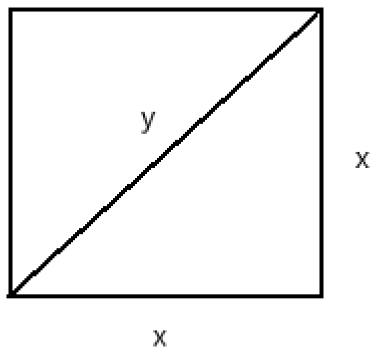
$$\mathbf{S = 450 \cdot t}$$

γ. Αντικαθιστούμε στην συνάρτηση την τιμή $S = 2.250$ χιλιόμετρα και έχουμε:

$$2.250 = 450 \cdot t \quad \text{άρα} \quad t = \frac{2.250}{450} = 5 \text{ ώρες}$$

Άσκηση 11 – Λύση

α. Θεωρούμε το τετράγωνο με πλευρά x και διαγώνιο y όπως στο σχήμα:



Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα η συνάρτηση που συσχετίζει το μήκος της διαγωνίου με τις πλευρές θα δίνεται από:

$y^2 = x^2 + x^2$

$y^2 = 2x^2$

$y = \sqrt{2x^2}$ **{Δεχόμαστε τη θετική λύση αφού αναφερόμαστε σε μήκη πλευρών}**

$\mathbf{y = x\sqrt{2}}$

β. Αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 1cm, x = 2cm, x = 5cm, x = \sqrt{2}cm$ στον τύπο της συνάρτησης και έχουμε:

- Για $x = 1cm$, παίρνουμε $y = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}cm$
- Για $x = 2cm$, παίρνουμε $y = 2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}cm$
- Για $x = 5cm$, παίρνουμε $y = 5 \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}cm$
- Για $x = \sqrt{2}cm$, παίρνουμε $y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2cm$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	1	2	5	$\sqrt{2}$
y	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	2

Άσκηση 12 – Λύση

α. Σε πλήθος x ημερών το ποσό θα είναι 0,5x(Μετατρέπουμε τα 50 λεπτά σε 0,5 ευρώ) . Το συνολικό ποσό σε σχέση με το αρχικό θα δίνεται από την συνάρτηση:

$$y = 10 + 0.5x$$

β. Αρχικά αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 30$, και $x = 360$ στον τύπο της συνάρτησης και έχουμε:

- Για $x = 30$ ημέρες , παίρνουμε $y = 10 + 0{,}5 \cdot 30 = 25€$
- Για $x = 360$ ημέρες , παίρνουμε $y = 10 + 0{,}5 \cdot 360 = 190€$

Υπολογίζουμε και την τιμή της μεταβλητής x αντικαθιστώντας την τιμή $y = 20$ στον τύπο $x = 2y - 20$, εκφρασμένο ως προς την μεταβλητή x και έχουμε:

- Για $y = 20€$, παίρνουμε $x = 2 \cdot 20 - 20 = 20$ ημέρες

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x (ημέρες)	30	360	20
y (€)	25	190	20

Άσκηση 13 – Λύση

α. Θα υπολογίσουμε την παράμετρο μ αν αντικαταστήσουμε στον τύπο της συνάρτησης $y = 2 - \frac{x-\mu}{2}$, τις τιμές που συσχετίζονται στον πίνακα και επαληθεύουν την συνάρτηση δηλαδή $x = 2$ και $y = 3$. Υπολογίζουμε και λαμβάνουμε τα ακόλουθα:

$$y = 2 - \frac{x-\mu}{3}$$
$$3 = 2 - \frac{2-\mu}{3}$$
$$3 \cdot 3 = 3 \cdot 2 - (2 - \mu)$$
$$9 = 6 - 2 + \mu$$
$$\mu = 9 - 6 + 2 = 5$$

β. Αντικαθιστούμε στον παραμετρικό τύπο της συνάρτησης την τιμή $\mu = 2$ και εκτελούμε όλες τις πράξεις για να έχουμε απλοποιημένη μορφή του τύπου της συνάρτησης. Οπότε παίρνουμε:

$$y = 2 - \frac{x-5}{3}$$
$$3y = 6 - (x - 5)$$
$$3y = 6 - x + 5$$
$$3y = 11 - x$$
$$\mathbf{y = \frac{11-x}{3}}$$

Εκφράζουμε τον τύπο ως και προς την μεταβλητή x και έχουμε:

$$\mathbf{x = 11 - 3y}$$

Αρχικά αντικαθιστούμε τις τιμές $x = -1$ και $x = 8$ στον τύπο της συνάρτησης $y = \frac{11-x}{3}$ και έχουμε:

- Για $x = -1$, παίρνουμε $y = \frac{11-(-1)}{3} = \frac{11+1}{3} = \frac{12}{3} = 4$
- Για $x = 8$, παίρνουμε $y = \frac{11-8}{3} = \frac{3}{3} = 1$

Υπολογίζουμε και τις τιμές της μεταβλητής x αντικαθιστώντας τις τιμές $y = 2$ και $y = -3$ στον τύπο $x = 11 - 3y$, εκφρασμένο ως προς την μεταβλητή x και έχουμε:

- Για $y = 2$, παίρνουμε $x = 11 - 3 \cdot 2 = 11 - 6 = 5$
- Για $y = -3$, παίρνουμε $x = 11 - 3 \cdot (-3) = 11 + 9 = 20$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	−1	5	8	20
y	4	2	1	−3

Άσκηση 14 – Λύση

α. Θα αντικαταστήσουμε τις τιμές $x = -1, x = 5$ στον τύπο της συνάρτησης και έχουμε:

- Για $x = -1$, παίρνουμε $y_1 = (-1)^2 + \lambda(-1)$
  $y_1 = 1 - \lambda$

- Για $x = 5$, παίρνουμε $y_2 = 5^2 + 5\lambda$
  $y_2 = 25 + 5\lambda$

Από τα δεδομένα ισχύει $y_1 = y_2$, οπότε λύνουμε ως προς λ την εξίσωση:

$25 + 5\lambda = 1 - \lambda$

$5\lambda + \lambda = 1 - 25$

$6\lambda = -24$

$\lambda = \frac{-24}{6} = -4$

β. Η συνάρτηση γράφεται για $\lambda = -4$:

$$y = x^2 - 4x$$

Θα αντικαταστήσουμε τις τιμές $x = -2, x = 0, x = 2$ και $x = 10$ στον τύπο της συνάρτησης και έχουμε:

- Για $x = -2$, παίρνουμε $y = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12$
- Για $x = 0$, παίρνουμε $y = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0$
- Για $x = 2$, παίρνουμε $y = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$
- Για $x = 10$, παίρνουμε $y = 10^2 - 4 \cdot 10 = 100 - 40 = 60$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	−2	0	2	10
y	12	0	-4	60

Άσκηση 15 – Λύση

Οι τιμές του πίνακα θα επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης, οπότε αντικαθιστώντας τα ζεύγη $x = 2, y = 4$ και $x = 5, y = 19$ θα δημιουργήσουμε δύο εξισώσεις με αγνώστους τις παραμέτρους β, γ. Αντικαθιστούμε και έχουμε:

- $$4 = 2^2 + 2\beta + \gamma$$
  $$4 = 4 + 2\beta + \gamma$$
  $$2\beta + \gamma = 0$$
  $\gamma = -2\beta$ **(1)**

- $$19 = 5^2 + 5\beta + \gamma$$
  $$5\beta + \gamma = 19 - 25$$
  $5\beta + \gamma = -6$ **(2)**

Αντικαθιστούμε στη σχέση **(2)** όπου $\gamma = -2\beta$ και παίρνουμε:

$$5\beta + \gamma = -6$$
$$5\beta + (-2\beta) = -6$$
$$5\beta - 2\beta = -6$$
$$3\beta = -6 \quad \text{άρα} \quad \beta = \frac{-6}{3} = -2$$

Εφόσον ισχύει $\gamma = -2\beta$ τότε:

$$\gamma = -2\beta = -2 \cdot (-2) = 4$$

Οπότε θα ισχύει $\boldsymbol{\beta = -2}$ **και** $\boldsymbol{\gamma = 4}$

Άσκηση 16 – Λύση

α. Αρχικά θα υπολογίσουμε τους αριθμούς α και β, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ριζών. Οπότε έχουμε:

- $$\alpha = \sqrt{13 - \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}} = \sqrt{13 - \sqrt{13 + \sqrt{7 + 2}}} = \sqrt{13 - \sqrt{13 + \sqrt{9}}} =$$
$$= \sqrt{13 - \sqrt{13 + 3}} = \sqrt{13 - \sqrt{16}} = \sqrt{13 - 4} = \sqrt{9} = 3$$

- $$\beta = \sqrt{41 - \sqrt{29 - \sqrt{19 - \sqrt{9}}}} = \sqrt{41 - \sqrt{29 - \sqrt{19 - 3}}} = \sqrt{41 - \sqrt{29 - \sqrt{16}}} =$$
$$= \sqrt{41 - \sqrt{29 - 4}} = \sqrt{41 - \sqrt{25}} = \sqrt{41 - 5} = \sqrt{36} = 6$$

β. Θα αντικαταστήσουμε τις τιμές της μεταβλητής $x = 3, x = 6$ στον τύπο της συνάρτησης $y = \frac{12-x}{3}$, και έχουμε:

- Για $x = 3$, παίρνουμε $y = \frac{12-3}{3} = \frac{9}{3} = 3$
- Για $x = 6$, παίρνουμε $y = \frac{12-6}{3} = \frac{6}{3} = 2$

Υπολογίζουμε και τις τιμές της μεταβλητής x αντικαθιστώντας τις τιμές $y = 3$ και $y = 6$ στον τύπο $x = 12 - 3y$, εκφρασμένο ως προς την μεταβλητή x και έχουμε:

- Για $y = 3$, παίρνουμε $x = 12 - 3 \cdot 3 = 12 - 9 = 3$
- Για $y = 6$, παίρνουμε $x = 12 - 3 \cdot 6 = 12 - 18 = -6$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	3	6	3	-6
y	3	2	3	6

3.2. Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

i. Σωστό.

ii. Λάθος.
Η τεταγμένη $y = 3$ είναι η μισή της τετμημένης $x = 6$.

iii. Λάθος.
Το σημείο βρίσκεται στο $2^{\text{ο}}$ Τεταρτημόριο, ¨πάνω¨ από τον άξονα $x'x$.

iv. Σωστό.

v. Λάθος.
Με αντικατάσταση στον τύπο της συνάρτησης της τιμής $x = 3$, παίρνουμε $y = 3^3 = 27$

vi. Σωστό.

Ερώτηση Κατανόησης 2 - Απάντηση

i. Υπολογίζουμε με προσέγγιση δεκάτου τις τετραγωνικές ρίζες $\sqrt{5} \cong 2{,}2$ και $\sqrt{8} \cong 2{,}8$. Οπότε για τις παραστάσεις των συντεταγμένων θα ισχύουν τα εξής:

- Για την τετμημένη του σημείου: $2 - \sqrt{5} \cong 2 - 2{,}2 \cong -0{,}2 < 0$
- Για την τεταγμένη του σημείου: $3 - \sqrt{8} \cong 3 - 2.8 \cong 0{,}2 > 0$

Οπότε το σημείο έχει $x < 0, y > 0$ και θα βρίσκεται στο $2^{\text{ο}}$ Τεταρτημόριο. Σωστή επιλογή η (ii).

ii. Αρκεί να αντικαταστήσουμε την τετμημένη του σημείου σε κάθε έναν από τους τύπους των συναρτήσεων και να εξετάσουμε αν επαληθεύονται. Αντικαθιστώντας την τιμή $x = -2$ έχουμε:

- Για τη συνάρτηση με τύπο $y = -2x$: $y = -2 \cdot (-2) = 4$
- Για τη συνάρτηση με τύπο $y = x^2$: $y = (-2)^2 = 4$
- Για τη συνάρτηση με τύπο $y = x^3 + 4$: $y = (-2)^3 + 4 = -8 + 4 = -4 \neq 4$
- Για τη συνάρτηση με τύπο $y = -x^3 - x^2 = -(-2)^3 - (-2)^2 = -(-8) + 4 = 8 - 4 = 4$

Οπότε δεν επαληθεύεται ο τύπος της συνάρτησης $= x^3 + 4$.Σωστή επιλογή η (iii).

iii. Αρχικά για να έχει νόημα η συνάρτηση, θα πρέπει να ισχύει η ανισότητα $x \geq 0$. Θα αντικαταστήσουμε τις τιμές των τετμημένων των σημείων στον τύπο της συνάρτησης και θα εξετάσουμε αν τον επαληθεύουν.

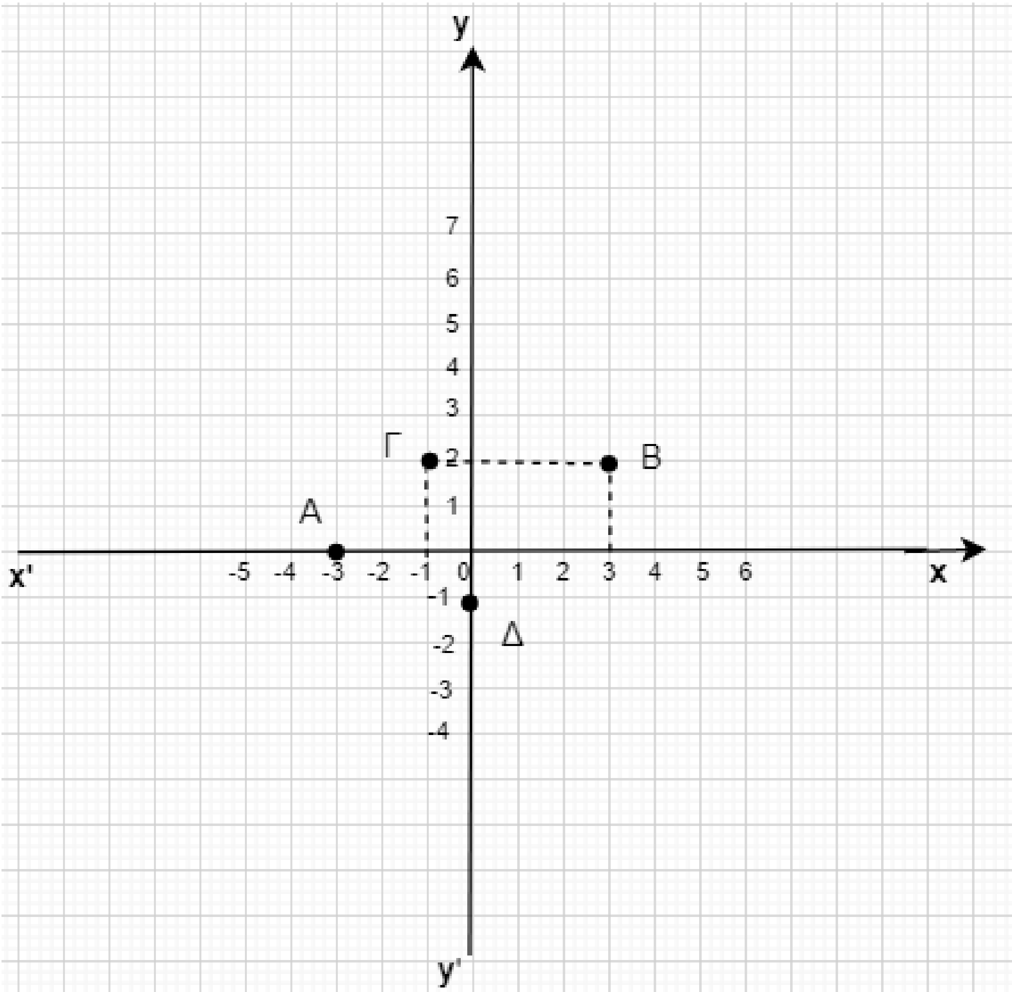
- Για το σημείο $A(4,2)$: $y = \sqrt{4} - 4 = 2 - 4 = -2 \neq 2$
- Για το σημείο $B\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$: $y = \sqrt{\frac{1}{9}} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$
- Για το σημείο $\Gamma(1,1)$: $y = \sqrt{1} - 1 = 1 - 1 = 0 \neq 1$
- Για το σημείο $\Delta(0,1)$: $y = \sqrt{0} - 0 = 0 \neq 1$

Η συνάρτηση επαληθεύεται μόνο από το σημείο $B\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$. Σωστή επιλογή η (ii).

Ασκήσεις για Διδασκαλία

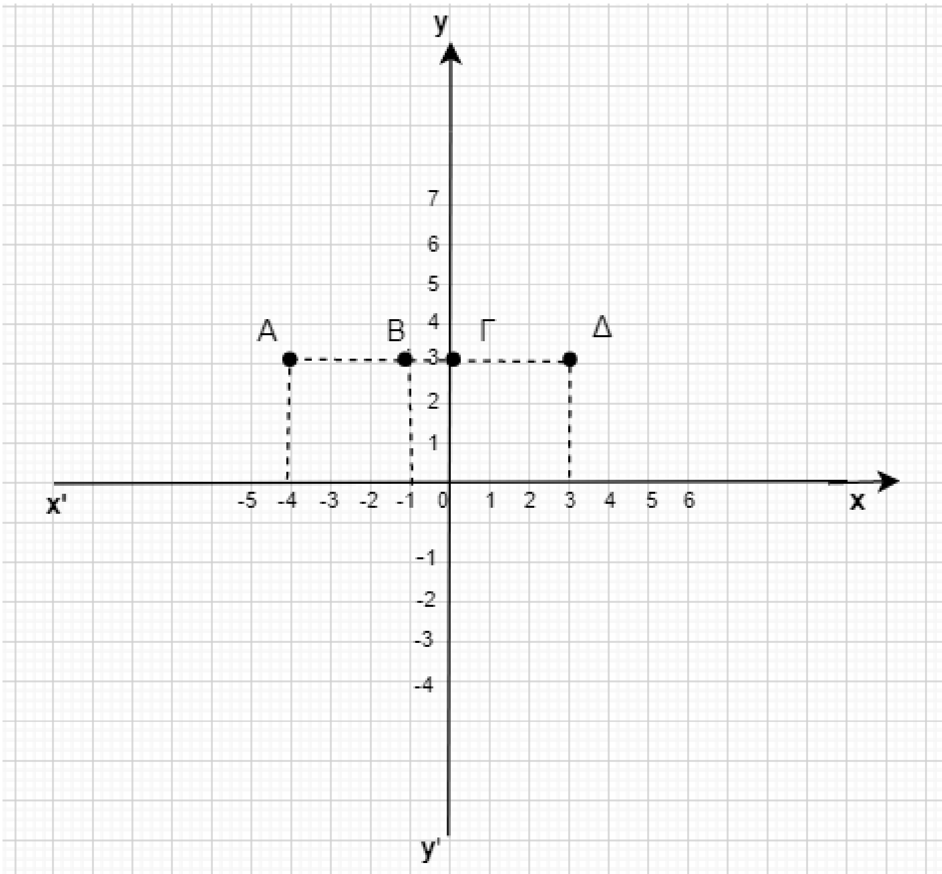
Άσκηση 1 - Λύση

Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και τοποθετούμε τα σημεία με βάση τις τιμές των συντεταγμένων τους.



Άσκηση 2 - Λύση

Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και τοποθετούμε τα σημεία με βάση τις τιμές των συντεταγμένων τους.



Παρατηρούμε ότι τα σημεία έχουν ίσες τεταγμένες και βρίσκονται στην ευθεία $y = 3$.

Άσκηση 3 - Λύση

Σε κάθε σημείο αναζητούμε τις κάθετες προβολές στον άξονα $x'x$ από όπου θα βρίσκουμε την τετμημένη x και στον άξονα $y'y$, για να βρούμε την τεταγμένη y.

- Το σημείο A έχει συντεταγμένες $(5,3)$
- Το σημείο B έχει συντεταγμένες $(-2,4)$
- Το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(-3,0)$
- Το σημείο Δ έχει συντεταγμένες $(3,-3)$
- Το σημείο E έχει συντεταγμένες $(2,2)$

Άσκηση 4 - Λύση

a) Ένα σημείο θα ανήκει στον άξονα $y'y$ όταν η τετμημένη ισούται με το μηδέν. Θα πρέπει να ισχύει:

$$21 - 3\lambda = 0$$
$$3\lambda = 21$$
$$\lambda = \frac{21}{3} = 7$$

b) Ένα σημείο θα ανήκει στον άξονα $x'x$ όταν η τεταγμένη ισούται με το μηδέν. Θα πρέπει να ισχύει:

$$7\lambda + 56 = 0$$
$$7\lambda = -56 \quad \text{άρα} \quad \lambda = \frac{-56}{7} = -8$$

c) Αφού το σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν τον τύπο της. Αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 21 - 3\lambda$ και $y = 7\lambda + 56$. Οπότε έχουμε την εξίσωση:

$$7\lambda + 56 = -2(21 - 3\lambda) + 18$$
$$7\lambda + 56 = -42 + 6\lambda + 18$$
$$7\lambda - 6\lambda = -56 - 42 + 18$$
$$\lambda = -80$$

Άσκηση 5 - Λύση

a) Αφού το σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν τον τύπο της. Αντικαθιστούμε τις τιμές $x = -4$ και $y = 10$. Οπότε έχουμε την εξίσωση:

$$10 = (-4)^2 + \frac{-4\beta}{2}$$
$$10 = 16 - 2\beta$$
$$2\beta = 16 - 10 = 6$$
$$\beta = \frac{6}{2} = 3$$

b) Αντικαθιστούμε στον παραμετρικό τύπο της συνάρτησης την τιμή $\beta = 3$ και ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$y = x^2 + \frac{3x}{2}$$

Αντικαθιστούμε και στον τύπο την τιμή $x = -6$ και λύνουμε ως προς την τεταγμένη y. Παίρνουμε την εξίσωση:

$$y = (-6)^2 + \frac{3\cdot(-6)}{2} = 36 - \frac{18}{2} = 36 - 9 = 27$$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $(-6{,}27)$

c) Αντικαθιστούμε στον τύπο την τιμή $y = \frac{5}{2}$ και λύνουμε ως προς την τετμημένη x. Παίρνουμε την εξίσωση:

$$\frac{5}{2} = x^2 + \frac{3x}{2}$$

$$2 \cdot \frac{5}{2} = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot \frac{3x}{2}$$

$$5 = 2x^2 + 3x$$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

Οι λύσεις είναι $x = 1, x = -\frac{5}{2}$. Άρα τα σημεία με συντεταγμένες $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ $και$ $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Άσκηση 6 – Λύση

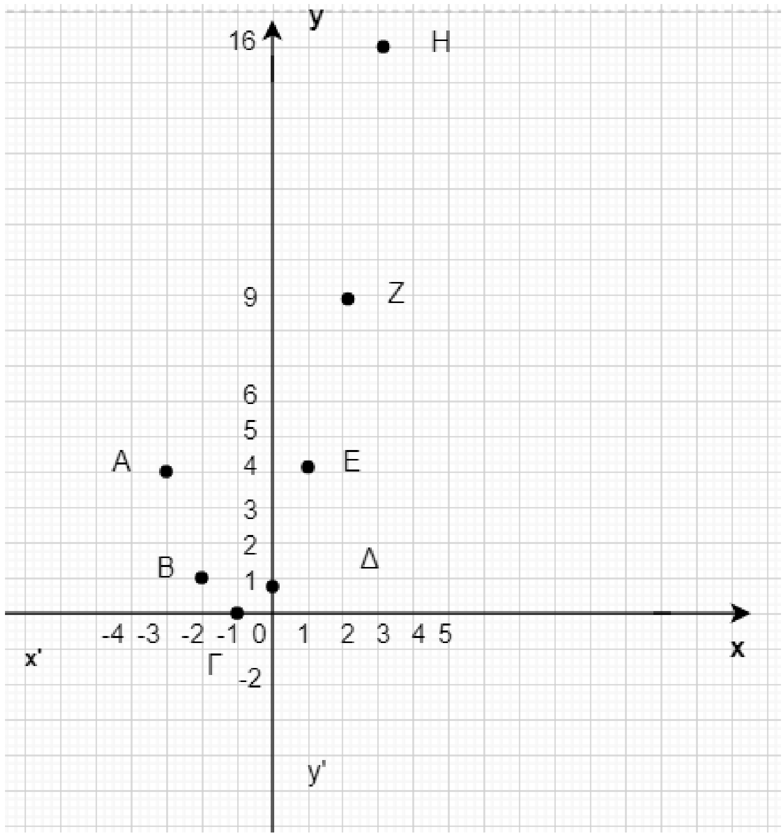
a) Αντικαθιστούμε τις τιμές $x = -3, x = -2, x = -1, x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$ στον τύπο της συνάρτησης και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμες της μεταβλητής y. Οπότε έχουμε:

- Για $x = -3$, $\pi\alpha ί\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon$ $y = (-3+1)^2 = (-2)^2 = 4$
- Για $x = -2$, $\pi\alpha ί\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon$ $y = (-2+1)^2 = (-1)^2 = 1$
- Για $x = -1$, $\pi\alpha ί\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon$ $y = (-1+1)^2 = 0^2 = 0$
- Για $x = 0$, $\pi\alpha ί\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon$ $y = (0+1)^2 = 1^2 = 1$
- Για $x = 1$, $\pi\alpha ί\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon$ $y = (1+1)^2 = 2^2 = 4$
- Για $x = 2$, $\pi\alpha ί\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon$ $y = (2+1)^2 = 3^2 = 9$
- Για $x = 3$, $\pi\alpha ί\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon$ $y = (3+1)^2 = 4^2 = 16$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4	9	16

b) Η απεικόνιση των σημείων $A(-3,4), B(-2,1), \Gamma(-1,0), \Delta(0,1), E(1,4), Z(2,9), H(3,16)$ σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι:



Άσκηση 7 - Λύση

Από τις κάθετες προβολές των σημείων προς τους άξονες ή τη θέση των σημείων πάνω σε αυτούς παρατηρούμε ότι:

- Η τετμημένη $x = -3$ αντιστοιχεί στην τεταγμένη $y = 3$
- Η τετμημένη $x = -2$ αντιστοιχεί στην τεταγμένη $y = 0$
- Η τεταγμένη $y = -3$ αντιστοιχεί στην τετμημένη $x = 0$
- Η τεταγμένη $y = 3$ αντιστοιχεί στην τετμημένη $x = 4$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι:

x	-3	-2	0	4
y	3	0	-3	3

Άσκηση 8 - Λύση

a) Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με συντεταγμένες $(0,-1)$
b) Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$στα σημεία με συντεταγμένες $(-5,0),(1,0),(4,0)$
c) Το σημείο με συντεταγμένες $(-6,2)$
d) Το σημείο με συντεταγμένες $(-1,-2)$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι:

x	-7	-6	-3	2	3	6	7	8
y	4	2	-4	1	2	-4	-3	-2

Άσκηση 9 - Λύση

a) Το σημείο επαληθεύει τον τύπο της συνάρτησης, οπότε αντικαθιστώντας τις τιμές $x=9$ και $y=4$ θα έχουμε μια εξίσωση ως προς λ. Οπότε παίρνουμε:

$4=\frac{9+\lambda}{3}-1$
$3\cdot 4=3\cdot\frac{9+\lambda}{3}-3\cdot 1$
$12=9+\lambda-3$
$\lambda=12-9+3=6$

b) Αντικαθιστούμε την τιμή $\lambda=6$ στην παραμετρική μορφή του τύπου της συνάρτησης και γίνεται:

$y=\frac{x+6}{3}-1$

Για να βρούμε το σημείο με τετμημένη $x = -12$, αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στον τύπο της συνάρτησης και παίρνουμε:

$$y = \frac{-12+6}{3} - 1 = y = \frac{-6}{3} - 1 = -2 - 1 = -3$$

Οπότε το σημείο έχει συντεταγμένες $(-12, -3)$.

c) Για να βρούμε το σημείο με τεταγμένη $y = -9$, αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στον τύπο της συνάρτησης και παίρνουμε:

$$-9 = \frac{x+6}{3} - 1$$
$$-9 \cdot 3 = 3 \cdot \frac{x+6}{3} - 3 \cdot 1$$
$$-27 = x + 6 - 3$$
$$x = -27 - 6 + 3 = -30$$

Οπότε το σημείο έχει συντεταγμένες $(-30, -9)$.

Άσκηση 10 - Λύση

a) Το σημείο επαληθεύει τον τύπο της συνάρτησης, οπότε αντικαθιστώντας τις τιμές $x = -4$ και $y = 7$ θα έχουμε μια εξίσωση ως προς α. Οπότε παίρνουμε:

$$7 = \alpha - \frac{-4-\alpha-1}{2}$$
$$2 \cdot 7 = 2 \cdot \alpha - 2 \cdot \frac{-4-\alpha-1}{2}$$
$$14 = 2\alpha - (-5 - \alpha)$$
$$14 = 2\alpha + 5 + \alpha$$
$$3\alpha = 9$$
$$\alpha = \frac{9}{3} = 3$$

b) Αντικαθιστούμε στον παραμετρικό τύπο της συνάρτησης την τιμή $\alpha = 3$ και γίνεται:

$y = 3 - \frac{x-3-1}{2}$
$y = \mathbf{3} - \frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{4}}{\mathbf{2}}$

Για να βρούμε τα σημεία τομής με τους άξονες έχουμε την εξής μέθοδο:

- Για το σημείο τομής στον άξονα $x'x$, θέτουμε στον τύπο της συνάρτησης $y = 0$ και λύνουμε ως προς x.
- Για το σημείο τομής στον άξονα $y'y$, θέτουμε στον τύπο της συνάρτησης $x = 0$ και λύνουμε ως προς y.

Σύμφωνα με τα παραπάνω παίρνουμε:

- Για το σημείο τομής στον άξονα $x'x$ αντικαθιστούμε στον τύπο $y = 0$:

$0 = 3 - \frac{x-4}{2}$
$\frac{x-4}{2} = 3$
$x - 4 = 6$
$x = 10$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $(10{,}0)$.

- Για το σημείο τομής στον άξονα $y'y$ αντικαθιστούμε στον τύπο $x = 0$:

$y = 3 - \frac{0-4}{2}$
$y = 3 - \frac{-4}{2}$
$y = 3 + 2 = 5$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $(0{,}5)$.

c)

i. Η τετμημένη είναι τριπλάσια της τεταγμένης οπότε θα ισχύει $x = 3y$. Με αντικατασταση στον τύπο παίρνουμε:

$y = 3 - \frac{3y-4}{2}$

$2 \cdot y = 2 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{3y-4}{2}$

$2y = 6 - (3y - 4)$

$2y = 6 - 3y + 4$

$2y + 3y = 10$

$5y = 10$

$y = \frac{10}{5} = 2$

Οπότε η τετμημένη θα είναι $x = 3y = 3 \cdot 2 = 6$. Το σημείο έχει συντεταγμένες $(6,2)$.

ii. Η τεταγμένη είναι κατά 8 μονάδες μεγαλύτερη της τετμημένης άρα θα ισχύει η σχέση:

$$y = x + 8$$

Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης και παίρνουμε την εξίσωση:

$x + 8 = 3 - \frac{x-4}{2}$

$2 \cdot x + 2 \cdot 8 = 2 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{x-4}{2}$

$2x + 16 = 6 - (x - 4)$

$2x + 16 = 6 - x + 4$

$2x + x = 6 + 4 - 16$

$3x = -6$

$x = \frac{-6}{3} = -2$

Οπότε η τεταγμένη θα είναι $y = -2 + 8 = 6$. Το σημείο έχει συντεταγμένες $(-2,6)$.

Ασκήσεις για Μελέτη

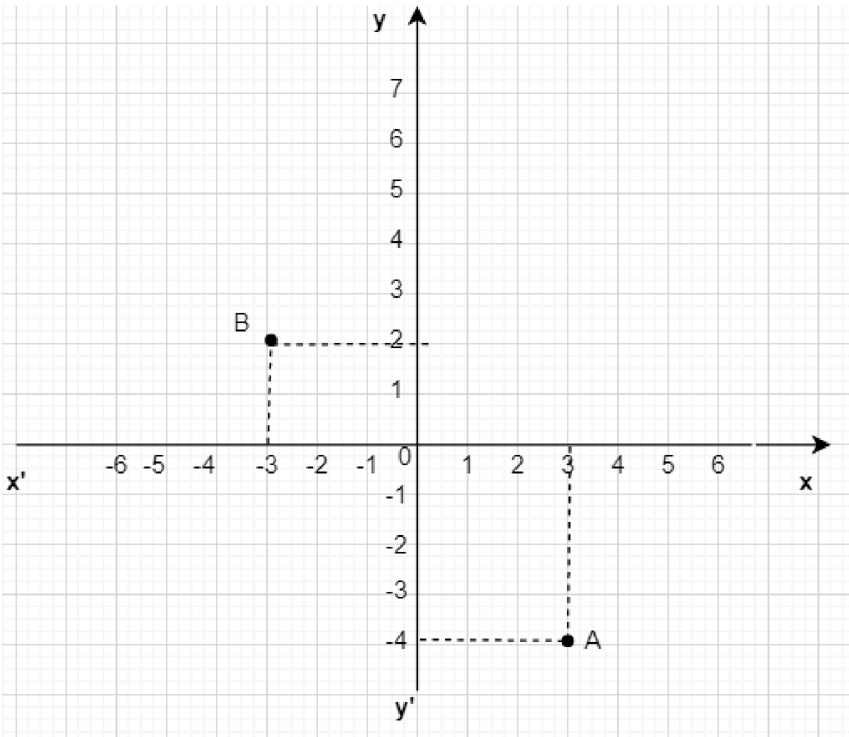
Άσκηση 1 - Λύση

Σε κάθε σημείο αναζητούμε τις κάθετες προβολές στον άξονα $x'x$ από όπου θα βρίσκουμε την τετμημένη x και στον άξονα $y'y$, για να βρούμε την τεταγμένη y.

- Το σημείο A έχει συντεταγμένες $(-1{,}3)$
- Το σημείο B έχει συντεταγμένες $(0,-2)$
- Το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(-3,-2)$
- Το σημείο Δ έχει συντεταγμένες $(4{,}1)$
- Το σημείο E έχει συντεταγμένες $(3{,}3)$

Άσκηση 2 - Λύση

Αρχικά τοποθετούμε τα σημεία σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Η γραφική παράσταση εναι η εξής:

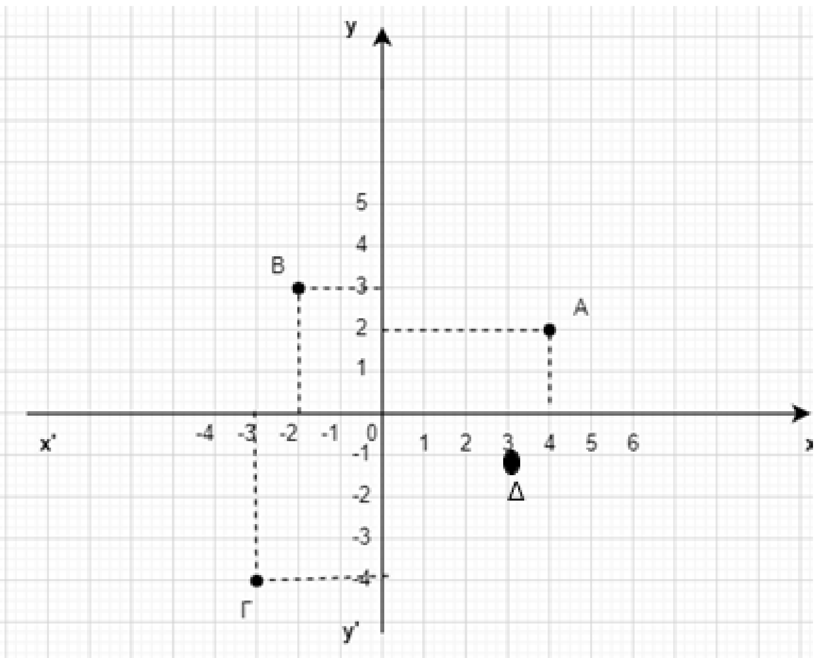


α. Το σημείο A' καθώς μετατοπίζεται παράλληλα στον άξονα $x'x$ κατά 2 μονάδες αριστερά και κατά 3 μονάδες προς τα πάνω στον άξονα $y'y$, σημαίνει ότι η τετμημένη του μειώνεται κατά 2 μονάδες και η τεταγμένη του αυξάνεται κατά 3 μονάδες αντίστοιχα σε σχέση με τις αρχικές συντεταγμένες. Οπότε το σημείο έχει συντεταγμένες $A'(1,-1)$.

β. Το σημείο B' καθώς μετατοπίζεται παράλληλα στον άξονα $x'x$ κατά 3 μονάδες δεξιά και κατά μονάδες προς τα κάτω στον άξονα $y'y$, σημαίνει ότι η τετμημένη του αυξάνεται κατά 3 μονάδες και η τεταγμένη του μειώνεται κατά 2 μονάδες αντίστοιχα σε σχέση με τις αρχικές συντεταγμένες. Οπότε το σημείο έχει συντεταγμένες $B'(0,0)$.

Άσκηση 3 - Λύση

Τοποθετούμε τα σημεία σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ως εξής:



Για κάθε σημείο στο επίπεδο με συντεταγμένες (x, y), ορίζουμε ως απόσταση του από τον άξονα $x'x$ την απόλυτη τιμή της τεταγμένης του. Επιπλέον η απόσταση του από τον άξονα $y'y$ ορίζεται η απόλυτη τιμή της τετμημένης του. Με βάση τους ορισμούς για τα δοθέντα σημεία έχουμε:

- Η απόσταση του σημείου A από τον άξονα $x'x$είναι: $d_{A\to x'x} = |2| = 2\ μονάδες$
- Η απόσταση του σημείου A από τον άξονα $y'y$είναι: $d_{A\to y'y} = |4| = 4\ μονάδες$
- Η απόσταση του σημείου B από τον άξονα $x'x$ είναι: $d_{B\to x'x} = |3| = 3\ μονάδες$
- Η απόσταση του σημείου B από τον άξονα $y'y$είναι: $d_{B\to y'y} = |-2| = 2\ μονάδες$
- Η απόσταση του σημείου Γ από τον άξονα $x'x$είναι: $d_{\Gamma\to x'x} = |-4| = 4\ μονάδες$
- Η απόσταση του σημείου Γ από τον άξονα $y'y$είναι: $d_{\Gamma\to y'y} = |-3| = 3\ μονάδες$
- Η απόσταση του σημείου Δ από τον άξονα $x'x$είναι: $d_{\Delta\to x'x} = |-1| = 1\ μονάδα$
- Η απόσταση του σημείου Δ από τον άξονα $y'y$είναι: $d_{\Delta\to y'y} = |3| = 3\ μονάδες$

Άσκηση 4 - Λύση

α. Κάθε σημείο που ανήκει στον άξονα $x'x$ θα έχει τεταγμένη ίση με το μηδέν. Οπότε για το δεδομένο σημείο θα πρέπει να ισχύει:

$$4 - \frac{2(\lambda-1)}{3} = 0$$
$$4 = \frac{2(\lambda-1)}{3}$$
$$4 \cdot 3 = 2\lambda - 2$$
$$12 = 2\lambda - 2$$
$$2\lambda = 14$$
$$\lambda = \frac{14}{2} = 7$$

Για την τιμή αυτή η τετμημένη θα είναι:

$$x = 1 - \frac{7-3}{4} = 1 - \frac{4}{4} = 1 - 1 = 0$$

Οπότε το σημείο έχει συντεταγμένες $(0,0)$.

β. Κάθε σημείο που ανήκει στον άξονα $y'y$ θα έχει τετμημένη ίση με το μηδέν. Οπότε για το δεδομένο σημείο θα πρέπει να ισχύει:

$$1-\frac{\lambda-3}{4}=0$$
$$1=\frac{\lambda-3}{4}$$
$$\lambda-3=4 \quad \text{άρα} \quad \lambda=7$$

Ομοίως το σημείο έχει συντεταγμένες $(0{,}0)$.

Άσκηση 5 - Λύση

α. Αναζητούμε τα σημεία με τετμημένη ίση με το μηδέν. Από τη γραφική παράσταση έχουμε ένα

σημείο με συντεταγμένες $(0{,}2)$.

β. Αναζητούμε τα σημεία με τεταγμένη ίση με το μηδέν. Από τη γραφική παράσταση έχουμε τα σημεία $(-6{,}0),(4.0)$.

γ. Η γραφική παράσταση μας δίνει τα σημεία που αντιστοιχού στις τιμές του πίνακα:

x	-7	-5	-4	2	6	8
y	-2	2	4	1	-1	-2

Άσκηση 6 - Λύση

α. Οι συντεταγμένες του σημείου θα επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης, αφού το σημείο ανήκει στη γραφική της παράσταση. Αντικαθιστώντας στον τύπο τις τιμές $x=6, y=12$ παίρνουμε μια εξίσωση ως προς α και έχουμε:

$$12=\frac{\alpha(6+3)}{3}$$
$$12=\frac{9\alpha}{3} \quad \text{άρα} \quad 3\alpha=12 \quad \text{άρα} \quad \alpha=\frac{12}{3}=4$$

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στον παραμετρικό τύπο της συνάρτησης και γίνεται:

$$\boldsymbol{y=\frac{4(x+3)}{3}}$$

β. Για να βρούμε το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$, αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης την τιμή $y = 0$ και λύνουμε την εξίσωση ως προς την τετμημένη x. Η εξίσωση θα είναι:

$$0 = \frac{4(x+3)}{3}$$
$$3 \cdot 0 = 3 \cdot \frac{4(x+3)}{3}$$
$$4(x+3) = 0 \text{ άρα } x+3 = 0 \text{ άρα } x = -3$$

Το σημείο θα έχει συντεταγμένες $K(-3,0)$.

γ. Για να βρούμε το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$, αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης την τιμή $x = 0$ και λύνουμε την εξίσωση ως προς την τεταγμένη y. Η εξίσωση θα είναι:

$$y = \frac{4(0+3)}{3}$$
$$y = \frac{4 \cdot 3}{3}$$
$$y = 4$$

Το σημείο θα έχει συντεταγμένες $A(0,4)$.

Άσκηση 7 - Λύση

α. Οι συντεταγμένες του σημείου θα επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης, αφού το σημείο ανήκει στην γραφική της παράσταση. Αντικαθιστώντας στον τύπο τις τιμές $x = -3, y = 6$, παίρνουμε μια εξίσωση ως προς λ και έχουμε:

$$6 = (-3)^2 - \lambda$$
$$6 = 9 - \lambda$$
$$\lambda = 9 - 6 = 3$$

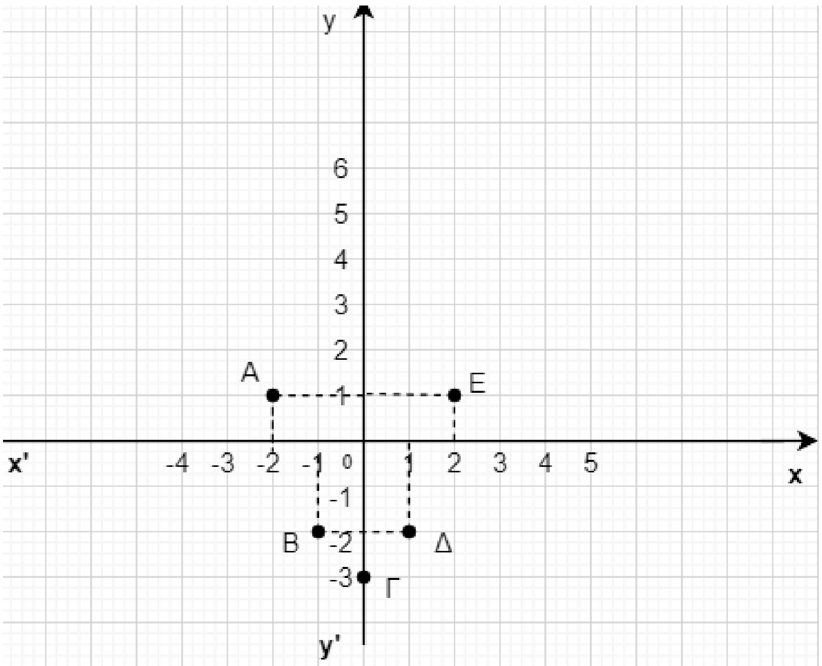
β. Αντικαθιστούμε τις τιμές $x = -2, x = -1, x = 0, x = 1 \; \textit{και} \; x = 2$ στον τύπο της συνάρτησης και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμες της μεταβλητής y. Οπότε έχουμε:

- Για $x = -2, \textit{παίρνουμε} \; y = (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$
- Για $x = -1, \textit{παίρνουμε} \; y = (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$
- Για $x = 0, \textit{παίρνουμε} \; y = 0^2 - 3 = -3$
- Για $x = 1, \textit{παίρνουμε} \; y = 1^2 - 3 = 1 - 3 = -2$
- Για $x = 2, \textit{παίρνουμε} \; y = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι:

x	-2	-1	0	1	2
y	1	-2	-3	-2	1

γ. Τοποθετούμε τα σημεία σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ως εξής:



Άσκηση 8 – Λύση

α. Τα σημεία $\left(0,-\frac{7}{2}\right),(-2{,}0)$ επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης. Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

- Για $x=0, y=-\frac{7}{2}, παίρνουμε$:

$$-\frac{7}{2}=\frac{0^2+\beta\cdot 0+\gamma}{4}$$

$$\frac{\gamma}{4}=\frac{-7}{2}$$

$$2\gamma=-28 \quad \text{άρα} \quad \gamma=\frac{-28}{2}=-14$$

- Για $x = -2, y = 0 \; και \; \gamma = -14, παίρνουμε$:

$0 = \frac{(-2)^2+\beta\cdot(-2)-14}{4}$
$\frac{4-2\beta-14}{4} = 0$
$4 - 2\beta - 14 = 0$
$2\beta = -10$ άρα $\beta = \frac{10}{-2} = -5$

β. Αντικαθιστούμε τις τιμές των παραμέτρων β, γ στον παραμετρικό τύπο και έχουμε την συνάρτηση:

$$\boldsymbol{y = \frac{x^2 - 5x - 14}{4}}$$

- Για $x = 2$, $παίρνουμε: y = \frac{2^2-5\cdot2-14}{4} = \frac{4-10-14}{4} = \frac{-20}{4} = -5$
- Για $x = 6$, $παίρνουμε: y = \frac{6^2-5\cdot6-14}{4} = \frac{36-30-14}{4} = \frac{-8}{4} = -2$

Τα σημεία έχουν συντεταγμένες $A(2,-5), και \; B(6,-2)$ αντίστοιχα.

γ. Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης την τιμή $y = -2$ και παίρνουμε:

$-2 = \frac{x^2-5x-14}{4}$
$-2 \cdot 4 = x^2 - 5x - 14$
$x^2 - 5x - 14 + 8 = 0$
$x^2 - 5x - 6 = 0$

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι $x = 6 \; και \; x = -1$. Οπότε τα σημεία έχουν συντεταγμένες $\Gamma(6,-2) \; και \; \Delta(-1,-2)$ αντίστοιχα.

Άσκηση 9 - Λύση

α. Υπολογίζουμε την τιμή της παραμέτρου α σύμφωνα με τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών και έχουμε:

$$\alpha = \sqrt{\frac{17}{2} + \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{\frac{4}{9}}} = \sqrt{\frac{17}{2} + \sqrt{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{17}{2} + \sqrt{\frac{6}{24}}} = \sqrt{\frac{17}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{17}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

β. Αντικαθιστούμε την τιμή της παραμέτρου α και έχουμε το σημείο $A(3, -2)$. Αφού η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο τότε οι συντεταγμένες θα επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης. Αντικαθιστούμε στον τύπο τις τιμές $x = 3, y = -2$ και παίρνουμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο λ ως εξής:

$$-2 = \lambda \cdot 3 - 4\lambda \ \text{ άρα } \ \lambda = 2$$

Οπότε ο τύπος της συνάρτησης είναι: $\boldsymbol{y = 2x - 8}$

γ. Αφού το σημείο Μ ανήκει στην γραφική παράσταση τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης. Αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 2\mu - 5, y = 3 - 3\mu$ στον τύπο της συνάρτησης δημιουργώντας μια εξίσωση ως προς την παράμετρο μ και παίρνουμε:

$$3 - 3\mu = 2(2\mu - 5) - 8$$

$$3 - 3\mu = 4\mu - 10 - 8$$

$$4\mu + 3\mu = 3 + 8 + 10$$

$$7\mu = 21$$

$$\mu = \frac{21}{7} = 3$$

Άσκηση 10 - Λύση

α. Αρχικά θα βρούμε τα σημεία τομής της συνάρτησης $y = 3x - 6$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

- Για το σημείο τομής στον άξονα $x'x$ αντικαθιστώντας στον τύπο $y = 0$ παίρνουμε:

$$0 = 3x - 6$$
$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3} = 2$$

Το σημείο τομής έχει συντεταγμένες $(2,0)$.

- Για το σημείο τομής στον άξονα $y'y$ αντικαθιστώντας στον τύπο $x = 0$ παίρνουμε:

$$\mathrm{y} = 3 \cdot 0 - 6$$
$$y = -6$$

Το σημείο τομής έχει συντεταγμένες $(0, -6)$.
Οι δύο συναρτήσεις έχουν κοινά σημεία τομής με τους άξονες οπότε τα σημεία αυτά επαληθεύουν και τον τύπο της συνάρτησης (2).

Αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 2, y = 0 \; και \; x = 0, y = -6$ στον τύπο της συνάρτησης και παίρνουμε:

- Για $x = 2 \; και \; y = 0$ έχουμε την εξίσωση:

$$0 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2\alpha + \beta$$
$$8 - 12 + 2\alpha + \beta = 0$$
$$2\alpha + \beta = 4$$

- Για $x = 0 \; και \; y = -6$ έχουμε την εξίσωση:

$$-6 = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 0 \cdot \alpha + \beta$$
$$-6 = 0 \pm 0 + 0 + \beta \quad \text{άρα} \quad \beta = -6$$

Οπότε υπολογίζουμε και την παράμετρο α:

$$2\alpha - 6 = 4$$
$$2\alpha = 10 \quad \text{άρα} \quad \alpha = \frac{10}{2} = 5$$

β. Θεωρούμε x την τετμημένη του σημείου, άρα η τεταγμένη θα είναι $y = x - 4$. Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης (1) τις τιμές αυτές και έχουμε την εξίσωση:

$$x - 4 = 3x - 6$$
$$3x - 2x = 6 - 4$$
$$2x = 2 \quad \text{άρα} \quad x = 1$$

Οπότε η τεταγμένη θα είναι $y = 1 - 4 = -3$. Το σημείο έχει συντεταγμένες $A(1, -3)$.

γ. Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης (2) τις συντεταγμένες του σημείου Α, δηλαδή $x = 1, y = -3$ και εξετάζουμε αν ισχύει η ισότητα:

$$-3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 6$$
$$-3 = 1 - 3 + 5 - 6$$
$$-3 = -3$$

Το σημείο ανήκει ταυτόχρονα και στις δύο γραφικές παραστάσεις.

3.3. Η συνάρτηση $y = \alpha x$

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

i. Σωστό.

ii. Λάθος.
Η ευθεία γράφεται $y = 1x$ οπότε έχει κλίση ίση με 1.

iii. Λάθος.
Η ευθεία γράφεται $y = -\frac{1}{3}x$ οπότε έχει κλίση ίση με $-\frac{1}{3}$.

iv. Σωστό.

v. Λάθος.
Με αντικατάσταση της τιμής $x = -15$ παίρνουμε $y = -3 \cdot (-15) = 45$

vi. Λάθος.
Η ευθεία θα είχε εξίσωση $y = 7x$, οπότε για $x = 7$ παίρνουμε $y = 7 \cdot 7 = 49 \neq 0$

vii. Λάθος.
Η ευθεία με εξίσωση $y = 0$ είναι ο άξονας $x'x$.

viii. Σωστό.

ix. Λάθος.
Ισχύει $20\% = 0{,}20$ οπότε η ευθεία γράφεται $y = 0{,}20x$.

Ερώτηση Κατανόησης 2 - Απάντηση

Για κάθε μία από τις γραφικές παραστάσεις βρίσκουμε από ένα σημείο που ανήκει σε αυτές. Έχουμε αντίστοιχα τα σημεία $A(1,2), B(-1,2), \Gamma(-2,1)$. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες κάθε σημείου στον τύπο της ευθείας $y=-2x$, παίρνουμε:

- Για $x=1, \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon: y=-2\cdot 1=-2\neq 2$, οπότε το σημείο A δεν ανήκει στην γραφική παράσταση της ευθείας $y=-2x$ άρα η 1η γραφική παράσταση απορρίπτεται.
  *Επιπλέον παρατηρούμε ότι διέρχεται από το 1ο και 3ο τεταρτημόριο αρα είναι θετικής κλίσης.

- Για $x=-1, \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon: y=-2\cdot(-1)=2$, οπότε το σημείο B ανήκει στην γραφική παράσταση της ευθείας $y=-2x$ άρα η 2η γραφική παράσταση είναι δεκτή.
  Δεχόμαστε την 2η γραφική παράσταση αφού διέρχεται και από το σημείο $O(0,0)$ και γνωρίζουμε από δύο σταθερά σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία, με κλίση $\frac{y}{x}=\frac{2}{-1}=-2$.

- Για $x=-2, \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon: y=-2\cdot(-2)=4\neq 1$, οπότε το σημείο Γ δεν ανήκει στην γραφική παράσταση της ευθείας $y=-2x$ άρα η 3η γραφική παράσταση απορρίπτεται.

Ερώτηση Κατανόησης 3 - Απάντηση

Γνωρίζουμε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha x$ έχει συντελεστή αναλογίας ή κλίση τον αριθμό α. Με αντιστοιχία των τριών τύπων η ευθεία $y=-\frac{1}{5}x$ είναι η ζητούμενη, οπότε σωστή επιλογή η (iii).

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Για να συμπληρώσουμε ένα πίνακα τιμών μιας συνάρτησης με δεδομένο τύπο, θα πρέπει να αντικαθιστούμε τη δοθείσα τιμη του x ή του y, και μέσω του τύπου της να υπολογίζουμε την άγνωστη ποσότητα ανά περίπτωση. Επειδή πρόκειται για γραφικές παραστάσεις ευθειών, χρειαζόμαστε ακριβώς δύο σημεία από τον πίνακα τιμών για να χαράξουμε την γραφική παράσταση.

Άσκηση 1 – Λύση

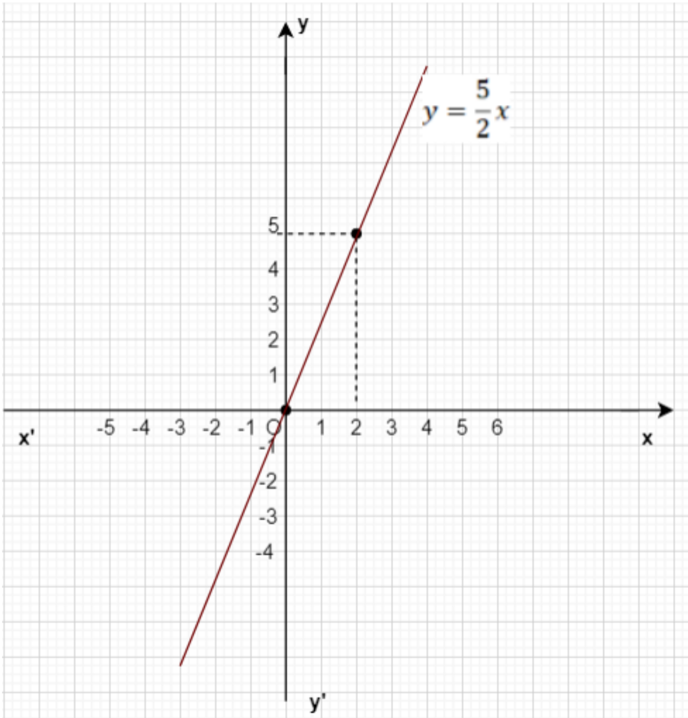
a) Με αντικατάσταση στον τύπο της συνάρτησης $y = \frac{5}{2}x$, παίρνουμε:

- Για $x = -4,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{5}{2} \cdot (-4) = \frac{-20}{2} = -10$
- Για $x = -2,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ y = \frac{5}{2} \cdot (-2) = \frac{-10}{2} = -5$
- Για $x = 0,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{5}{2} \cdot 0 = 0$
- Για $x = 2,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{5}{2} \cdot 2 = \frac{10}{2} = 5$
- Για $x = 4,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{5}{2} \cdot 4 = \frac{20}{2} = 10$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-4	-2	0	2	4
y	-10	-5	0	5	10

b) Επιλέγουμε τα σημεία με συντεταγμένες $(0.0), (2{,}5)$ για την σχεδίαση της γραφικής παράστασης η οποία θα επαληθεύει και τα υπόλοιπα σημεία του πίνακα τιμών. Η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 2 – Λύση

a) Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης την τιμή $x = 8$ και υπολογίζουμε την τεταγμένη y. Οπότε παίρνουμε:

$$y = \frac{5}{4} \cdot 8 = \frac{40}{4} = 10$$

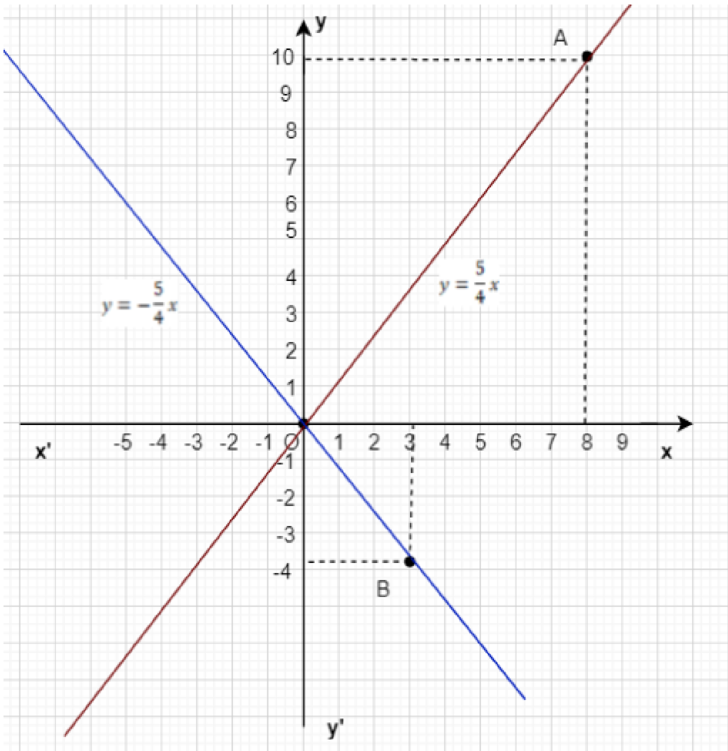
Το σημείο έχει συντεταγμένες $A(8{,}10)$.

b) Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης την τιμή $x = 3$ και υπολογίζουμε την τεταγμένη y. Οπότε παίρνουμε:

$$y = -\frac{5}{4} \cdot 3 = \frac{-15}{4}$$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $B\left(3, \frac{-15}{4}\right)$.

Επιλέγουμε τα σημεία $A(8{,}10), O(0{,}0)$ και $B\left(3,\frac{-15}{4}\right), O(0{,}0)$ αντίστοιχα, αφού και οι δύο γραφικές παραστάσεις διέρχονται από την αρχή των αξόνων $O(0{,}0)$. Το κοινό γράφημα είναι το ακόλουθο:



Άσκηση 3 – Λύση

a) Τα ποσά $x\ και\ y$ είναι ανάλογα οπότε το πηλίκο $\frac{y}{x}$ για όλες τις τιμές του πίνακα θα είναι σταθερό και θα ισούται με τον συντελεστή αναλογίας α.
Αρχικά από το συμπληρωμένο ζεύγος τιμών του πίνακα θα υπολογίσουμε τον συντελεστή αναλογίας ως εξής:

$$\alpha = \frac{y}{x} = \frac{9}{3} = 3$$

Οπότε συμπληρώνουμε τον πίνακα υπολογίζοντας τις άγνωστες τιμές των μεταβλητών $x\ και\ y$ από τον τύπο $\frac{y}{x} = 3$.

Εκφράζουμε τον τύπο ως $y = 3x$ ή $x = \frac{y}{3}$ αναλόγως την τιμή που θέλουμε να υπολογίσουμε και έχουμε:

- Για $\mathrm{x} = 1$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = 3 \cdot 1 = 3$
- Για $\mathrm{x} = -2$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = 3 \cdot (-2) = -6$
- Για $\mathrm{x} = 4$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = 3 \cdot 4 = 12$
- Για $\mathrm{y} = 18$, παίρνουμε: $\mathrm{x} = \frac{18}{3} = 6$
- Για $\mathrm{y} = -27$, παίρνουμε: $\mathrm{x} = \frac{-27}{3} = -9$
- Για $\mathrm{y} = 33$, παίρνουμε: $\mathrm{x} = \frac{33}{3} = 11$

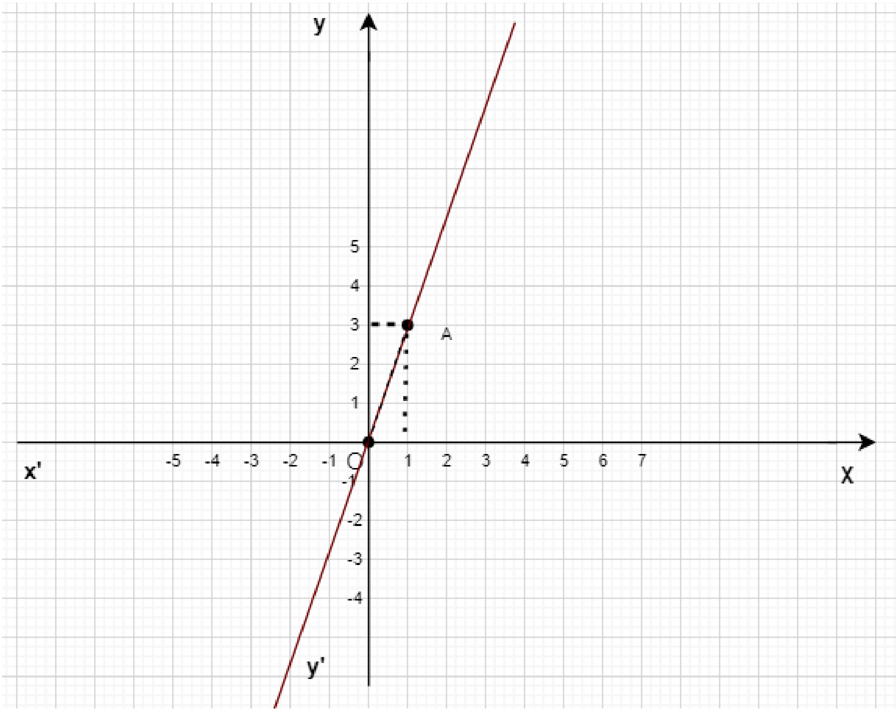
Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	1	-2	3	4	6	-9	11
y	3	-6	9	12	18	-27	33

b) Το πηλίκο $\alpha = \frac{y}{x}$ είναι σταθερό για όλες τις τιμές των μεταβλητών y *και* x, οπότε η συνάρτηση που θα συνδέει τις δύο μεταβλητές είναι η ακόλουθη:

$$\boldsymbol{y = 3x}$$

c) Επιλέγουμε το σημείο $A(1,3)$ και το τετριμμένο $O(0,0)$ για να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση που θα επαληθεύει όλα τα παραπάνω σημεία. Η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 4 – Λύση

a) Εφόσον η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων η συνάρτηση θα έχει την μορφή $y = ax$. Γνωρίζουμε ότι η κλίση είναι $\alpha = -\frac{4}{5}$ οπότε η ευθεία θα έχει τύπο

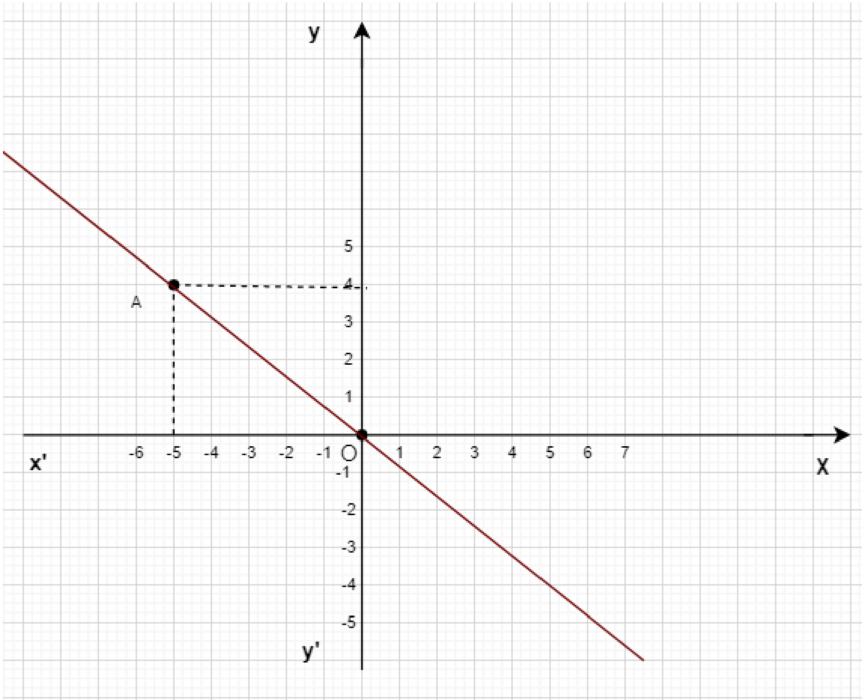
$$y = -\frac{4}{5}x$$

b) Αντικαθιστούμε στον τύποτης συνάρτησης την τιμή $x = -5$ και λύνουμε ως προς την μεταβλητή y. Οπότε παίρνουμε:

$$y = -\frac{4}{5} \cdot (-5) = 4$$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $A(-5,4)$.

c) Λαμβάνουμε τα σημεία $A(-5,4)$ και το τετριμμένο $O(0,0)$ και κατασκευάζουμε την γραφική παράσταση ως εξής:



Άσκηση 5 – Λύση

a) Υπολογίζουμε την κλίση από τον τύπο $\alpha = \frac{y}{x}$, όπου $y\ και\ x$ οι συντεταγμένες του σημείου A.

Οπότε παίρνουμε: $\boldsymbol{a = \frac{y}{x} = \frac{12}{3} = 4}$

b) Εφόσον η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων η συνάρτηση θα έχει την μορφή $y = ax$.

Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης την κλίση α, οπότε ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$\boldsymbol{y = 4x}$$

Άσκηση 6 – Λύση

a) Το σημείο έχει συντεταγμένες $x = 2 \ \kappa\alpha\iota \ y = 9 - \alpha$, από το πηλίκο $\frac{y}{x} = \alpha$ δημιουργούμε μια εξίσωση ως προς την κλίση α και έχουμε:

$\frac{y}{x} = a$

$\frac{9-\alpha}{2} = \alpha$

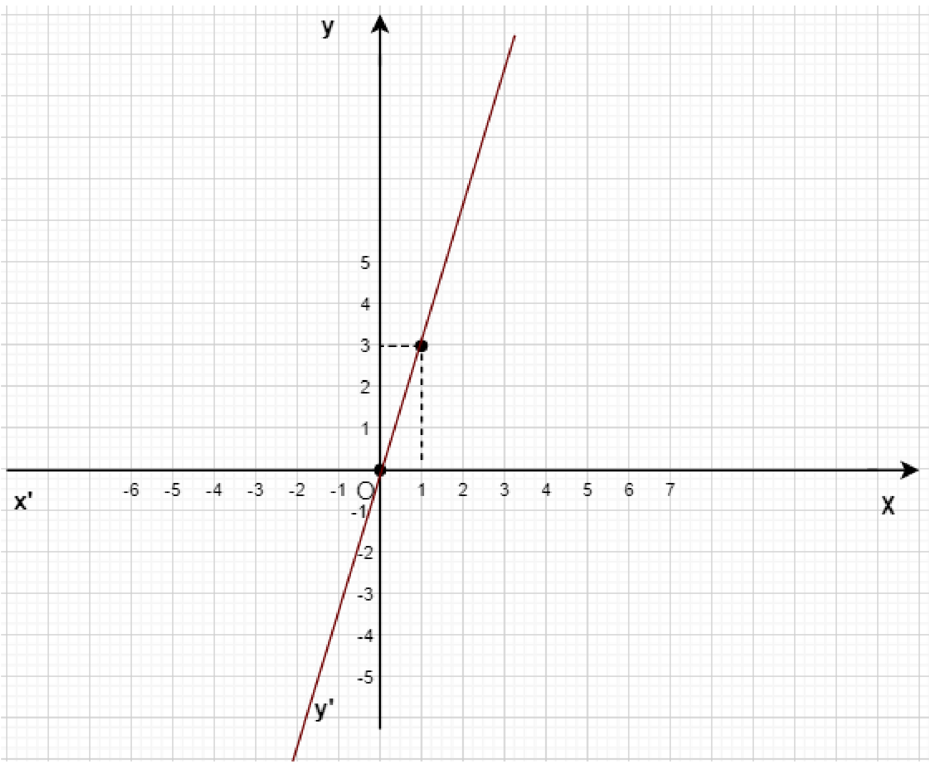
$2\alpha = 9 - \alpha$

$3\alpha = 9$ άρα $\alpha = \frac{9}{3} = 3$

b) Η ευθεία θα έχει εξίσωση την $y = 3x$. Δημιουργούμε ένα πίνακα τιμών με δύο σημεία που θα μας βοηθήσουν στην χάραξη της γραφικής παράστασης.

x	0	1
y	0	3

Η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 7 – Λύση

a) Το σημείο έχει συντεταγμένες $x = -3 \; και \; y = \alpha + 8$, από το πηλίκο $\frac{y}{x} = a$ δημιουργούμε μια εξίσωση ως προς την κλίση α και έχουμε:

$\frac{y}{x} = a$

$\frac{\alpha+8}{-3} = a$

$\alpha + 8 = -3\alpha$

$4\alpha = -8$

$\alpha = \frac{-8}{4} = -2$

b) Η ευθεία έχει γενική εξίσωση $y = -2x$ οπότε αντικαθιστούμε τις τετμημένες των σημείων

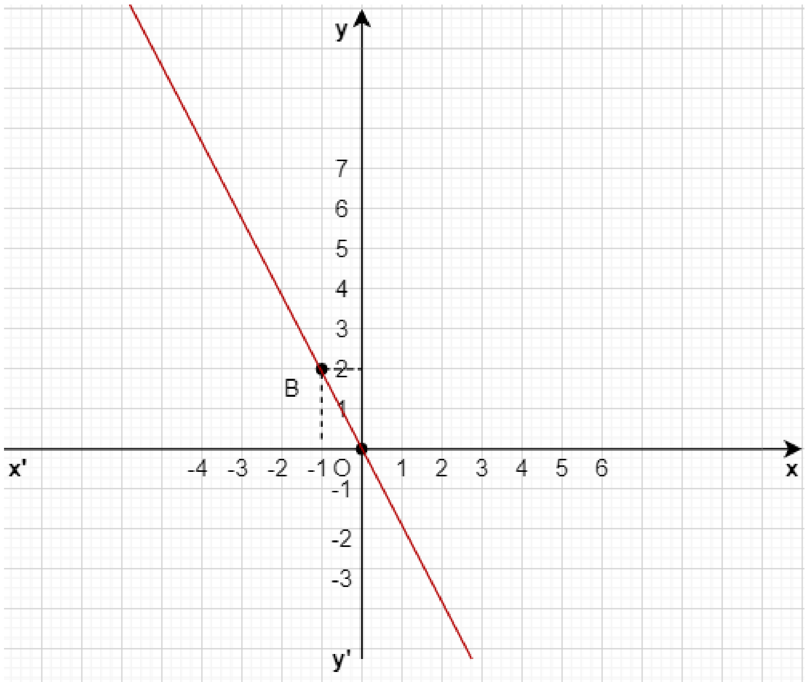
$x = -2, x = -1, x = 0, x = 1 \; και \; x = 2$ στον τύπο της ευθείας και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές των τεταγμένων.

Οπότε παίρνουμε:

- Για $\mathrm{x} = -2$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = (-2) \cdot (-2) = 4$
- Για $\mathrm{x} = -1$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = (-2) \cdot (-1) = 2$
- Για $\mathrm{x} = 0$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = (-2) \cdot 0 = 0$
- Για $\mathrm{x} = 1$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = (-2) \cdot 1 = -2$
- Για $\mathrm{x} = 2$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = (-2) \cdot 2 = -4$

Τα σημεία έχουν συντεταγμένες $A(-2,4), B\;(-1,2), O(0,0),\; \Delta(1,-2),\; \Delta(2,-4)$.

c) Έπιλέγουμε τα σημεία $,B(-1{,}2)\ και\ O(0{,}0)$ για να χαράξουμε την γραφική παράσταση της ευθείας ως εξής:



Άσκηση 8 – Λύση

Η ευθεία που διχοτομεί το 1ο και 3ο τεταρτημόριο έχει κλίση $\alpha = 1$ και γενική εξίσωση $y = x$. Σε αντιστοιχία με τον παραμετρικό τύπο $y = (9 - 4(\alpha - 2))x$ θα πρέπει να ισχύει:

$$9 - 4(\alpha - 2) = 1$$

$$9 - 4\alpha + 8 = 1$$

$$4\alpha = 16$$

$$\alpha = \frac{16}{4} = 4$$

Άσκηση 9 – Λύση

a) Οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν τον τύπο της ευθείας οπότε αντικαθιστώντας τις τιμές $x = 3 \; και \; y = -21$ παίρνουμε μια εξίσωση ως προς β και έχουμε:

$$-21 = \frac{4-5\beta}{3} \cdot 3$$

$$-21 = 4 - 5\beta$$

$$5\beta = 25$$

$$\beta = \frac{25}{5} = 5$$

Η ευθεία έχει εξίσωση: $y = \frac{4-5\cdot 5}{3}x = \frac{-21}{3}x$, δηλαδή $\boldsymbol{y = -7x}$ με κλίση $\alpha = -7$.

b) Το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία οπότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν τον τύπο της. Αντικαθιστώντας στον τύπο τις τιμές $x = \gamma \; και \; y = 6 - 4\gamma,$ παίρνουμε μια εξίσωση ως προς γ ως ακολούθως:

$$6 - 4\gamma = -7\gamma$$

$$-7\gamma + 4\gamma = 6$$

$$-3\gamma = 6$$

$$\gamma = \frac{6}{-3} = -2$$

Άσκηση 10 – Λύση

a) Η ευθεία διέρχεται από την αρχη των αξόνων οπότε θα έχει γενική εξίσωση $y = \alpha x$. Το σημείο A επαληθεύει τον τύπο της, και υπολογίζουμε την κλίση α από τον τύπο $\alpha = \frac{y}{x}$ όπου x και y οι συντεταγμένες του σημείου A και παίρνουμε:

$$\alpha = \frac{y}{x} = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3}$$

Η εξίσωση της ευθείας θα είναι: $\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x}$

b) Το σημείο B ανήκει στην ευθεία οπότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν τον τύπο της. Αντικαθιστώντας στον τύπο τις τιμές $x = \lambda + 2 \; και \; y = 6 - 2\lambda$, παίρνουμε μια εξίσωση ως προς λ ως εξής:

$$6 - 2\lambda = -\frac{1}{3}(\lambda + 2)$$

$$3(6 - 2\lambda) = 3 \cdot \left[-\frac{1}{3}(\lambda + 2)\right]$$

$$18 - 6\lambda = -\lambda - 2$$

$$6\lambda - \lambda = 18 + 2$$

$$5\lambda = 20$$

$$\lambda = \frac{20}{5} = 4$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 – Λύση

a) Με αντικατάσταση στον τύπο της συνάρτησης $y = -\frac{2}{3}x$ των τιμών $x = -6, x = -3, x = 0$ καθώς και των τιμών $y = -4, y = -6$ στον εκφρασμένο ως προς την μεταβλητή x τύπο

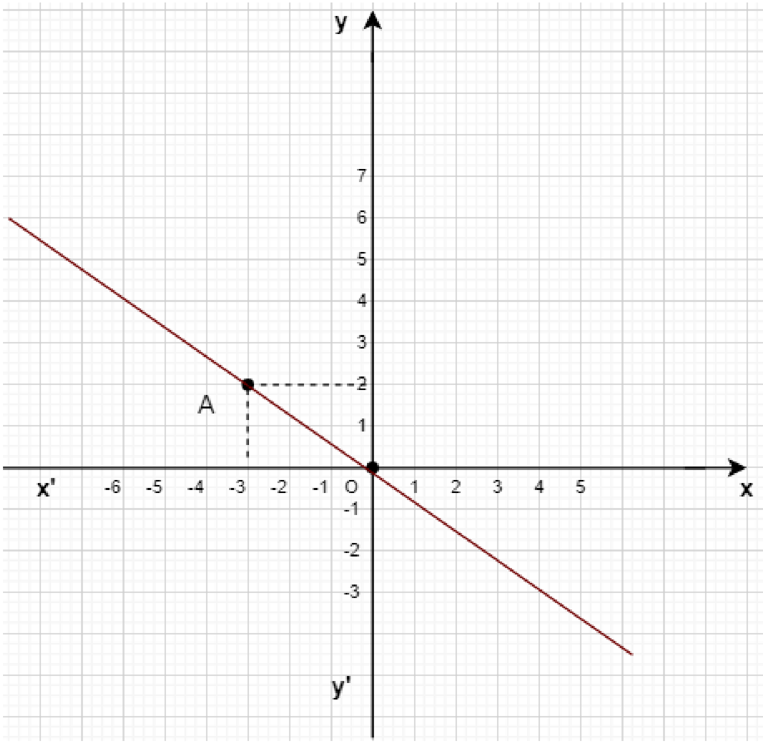
$x = -\frac{3}{2}y$, λαμβάνουμε τα ακόλουθα αριθμητικά αποτελέσματα:

- Για $\mathrm{x} = -6$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = -\frac{2}{3} \cdot (-6) = (-2) \cdot (-2) = 4$
- Για $\mathrm{x} = -3$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = -\frac{2}{3} \cdot (-3) = (-2) \cdot (-1) = 2$
- Για $\mathrm{x} = 0$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = -\frac{2}{3} \cdot 0 = 0$
- Για $\mathrm{y} = -4$, παίρνουμε: $\mathrm{x} = -\frac{3}{2} \cdot (-4) = (-3) \cdot (-2) = 6$
- Για $\mathrm{y} = -6$, παίρνουμε: $\mathrm{x} = -\frac{3}{2} \cdot (-6) = (-3) \cdot (-3) = 9$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-6	-3	0	6	9
y	4	2	0	-4	-6

b) Επιλέγουμε από τον πίνακα τα σημεία $O(0,0) και\ A(-3,2)$ και η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 2 – Λύση

a) Με αντιστοιχία στην γενική εξίσωση ευθείας $y = \alpha x$ για την ευθεία (ε_1) η κλίση είναι $\alpha_1 = -2$, ενώ για την ευθεία (ε_2) η κλίση είναι $\alpha_2 = \frac{1}{4}$.

b) Κατασκευάζουμε από έναν πίνακα τιμών δύο σημείων για κάθε ευθεία θεωρώντας το τετριμμένο σημείο $O(0,0)$.

- Για την ευθεία (ε_1):

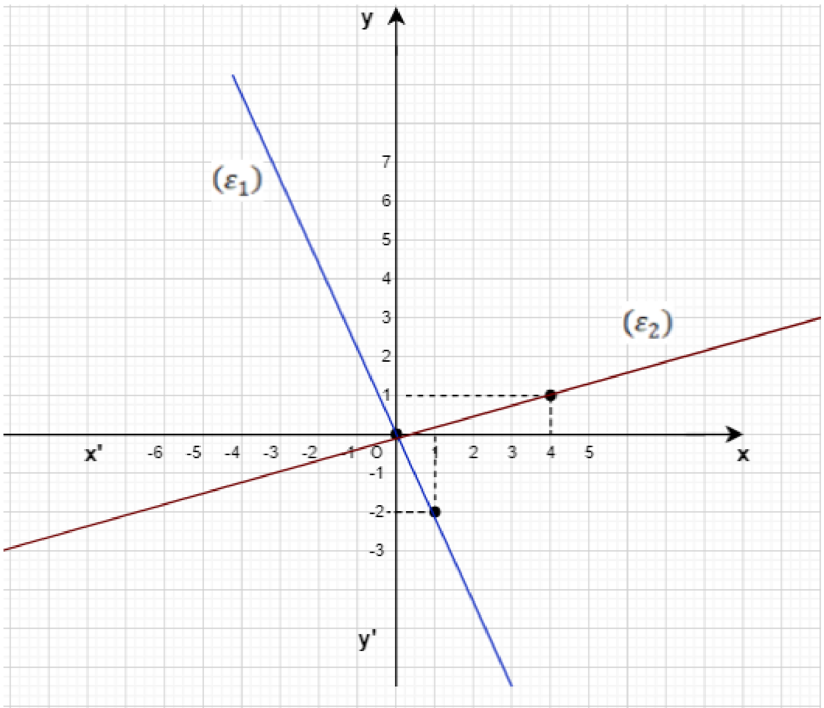
x	0	1
y	0	-2

- Για την ευθεία (ε_2):

x	0	4
y	0	1

*Η επιλογή των τετμημένων έγινε τυχαία αλλα με γνώμονα την κλίση κάθε ευθείας.

Η κοινή γραφική παράσταση των ευθειών είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 3 – Λύση

a) Τα ποσά του πίνακα είναι ανάλογα οπότε για όλα τα ζεύγη (x, y) εκτός των τιμών $x = 0, y = 0$ θα επαληθεύουν την σχέση $\alpha = \frac{y}{x}$.

Αντικαθιστούμε στην σχέση αυτή τις τιμές $x = -2$, $y = 4$ ως συμπληρωμένο ζεύγος του πίνακα και παίρνουμε:

$$\alpha = \frac{4}{-2} = -2$$

Οπότε η εξίσωση που συνδέει τα ποσά θα είναι η: $\boldsymbol{-2 = \frac{y}{x}}$

Με αντικατάσταση στον τύπο $-2 = \frac{y}{x}$ των τιμών $x = 1, x = -4$ καθώς και των $y = 12, y = -20$ στον εκφρασμένο ως προς την μεταβλητή x τύπο $x = \frac{y}{-2}$, παίρνουμε:

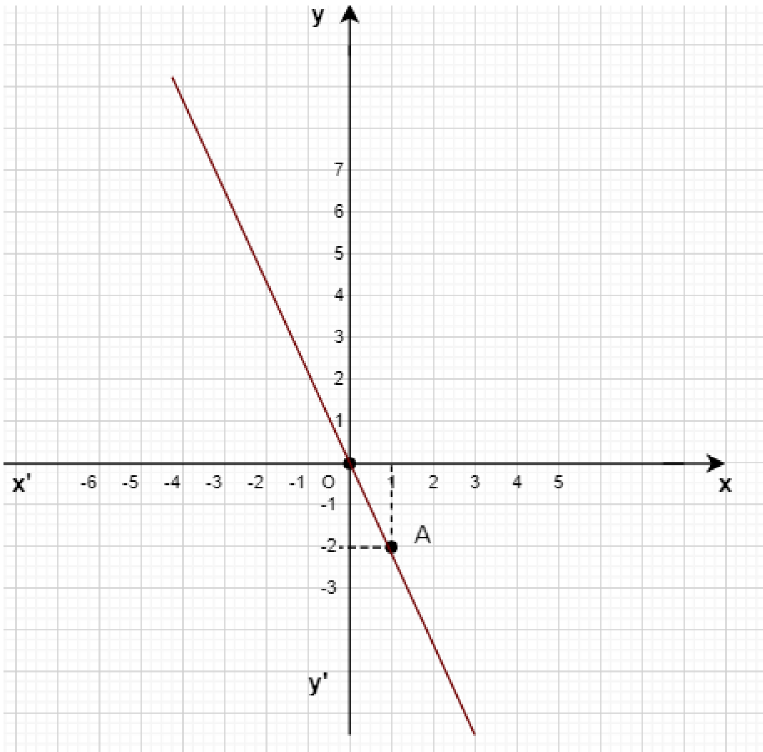
- Για $\mathrm{x} = 1$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = -2$
- Για $\mathrm{x} = -4$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = 8$
- Για $\mathrm{y} = 12$, παίρνουμε: $\mathrm{x} = \frac{12}{-2} = -6$
- Για $\mathrm{y} = -20$, παίρνουμε: $\mathrm{x} = \frac{-20}{-2} = 10$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	1	-2	-4	-6	10
y	-2	4	8	12	-20

b) Η συνάρτηση που συνδέει τα δύο ποσά θα είναι της μορφής $y = \alpha x$ λόγω αναλογίας, δηλαδή η συνάρτηση $y = -2x$.

c) Επιλέγουμε από τον πίνακα το σημείο $A(1,-2)$ *και το τετριμμένο* $O(0,0)$ και η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 4 – Λύση

a) Η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων οπότε θα έχει γενική εξίσωση $y = \alpha x$. Δεδομένου ότι έχει κλίση $\alpha = \frac{3}{4}$ η εξίσωση θα είναι $\boldsymbol{y = \frac{3}{4}x}$**.**

b) Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης την τιμή $y = 6$ και λύνουμε ως προς την τετμημένη x. Οπότε παίρνουμε:

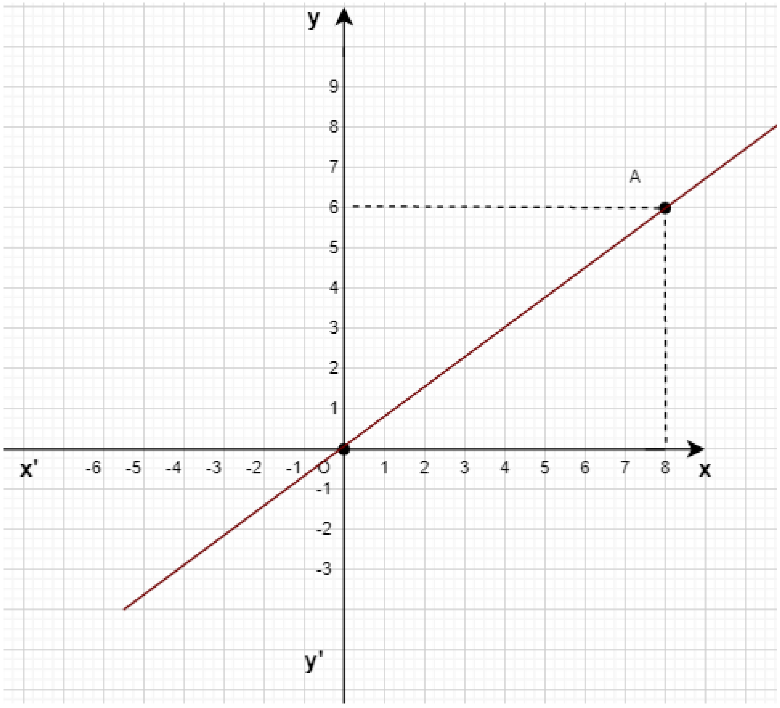
$$6 = \frac{3}{4}\mathrm{x}$$

$$3x = 6 \cdot 4$$

$$x = \frac{24}{3} = 8$$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $A(8,6)$.

c) Επιλέγουμε το σημείο $A(8,6)$ $και\ το\ τετριμμένο$ $O(0,0)$ και η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



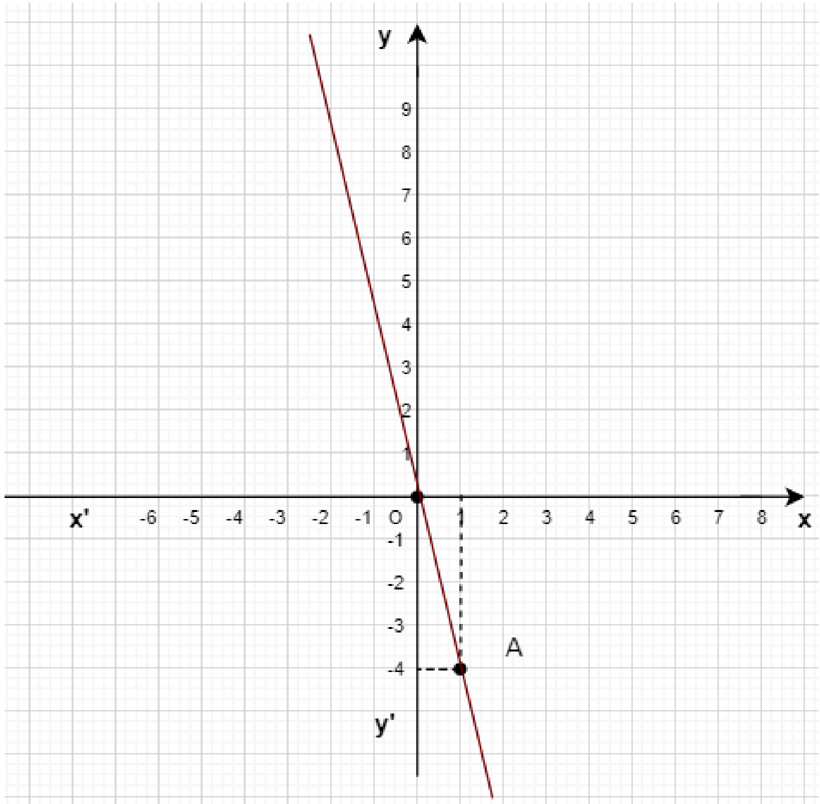
Άσκηση 5 – Λύση

a) Υπολογίζουμε την κλίση της από τον τύπο $\alpha = \frac{y}{x}$, με $x\ και\ y$ τις συντεταγμένες του σημείου A αφού αυτό ανήκει στην ευθεία, οπότε θα επαληθεύει και την εξίσωση της. Άρα έχουμε:

$$\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-4}{1} = -4$$

b) Η ευθεία θα έχει εξίσωση: $\boldsymbol{y = -4x}$

c) Επιλέγουμε το σημείο $A(1,-4)$ $και\ το\ τετριμμένο$ $O(0,0)$ και η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 6 – Λύση

a) Η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων οπότε θα έχει γενική εξίσωση $y = \alpha x$. Δεδομένου ότι το σημείο A ανήκει στην ευθεία, θα επαληθεύει και την εξίσωση της. Υπολογίζουμε την κλίση από τον τύπο $\alpha = \frac{y}{x}$ αντικαθιστώντας τις τιμές $x = -9$, $y = -3$, οπότε παίρνουμε:

$$\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$$

Η ευθεία θα έχει εξίσωση: $\boldsymbol{y = \frac{1}{3}x}$

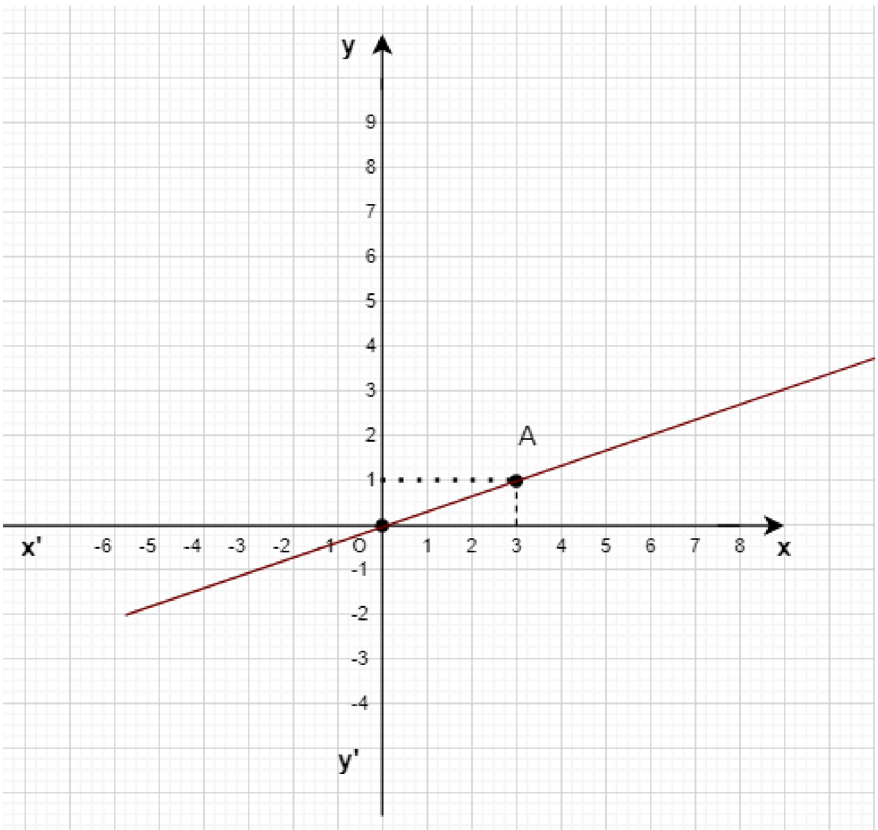
b) Με αντικατάσταση στον τύπο $y = \frac{1}{3}x$ των τιμών $x = -6, x = -3, x = 0$ καθώς και των τιμών $y = 1, y = 3$ στον εκφρασμένο ως προς την μεταβλητή x τύπο $x = 3y$, παίρνουμε:

- Για $x = -6$, παίρνουμε: $y = \frac{1}{3} \cdot (-6) = -2$
- Για $x = -3$, παίρνουμε: $y = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$
- Για $x = 0$, παίρνουμε: $y = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$
- Για $y = 1$, παίρνουμε: $x = 3 \cdot 1 = 3$
- Για $y = 3$, παίρνουμε: $x = 3 \cdot 3 = 9$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-6	-3	0	3	9
y	-2	-1	0	1	3

c) Επιλέγουμε το σημείο $A(3,1)$ *και το τετριμμένο* $O(0,0)$ και η γραφική παράσταση είναι η εξής:



Άσκηση 7 – Λύση

Γνωρίζουμε ότι ο άξονας $x'x$ μπορεί να εκφραστεί από την ευθεία $y = 0$. Για να ισχύει αυτό στην ευθεία $y = (4 - \frac{2(\mu-1)}{5})x$ θα πρέπει η κλίση της $\alpha = 4 - \frac{2(\mu-1)}{5}$, να είναι ταυτοτικά μηδέν.

Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη εξίσωση:

$$4 - \frac{2(\mu-1)}{5} = 0$$

$$4 \cdot 5 - 5 \cdot \frac{2(\mu-1)}{5} = 0$$

$$20 - 2(\mu - 1) = 0$$

$$20 - 2\mu + 2 = 0$$

$$2\mu = 22$$

$$\mu = \frac{22}{2} = 11$$

Άσκηση 8 – Λύση

a) Οι συντεταγμένες του σημείου θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας αφού αυτή διέρχεται από το A. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας τις τιμές $x = -2, y = 3\lambda - 12$ και παίρνουμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο λ, ως ακολούθως:

$$3\lambda - 12 = (9 - 6\lambda)(-2)$$

$$3\lambda - 12 = -18 + 12\lambda$$

$$12\lambda - 3\lambda = -12 + 18$$

$$9\lambda = 6$$

$$\lambda = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

b) Αντικαθιστούμε στην παραμετρική εξίσωση της ευθείας την τιμή $\lambda = \frac{2}{3}$ και βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας:

$$y = (9 - 6\lambda)x = \left(9 - 6 \cdot \frac{2}{3}\right)x = (9 - 4)x = 5x$$

Η ευθεία έχει εξίσωση : $\boldsymbol{y = 5x}$

Με αντικατάσταση στον τύπο $y = 5x$ των τιμών $x = -4, x = -3\ x = -1, x = 0$ καθώς και των τιμών $y = 10, y = 25, y = 45$ στον εκφρασμένο ως προς την μεταβλητή x τύπο $x = \frac{y}{5}$, παίρνουμε:

- Για $\mathrm{x} = -4$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = 5 \cdot (-4) = -20$
- Για $\mathrm{x} = -3$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = 5 \cdot (-3) = -15$
- Για $\mathrm{x} = -1$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = 5 \cdot (-1) = -5$
- Για $\mathrm{x} = 0$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = 5 \cdot 0 = 0$
- Για $\mathrm{y} = 10$, παίρνουμε: $\mathrm{x} = \frac{10}{5} = 2$
- Για $\mathrm{y} = 25$, παίρνουμε: $\mathrm{x} = \frac{25}{5} = 5$
- Για $\mathrm{y} = 45$, παίρνουμε: $\mathrm{x} = \frac{45}{5} = 9$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-4	-3	-1	0	2	5	9
y	-20	-15	-5	0	10	25	45

c) Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης τις τιμές $x = \beta, y = 3(\beta + 4)$ διότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία. Παίρνουμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο β ως ακολούθως:

$3(\beta + 4) = 5\beta$

$3\beta + 12 = 5\beta$

$2\beta = 12$ άρα $\beta = \frac{12}{2} = 6$

Άσκηση 9 – Λύση

a) Η κλίση της παραμετρικής εξίσωσης της ευθείας είναι $\alpha = 2 - \frac{\mu-5}{3}$. Από τα δεδομένα θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη εξίσωση:

$$2 - \frac{\mu-5}{3} = 1 - \mu$$

$$3 \cdot 2 - 3 \cdot \frac{\mu-5}{3} = 3(1-\mu)$$

$$6 - (\mu - 5) = 3 - 3\mu$$

$$6 - \mu + 5 = 3 - 3\mu$$

$$3\mu - \mu = 3 - 5 - 6$$

$$2\mu = -8$$

$$\mu = \frac{-8}{2} = -4$$

b) Η κλίση της ευθείας είναι $\alpha = 1 - \mu = 1 - (-4) = 1 + 4 = 5$. Οπότε η ευθεία έχει γενική εξίσωση: $\boldsymbol{y = 5x}$

Η τεταγμένη είναι μικρότερη κατά 4 μονάδες της τετμημένης. Οπότε θα ισχύει $y = x - 4$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας και παίρνουμε:

$$x - 4 = 5x$$

$$5x - x = -4$$

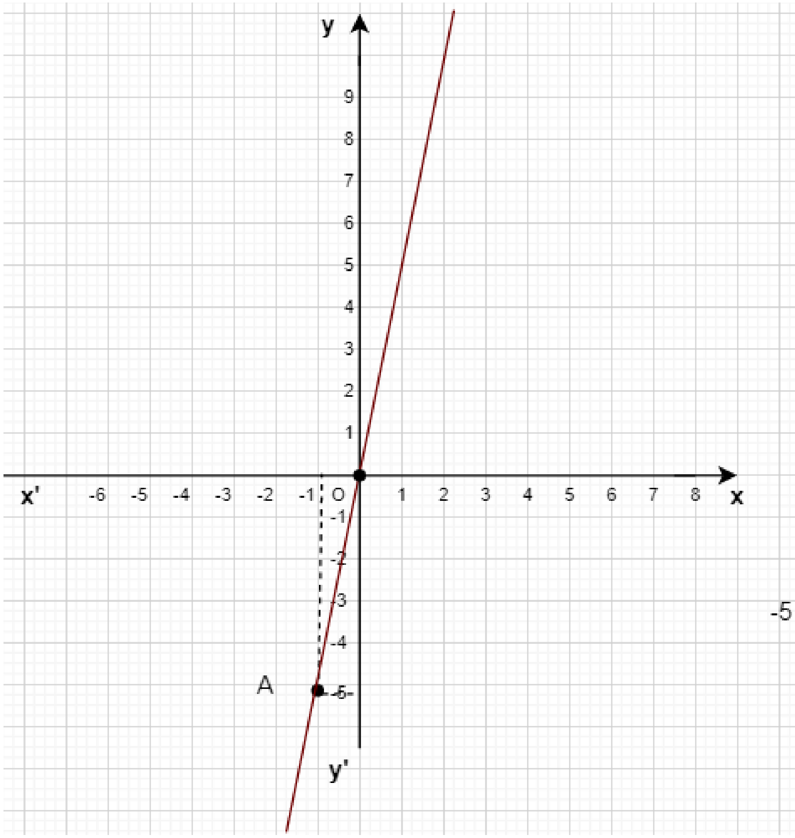
$$4x = -4$$

$$x = \frac{-4}{4} = -1$$

Οπότε η τεταγμένη θα είναι: $y = x - 4 = -1 - 4 = -5$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $B(-1, -5)$.

c) Επιλέγουμε το σημείο $B(-1,-5)$ *και το τετριμμένο* $O(0,0)$ και η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 10 – Λύση

a) Το σημείο A ανήκει στην ευθεία οπότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση τις τιμές $x=-3, y=2-\mu$ και δημιουργούμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο μ, ως εξής:

$$2-\mu=\left(7-\frac{3(2-\mu)}{2}\right)(-3)$$

$$2-\mu=-21+\frac{9(2-\mu)}{2}$$

$$2\cdot(2-\mu)=-21\cdot 2+2\cdot\frac{9(2-\mu)}{2}$$

$$4-2\mu=-42+18-9\mu$$

$9\mu-2\mu=-42+18-4$ άρα $7\mu=-28$ οπότε $\mu=\frac{-28}{7}=-4$

b) Το σημείο A έχει συντεταγμένες $(-3,6)$ αν αντικαταστήσουμε την τιμή $\mu = -4$. Η κλίση δίνεται από τον τύπο $\alpha = \frac{y}{x}$. Οπότε έχουμε:

$$\alpha = \frac{y}{x} = \frac{6}{-3} = -2$$

Η ευθεία θα έχει γενική εξισωση: $\boldsymbol{y = -2x}$

c) Για το σημείο θα ισχύει $x = y + 6$ ή $y = x - 6$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας και παίρνουμε:

$x - 6 = -2x$

$2x + x = 6$

$3x = 6$

$x = \frac{6}{3} = 2$ οπότε και η τεταγμένη θα είναι: $y = 2 - 6 = -4$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $B(2, -4)$

Άσκηση 11 – Λύση

a) Τα ποσά «κιλά» αχλάδια και «τιμή κιλού» είναι ποσά ανάλογα. Έχουμε δεδομένο ότι για $x = 1kg$ (κιλά) πληρώνουμε $y = 1{,}2€$ (τιμή κιλού). Βρίσκουμε τον συντελεστή αναλογίας α που θα είναι και η κλίση της συνάρτησης μεταξύ τους από τον τύπο $\alpha = \frac{y}{x}$. Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$\alpha = \frac{y}{x} = \frac{1{,}2}{1} = 1{,}2$$

Η συνάρτηση που τα συνέει θα είναι: $\boldsymbol{y = 1{,}2x}$

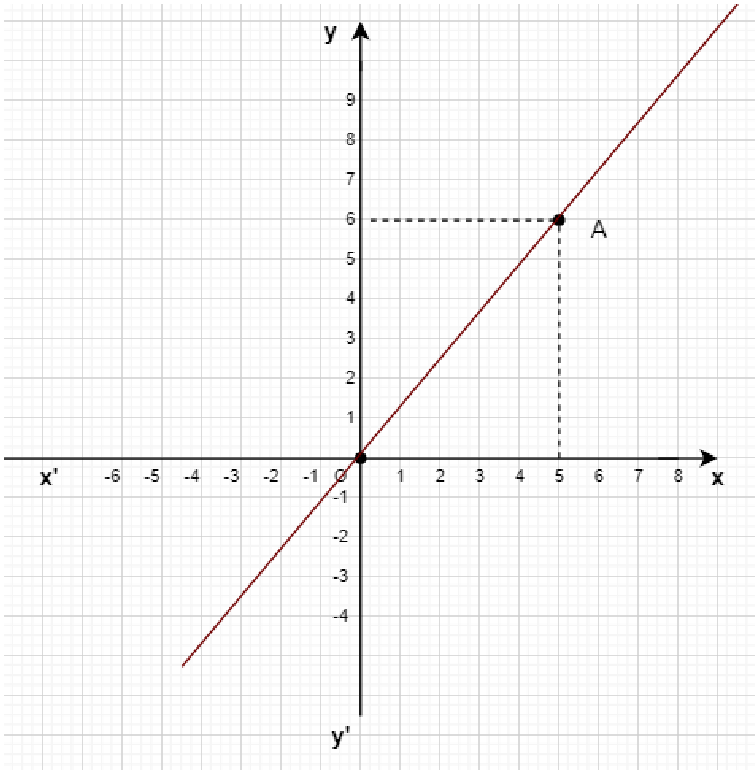
b) Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών δύο σημείων θεωρώντας το τετριμμένο σημείο $O(0,0)$.

- Για $x = 5, \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon{:}\, y = 1{,}2 \cdot 5 = 6$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	0	5
y	0	6

Θεωρώντας σημείο $A(5,6)$ $και\ το\ τετριμμένο$ $O(0,0)$ και η γραφική παράσταση είναι η εξής:



Άσκηση 12 – Λύση

a) Σε ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα, το διάστημα s και ο χρόνος t είναι ανάλογα φυσικά μεγέθη. Η συνάρτηση που τα συνδέει είναι: $s = u \cdot t$, οπου u το μέτρο της σταθερής ταχύτητας. Από τα δεδομένα έχουμε $s = 0{,}8m$ και $t = 1sec$, με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$s = u \cdot t$$

$$0{,}8 = u \cdot 1$$

$$u = 0{,}8\frac{m}{s}$$

Η συνάρτηση έχει τύπο: $\boldsymbol{s = 0{,}8t}$

b) Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης τις τιμές $t = 1, t = 2, t = 4$ και στον εκφρασμένο ως προς τον χρόνο t, τύπο $t = \frac{s}{0,8}$, τις τιμές $s = 8, s = 32, s = 80$ και παίρνουμε:

- Για $\mathrm{t} = 1\mathrm{sec}$, παίρνουμε: $\mathrm{s} = 0,8 \cdot 1 = 0,8\mathrm{m}$
- Για $\mathrm{t} = 2\mathrm{sec}$, παίρνουμε: $\mathrm{s} = 0,8 \cdot 2 = 1,6\mathrm{m}$
- Για $\mathrm{t} = 4\mathrm{sec}$, παίρνουμε: $\mathrm{s} = 0,8 \cdot 4 = 3,2\mathrm{m}$
- Για $\mathrm{s} = 8\mathrm{m}$, παίρνουμε: $\mathrm{t} = \frac{8}{0,8} = 10\mathrm{sec}$
- Για $\mathrm{s} = 32\mathrm{m}$, παίρνουμε: $\mathrm{t} = \frac{32}{0,8} = 40\mathrm{sec}$
- Για $\mathrm{s} = 80\mathrm{m}$, παίρνουμε: $\mathrm{t} = \frac{80}{0,8} = 100\mathrm{sec}$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

$t(sec)$	1	2	4	10	40	100
$s(m)$	0,8	1,6	3,2	8	32	80

Άσκηση 13 – Λύση

a) Έστω x η αρχική τιμή στα προϊόντα. Τότε η έκπτωση με βάση το ποσοστό της θα είναι το $\frac{25}{100}x$ ή $0,25x$ επί της αρχικής τιμής. Οπότε η σχέση που συνδέει την έκπτωση (y) σε σχέση με την αρχική τιμή (x) θα είναι:

$$\boldsymbol{y = 0,25x}$$

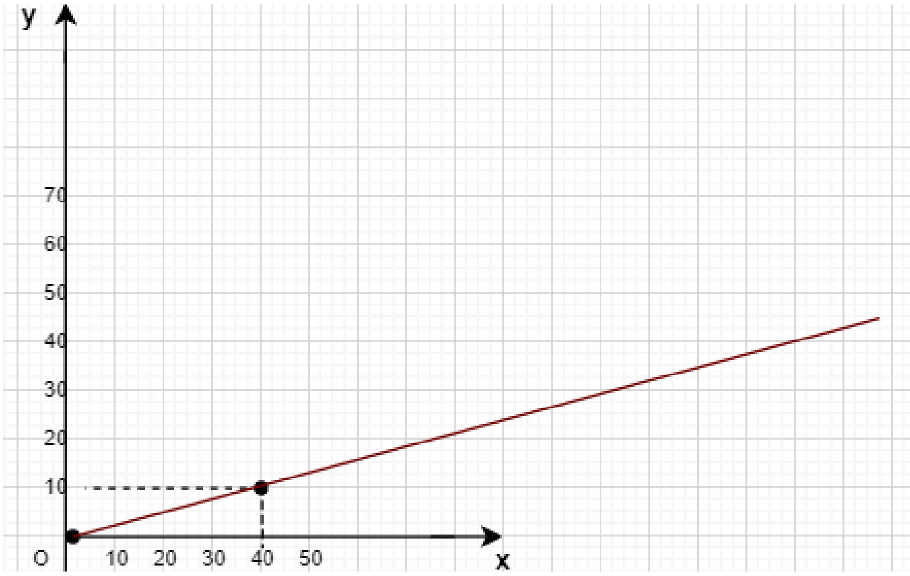
b) i. Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης την τιμή $x = 40€$ και υπολογίζουμε την έκπτωση y ως εξής:

$$y = 0,25 \cdot 40 = 10€\ έκπτωση$$

ii. Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης την τιμή $y = 30€$ και υπολογίζουμε την αρχική τιμή x ως εξής:

$$30 = 0,25x \quad \text{άρα} \quad x = \frac{30}{0,25} = 120€\ αρχική\ τιμή$$

c) Θεωρούμε το τετριμμένο σημείο $O(0,0)$ και το σημείο $A(40{,}10)$ του ερωτήματος (i). Η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



*Η γραφική παράσταση έγινε στους θετικούς ημιάξονες γιατι τα μεγέθη είναι μη αρνητικά.

3.4. Η συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 – Απάντηση

Οι παράλληλες ευθείες έχουν την ίδια κλίση α. Με αντιστοιχία στις εξισώσεις των ευθειών η ευθεία $y = -7x$ έχει ίδια κλίση με την ευθεία $y = -7x + 3$,οπότε θα είναι και παράλληλες μεταξύ τους. Σωστή επιλογή η (iv).

Ερώτηση Κατανόησης 2 – Απάντηση

Η ευθεία γράφεται $y = 1 \cdot x + 3$, οπότε έχει κλίση $\alpha = 1$. Σωστή επιλογή η (i).

Ερώτηση Κατανόησης 3 – Απάντηση

Η ευθεία γράφεται $y = -\frac{1}{3} \cdot x + 2$, οπότε έχει κλίση $\alpha = -\frac{1}{3}$. Σωστή επιλογή η (iv).

Ερώτηση Κατανόησης 4 – Απάντηση

Για να βρούμε το σημείο τομής μιας ευθείας με τον άξονα $x'x$, αντικαθιστούμε στην εξίσωση της την τιμή $y = 0$ και λύνουμε ως προς την τετμημένη x. Οπότε παίρνουμε την εξίσωση: $2x - 6 = 0$ με λύση $\mathbf{x = 3}$. Το σημείο τομής τότε είναι το $B(3,0)$ και σωστή επιλογή η (ii).

Ερώτηση Κατανόησης 5 – Απάντηση

Για να βρούμε το σημείο τομής μιας ευθείας με τον άξονα $y'y$, αντικαθιστούμε στην εξίσωση της την τιμή $x = 0$ και λύνουμε ως προς την τεταγμένη y. Οπότε παίρνουμε την εξίσωση:

$y = -2 \cdot 0 - 6$ με λύση $\mathbf{y = -6}$. Σωστή επιλογή η (ii).

Ερώτηση Κατανόησης 6 – Απάντηση

Για να βρούμε το σημείο τομής μιας ευθείας με τον άξονα $y'y$, αντικαθιστούμε στην εξίσωση της την τιμή $x = 0$ και λύνουμε ως προς την τεταγμένη y. Οπότε παίρνουμε την εξίσωση:

$y = -\frac{2}{3} \cdot 0 + 7$ με λύση $\mathbf{y = 7}$. Το σημείο τομής τότε είναι το $A(0,7)$ και σωστή επιλογή η (i).

Ερώτηση Κατανόησης 7 – Απάντηση

Για να βρούμε το σημείο τομής μιας ευθείας με τον άξονα $x'x$, αντικαθιστούμε στην εξίσωση της την τιμή $y = 0$ και λύνουμε ως προς την τετμημένη x. Οπότε παίρνουμε την εξίσωση: $-\frac{x}{3} + 2 = 0$ με λύση $\mathbf{x = 6}$. Σωστή επιλογή η (iv).

Ερώτηση Κατανόησης 8 – Απάντηση

Αντικαθιστούμε στην ευθεία $y = 2x - 3$, την τιμή $x = 0$ και παίρνουμε άμεσα την λύση $y = -3$. Το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ έχει συντεταγμένες $A(0, -3)$ και θα πρέπει να εξετάσουμε σε ποια από τις υπόλοιπες ευθείες επαληθέυεται η εξίσωση τους, αντικαθιστώντας την τιμή $x = 0$ και αναμένοντας την τιμή $y = -3$. Οπότε έχουμε:

- Για την ευθεία $y = 3x - 2$: $y = 3 \cdot 0 - 2 = -2$, οπότε το σημείο Α δεν ανήκει στην ευθεία.
- Για την ευθεία $y = 7x - 3$: $y = 7 \cdot 0 - 3 = -3$, οπότε το σημείο Α ανήκει στην ευθεία.
- Για την ευθεία $y = 2x - 7$: $y = 2 \cdot 0 - 7 = -7$, οπότε το σημείο Α δεν ανήκει στην ευθεία.
- Για την ευθεία $y = 2x$: $y = 2 \cdot 0 = 0$, οπότε το σημείο Α δεν ανήκει στην ευθεία.

Σωστή επιλογή η (ii).

Ερώτηση Κατανόησης 9 – Απάντηση

Θεωρούμε την γενική εξίσωση ευθείας $y = \alpha x + \beta$, με δεδομένη την κλίση $\alpha = -2$ καθώς και του σημείου τομής με τον άξονα $y'y$ που έχει συντεταγμένες $A(0,5)$. Αντικαθιστούμε στην γενική εξίσωση τις τιμές $\alpha = -2, x = 0$ και $y = 5$ δημιουργώντας μια εξίσωση ως προς την παράμετρο β ως εξής:

$$5 = -2 \cdot 0 + \beta$$

$$\beta = 5$$

Οπότε η ευθεία έχει εξίσωση $y = -2x + 5$ με σωστή επιλογή την (iv).

Ερώτηση Κατανόησης 10 – Απάντηση

Αντικαθιστούμε τις τετμημένες των σημείων στην εξίσωση της ευθείας ώστε να δούμε ποιο από αυτά την επαληθεύει. Οπότε έχουμε:

- Για $x = -3$, παίρνουμε $y = 3 \cdot (-3) - 4 = -13$, το σημείο A ανήκει στην ευθεία.
- Για $x = 0$, παίρνουμε $y = 3 \cdot 0 - 4 = -4$, το σημείο B ανήκει στην ευθεία.
- Για $x = \frac{1}{3}$, παίρνουμε $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - 4 = -3 \neq 3$, το σημείο Γ δεν ανήκει στην ευθεία.
- Για $x = \frac{4}{3}$, παίρνουμε $y = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) - 4 = 0$, το σημείο Δ ανήκει στην ευθεία.

Η ευθεία δεν διέρχεται από το σημείο Γ οπότε σωστή επιλογή η (iii).

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

Για κάθε μία από τις ευθείες κατασκευάζουμε πίνακα τιμών δύο σημείων επιλέγοντας τυχαία τις τετμημένες τους, με σκοπό τη χάραξη της κοινής γραφικής παράστασης.

- Για την ευθεία $y = x$:

x	0	1
y	0	1

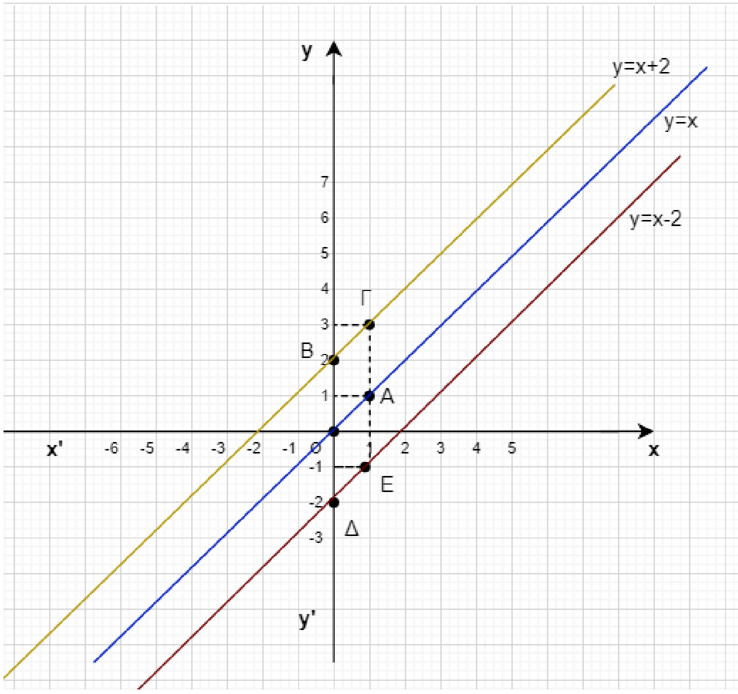
- Για την ευθεία $y = x + 2$:

x	0	1
y	2	3

- Για την ευθεία $y = x - 2$:

x	0	1
y	-2	-1

Η κοινή γραφική παράσταση με τα σημεία $O(0,0), A(1,1), B(0,2), \Gamma(1,3), \Delta(0,-2), E(1,-1)$ είναι η εξής:



Άσκηση 2 – Λύση

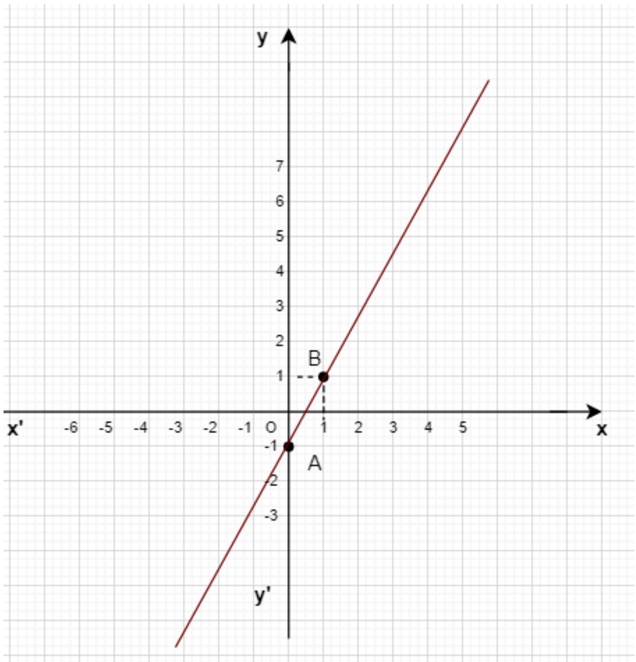
α) Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών για την ευθεία $y = 2x - 1$, επιλέγοντας τυχαία δύο σημεία με τετμημένες $x = 0, x = 1$. Υπολογίζουμε τις τεταγμένες των σημείων ως εξής:

- Για $x = 0,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$
- Για $x = 1,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

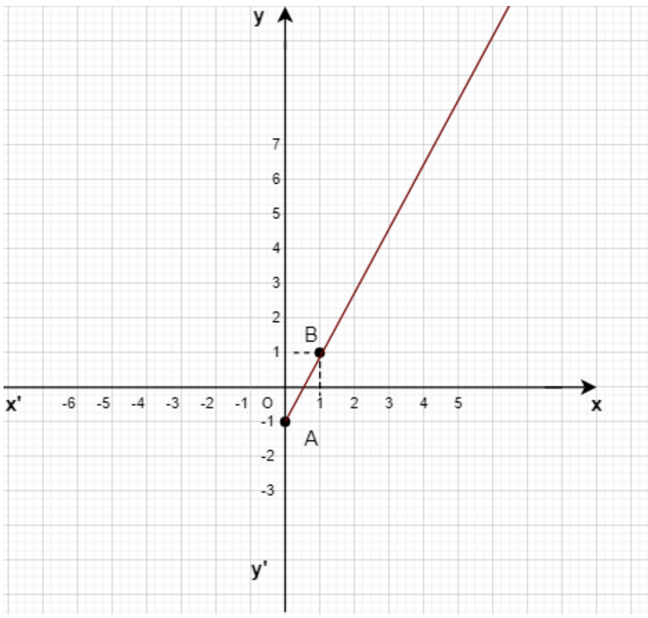
Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

x	0	1
y	-1	1

Η γραφική παράσταση με τα σημεία $A(0,-1), B(1,1)$ είναι η εξής:



b) Στην περίπτωση αυτή ζητάμε το τμήμα της ευθείας που ορίζεται για θετικές τετμημένες. Κατά την χάραξη της γραφικής παράστασης πρέπει να παίρνουμε <u>μόνο</u> τα διαστήματα που μας ορίζουν και όχι ολόκληρη την ευθεία για κάθε πραγματικό αριθμό. Με βάση τα παραπάνω το τμήμα της ευθείας ορίζεται με μορφη ημιευθείας με αρχή το σημείο A και έχει γραφική παράσταση την εξής:



c) Αρχικά θα πρέπει να βρούμε το διάστημα ορισμού της τετμημένης x επιλύοντας την ανίσωση, από την οποία παίρνουμε:

$-3x \leq x$

$-4x \leq 0$ άρα $x \geq 0$

Σε συνδυασμό με το δεξιό μέρος της ανίσωσης, παίρνουμε ως περιορισμο το διάστημα:

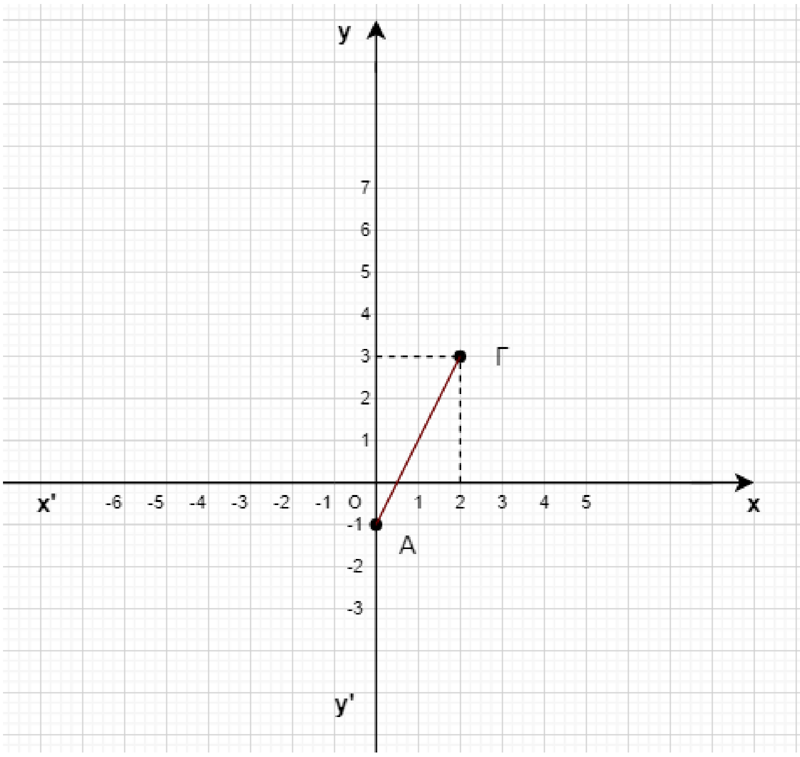
$$0 \leq x \leq 2$$

Θα πρεπει να βρούμε τις αντίστοιχες τιμές των τεταγμένων των σημείων με τετμημένες

$x = 0\ και\ x = 2$. Από την αντικατάσταση των τιμών αυτών στην εξίσωση της ευθείας παίρνουμε:

- Για $x = 0,\ παίρνουμε\ \ y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$
- Για $x = 2,\ παίρνουμε\ \ y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

Τα σημεία έχουν συντεταγμένες $A(0, -1), Γ(2,3)$ και η γραφική παράσταση θα έχει την μορφή ευθυγράμμου τμήματος με αρχή το σημείο A και τέλος το σημείο $Γ$, ως εξής:



Άσκηση 3 – Λύση

Παρατηρούμε ότι και για τις τρεις ευθείες υπάρχει περιορισμος στην γραφική παράσταση. Κάθε μία από αυτές θα παριστάνεται ως ευθύγραμμο τμήμα με αρχή και τέλος τα σημεία που καθορίζουν οι συνθήκες των ανισοτικών σχέσεων.

a) Θα πρεπει να βρούμε τις αντίστοιχες τιμές των τεταγμένων των σημείων με τετμημένες

$x = -2 \; και \; x = 1$. Από την αντικατάσταση των τιμών αυτών στην εξίσωση της ευθείας

$y = -2x \; και$ παίρνουμε:

- Για $x = -2, \; παίρνουμε \; y = -2 \cdot (-2) = 4$
- Για $x = 1, \; παίρνουμε \; y = -2 \cdot 1 = -2$

Τα σημεία έχουν συντεταγμένες $A(-2{,}4), B(1,-2)$

b) Θα πρεπει να βρούμε τις αντίστοιχες τιμές των τεταγμένων των σημείων με τετμημένες

$x = 1 \; και \; x = 3$. Από την αντικατάσταση των τιμών αυτών στην εξίσωση της ευθείας

$y = 2x - 4 \; και$ παίρνουμε:

- Για $x = 1, \; παίρνουμε \; y = 2 \cdot 1 - 4 = -2$
- Για $x = 3, \; παίρνουμε \; y = 2 \cdot 3 - 4 = 2$

Τα σημεία έχουν συντεταγμένες $B(1,-2), \Gamma(3{,}2)$

c) Θα πρεπει να βρούμε τις αντίστοιχες τιμές των τεταγμένων των σημείων με τετμημένες

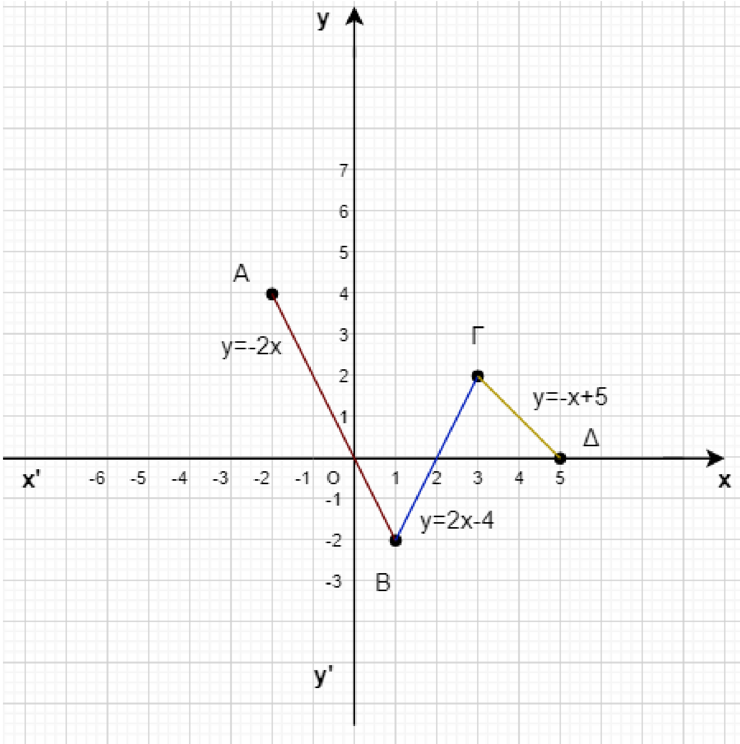
$x = 3 \; και \; x = 5$. Από την αντικατάσταση των τιμών αυτών στην εξίσωση της ευθείας

$y = -x + 5 \; και$ παίρνουμε:

- Για $x = 3, \; παίρνουμε \; y = -3 + 5 = 2$
- Για $x = 5, \; παίρνουμε \; y = -5 + 5 = 0$

Τα σημεία έχουν συντεταγμένες $\Gamma(3{,}2), \Delta(5{,}0)$

Η κοινή γραφική παράσταση είναι η εξής:



Άσκηση 4 – Λύση

a) Η ευθεία που αναζητούμε θα έχει κλίση $\alpha = 2$ εφόσον είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 2x$. Οπότε θα έχει παραμετρική εξίσωση $y = 2x + \beta$, στην οποία αντικαθιστούμε τις τιμές

$x = 0 \; \kappa\alpha\iota \; y = -5$ ως συντεταγμένες του σημείου τομής της με τον άξονα $y'y$. Παίρνουμε μια εξίσωση ως προς β ως εξής:

$$-5 = 2 \cdot 0 + \beta$$

$$\beta = -5$$

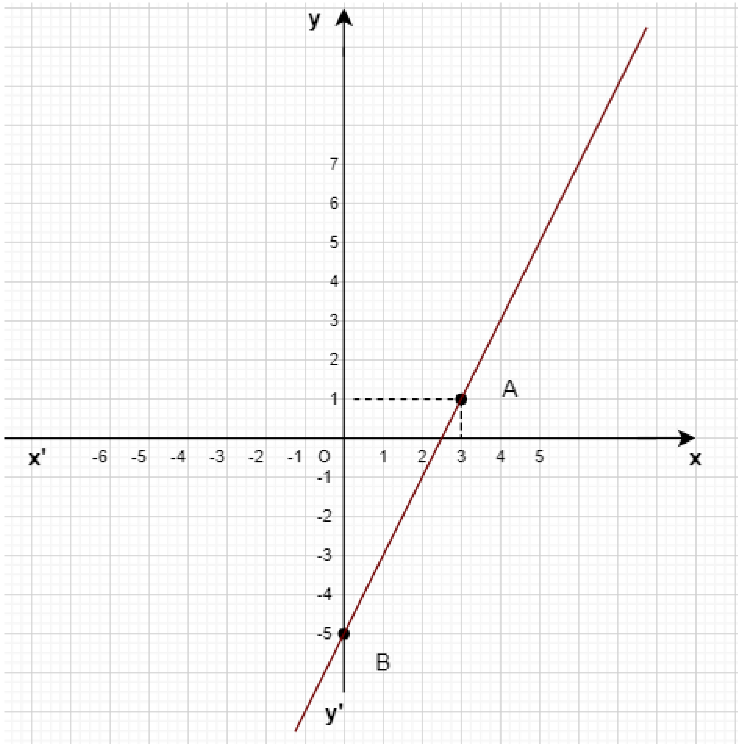
Η ευθεία έχει γενική εξίσωση: $\boldsymbol{y = 2x - 5}$

b) Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της συνάρτησης την τιμή $x = 3$ και λύνουμε ως προς την μεταβλητή y. Οπότε παίρνουμε:

$$y = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $A(3,1)$

c) Παίρνουμε τα σημεία $A(3,1)$ και το σημείο τομής της με τον άξονα $y'y$,$B(0,-5)$ και κατασκευάζουμε την γραφική παράσταση ως εξής:



Άσκηση 5 – Λύση

a) Οι ευθείες είναι παράλληλες οπότε θα έχουν ίδια κλίση. Από τα δεδομένα δημιουργούμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο α και παίρνουμε:

$$2\alpha - 1 = 3$$

$$2\alpha = 4$$

$$\alpha = \frac{4}{2} = 2$$

Οπότε η ευθεία έχει εξίσωση: $\boldsymbol{y = 3x - 13}$

b) Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών για την ευθεία $y = 3x - 13$, επιλέγοντας τυχαία δύο σημεία με τετμημένες $x = 5, x = 4$. Υπολογίζουμε τις τεταγμένες των σημείων ως εξής:

- Για $x = 5,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = 3 \cdot 5 - 13 = 2$
- Για $x = 4,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = 3 \cdot 4 - 13 = -1$

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι ο ακόλουθος:

x	5	4
y	2	-1

Ομοίως για την ευθεία ευθεία $y = 3x$, επιλέγοντας τυχαία δύο σημεία με τετμημένες

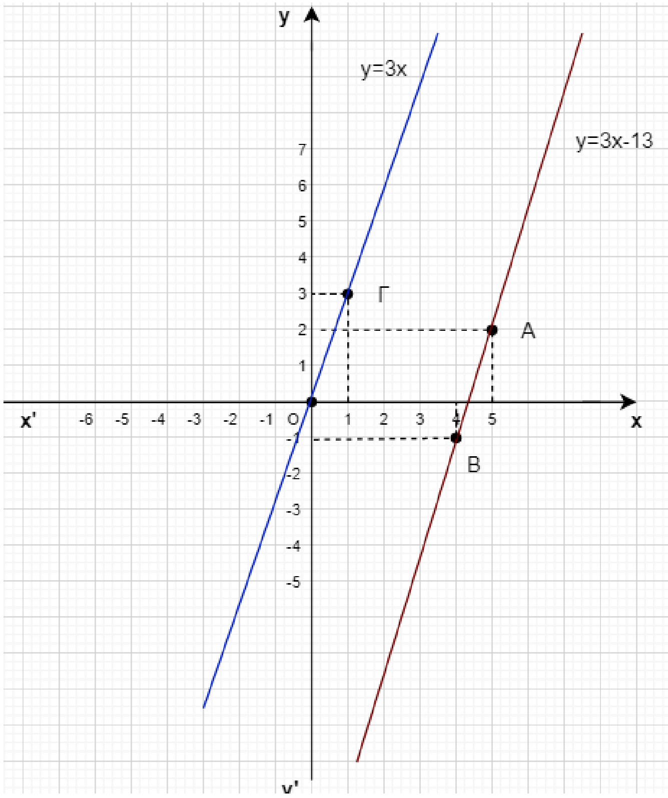
$x = 0, x = 1$. Υπολογίζουμε τις τεταγμένες των σημείων ως εξής:

- Για $x = 0,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = 3 \cdot 0 = 0$
- Για $x = 1,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = 3 \cdot 1 = 3$

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι ο ακόλουθος:

x	0	1
y	0	3

Τοποθετούμε τα σημεία $A(5,2), B(4,-1), O(0,0)$ $και$ $\Gamma(1,3)$ στο κοινό σύστημα συντεταγμένων και η κοινή γραφική παράσταση είναι η εξής:



Άσκηση 6 – Λύση

a) Οι ευθείες είναι παράλληλες οπότε θα έχουν την ίδια κλίση. Εξισώνουμε τις κλίσεις των δύο ευθειών και δημιουργούμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο μ ως εξής:

$$\frac{\mu-3}{4} = 1 + \frac{\mu-1}{2}$$

$$4 \cdot \frac{\mu-3}{4} = 4 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{\mu-1}{2}$$

$$\mu - 3 = 4 + 2(\mu - 1)$$

$$\mu - 3 = 4 + 2\mu - 2$$

$$2\mu - \mu = 2 - 3 - 4$$

$$\mu = -5$$

b) Με αντικατάσταση της παραμέτρου $\mu = -5$ στις παραμετρικές εξισώσεις των ευθειών παίρνουμε:

- Για $\mu = -5$ για την ευθεία (ε_1) $παίρνουμε$: $y = \frac{-5-3}{4}x = \frac{-8}{4}x = -2x$

  Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση: $\boldsymbol{y = -2x}$
- Για $\mu = -5$ για την ευθεία (ε_2) $παίρνουμε$: $y = \left(1 + \frac{-5-1}{2}\right)x + 5 - 1 = -2x + 4$

  Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $\boldsymbol{y = -2x + 4}$

Δημιουργούμε δύο πίνακες τιμών για τις ευθείες με τυχαία επιλογή τετμημένων $x = 0$, $x = 1$ Υπολογίζοντας τις τεταγμένες ως εξής:

Για την ευθεία $(\boldsymbol{\varepsilon_1})$:

- Για $x = 0$, $παίρνουμε\ \ y = -2 \cdot 0 = 0$
- Για $x = 1$, $παίρνουμε\ \ y = -2 \cdot 1 = -2$

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

x	0	1
y	0	-2

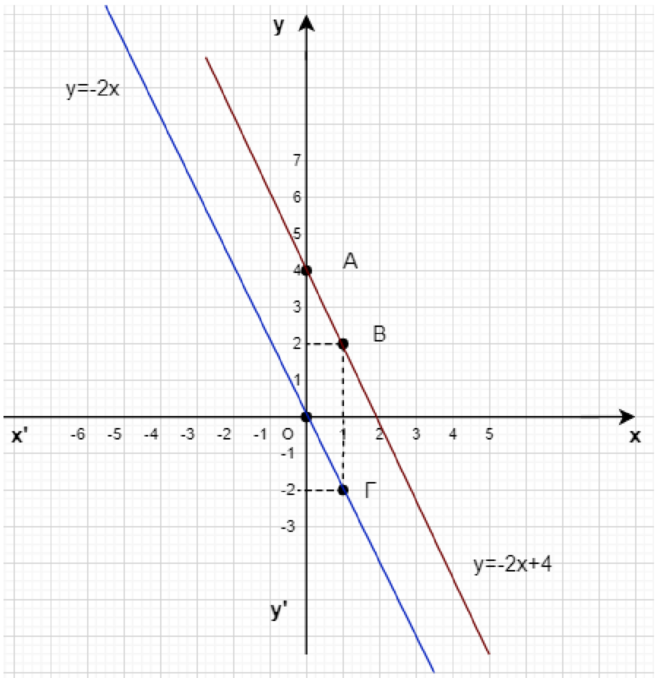
Για την ευθεία $(\boldsymbol{\varepsilon_2})$:

- Για $x = 0$, $παίρνουμε\ \ y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$
- Για $x = 1$, $παίρνουμε\ \ y = -2 \cdot 1 + 4 = 2$

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

x	0	1
y	4	2

Το κοινό τους διάγραμμα με την επιλογή των σημείων $A(0,4), B(1,2), O(0,0)\ και\ \Gamma(1,-2)$ είναι το εξής:



Άσκηση 7 – Λύση

a) Το σημείο A ανήκει στην ευθεία οπότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 5\ και\ y = -4$ και παίρνουμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο α ως εξής:

$$-4 = \alpha \cdot 5 + 4 - \alpha$$

$$5\alpha - \alpha = -4 - 4$$

$$4\alpha = -8$$

$$\alpha = \frac{-8}{4} = -2$$

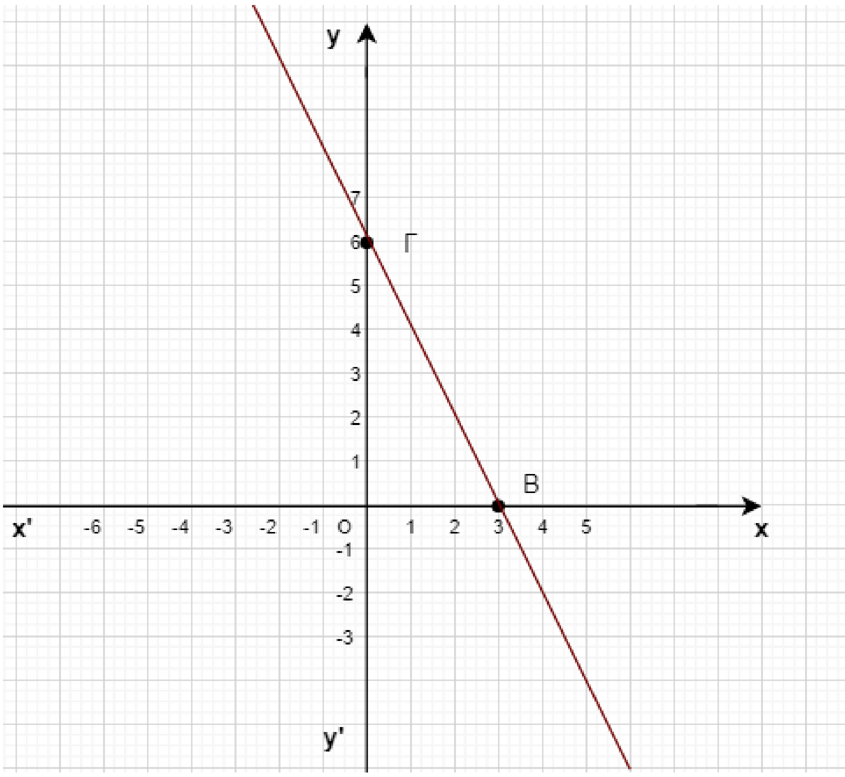
b) Η ευθεία, αντικαθιστώντας την τιμή $\alpha = -2$, έχει γενική εξίσωση $y = -2x + 6$. Για να βρούμε το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ αντικαθιστούμε την τιμη $x = 0$ στην εξίσωση της ευθείας και λύνουμε ως προς την τεταγμένη y. Αντίστοιχα για να βρούμε το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας την τιμή $y = 0$ και λύνουμε ως προς την τετμημένη x.

- Για τον άξονα $x'x$ με αντικατάσταση την τιμή $y = 0$ παίρνουμε:
  $0 = -2x + 6$
  $2x = 6$
  $x = \frac{6}{2} = 3$

  Το σημείο τομής έχει συντεταγμένες $B(3{,}0)$.

- Για τον άξονα y'y με αντικατάσταση την τιμή $x = 0$ παίρνουμε:
  $y = -2 \cdot 0 + 6$
  $y = 6$
  Το σημείο τομής έχει συντεταγμένες $\Gamma(0{,}6)$.

c) Έπιλέγουμε τα σημεία , $B(3{,}0)$ $και$ $\Gamma(0{,}6)$ για να χαράξουμε την γραφική παράσταση της ευθείας ως εξής:



Άσκηση 8 – Λύση

a) Αντικαθιστούμε στην παραμετρική εξίσωση της ευθείας τις τιμές $x = 2\; και\; y = 0$ ως συντεταγμένες του σημείου τομής που ανήκει στην ευθεία. Παίρνουμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο λ, ως εξής:

$$0 = (2\lambda + 15) \cdot 2 + \lambda$$

$$4\lambda + 30 + \lambda = 0$$

$$5\lambda = -30$$

$$\lambda = \frac{-30}{5} = -6$$

Η εξίσωση της ευθείας γίνεται για $\lambda = -6$: $\boldsymbol{y = 3x - 6}$

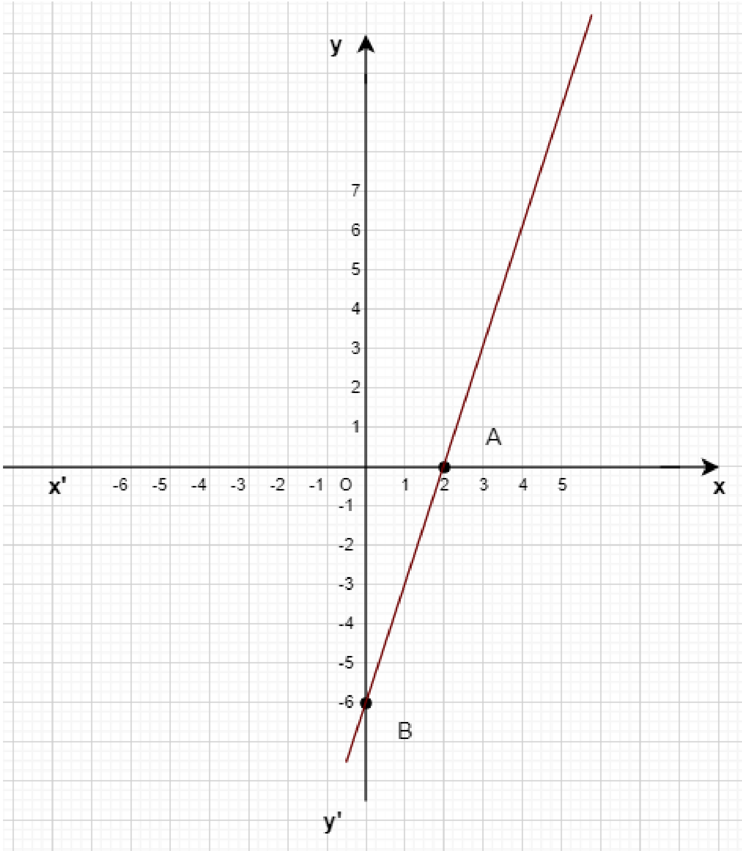
b) Η γενική μέθοδος για να βρούμε το Εμβαδόν που σχηματίζει η ευθεία με τους άξονες είναι η εξής:

1. Βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες.
2. Σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση.
3. Παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές στους άξονες και αντίστοιχα μήκη την τετμημένη του σημείου τομής στον άξονα $x'x$ και την τεταγμένη του σημείου τομής στον άξονα $y'y$.
4. Υπολογίζουμε το Εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου από το γινόμενο των μηκών των καθέτων πλευρών,διαιρούμενο με το δύο.

Αρκεί να βρούμε και το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας την τιμή $x = 0$ και υπολογίζουμε την τεταγμένη y. Οπότε έχουμε:

$$y = 3 \cdot 0 - 6 = -6$$

Το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ έχει συντεταγμένες $B(0,-6)$ ενώ το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ έχει συντεταγμένες $A(2,0)$. Επιλέγουμε τα δύο αυτά σημεία και σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της ευθείας ως εξής:



Παρατηρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο OAB με υποτείνουσα την πλευρά AB. Τα μήκη των καθέτων πλευρών $OB, O\Gamma$ είναι αντίστοιχα κατά απόλυτη τιμή ίσα με 6 *μονάδες και* 2 *μονάδες*. Οπότε λαμβάνουμε τον ακόλουθο τύπο:

$$E_{(OAB)} = \frac{OB \cdot OA}{2} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

Άσκηση 9 – Λύση

a) Η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $A(4,3)$ $και$ $B(0,1)$. Οι συντεταγμένες των σημείων θα επαληθεύουν την γενική διπαραμετρική εξίσωση της ευθείας $y = ax + \beta$. Αντικαθιστούμε αρχικά τις συντεταγμένες του σημείου Β και έχουμε:

$$1 = \alpha \cdot 0 + \beta$$

$$\beta = 1$$

Οπότε η μονοπαραμετρική εξίσωση με παράμετρο α, γίνεται: $\boldsymbol{y = ax + 1}$

Στην εξίσωση αυτή αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου A και παίρνουμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο α ως εξής:

$3 = a \cdot 4 + 1$

$4a = 3 - 1$

$a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι: $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + 1}$

.

b) Το σημείο $\Gamma(x, 0)$ ανήκει στην ευθεία οπότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν τον τύπο της. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ευθείας παίρνουμε:

$0 = \frac{1}{2}x + 1$

$\frac{1}{2}x = -1$

$x = -2$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $\Gamma(-2,0)$.

Ομοίως το σημείο $\Delta(x, -2)$ ανήκει στην ευθεία οπότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν τον τύπο της. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ευθείας παίρνουμε:

$-2 = \frac{1}{2}x + 1$ άρα $\frac{1}{2}x = -3$ άρα $x = -6$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $\Delta(-6, -2)$.

Άσκηση 10 – Λύση

a) Η ευθεία έχει κλίση $\alpha = -\frac{1}{2}$ και διέρχεται από το σημείο $A(6{,}0)$. Η παραμετρική της εξίσωση είναι: $y = -\frac{1}{2}x + \beta$ η οποία επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου A. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση τις τιμές $x = 6\ \kappa\alpha\iota\ y = 0$ και παίρνουμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο β ως εξής:

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot 6 + \beta$$

$$\beta = 3$$

b) Η ευθεία έχει εξίσωση: $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + 3}$**.** Θα υπολογίσουμε τις συντεταγμένες των σημείων $B, \Gamma\ \kappa\alpha\iota\ \Delta$.

- Για το σημείο B αντικαθιστούμε την τιμή $x = 0$ στην εξίσωση και παίρνουμε:
  $$y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3$$

  Το σημείο έχει συντεταγμένες $B(0{,}3)$.

- Για το σημείο Γ αντικαθιστούμε την τιμή $y = 5$ στην εξίσωση και παίρνουμε:
  $$5 = -\frac{1}{2}x + 3$$
  $$5 - 3 = -\frac{1}{2}x$$
  $$-\frac{1}{2}x = 2$$
  $$x = -4$$

  Το σημείο έχει συντεταγμένες $\Gamma(-4{,}5)$.

- Για το σημείο Δ παρατηρούμε ότι έχει συντεταγμένες $(-4{,}0)$.

  Το τραπέζιο $OB\Gamma\Delta$ έχει $B = \Delta\Gamma, \beta = OB\ \kappa\alpha\iota\ \upsilon = O\Delta$. Τα μήκη κατά απόλυτη τιμή είναι: $B = 5\ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma, \beta = 3\ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \upsilon = 4\ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$.

  Από τον τύπο του Εμβαδού του τραπεζίου $E = \frac{(B+\beta)\cdot\upsilon}{2}$ αντικαθιστούμε και έχουμε:
  $$E_{(OB\Gamma\Delta)} = \frac{(5+3)\cdot 4}{2} = 16\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 – Λύση

Για κάθε μία από τις ευθείες κατασκευάζουμε πίνακα τιμών δύο σημείων επιλέγοντας τυχαία τις τετμημένες τους, με σκοπό τη χάραξη της κοινής γραφικής παράστασης.

- Για την ευθεία $y = -\frac{1}{3}x$:

x	0	3
y	0	-1

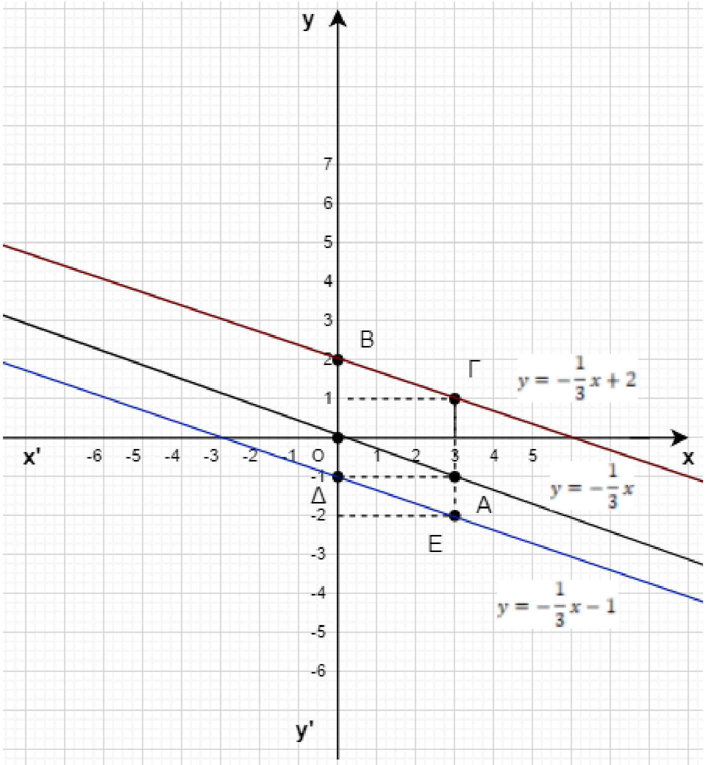
- Για την ευθεία $y = -\frac{1}{3}x + 2$:

x	0	3
y	2	1

- Για την ευθεία $y = -\frac{1}{3}x - 1$:

x	0	3
y	-1	-2

Η κοινή γραφική παράσταση με τα σημεία $O(0,0), A(3,-1), B(0,2), Γ(3,1), Δ(0,-1), E(3,-2)$ είναι η εξής:



Άσκηση 2 – Λύση

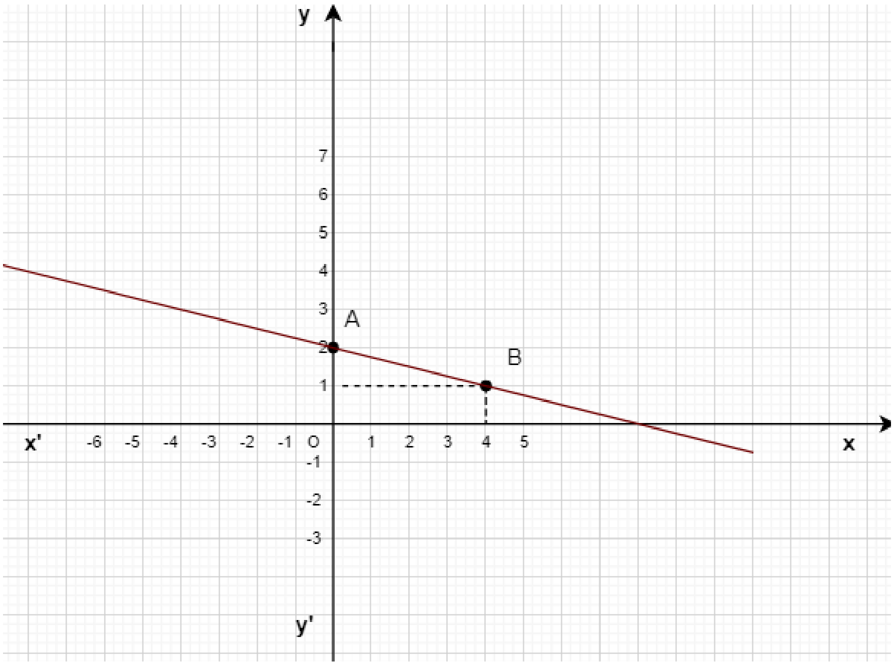
a) Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών για την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2$, επιλέγοντας τυχαία δύο σημεία με τετμημένες $x = 0, x = 4$. Υπολογίζουμε τις τεταγμένες των σημείων ως εξής:

- Για $x = 0,\ παίρνουμε\ \ y = -\frac{1}{4} \cdot 0 + 2 = 2$
- Για $x = 4,\ παίρνουμε\ \ y = -\frac{1}{4} \cdot 4 + 2 = 1$

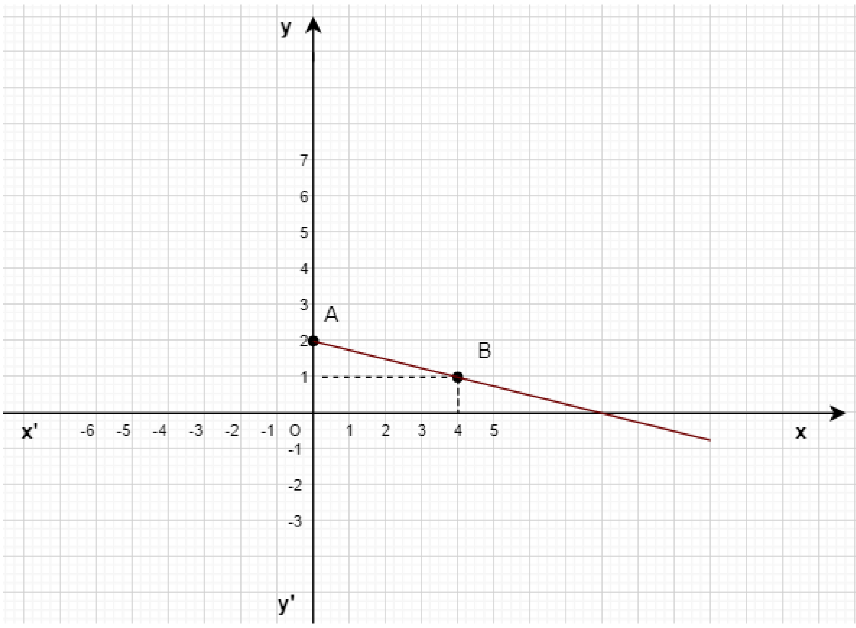
Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

x	0	4
y	2	1

Η γραφική παράσταση με τα σημεία $A(0,2), B(4,1)$ είναι η εξής:



b) Στην περίπτωση αυτή ζητάμε το τμήμα της ευθείας που ορίζεται για θετικές τετμημένες. Κατά την χάραξη της γραφικής παράστασης πρέπει να παίρνουμε μόνο τα διαστήματα που μας ορίζουν και όχι ολόκληρη την ευθεία για κάθε πραγματικό αριθμό. Με βάση τα παραπάνω το τμήμα της ευθείας που ορίζεται με μορφη ημιευθείας με αρχή το σημείο A έχει γραφική παράσταση την εξής:



c) Αρχικά θα πρέπει να βρούμε το διάστημα ορισμού της τετμημένης x επιλύοντας την ανίσωση, από την οποία παίρνουμε:

$$-4x \leq x$$

$$-5x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

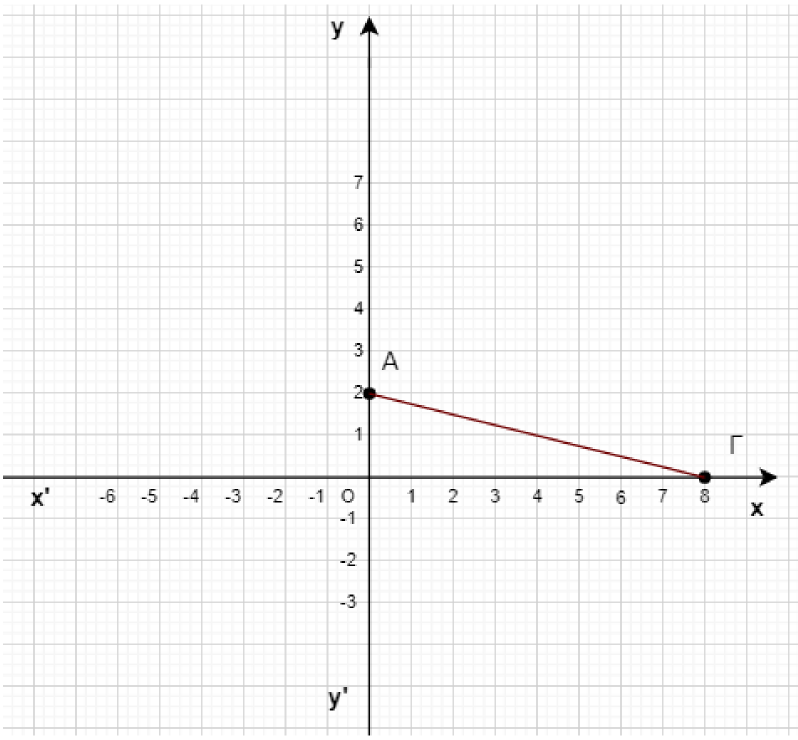
Σε συνδυασμό με το δεξιό μέρος της ανίσωσης, παίρνουμε ως περιορισμο το διάστημα:

$$0 \leq x \leq 8$$

Θα πρεπει να βρούμε τις αντίστοιχες τιμές των τεταγμένων των σημείων με τετμημένες $x = 0 \ και \ x = 8$. Από την αντικατάσταση των τιμών αυτών στην εξίσωση της ευθείας παίρνουμε:

- Για $x = 0,\ παίρνουμε\ \ y = -\frac{1}{4} \cdot 0 + 2 = 2$
- Για $x = 8,\ παίρνουμε\ \ y = -\frac{1}{4} \cdot 8 + 2 = 0$

Τα σημεία έχουν συντεταγμένες $A(0,2), \Gamma(8,0)$ και η γραφική παράσταση θα έχει την μορφή ευθυγράμμου τμήματος με αρχή το σημείο A και τέλος το σημείο Γ, ως εξής:



Άσκηση 3 – Λύση

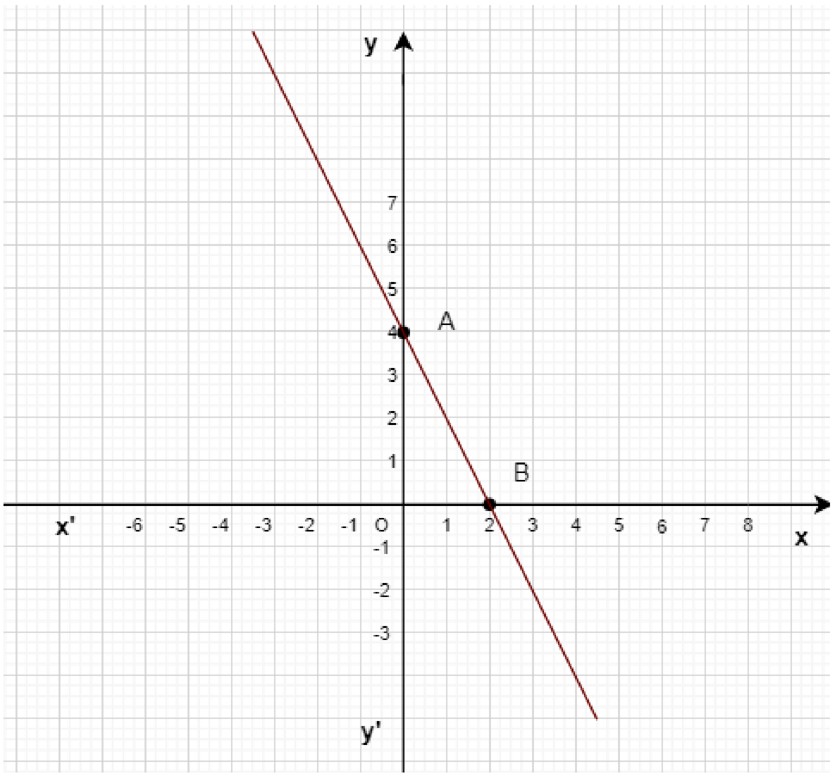
a) Θα αντικαταστήσουμε στην εξίσωση της ευθείας $y = -2x + 4$ τις τιμές $x = -1, x = 0$ και τις τιμές $y = 0, y = -2$ στον εκφρασμένο ως προς την τετμημένη x τύπο $x = \frac{4-y}{2}$. Οπότε παίρνουμε:

- Για $x = -1,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon: y = -2 \cdot (-1) + 4 = 6$
- Για $x = 0,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon: y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$
- Για $y = 0,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon: x = \frac{4-0}{2} = 2$
- Για $y = -2,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon: x = \frac{4-(-2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι:

x	-1	0	2	3
y	6	4	0	-2

b) Επιλέγουμε από τον πίνακα το σημείο $A(0,4)$ $\kappa\alpha\iota\ \tau o\ \tau\varepsilon\tau\rho\iota\mu\mu\acute{\varepsilon}\nu o$ $B(2,0)$ και η γραφική παράσταση είναι η εξής:



Άσκηση 4 – λύση

a) Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης την τιμή $x = 3$ και λύνουμε ως προς την τεταγμένη y. Οπότε παίρνουμε: $y = \frac{4}{3} \cdot 3 - 5 = -1$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $A(3, -1)$

b) Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης την τιμή $y = -9$ και λύνουμε ως προς την τετμημένη x. Οπότε παίρνουμε:

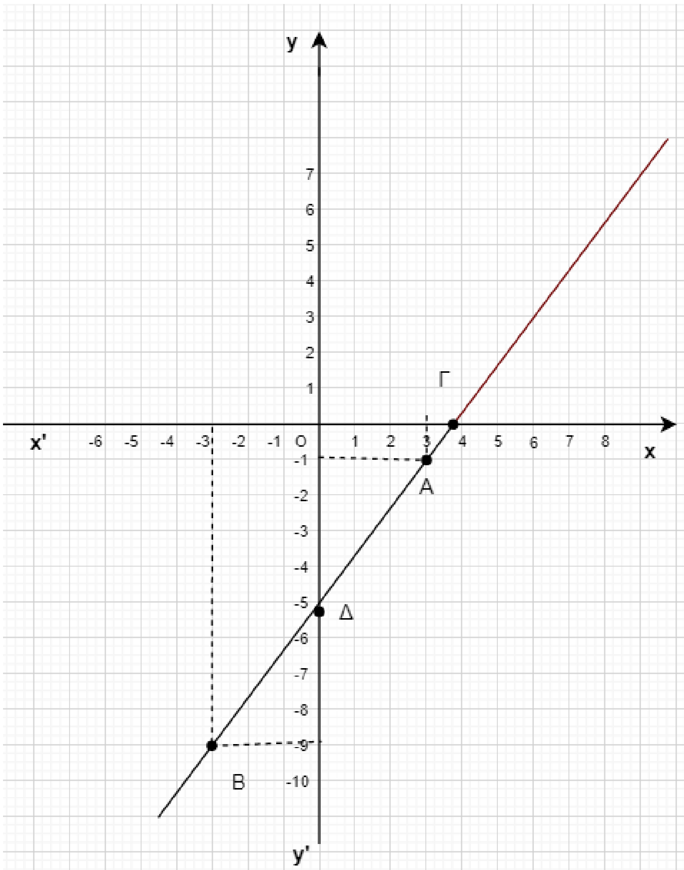
$-9 = \frac{4}{3}x - 5$

$\frac{4}{3}x = -9 + 5$

$\frac{4}{3}x = -4$ άρα $4x = -12$ οπότε $x = \frac{-12}{4} = -3$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $B(-3, -9)$.

c) Επιλέγουμε το σημείο $A(3, -1)$ *και το* $B(-3, -9)$ και η γραφική παράσταση είναι η εξής:



Ζητούμε το Εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $ΟΓΔ$ με τα σημεία $Γ\ και\ Δ$ να αποτελούν τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες. Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες τους ως εξής:

- Για το σημείο $Γ$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας την τιμή $y = 0$ και λύνουμε ως προς την τετμημένη x. Οπότε έχουμε:

  $0 = \frac{4}{3}x - 5$

  $\frac{4}{3}x = 5$

  $4x = 15$

  $x = \frac{15}{4}$

  Το σημείο έχει συντεταγμένες $Γ\left(\frac{15}{4}, 0\right)$.

- Για το σημείο $Δ$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας την τιμή $x = 0$ και λύνουμε ως προς την τεταγμένη y. Οπότε έχουμε:

$$y = \frac{4}{3} \cdot 0 - 5 = -5$$

  Το σημείο έχει συντεταγμένες $Δ(0, -5)$.

Οι κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου είναι οι $ΟΔ, ΟΓ$ με αντίστοιχα μήκη κατά απόλυτη τιμή $ΟΔ = 5\ μοναδες\ και\ ΟΓ = \frac{15}{4}\ μονάδες$. Εφαρμόζουμε τον τύπο του Εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου και παίρνουμε:

$$E_{(ΟΓΔ)} = \frac{ΟΓ \cdot ΟΔ}{2} = \frac{5 \cdot \frac{15}{4}}{2} = \frac{75}{8}\ τετραγωνικές\ μονάδες.$$

Άσκηση 5 – Λύση

a) Η ευθεία ε είναι παράλληλη με την ευθεία $y = -\frac{2}{3}x$ οπότε θα έχουν ίσες κλίσεις. Επιπλέον έχει σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ το σημείο $B(0,1)$. Αντικαθιστούμε στην παραμετρική εξίσωση της ευθείας $y = \alpha x + \beta$ τις τιμές $x = 0, y = 1\ \kappa\alpha\iota\ \alpha = -\frac{2}{3}$ και παίρνουμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο β ως εξής:

$$1 = -\frac{2}{3} \cdot 0 + \beta$$

$$\beta = 1$$

Η ευθεία έχει εξίσωση: $\boldsymbol{y = -\frac{2}{3}x + 1}$

b) Αντικαθιστούμε στον τύπο της ευθείας την τιμή $y = 3$ και λύνουμε ως προς την τετμημένη x ως εξής:

$$3 = -\frac{2}{3}x + 1$$

$$\frac{2}{3}x = 1 - 3$$

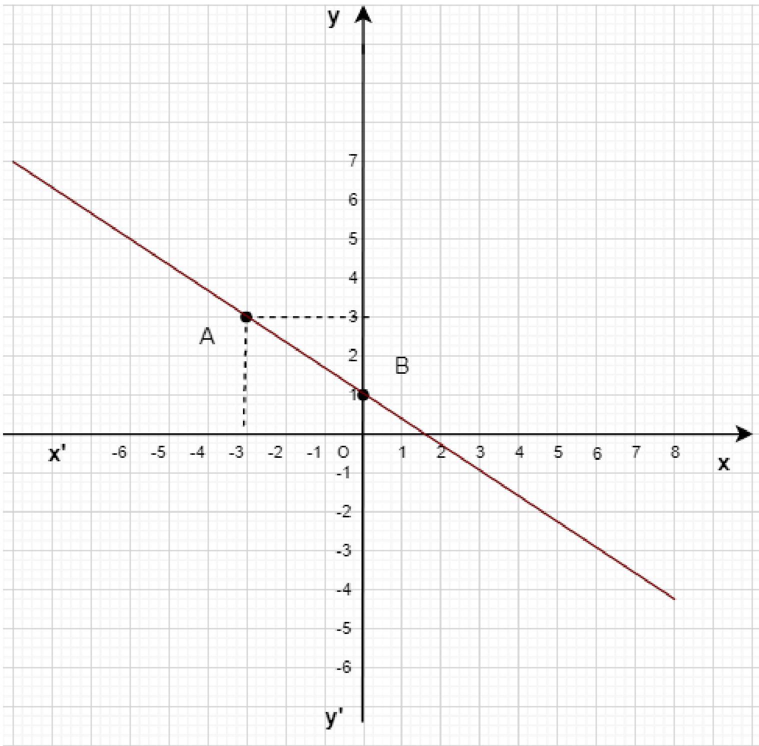
$$\frac{2}{3}x = -2$$

$$2x = -6$$

$$x = \frac{-6}{2} = -3$$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $A(-3,3)$.

c) Επιλέγουμε τα σημείο $A(-3{,}3)$ $και$ $B(0{,}1)$ και η γραφική παράσταση είναι η εξής:



Άσκηση 6 – Λύση

a) Η ευθεία θα έχει κλίση $\alpha = -\frac{1}{3}$ αφού είναι παράλληλη της ευθείας $y = -\frac{1}{3}x$ οπότε θα έχει παραμετρική εξίσωση $y = -\frac{1}{3}x + \beta$. Οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωση της διότι το σημείο ανήκει στην ευθεία. Με αντικατάσταση των τιμών

$x = -3$ $και$ $y = 3$ στην εξίσωση της ευθείας παίρνουμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο β ως εξής:

$$3 = -\frac{1}{3} \cdot (-3) + \beta$$

$$3 = 1 + \beta$$

$$\beta = 2$$

Οπότε η ευθεία έχει εξίσωση: $\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x + 2}$

b) Βρίσκουμε τα σημεία τομής ως εξής:

- Για το σημείο τομής στον άξονα $x'x$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας την τιμή $y=0$ και λύνουμε ως προς την τετμημένη x. Οπότε έχουμε:

  $$0=-\frac{1}{3}x+2$$
  $$\frac{1}{3}x=2$$
  $$x=6$$

  Το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το $B(6,0)$.

- Για το σημείο τομής στον άξονα $y'y$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας την τιμή $x=0$ και λύνουμε ως προς την τεταγμένη y. Οπότε έχουμε:

  $$y=-\frac{1}{3}\cdot 0+2$$
  $$y=2$$

  Το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ είναι το $\Gamma(0,2)$.

c) Για τις συντεταγμένες του σημείου θα ισχύει από τα δεδομένα $x=3y$, δηλαδή η τετμημένη τριπλάσια της τεταγμένης. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας την παραπάνω ισότητα και παίρνουμε την εξίσωση:

$$y=-\frac{1}{3}\cdot 3y+2$$

$$y=-y+2$$

$$2y=2$$

$$y=1$$

Οπότε η τετμημένη θα έχει τιμή $x=3$. Το σημείο έχει συντεταγμένες $\Delta(1,3)$.

Άσκηση 7 – Λύση

a) Τα σημεία τομής $A\ και\ B$ ανήκουν στην ευθεία οπότε οι συντεταγμένες τους θα επαληθεύουν και την εξίσωση της. Διαδοχικά για τα σημεία αντικαθιστούμε τις συντεταγμές τους στην εξίσωση και παίρνουμε:

- Αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 0\ και\ y = -4$ στη διπαραμετρική εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ και έχουμε:

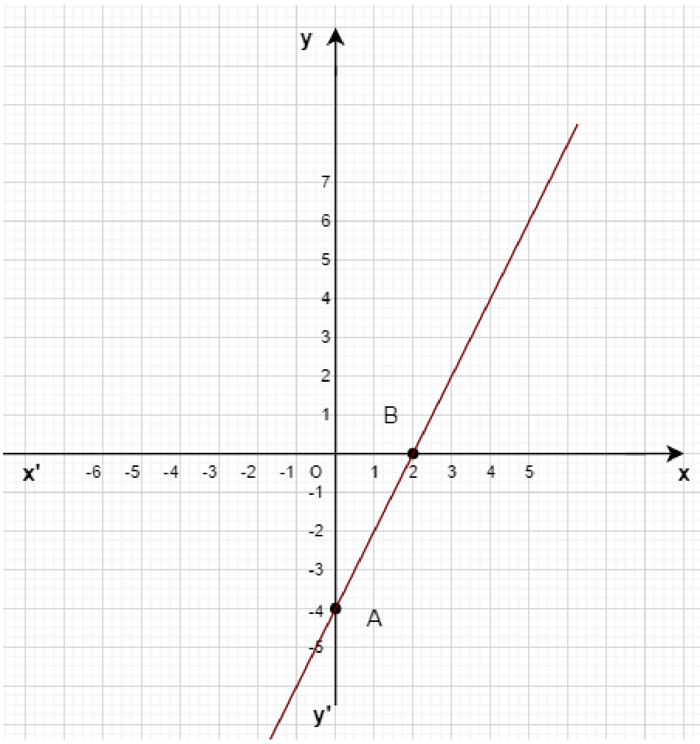
$$-4 = \alpha \cdot 0 + \beta \quad \text{άρα} \quad \beta = -4$$

- Αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 2\ και\ y = 0$ στην μονοπαραμετρική εξίσωση $y = \alpha x - 4$ και έχουμε:

$$0 = 2\alpha - 4 \quad \text{άρα} \quad 2\alpha = 4 \quad \text{οπότε} \quad \alpha = \frac{4}{2} = 2$$

Οπότε η ευθεία έχει εξίσωση: $\boldsymbol{y = 2x - 4}$

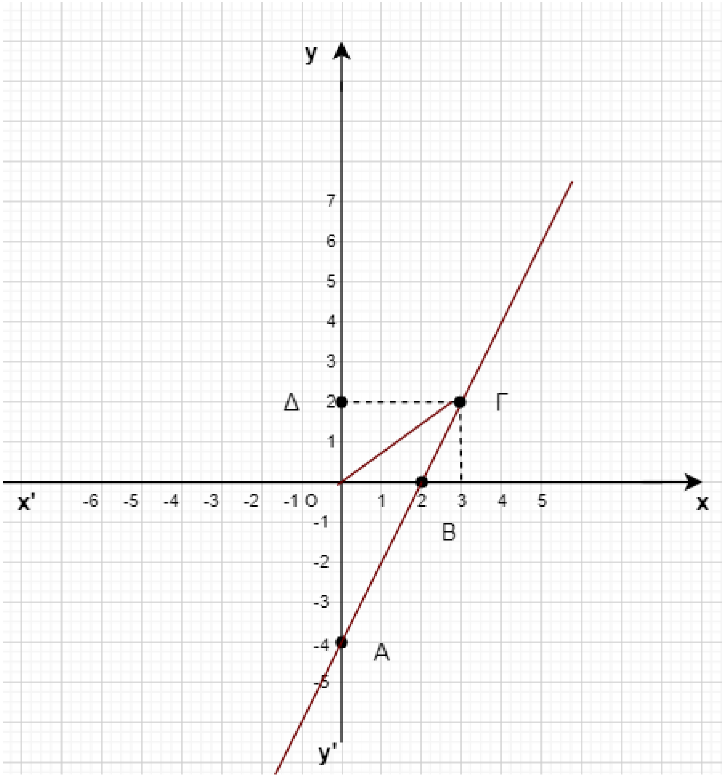
b) Επιλέγουμε τα σημεία $A(0, -4)\ και\ B(2,0)$ και η γραφική παράσταση είναι η εξής:



c) i. Το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία οπότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας τις τιμές $x = \gamma - 2, y = 7 - \gamma$ και δημιουργούμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο γ ως εξής:

$$7 - \gamma = 2(\gamma - 2) - 4$$
$$7 - \gamma = 2\gamma - 4 - 4$$
$$2\gamma + \gamma = 7 + 8$$
$$3\gamma = 15 \quad \text{άρα} \quad \gamma = \frac{15}{3} = 5$$

ii. Το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(3,2)$ οπότε με μία νέα γραφική παράσταση τοποθετείται στο επίπεδο ως εξής:



Το ζητούμενο Εμβαδόν ισούται με τη διαφορά των εμβαδών του ορθογωνίου τριγώνου $\Delta\Gamma A$ μείον του Εμβαδού του ορθογωνίου τριγώνου $\Delta O\Gamma$.

Υπολογίζουμε τα Εμβαδά των τριγώνων ως εξής:

- $E_{(\Delta\Gamma A)} = \frac{\Delta A \cdot \Delta\Gamma}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma.$
- $E_{(\Delta O\Gamma)} = \frac{\Delta O \cdot \Delta\Gamma}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma.$

Οπότε $E_{(AO\Gamma)} = E_{(\Delta\Gamma A)} - E_{(\Delta O\Gamma)} = 9 - 3 = 6\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma.$

Άσκηση 8 – Λύση

a) Οι δύο ευθείες είναι παράλληλες οπότε θα έχουν ίσες κλίσεις. Από τα δεδομένα του προβλήματος δημιουργούμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο λ ως εξής:

$3\lambda - 1 = 7 - \lambda$

$3\lambda + \lambda = 7 + 1$

$4\lambda = 8$ άρα $\lambda = \frac{8}{4} = 2$

Για $\lambda = 2$ η εξίσωση της ευθείας γίνεται: $\boldsymbol{y = 5x + 4 - 2\mu}$

Το σημείο A ανήκει στην ευθεία οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της. Αντικαθιστουμε στην εξίσωση τις τιμές $x = -1, y = 2 - \mu$ και παίρνουμε μία εξίσωση ως προς την παράμετρο μ ως εξής:

$2 - \mu = 5(-1) + 4 - 2\mu$

$2\mu - \mu = -5 + 4 - 2$ άρα $\mu = -3$

b) Για $\mu = -3$ η εξίσωση της ευθείας είναι: $\boldsymbol{y = 5x + 10}$**.** Βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες $x'x\ \kappa\alpha\iota\ y'y$ ως εξής:

- Για το σημείο τομής στον άξονα $x'x$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας την τιμή $y = 0$ και λύνουμε ως προς την τετμημένη x. Οπότε έχουμε:

  $0 = 5x + 10$
  $5x = -10$
  $x = \frac{-10}{5} = -2$

  Το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το $B(-2,0)$.

- Για το σημείο τομής στον άξονα $y'y$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας την τιμή $x = 0$ και λύνουμε ως προς την τεταγμένη y. Οπότε έχουμε:

$$y = 5 \cdot 0 + 10$$
$$y = 10$$

Το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ είναι το $\Gamma(0,10)$.

Άσκηση 9 – Λύση

a) Η διχοτόμος του 1ου και 3ου τεταρτημορίου είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 1 \cdot x$. Οι δύο ευθείες είναι παράλληλες οπότε θα έχουν ίσες κλίσεις. Από τα δεδομένα του προβλήματος δημιουργούμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο λ ως εξής:

$$3 - 2\lambda = 1$$

$$2\lambda = 3 - 1 \quad \text{άρα} \quad \lambda = \frac{2}{2} = 1$$

Για $\lambda =$ η εξίσωση της ευθείας γίνεται: $\boldsymbol{y = x + 1 - 2(\mu - 1)}$

Το σημείο A ανήκει στην ευθεία οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της. Αντικαθιστουμε στην εξίσωση τις τιμές $x = -2, y = -5$ και παίρνουμε μία εξίσωση ως προς την παράμετρο μ ως εξής:

$$-5 = -2 + 1 - 2\mu + 2$$

$$2\mu = 6 \quad \text{άρα} \quad \mu = \frac{6}{2} = 3$$

b) Για $\mu = 3$ η εξίσωση της ευθείας είναι: $\boldsymbol{y = x - 3}$

c) Βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες $x'x \; \kappa\alpha\iota \; y'y$ ως εξής:

- Για το σημείο τομής στον άξονα $x'x$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας την τιμή $y = 0$ και λύνουμε ως προς την τετμημένη x. Οπότε έχουμε:

$$0 = x - 3$$
$$x = 3$$

Το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το $B(3,0)$.

- Για το σημείο τομής στον άξονα $y'y$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας την τιμή $x = 0$ και λύνουμε ως προς την τεταγμένη y. Οπότε έχουμε:

$$y = 1 \cdot 0 - 3$$
$$y = -3$$

Το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ είναι το $\Gamma(0, -3)$.

Άσκηση 10 – Λύση

a) Η διχοτόμος του $2^{ου}$ και $4^{ου}$ τεταρτημορίου είναι η ευθεία με εξίσωση $y = -1 \cdot x$. Οι δύο ευθείες είναι παράλληλες οπότε θα έχουν ίσες κλίσεις. Η παραμετρική εξίσωση της ευθείας θα είναι $y = -x + \beta$. Το σημείο A ανήκει στην ευθεία οπότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Αντικαθιστούμε τις τιμές $x = -2, y = 9$ και παίρνουμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο β ως εξής:

$$9 = -(-2) + \beta$$

$$\beta + 2 = 9 \text{ άρα } \beta = 7$$

Η ευθεία έχει εξίσωση: $\boldsymbol{y = -x + 7}$

b) Βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες $x'x \; και \; y'y$ ως εξής:

- Για το σημείο τομής στον άξονα $x'x$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας την τιμή $y = 0$ και λύνουμε ως προς την τετμημένη x. Οπότε έχουμε:

$$0 = -x + 7$$
$$x = 7$$

Το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το $B(7,0)$.

- Για το σημείο τομής στον άξονα $y'y$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας την τιμή $x = 0$ και λύνουμε ως προς την τεταγμένη y. Οπότε έχουμε:

$$y = -1 \cdot 0 + 7$$
$$y = 7$$

Το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ είναι το $\Gamma(0,7)$.

c) Το σημείο ανήκει στην ευθεία οπότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας x. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας τις τιμές $x = \mu$ και $y = 2\mu - 5$ και παίρνουμε:

$2\mu - 5 = -\mu + 7$

$3\mu = 12$

$\mu = \frac{12}{3} = 4$

Άσκηση 11 – λύση

a) Έστω x οι μέρες των εξόδων τότε τα συνολικά έξοδα εκφράζονται ως $1{,}5x$. Το ποσό (y) που απομένει δίνεται από την εξίσωση: $\boldsymbol{y = 50 - 1{,}5x}$

b) Αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 7, x = 10$ στην εξίσωση $y = 50 - 1{,}5x$ και τις τιμές $y = 20, y = 5$ στον εκφρασμένο ως προς την τετμημένη τύπο $x = \frac{50-y}{1{,}5}$ και παίρνουμε:

- Για $x = 7\ ημέρες,\ παίρνουμε: y = 50 - 1{,}5 \cdot 7 = 50 - 10{,}5 = 39{,}5€$
- Για $x = 10\ ημέρες,\ παίρνουμε: y = 50 - 1{,}5 \cdot 10 = 50 - 15 = 35€$
- Για $y = 20€,\ παίρνουμε: x = \frac{50-20}{1{,}5} = 20\ ημέρες$
- Για $y = 5€,\ παίρνουμε: x = \frac{50-5}{1{,}5} = 30\ ημέρες$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

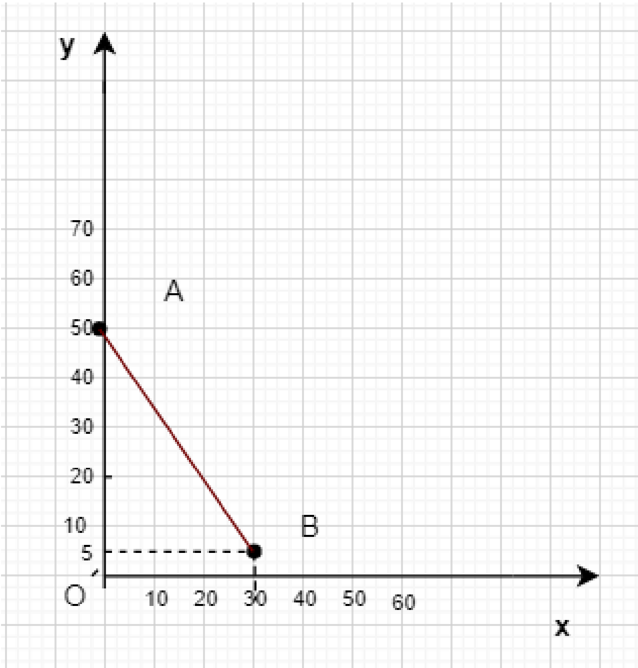
x	7	10	20	30
y	39,5	35	20	5

c) Θα πρέπει να βρούμε και την τιμή με τετμημένη $x = 0$. Αντικαθιστωντας στην εξίσωση της ευθείας παίρνουμε:

$y = 50 - 1{,}5 \cdot 0 = 50€$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $A(0{,}50)$.

Η γραφική παράσταση λόγω του περιορισμού θα παρίσταται ως το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $A(0{,}50)$ $και$ $B(30{,}5)$ ως εξής:



d) Από τον πίνακα τιμών φαίνεται ότι για την τιμή $x = 30\ ημέρες$ αντιστοιχεί η τιμή $y = 5€$ που είναι και το ποσό αποταμίευσης.

Άσκηση 12 – Λύση

a) Αντικαθιστούμε στην σχέση τις τιμές τιμές $x = 0, x = 100$ και παίρνουμε:

- Για $x = 0^oC, παίρνουμε: y = 1{,}8 \cdot 0 + 32 = 32^oF$
- Για $x = 100^oC, παίρνουμε: y = 1{,}8 \cdot 100 + 32 = 212^oF$

b) Αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης τις τιμές $x = -10, x = 0$ και στον εκφρασμένο ως προς την τετμημένη x, τύπο $x = \frac{y-32}{1{,}8}$, τις τιμές $y = 50,\ \ y = 86$ και παίρνουμε:

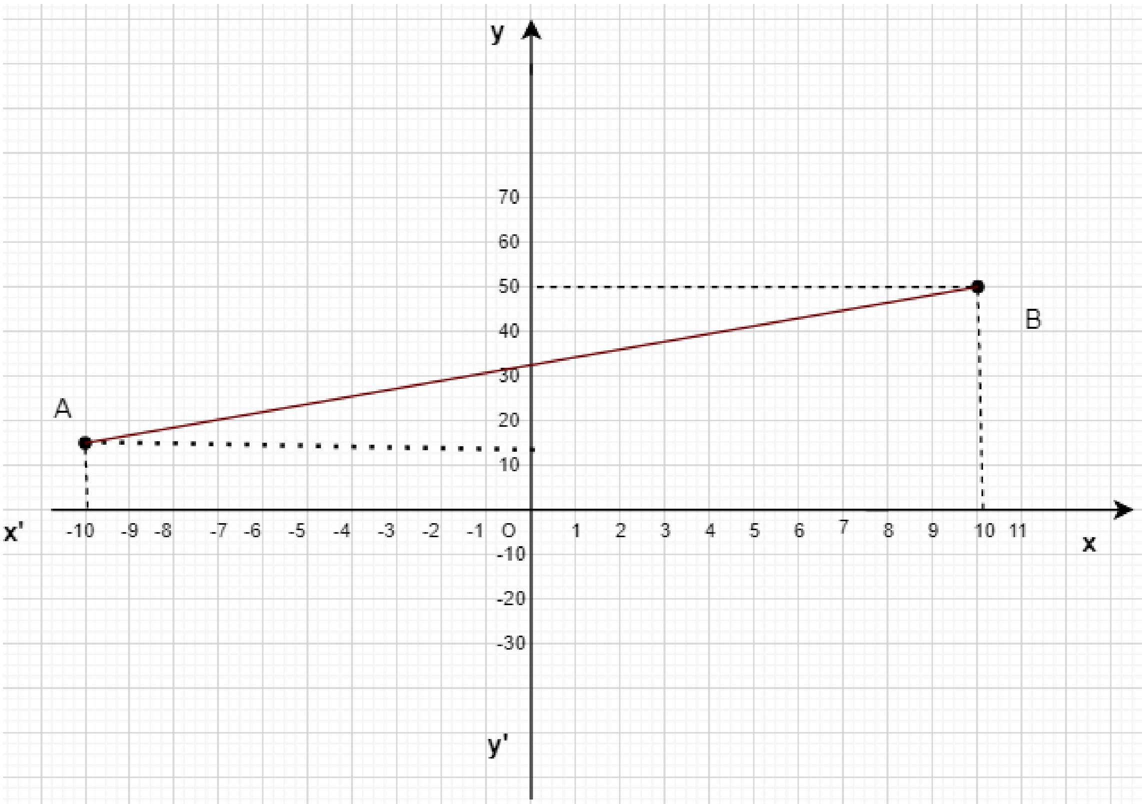
- Για $x = -10^oC, παίρνουμε: y = 1{,}8 \cdot (-10) + 32 = 14^oF$
- Για $x = 0^oC, παίρνουμε: y = 1{,}8 \cdot 0 + 32 = 32^oF$

- Για $y = 50^oF, παίρνουμε: x = \frac{50-32}{1,8} = \frac{18}{1,8} = 10^oC$
- Για $y = 86^oF, παίρνουμε: x = \frac{86-32}{1,8} = \frac{54}{1,8} = 30^oC$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-10	0	10	30
y	14	32	50	86

c) Επιλέγουμε τα σημεία $A(-10,14)$ $και$ $B(10,50)$ τα οποία βρίσκονται ήδη στον πίνακα τιμών και η γραφική παράσταση θα είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία A $και$ B ως εξής:



3.5. Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$ – Η υπερβολή

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

i. Λάθος.
Η εξίσωση γράφεται $y = \frac{1}{5}x$ και είναι ευθεία.

ii. Σωστό.

iii. Λάθος.
Η υπερβολή έχει $\alpha = -9$ $(\alpha < 0)$ με κλάδους στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο

iv. Λάθος.
Ο αριθμός $2 - \sqrt{7} \cong -0{,}64$ $(\alpha < 0)$ η υπερβολή έχει κλάδους στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο

v. Λάθος.
Κάθε υπερβολή έχει συμμετρία στο σημείο Ο(0,0) και στις ευθείες $y = x$ *και* $y = -x$

vi. Σωστό.

vii. Σωστό.

viii. Λάθος.
Η υπερβολή έχει εξίσωση $xy = \alpha, \alpha \neq 0$. Για $x = y = 0$ έχουμε $\alpha = 0 \cdot 0 = 0$, αδύνατο

ix. Σωστό.

x. Σωστό.

Ερώτηση Κατανόησης 2 – Απάντηση

i. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της υπερβολής $y = \frac{-18}{x}$, τις συντεταγμένες των σημείων και παίρνουμε:

- Για το σημείο $\mathrm{A}(-6,3)$ και $\mathrm{x} = -6$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = \frac{-18}{-6} = 3$.
  Το σημείο Α ανήκει στην υπερβολή.

- Για το σημείο $\mathrm{B}(-6,-3)$ και $\mathrm{x} = -6$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = \frac{-18}{-6} = 3 \neq -3$.
  Το σημείο Β δεν ανήκει στην υπερβολή.

- Για το σημείο $\Gamma(3,6)$ και $\mathrm{x} = 3$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = \frac{-18}{3} = -6 \neq 6$.
  Το σημείο Γ δεν ανήκει στην υπερβολή.

- Για το σημείο $\Delta(-3,-6)$ και $\mathrm{x} = -3$, παίρνουμε: $\mathrm{y} = \frac{-18}{-3} = 6 \neq -6$.
  Το σημείο Δ δεν ανήκει στην υπερβολή.

Σωστή επιλογή η (i).

ii. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της υπερβολής $y = \frac{4}{x}$, τις συντεταγμένες των σημείων και παίρνουμε:

- Για το σημείο $A\left(\frac{1}{2},2\right)$ *και* $x = \frac{1}{2}$, *παίρνουμε*: $y = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \neq 2$.
  Το σημείο Α δεν ανήκει στην υπερβολή.

- Για το σημείο $B\left(-8,\frac{1}{2}\right)$ *και* $x = -8$, *παίρνουμε*: $y = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$.
  Το σημείο Β δεν ανήκει στην υπερβολή.

- Για το σημείο $\Gamma\left(8,-\frac{1}{2}\right)$ *και* $x = 8$, *παίρνουμε*: $y = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$.
  Το σημείο Γ δεν ανήκει στην υπερβολή.

- Για το σημείο $\Delta\left(-\frac{1}{2},-8\right)$ *και* $x = -\frac{1}{2}$, *παίρνουμε*: $y = \frac{4}{-\frac{1}{2}} = -8$.
  Το σημείο Δ ανήκει στην υπερβολή.

Σωστή επιλογή η (iv).

iii. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της υπερβολής $y = \frac{1}{2x}$, τις συντεταγμένες των σημείων και παίρνουμε:

- Για το σημείο Α $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ και $x = -\frac{1}{2}$, παίρνουμε: $y = \frac{1}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = -1$.
  Το σημείο Α ανήκει στην υπερβολή.

- Για το σημείο Β $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ και $x = \frac{1}{2}$, παίρνουμε: $y = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} = 1 \neq -1$.
  Το σημείο Β δεν ανήκει στην υπερβολή.

- Για το σημείο Γ $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ και $x = -1$, παίρνουμε: $y = \frac{1}{2\cdot(-1)} = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$.
  Το σημείο Γ δεν ανήκει στην υπερβολή.

- Για το σημείο $\Delta(-2, -1)$ και $x = -2$, παίρνουμε: $y = \frac{1}{2\cdot(-2)} = -\frac{1}{4} \neq -1$.
  Το σημείο Δ δεν ανήκει στην υπερβολή.

Σωστή επιλογή η (i).

iv. Τα σημεία $A\ και\ B$ επαληθεύουν την εξίσωση της υπερβολής. Οπότε θα ισχύουν οι ισότητες:

- Για το σημείο $A(x_1, y_1)$: $y_1 = \frac{\alpha}{x_1}$ ή $x_1 y_1 = \alpha$.
- Για το σημείο $A(x_2, y_2)$: $y_2 = \frac{\alpha}{x_2}$ ή $x_2 y_2 = \alpha$.

Από τις παραπάνω ισότητες παίρνουμε $x_1 y_1 = x_2 y_2$.

Σωστή επιλογή η (iii).

v. Γνωρίζουμε ότι κάθε υπερβολή και για κάθε $\alpha \neq 0$, έχει μοναδικές συμμετρίες:

- Την αρχή των αξόνων Ο
- Τις διχοτόμους του 1ου και 3ου τεταρτημορίου (δηλαδη την ευθεία $y = x$) και του 2ου,4ου τεταρτημορίου (δηλαδη την ευθεία $y = -x$)

Σωστή επιλογή η (iv).

vi. Το σημείο $A(\kappa,\lambda)$ ανήκει στην υπερβολή οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της και θα ισχύει η ισότητα $\kappa\lambda = \alpha = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho o$. Αναζητούμε το ζεύγος των συντεταγμένων με γινόμενο ίσο με $\kappa\lambda$ και έχουμε:

- $\kappa(-\lambda) = -\kappa\lambda$
- $(-\kappa)\lambda = -\kappa\lambda$
- $(-\kappa)(-\lambda) = \kappa\lambda$
- $\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\kappa\lambda}$

Σωστή επιλογή η (iii).

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

Τα ποσά $x \;\kappa\alpha\iota\; y$ είναι αντιστρόφως ανάλογα οπότε θα εκφράζονται ως συνάρτηση με την εξίσωση της υπερβολής $yx = \alpha$. Από τον πίνακα τιμών παρατηρούμε τις συμπληρωμένες τιμές $x = -5, y = 3$ και υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς α ως εξής:

$$\alpha = yx = -5 \cdot 3 = -15$$

Οπότε οι τιμές του πίνακα θα επαληθεύουν την υπερβολή $\boldsymbol{yx = -15.}$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της υπερβολής $y = -\frac{15}{x}$ τις τιμές $x = -15, x = -3, x = -1$ και τις τιμές $y = -15, y = -5, y = -3 \;\kappa\alpha\iota\; y = -1$ στον εκφρασμένο κατά τη μεταβλητή x τύπο $x = -\frac{15}{y}$ και έχουμε:

- Για $x = -15,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{15}{-15} = 1$
- Για $x = -3,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{15}{-3} = 5$
- Για $x = -1,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{15}{-1} = 15$
- Για $y = -15,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ x = -\frac{15}{-15} = 1$
- Για $y = -5,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ x = -\frac{15}{-5} = 3$
- Για $y = -3,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ x = -\frac{15}{-3} = 5$
- Για $y = -1,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ x = -\frac{15}{-1} = 15$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-15	-5	-3	-1	1	3	5	15
y	1	3	5	15	-15	-5	-3	-1

Άσκηση 2 – Λύση

Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών για την υπερβολή $y = \frac{3}{x}$, επιλέγοντας τυχαία 8 σημεία με τετμημένες $x = 1, x = 3, x = -1, x = -3, x = \frac{1}{2}, x = \frac{-1}{2}, x = \frac{1}{3}, x = -\frac{1}{3}$. Υπολογίζουμε τις συντετεταγμένες των σημείων ως εξής:

- Για $x = 1,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{3}{1} = 3$
- Για $x = 3,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{3}{3} = 1$
- Για $x = -1,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{3}{-1} = -3$
- Για $x = -3,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{3}{-3} = -1$
- Για $x = \frac{1}{2},\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$
- Για $x = -\frac{1}{2},\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{3}{-\frac{1}{2}} = -6$
- Για $x = \frac{1}{3},\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$
- Για $x = -\frac{1}{3},\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{3}{-\frac{1}{3}} = -9$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	1	3	-1	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y	3	1	-3	-1	6	-6	9	-9

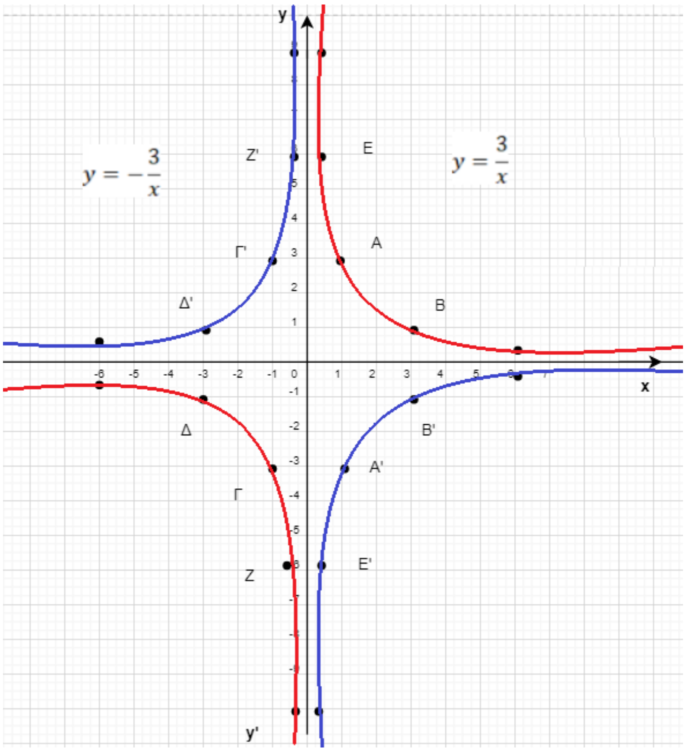
Ομοίως για την υπερβολή με εξίσωση $y = -\frac{3}{x}$, επιλέγοντας τυχαία 8 σημεία με τετμημένες $x = 1, x = 3, x = -1, x = -3, x = \frac{1}{2}, x = \frac{-1}{2}, x = \frac{1}{3}, x = -\frac{1}{3}$. Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων ως εξής:

- Για $x = 1,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{1} = -3$
- Για $x = 3,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{3} = -1$
- Για $x = -1,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{-1} = 3$
- Για $x = -3,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{-3} = 1$
- Για $x = \frac{1}{2},\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{\frac{1}{2}} = -6$
- Για $x = -\frac{1}{2},\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{-\frac{1}{2}} = 6$
- Για $x = \frac{1}{3},\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{\frac{1}{3}} = -9$
- Για $x = -\frac{1}{3},\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{-\frac{1}{3}} = 9$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	1	3	-1	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y	-3	-1	3	1	-6	6	-9	9

Τοποθετούμε τα σημεία $A(1,3), B(3,1), \Gamma(-1,-3), \Delta(-3,-1), E\left(\frac{1}{2},6\right), Z\left(-\frac{1}{2},-6\right)$ καθώς και τα $A'(1,-3), B'(3,-1), \Gamma'(-1,3), \Delta'(-3,1), E'\left(\frac{1}{2},-6\right), Z'\left(-\frac{1}{2},6\right)$ σε ένα σύστημα συντεταγμένων και η κοινη γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



Παρατηρούμε ότι οι κλάδοι των υπερβολών είναι συμμετρικοί ως προς τους άξονες $x'x$ *και* $y'y$, ως προς την αρχή των αξόνων και ως προς τις ευθείες $y = x$ *και* $y = -x$.

Άσκηση 3 – Λύση

α) Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της υπερβολής $y = \frac{6}{x}$ τις τιμές $x = 1, x = 2, x = 3$

$x = 6, x = -1, x = -2, x = -3, x = -6$. Υπολογίζουμε τις συντετεταγμένες των σημείων ως εξής:

- Για $x = 1,\ \textit{παίρνουμε}\ \ y = \frac{6}{1} = 6$
- Για $x = 2,\ \textit{παίρνουμε}\ \ y = \frac{6}{2} = 3$
- Για $x = 3,\ \textit{παίρνουμε}\ \ y = \frac{6}{3} = 2$
- Για $x = 6,\ \textit{παίρνουμε}\ \ y = \frac{6}{6} = 1$

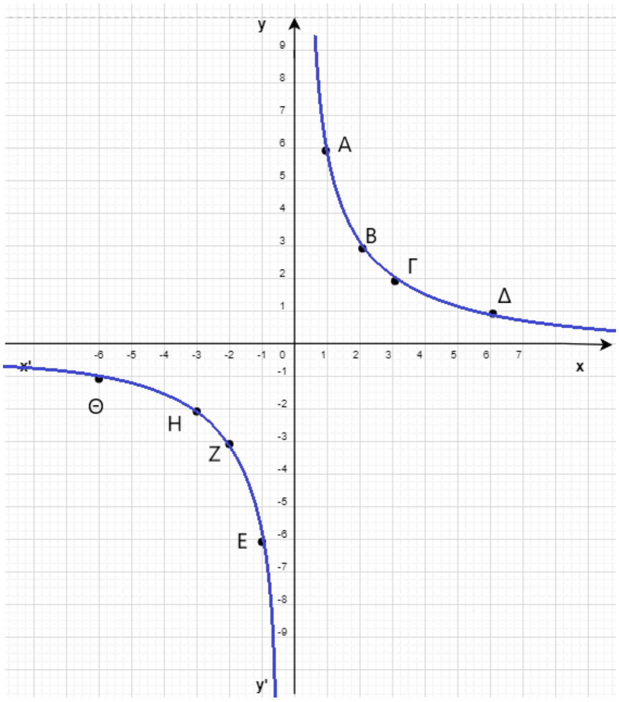
- Για $x = -1,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{6}{-1} = -6$
- Για $x = -2,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{6}{-2} = -3$
- Για $x = -3,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{6}{-3} = -2$
- Για $x = -6,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{6}{-6} = -1$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1

b) Τοποθετούμε τα σημεία $A(1,6), B(2,3), \Gamma(3,2), \Delta(6,1), E(-1,-6), Z(-2,-3), H(-3,-2)$

$\Theta(-6,-1)$ σε ένα συστημα συντεταγμένων και η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 4 – Λύση

a) Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της υπερβολής $y = -\frac{8}{x}$ τις τιμές $x = -8, x = -4, x = -2$

$x = -1$ $και$ $y = -8, y = -4, y = -2, y = -1$στον εκφρασμένο ως προς την μεταβλητή x τύπο $x = -\frac{8}{y}$ και υπολογίζουμε τις συντετεταγμένες των σημείων ως εξής:

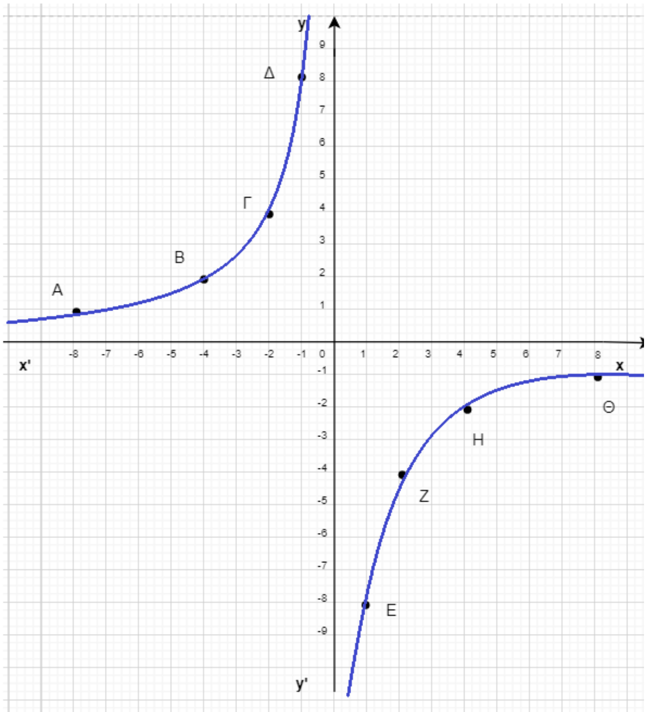
- Για $x = -8,$ $παίρνουμε$ $y = -\frac{8}{-8} = 1$
- Για $x = -4,$ $παίρνουμε$ $y = -\frac{8}{-4} = 2$
- Για $x = -2,$ $παίρνουμε$ $y = -\frac{8}{-2} = 4$
- Για $x = -1,$ $παίρνουμε$ $y = -\frac{8}{-1} = 8$
- Για $y = -8,$ $παίρνουμε$ $x = -\frac{8}{-8} = 1$
- Για $y = -4,$ $παίρνουμε$ $x = -\frac{8}{-4} = 2$
- Για $y = -2,$ $παίρνουμε$ $x = -\frac{8}{-2} = 4$
- Για $y = -1,$ $παίρνουμε$ $x = -\frac{8}{-1} = 8$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
y	1	2	4	8	-8	-4	-2	-1

b) Τοποθετούμε τα σημεία $A(-8,1), B(-4,2), \Gamma(-2,4), \Delta(-1,8), E(1,-8), Z(2,-4)$,

$H(4,-2)$ $\Theta(8,-1)$ σε ένα συστημα συντεταγμένων και η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 5 – Λύση

a) Το σημείο A ανήκει στην υπερβολή οπότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της. Αντικαθιστώντας τις τιμές $x = \frac{1}{2}, y = 4$ στην παραμετρική εξίσωση της υπερβολής $y = \frac{a}{x}$ υπολογίζουμε την παράμετρο α ως εξής:

$$4 = \frac{a}{\frac{1}{2}}$$

$$2\alpha = 4$$

$$\alpha = \frac{4}{2} = 2$$

Οπότε η υπερβολή έχει εξίσωση: $\boldsymbol{y = \frac{2}{x}}$

b) Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της υπερβολής $y = \frac{2}{x}$ τις τιμές $x = -4, x = -2, x = -1$

$x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, x = 1, x = 2, x = 4$ και υπολογίζουμε τις συντετεταγμένες των σημείων ως εξής:

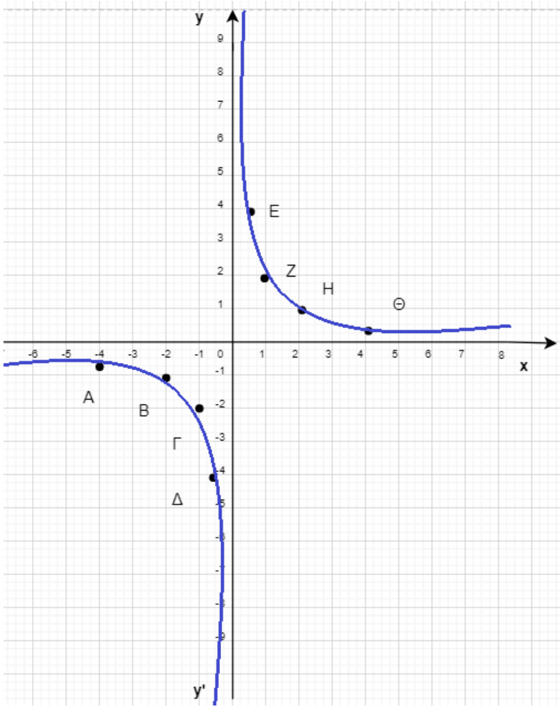
- Για $x = -4,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$
- Για $x = -2,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{2}{-2} = -1$
- Για $x = -1,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{2}{-1} = -2$
- Για $x = -\frac{1}{2},\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4$
- Για $x = \frac{1}{2},\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$
- Για $x = 1,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = \frac{2}{1} = 2$
- Για $x = 2,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ x = \frac{2}{2} = 1$
- Για $x = 4,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$

c) Τοποθετούμε τα σημεία $\left(-4,-\frac{1}{2}\right), B(-2,-1), \Gamma(-1,-2), \Delta\left(-\frac{1}{2},-4\right), E\left(\frac{1}{2},4\right), Z(1,2),$

$H(2,1)$ $\Theta(4,\frac{1}{2})$ σε ένα σύστημα συντεταγμένων και η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 6 – Λύση

a) Το σημείο A ανήκει στην υπερβολή οπότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της. Αντικαθιστώντας τις τιμές $x = -12, y = -\frac{3}{4}$ στην παραμετρική εξίσωση της υπερβολής

$y = \frac{3-2\lambda}{x}$ υπολογίζουμε την παράμετρο λ ως εξής:

$-\frac{3}{4} = \frac{3-2\lambda}{-12}$

$-3(-12) = 4(3 - 2\lambda)$

$36 = 12 - 8\lambda$

$8\lambda = -24$

$\lambda = \frac{-24}{8} = -3$

Με αντικατάσταση της τιμής $\lambda = -3$ στην παραμετρική εξίσωση της υπερβολής παίρνουμε:

$$y = \frac{3 - 2(-3)}{x} = \frac{9}{x}$$

Η υπερβολή έχει εξίσωση: $\boldsymbol{y = \frac{9}{x}}$

b) Αντικαθιστούμε στον τύπο της υπερβολής την τιμή $x = -3$ και υπολογίζουμε την τεταγμένη y ως εξής: $y = \frac{9}{-3} = -3$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $B(-3, -3)$.

c) Αντικαθιστούμε στον τύπο της υπερβολής την τιμή $y = \frac{1}{2}$ και υπολογίζουμε την τετμημένη x ως εξής:

$\frac{1}{2} = \frac{9}{x}$ άρα $x = 2 \cdot 9 = 18$

Το σημείο έχει συντεταγμένες $\Gamma\left(18, \frac{1}{2}\right)$.

Άσκηση 7 – Λύση

Έστω x ο αριθμός των αγελάδων που μεταφέρθηκαν μετα από 4 ημέρες. Ο συνολικός αριθμός τους πλέον είναι $150 - x$. Αν είχαν παραμείνει και οι 150 η τροφή τους θα αρκούσε για 6 ημέρες. Η μείωση όμως του αριθμού των αγελάδων προκάλεσε αύξηση των ημερών επάρκειας τροφής. Τα ποσά «αριθμός αγελάδων (y)» και «αριθμός ημερών (x)» είναι αντιστρόφως ανάλογα. Δημιουργούμε τον πίνακα:

Αριθμός αγελάδων (y)	$150 - x$	150
Αριθμός ημερών (x)	9	6

Σε κάθε πίνακα που αντιπροσωπεύει αντιστρόφως ανάλογα ποσά, το κάθετο γινόμενο των ποσών στις στήλες του, θα πρέπει να είναι σταθερό. Οπότε παίρνουμε την εξίσωση:

$9(150 - x) = 6 \cdot 150$

$1.350 - 9x = 900$ άρα $9x = 450$, δηλαδή $x = \frac{450}{9} = 50$

Μεταφέρθηκαν 50 αγελάδες.

Άσκηση 8 – Λύση

Μετά το πέρασμα 5 ημερών αν οι εργάτες παρέμεναν 12 θα τελείωναν το έργο σε $20 - 5 = 15$ ημέρες. Απέμειναν όμως 10 εργάτες να ολοκληρώσουν το έργο, έστω σε x ημέρες. Τα ποσα «αριθμός εργατών (y)» και «αριθμός ημερών (x)» είναι αντιστρόφως ανάλογα. Δημιουργούμε τον πίνακα:

Αριθμός εργατών (y)	12	10
Αριθμός ημερών (x)	15	x

Σε κάθε πίνακα που αντιπροσωπεύει αντιστρόφως ανάλογα ποσά, το κάθετο γινόμενο των ποσών στις στήλες του, θα πρέπει να είναι σταθερό. Οπότε παίρνουμε την εξίσωση:

$$10x = 12 \cdot 15$$

$$10x = 180 \quad \text{άρα} \quad x = \frac{180}{10} = 18$$

Οπότε οι ημέρες που θα χρειαστούν οι 10 εργάτες για την ολοκλήρωση του έργου είναι 18.

Άσκηση 9 – Λύση

Γνωρίζουμε ότι κάθε υπερβολή $y = \frac{a}{x}$ με $\alpha < 0$ έχει τους κλάδους της στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο. Θα πρέπει να ισχύει η ανίσωση: $6 - 3(\lambda - 1) < 0$ η οποία επιλύεται ως προς την παράμετρο λ ως εξής:

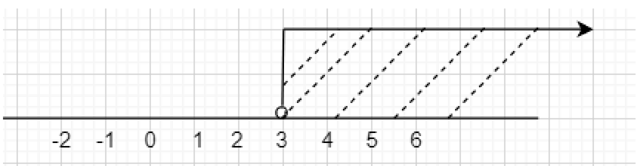
$$6 - 3(\lambda - 1) < 0$$

$$6 - 3\lambda + 3 < 0$$

$$-3\lambda < -3 - 6$$

$$-3\lambda < -9 \quad \text{άρα} \quad \frac{-3\lambda}{-3} > \frac{-9}{-3}, \text{ δηλαδή } \quad \lambda > 3$$

Με παράσταση των λύσεων στην ευθεία των πραγματικών αριθμών:



Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 – Λύση

Τα ποσά x $και$ y είναι αντιστρόφως ανάλογα οπότε θα εκφράζονται ως συνάρτηση με την εξίσωση της υπερβολής $yx = a$. Από τον πίνακα τιμών παρατηρούμε τις συμπληρωμένες τιμές $x = -3, y = -6$.Υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς α ως εξής:

$$\alpha = yx = -3 \cdot (-6) = 18$$

Οπότε οι τιμές του πίνακα θα επαληθεύουν την υπερβολή $\boldsymbol{yx = 18}$**.**

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της υπερβολής $y = \frac{18}{x}$ τις τιμές $x = 1, x = 2, x = 6$ $και$ $x = 18$ και τις τιμές $y = 2, y = 3$ $και$ $y = 9$ στον εκφρασμένο κατά τη μεταβλητή x τύπο $x = \frac{18}{y}$ και έχουμε:

- Για $x = 1,$ $παίρνουμε$ $y = \frac{18}{1} = 18$
- Για $x = 2,$ $παίρνουμε$ $y = \frac{18}{2} = 9$
- Για $x = 6,$ $παίρνουμε$ $y = \frac{18}{6} = 3$
- Για $x = 18,$ $παίρνουμε$ $y = \frac{18}{18} = 1$
- Για $y = 2,$ $παίρνουμε$ $x = \frac{18}{2} = 9$
- Για $y = 3,$ $παίρνουμε$ $x = \frac{18}{3} = 6$
- Για $y = 9,$ $παίρνουμε$ $x = \frac{18}{9} = 2$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	9	6	-3	2	1	2	6	18
y	2	3	-6	9	18	9	3	1

Άσκηση 2 – Λύση

Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών για την υπερβολή $y=\frac{12}{x}$, επιλέγοντας τυχαία 8 σημεία με τετμημένες $x=6, x=-6, x=3, x=-3, x=2, x=-2, x=4, x=-4$. Υπολογίζουμε τις συντετεταγμένες των σημείων ως εξής:

- Για $x=6,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=\frac{12}{6}=2$
- Για $x=-6,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=\frac{12}{-6}=-2$
- Για $x=3,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=\frac{12}{3}=4$
- Για $x=-3,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=\frac{12}{-3}=-4$
- Για $x=2,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=\frac{12}{2}=6$
- Για $x=-2,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=\frac{12}{-2}=-6$
- Για $x=4,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=\frac{12}{4}=3$
- Για $x=-4,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=\frac{12}{-4}=-3$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναιο ακόλουθος:

x	6	-6	3	-3	2	-2	4	-4
y	2	-2	4	-4	6	-6	3	-3

Ομοίως για την υπερβολή με εξίσωση $y=-\frac{12}{x}$, επιλέγοντας τυχαία 8 σημεία με τετμημένες

$x=6, x=-6, x=3, x=-3, x=2, x=-2, x=4, x=-4$.Υπολογίζουμε τις συντετεταγμένες των σημείων ως εξής:

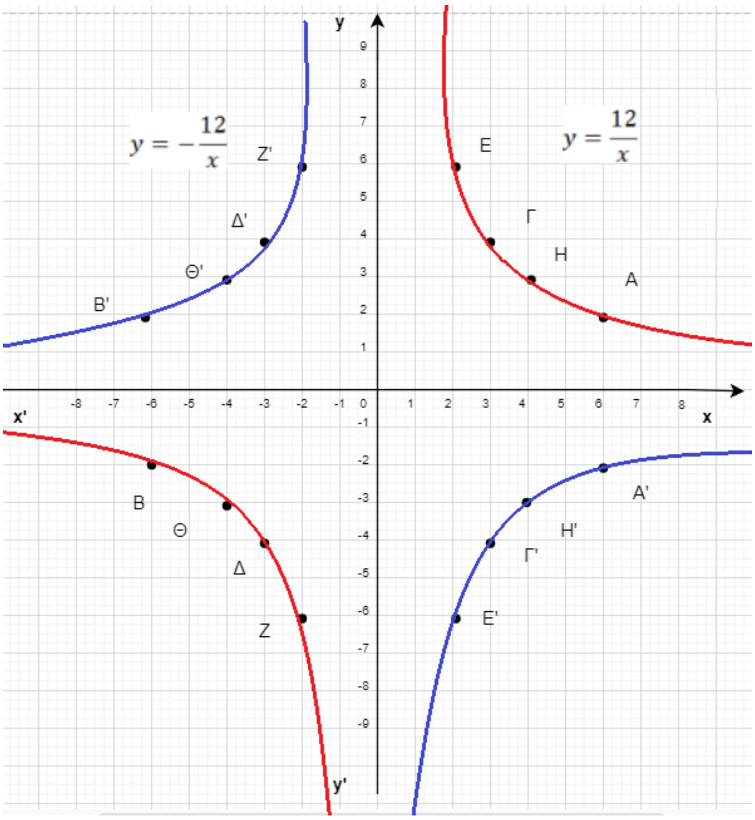
- Για $x=6,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=-\frac{12}{6}=-2$
- Για $x=-6,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=-\frac{12}{-6}=2$
- Για $x=3,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=-\frac{12}{3}=-4$
- Για $x=-3,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=-\frac{12}{-3}=4$
- Για $x=2,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=-\frac{12}{2}=-6$
- Για $x=-2,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=-\frac{12}{-2}=6$
- Για $x=4,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=-\frac{12}{4}=-3$
- Για $x=-4,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y=-\frac{12}{-4}=3$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	6	-6	3	-3	2	-2	4	-4
y	-2	2	-4	4	-6	6	-3	3

Τοποθετούμε τα σημεία:

$A(6,2), B(-6,-2), \Gamma(3,4), \Delta(-3,-4), E(2,6), Z(-2,-6), H(4,3), \Theta(-4,-3)$ καθώς και τα $A'(6,-2), B'(-6,2), \Gamma'(3,-4), \Delta'(-3,4), E'(2,-6), Z'(-2,6), H'(4,-3), \Theta'(-4,3)$ σε ένα συστημα συντεταγμένων και η κοινη γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 3 – Λύση

α. Το σημείο A ανήκει στην υπερβολή οπότε οι συντγεταγμενες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της. Αντικαθιστώντας τις τιμές $x = 3\ και\ y = \lambda$ στον παραμετρικό τύπο της υπερβολής θα προκύψει μια εξίσωση ως προς την παράμετρο λ ως εξής:

$\lambda = \frac{5(2\lambda+7)}{3}$

$3\lambda = 10\lambda + 35$

$-7\lambda = 35$

$\lambda = \frac{35}{-7} = -5$

Αντικαθιστώντας την τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση της υπερβολής γίνεται:

$$y = \frac{5(2(-5)+7)}{x} = \frac{-15}{x}$$

Η υπερβολή έχει τύπο $\boldsymbol{y} = -\frac{\mathbf{15}}{\boldsymbol{x}}$ εκφρασμένη ως προς την μεταβλητή y,και $\boldsymbol{x} = -\frac{\mathbf{15}}{\boldsymbol{y}}$ εκφρασμένη ως προς την μεταβλητή x.

β. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της υπερβολής $x = \frac{-15}{y}$ τις τιμές $y = -15, y = -5, y = -3$

$y = -1, y = 1, y = 3, y = 5, y = 15$ και υπολογίζουμε τις συντετεταγμένες των σημείων ως εξής:

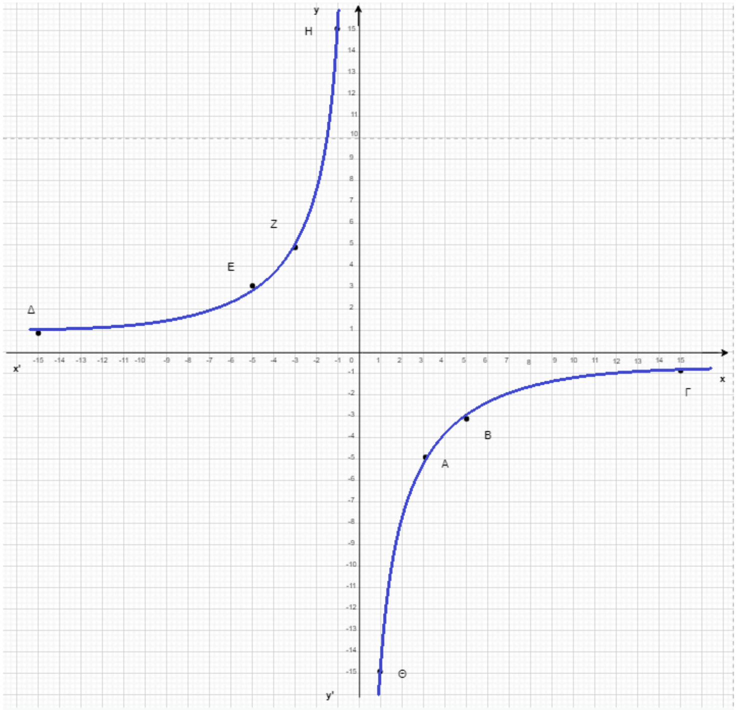
- Για $y = -15,\ παίρνουμε\ \ x = -\frac{15}{-15} = 1$
- Για $y = -5,\ παίρνουμε\ \ x = -\frac{15}{-5} = 3$
- Για $y = -3,\ παίρνουμε\ \ x = -\frac{15}{-3} = 5$
- Για $y = -1,\ παίρνουμε\ \ x = -\frac{15}{-1} = 15$
- Για $y = 1,\ παίρνουμε\ \ x = -\frac{15}{1} = -15$
- Για $y = 3,\ παίρνουμε\ \ x = -\frac{15}{3} = -5$
- Για $y = 5,\ παίρνουμε\ \ x = -\frac{15}{5} = -3$
- Για $y = 15,\ παίρνουμε\ \ x = -\frac{15}{15} = -1$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι:

x	1	3	5	15	-15	-5	-3	-1
y	-15	-5	-3	-1	1	3	5	15

γ. Επιλέγουμε τα σημεία:

$A(3,-5), B(5,-3), \Gamma(15,-1), \Delta(-15,1), E(-5,3), Z(-3,5), H(-1,15), \Theta(1,-15)$ και η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 4 – Λύση

α. Το σημείο A ανήκει στην υπερβολή οπότε οι συντεταγμενες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της. Αντικαθιστώντας τις τιμές $x = 6 \; και \; y = -\frac{1}{2}$ στον παραμετρικό τύπο της υπερβολής θα προκύψει μια εξίσωση ως προς την παράμετρο λ ως εξής:

$-\frac{1}{2} = \frac{2\lambda-5}{6}$

$-\frac{1}{2} \cdot 6 = 2\lambda - 5$

$-3 = 2\lambda - 5$ άρα $2\lambda = 2$, οπότε $\lambda = 1$

Αντικαθιστώντας την τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση της υπερβολής γίνεται:

$$y = \frac{2-5}{x} = \frac{-3}{x}$$

Η υπερβολή έχει τύπο $\boldsymbol{y = -\frac{3}{x}}$

β. Για την υπερβολή με εξίσωση $y = -\frac{3}{x}$, επιλέγουμε τυχαία 8 σημεία με τετμημένες

$x = 1, x = 3, x = -1, x = -3, x = \frac{1}{2}, x = \frac{-1}{2}, x = \frac{1}{3}, x = -\frac{1}{3}$.

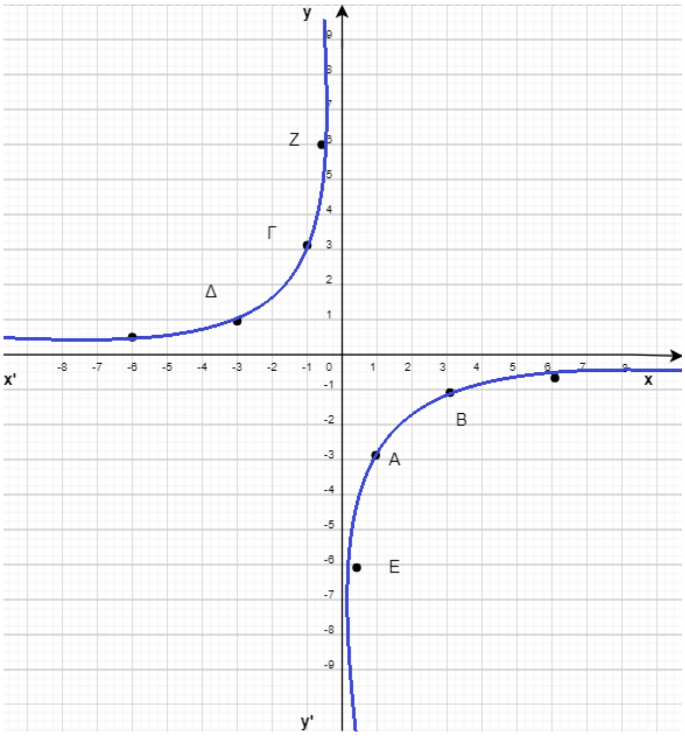
Υπολογίζουμε τις συντετεταγμένες των σημείων ως ακολούθως:

- Για $x = 1,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{1} = -3$
- Για $x = 3,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{3} = -1$
- Για $x = -1,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{-1} = 3$
- Για $x = -3,\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{-3} = 1$
- Για $x = \frac{1}{2},\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{\frac{1}{2}} = -6$
- Για $x = -\frac{1}{2},\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{-\frac{1}{2}} = 6$
- Για $x = \frac{1}{3},\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{\frac{1}{3}} = -9$
- Για $x = -\frac{1}{3},\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \ y = -\frac{3}{-\frac{1}{3}} = 9$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

x	1	3	-1	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y	-3	-1	3	1	-6	6	-9	9

Τοποθετούμε τα σημεία $A(1,-3), B(3,-1), \Gamma(-1,3), \Delta(-3,1), E\left(\frac{1}{2},-6\right), Z\left(-\frac{1}{2},6\right)$ σε ένα συστημα συντεταγμένων και η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 5 – Λύση

Γνωρίζουμε ότι κάθε υπερβολή $y=\frac{\alpha}{x}$ με $\alpha>0$ έχει τους κλάδους της στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο. Θα πρέπει να ισχύει η ανίσωση: $2(\alpha-3)+6>0$ η οποία επιλύεται ως προς την παράμετρο α ως εξής:

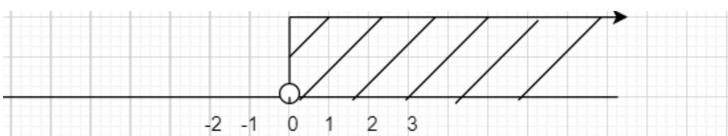
$$2(\alpha-3)+6>0$$

$$2\alpha-6+6>0$$

$$2\alpha>0$$

$$\alpha>0$$

Με παράσταση των λύσεων στην ευθεία των πραγματικών αριθμών:



Άσκηση 6 – Λύση

α. Τα ποσά «χρόνος σε δευτερόλεπτα (y)» και «παροχή σε λίτρα (x)» είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Οπότε θα εκφράζονται με μια υπερβολή με εξίσωση $y = \frac{1.200}{x}$ εκφρασμένη ως προς τον χρόνο ή $x = \frac{1.200}{y}$ εκφρασμένη ως προς την παροχή.

β. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της υπερβολής $y = \frac{1.200}{x}$ τις τιμές $x = 1, x = 2, x = 3$ και τις τιμές $y = 200, y = 150$ $και$ $y = 120$ στον εκφρασμένο κατά τη μεταβλητή x τύπο

$x = \frac{1.200}{y}$ και έχουμε:

- Για $x = 1L,\ παίρνουμε\ \ y = \frac{1.200}{1} = 1.200\ s$
- Για $x = 2L,\ παίρνουμε\ \ y = \frac{1.200}{2} = 600\ s$
- Για $x = 3L,\ παίρνουμε\ \ y = \frac{1.200}{3} = 400\ s$
- Για $y = 200\ s,\ παίρνουμε\ \ x = \frac{1.200}{200} = 6L$
- Για $y = 150\ s,\ παίρνουμε\ \ x = \frac{1.200}{150} = 8L$
- Για $y = 120\ s,\ παίρνουμε\ \ x = \frac{1.200}{120} = 10L$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

$x(L)$	1	2	3	6	8	10
$y(s)$	1.200	600	400	200	150	120

Άσκηση 7 – Λύση

α. Τα ποσά «χρόνος σε ώρες (t)» και «ταχύτητα (v)» είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Οπότε θα εκφράζονται με μια υπερβολή με εξίσωση $t = \frac{360}{v}$ εκφρασμένη ως προς τον χρόνο ή $v = \frac{360}{t}$ εκφρασμένη ως προς την ταχύτητα.

β. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της υπερβολής $v = \frac{360}{t}$ τις τιμές $t = 5, t = 4, t = 3$ και τις τιμές $v = 50 \; και \; v = 60$ στον εκφρασμένο κατά τη μεταβλητή t τύπο, $t = \frac{360}{v}$ και έχουμε:

- Για $t = 5\,h,\; παίρνουμε\;\; v = \frac{360}{5} = 72\, {}^{Km}/_{h}$
- Για $t = 4\,h,\; παίρνουμε\;\; v = \frac{360}{4} = 90\, {}^{Km}/_{h}$
- Για $t = 3\,h,\; παίρνουμε\;\; v = \frac{360}{3} = 120\, {}^{Km}/_{h}$
- Για $v = 50\; {}^{Km}/_{h},\; παίρνουμε\;\; t = \frac{360}{50} = 7{,}2\,h$
- Για $v = 60\; {}^{Km}/_{h},\; παίρνουμε\;\; t = \frac{360}{60} = 6\,h$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

$v({}^{Km}/_{h})$	50	60	72	90	120
$t(h)$	7,2	6	5	4	3

Άσκηση 8 – Λύση

α. Γνωρίζουμε ότι το Εμβαδόν ενός τριγώνου υπολογίζεται από το γινόμενο της βάσης επί το αντίστοιχο ύψος, διαιρούμενο με το δύο. Η μαθηματική έκφραση του τύπου είναι: $E = \frac{\beta \cdot v}{2}$. Επιλύουμε τον τύπο αυτόν ως προς τη βάση β και παίρνουμε:

$$120 = \frac{\beta \cdot v}{2}$$

$$\beta = \frac{2 \cdot 120}{v} \quad \text{άρα} \quad \beta = \frac{240}{v}$$

Οπότε ως εξίσωση υπερβολής έχουμε: $\boldsymbol{\beta = \frac{240}{v}}$

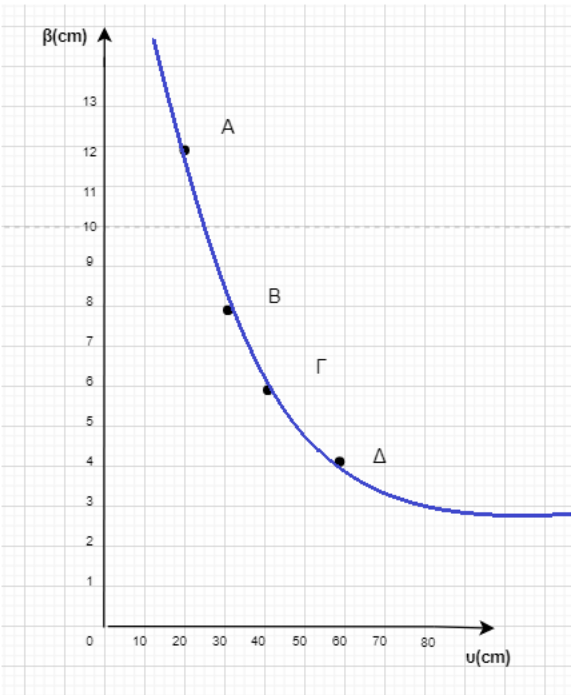
β. Επιλέγουμε ως τιμές **μόνο** θετικές αφού αναφερόμαστε σε διαστάσεις τριγώνου.Η γραφική παράσταση τότε θα έχει μοναδικό κλάδο στο 1ο τεταρτημόριο, λόγω του περιορισμού αυτού. Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών για τις τυχαίες τιμές $\upsilon = 20, \upsilon = 30, \upsilon = 40 \; \kappa\alpha\iota \; \upsilon = 60$ και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες διαστάσεις τις βάσηςως εξής:

- Για $\upsilon = 20cm, \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon: \beta = \frac{240}{20} = 12cm$
- Για $\upsilon = 30cm, \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon: \beta = \frac{240}{30} = 8cm$
- Για $\upsilon = 40cm, \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon: \beta = \frac{240}{40} = 6cm$
- Για $\upsilon = 60cm, \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon: \beta = \frac{240}{60} = 4cm$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

$\upsilon(cm)$	20	30	40	60
$\beta(cm)$	12	8	6	4

Η γραφική παράσταση των σημείων $A(20,12), B(30,8), \Gamma(40,6) \kappa\alpha\iota \; \Delta(60,4)$ είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 9 – Λύση

α. Με τις ιδιότητες των δυνάμεων αρχικά υπολογίζουμε τις τιμές των α *και* β ως εξής:

- $\alpha = \frac{\left(3^7 \cdot 3^{-5}\right)^4}{(3^3)^3} = \frac{\left(3^{7-5}\right)^4}{3^9} = \frac{\left(3^2\right)^4}{3^9} = \frac{3^8}{3^9} = 3^{8-9} = \frac{1}{3}$

- $\beta = \frac{[6^8 : (6^7 : 6^{-4})]^{-2}}{(6)^4} = \frac{[6^8 : (6^{7+4})]^{-2}}{(6)^4} = \frac{[6^8 : 6^{11}]^{-2}}{6^4} = \frac{[6^{8-11}]^{-2}}{6^4} = \frac{(6^{-3})^{-2}}{6^4} = \frac{6^6}{6^4} = 6^{6-4} = 6^2 = 36$

Οπότε έχουμε το σημείο με συντεταγμένες $M(\frac{1}{3}, 36)$ το οποίο ανήκει στην υπερβολή. Αντικαθιστούμε στην παραμέτρική εξίσωση της υπερβολής τις τιμές $x = \frac{1}{3}, y = 36$ και έχουμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο λ ως εξής:

$$36 = \frac{2 - 5(\lambda - 3)}{\frac{1}{3}}$$

$$36 \cdot \frac{1}{3} = 2 - 5\lambda + 15$$

$12 = 17 - 5\lambda$ άρα $5\lambda = 5$, δηλαδή $\lambda = 1$

Για την τιμή της παραμέτρου $\lambda = 1$ η υπερβολή έχει εξίσωση: $\boldsymbol{y = \frac{12}{x}}$

β. Υπολογίζουμε αρχικά την τιμή της παράστασης χρησιμοποιώντας ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών ως εξής:

$$\sqrt{3\sqrt{25} - 2\sqrt{\sqrt{81}}} = \sqrt{3 \cdot 5 - 2\sqrt{9}} = \sqrt{15 - 2 \cdot 3} = \sqrt{15 - 6} = \sqrt{9} = 3$$

Το σημείο B έχει τεταγμένη $y = 3$ και ανήκει στην υπερβολή. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της υπερβολής την τιμή $y = 3$ και υπολογίζουμε την τετμημένη ως εξής:

$$3 = \frac{12}{x}$$

$3x = 12$ άρα $x = \frac{12}{3} = 4$

Η απόσταση κάθε σημείου από τον άξονα $y'y$ είναι ίση με την απόλυτη τιμή της τετμημένης του. Οπότε το σημείο B απέχει 4 μονάδες από τον άξονα $y'y$.

Άσκηση 10 – Λύση

α. Η ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου, δηλαδή στην ευθεία $y = 1 \cdot x$. Οπότε οι ευθείες έχουν την ίδια κλίση και θα ισχύει $\boldsymbol{\alpha = 1}$. Οπότε η ευθεία θα έχει παραμετρική εξίσωση: $\boldsymbol{y = x + \beta}$. Το σημείο με τετμημένη $x = 2$ ανήκει στην ευθεία και στην υπερβολή, οπότε θα επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις. Οπότε έχουμε τις σχέσεις:

- Για $x = 2, στην\ εξίσωση\ της\ ευθείας\ παίρνουμε: y = 1 \cdot 2 + \beta = \beta + 2$
- Για $x = 2, στην\ εξίσωση\ της\ υπερβολής\ παίρνουμε: y = \frac{1+3\beta}{2}$

Από την εξίσωση των δύο τεταγμένων παίρνουμε μια εξίσωση ως προς την παράμετρο β ως εξής:

$$\beta + 2 = \frac{1+3\beta}{2}$$

$$2(\beta + 2) = 1 + 3\beta$$

$$2\beta + 4 = 1 + 3\beta$$

$$3\beta - 2\beta = 4 - 1$$

$$\beta = 3$$

Οπότε για $\alpha = 1\ και\ \beta = 3$ η εξίσωση της ευθείας είναι: $\boldsymbol{y = x + 3}$και αντίστοιχα της υπερβολής θα είναι: $\boldsymbol{y = \frac{10}{x}}$

β. Κάθε σημείο της ευθείας έχει συντεταγμένες $(x, x + 3)$ εκφρασμένες ως προς την τετμημένη x. Το σημείο Β έχει συντεταγμένες με άθροισμα ίσο με -7, οπότε θα ισχύει η σχέση:

$$x + x + 3 = -7$$

$$2x = -10$$

$$x = \frac{-10}{2} = -5 \text{ και } y = x + 3 = -5 + 3 = -2$$

Οπότε το σημείο έχει συντεταγμένες $B(-5, -2)$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της υπερβολής την τετμημένη του σημείου Β, έχουμε:

$$y = \frac{10}{-5} = -2$$

Άρα το σημείο Β επαληθεύει και την εξίσωση της υπερβολής οπότε θα ανήκει επίσης σε αυτήν.

Κεφάλαιο 4 : Περιγραφική Στατιστική

4.1. Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός - Δείγμα

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

i. Λάθος.
Η δειγματοληψία είναι η διαδικασία επιλογής και μελέτης του δείγματος ενώ η απογραφή αφορά στην εξέταση όλων των στοιχείων της μεταβλητής του πληθυσμού.

ii. Σωστό.

iii. Λάθος.
Η επιλογή μεγάλου δείγματος πολλές φορές οδηγεί σε σφάλματα αν οι ιδιότητες του δείγματος δεν είναι παρόμοιες με αυτές του πληθυσμού.

iv. Σωστό.

v. Λάθος.
Το 33% εκφράζει περίπου το «ένα τρίτο» του πληθυσμού.

Ερώτηση Κατανόησης 2 - Απάντηση

i. Από την ισότητα $\boldsymbol{\alpha}\% = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{100}}$ υπολογίζουμε τα ποσοστά ως εξής:

$$\frac{50}{100} \cdot 60 = \frac{50 \cdot 60}{100} = \frac{3.000}{100} = 30$$

Υπολογίζουμε το κάθε ποσοστό και παίρνουμε:

- Το 25% $\textit{του}$ 30 $\textit{είναι}$: $\frac{25}{100} \cdot 30 = \frac{25 \cdot 30}{100} = \frac{750}{100} = 7{,}5 \neq 30$
- Το 30% $\textit{του}$ 90 $\textit{είναι}$: $\frac{30}{100} \cdot 90 = \frac{30 \cdot 90}{100} = \frac{2.700}{100} = 27 \neq 30$

- Το 40% $του$ 75 $είναι$: $\frac{40}{100}\cdot 75=\frac{40\cdot 75}{100}=\frac{3.000}{100}=30$
- Το 70% $του$ 50 $είναι$: $\frac{70}{100}\cdot 50=\frac{70\cdot 50}{100}=\frac{3.500}{100}=35\neq 30$

Σωστή επιλογή η (iii).

ii. Από την ισότητα $\boldsymbol{\alpha}\% = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{100}}$ υπολογίζουμε το ποσοστό ως ακολούθως:

$$\frac{25}{100}\cdot 160=\frac{25\cdot 160}{100}=\frac{4.000}{100}=40$$

Υπολογίζουμε το κάθε ποσοστό και λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

- Το 16% $του$ 250 $είναι$: $\frac{16}{100}\cdot 250=\frac{16\cdot 250}{100}=\frac{4.000}{100}=40$
- Το 20% $του$ 200 $είναι$: $\frac{20}{100}\cdot 200=\frac{20\cdot 200}{100}=\frac{4.000}{100}=40$
- Το 80% $του$ 50 $είναι$: $\frac{80}{100}\cdot 50=\frac{80\cdot 50}{100}=\frac{4.000}{100}=40$
- Το 50% $του$ 320 $είναι$: $\frac{50}{100}\cdot 320=\frac{50\cdot 320}{100}=\frac{16.000}{100}=160\neq 40$

Σωστή επιλογή η (iv).

iii. Η μεταβλητή είναι «το επίπεδο ξένων γλωσσών» και ο πληθυσμός μας είναι οι Έλληνες πολίτες με ηλικία 20-30 έτη. Το δείγμα θα είναι αντιπροσωπευτικό όταν επιλέξουμε άτομα από όλες τις περιοχές της χώρας, ανεξαρτήτως φύλου αλλά συγκεκριμένης ηλικίας, ώστε να προσεγγίζουμε τα χαρακτηριστικά όλου του πληθυσμού. Οπότε σωστή επιλογή η (iv).

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

a) Το ποσοστό 100% αντιπροσωπεύει ολόκληρο το ποσό άρα:
$$Το\ 100\%\ του\ 138\ ισούται\ με\ 138$$

b) Το ποσοστό 50% αντιπροσωπεύει το $\frac{1}{2}$ ή το «μισό» του ποσού άρα:
$$Το\ 50\%\ του\ 240\ ισούται\ με\ \frac{240}{2} = 120$$

c) Το ποσοστό 25% αντιπροσωπεύει το $\frac{1}{4}$ του ποσού άρα:
$$Το\ 25\%\ του\ 800\ ισούται\ με\ \frac{800}{4} = 200$$

d) Σε αυτή την περίπτωση το ποσοστό 30% γράφεται $\frac{30}{100}$ ή $\frac{3}{10}$.

Απλοποιώντας από τον αριθμό 660 το τελικό μηδέν με τον παρανομαστή του κλάσματος $\frac{3}{10}$, καταλήγουμε στον πολλαπλασιασμό $3 \cdot 66 = 198$.

e) Σε αυτή την περίπτωση το ποσοστό 43% γράφεται $\frac{43}{100}$.
Απλοποιώντας από τον αριθμό $200 = 2 \cdot 100$ τον παρανομαστή του κλάσματος $\frac{43}{100}$ καταλήγουμε στο γινόμενο $2 \cdot 43 = 86$.

Άσκηση 2 – Λύση

a) Από την ισότητα $\boldsymbol{\alpha}\% = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{100}}$ υπολογίζουμε το ποσοστό ως εξής:

$$\text{Το } 15\%\ του\ 420\ είναι: \frac{15}{100} \cdot 420 = \frac{15 \cdot 420}{100} = \frac{6.300}{100} = 63$$

b) Από την ισότητα $\boldsymbol{\alpha}\% = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{100}}$ υπολογίζουμε το ποσοστό ως εξής:

$$\text{Το } 24\%\ του\ 125\ είναι: \frac{24}{100} \cdot 125 = \frac{24 \cdot 125}{100} = \frac{3.000}{100} = 30$$

c) Από την ισότητα $\boldsymbol{\alpha}\% = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{100}}$ υπολογίζουμε το ποσοστό ως εξής:

$$\text{Το } 7{,}5\%\ του\ 400\ είναι: \frac{7{,}5}{100} \cdot 400 = 7{,}5 \cdot 4 = 30$$

d) Από την ισότητα $\boldsymbol{\alpha}\% = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{100}}$ υπολογίζουμε το ποσοστό ως εξής:

$$\text{Το } 12\% \ \textit{του}\ 375\ \textit{είναι:} \frac{12}{100} \cdot 375 = \frac{12 \cdot 375}{100} = \frac{4.500}{100} = 45$$

Άσκηση 3 – Λύση

a) Ζητούμε το κλάσμα $\frac{3}{20}$ εκφρασμένο ως ισοδύναμο με παρανομαστή το 100. Οπότε έχουμε:

$$\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{15}{100} \text{ ή } 15\%$$

b) Ζητούμε το κλάσμα $\frac{60}{150}$ εκφρασμένο ως ισοδύναμο με παρανομαστή το 100. Οπότε έχουμε:

$$\frac{60}{150} = \frac{60:30}{150:30} = \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{40}{100} \text{ ή } 40\%$$

c) Ζητούμε το κλάσμα $\frac{56}{80}$ εκφρασμένο ως ισοδύναμο με παρανομαστή το 100. Οπότε έχουμε:

$$\frac{56}{80} = \frac{56:8}{80:8} = \frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{70}{100} \text{ ή } 70\%$$

d) Ζητούμε το κλάσμα $\frac{102}{120}$ εκφρασμένο ως ισοδύναμο με παρανομαστή το 100. Οπότε έχουμε:

$$\frac{102}{120} = \frac{102:6}{120:6} = \frac{17}{20} = \frac{17 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{85}{100} \text{ ή } 85\%$$

Άσκηση 4 – Λύση

a) Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Από τα δεδομένα και την ισότητα $\boldsymbol{\alpha}\% = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{100}}$ δημιουργούμε την εξίσωση ως προς την μεταβλητή x ως εξής:

$$\frac{25}{100}x = 10$$
$$25x = 10 \cdot 100$$
$$25x = 1.000$$
$$x = \frac{1.000}{25} = 40$$

b) Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Από τα δεδομένα και την ισότητα $\boldsymbol{\alpha}\% = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{100}}$ δημιουργούμε την εξίσωση ως προς την μεταβλητή x ως εξής:

$$\frac{20}{100}x = 24$$
$$20x = 24 \cdot 100$$
$$20x = 2.400$$
$$x = \frac{2.400}{20} = 120$$

c) Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Από τα δεδομένα και την ισότητα $\boldsymbol{\alpha}\% = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{100}}$ δημιουργούμε την εξίσωση ως προς την μεταβλητή x ως εξής:

$$\frac{30}{100}x = 45$$
$$30x = 45 \cdot 100$$
$$30x = 4.500$$
$$x = \frac{4.500}{30} = 150$$

d) Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Από τα δεδομένα και την ισότητα $\boldsymbol{\alpha}\% = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{100}}$ δημιουργούμε την εξίσωση ως προς την μεταβλητή x ως εξής:

$$\frac{45}{100}x = 36$$
$$45x = 36 \cdot 100$$
$$45x = 3.600$$
$$x = \frac{3.600}{45} = 80$$

Άσκηση 5 – Λύση

a) Για να βρούμε το ποσοστό, τα μεγέθη πρέπει να εκφραστούν αρχικά στην **<u>ιδια μονάδα μέτρησης.</u>** Εκφράζουμε τα $4m$ σε εκατοστά δηλαδή $4m = 4 \cdot 100 = 400cm$. Ζητούμε το κλάσμα $\frac{80}{400}$ εκφρασμένο ως ισοδύναμο με παρανομαστή το 100. Οπότε έχουμε:

$$\frac{80}{400} = \frac{80:4}{400:4} = \frac{20}{100} \text{ ή } 20\%$$

b) Εκφράζουμε την 1 ημέρα σε ώρες και έχουμε: $1 \cdot 24 = 24\ ώρες$. Ζητούμε το κλάσμα $\frac{18}{24}$ εκφρασμένο ως ισοδύναμο με παρανομαστή το 100. Οπότε έχουμε:

$$\frac{18}{24} = \frac{18:6}{24:6} = \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} \text{ ή } 75\%$$

c) Εκφράζουμε τα 5 λεπτά σε δευτερόλεπτα και έχουμε: $5 \cdot 60 = 300\ δευτερόλεπτα$. Ζητούμε το κλάσμα $\frac{72}{300}$ εκφρασμένο ως ισοδύναμο με παρανομαστή το 100. Οπότε έχουμε:

$$\frac{72}{300} = \frac{72:3}{300:3} = \frac{24}{100} = \text{ ή } 24\%$$

d) Εκφράζουμε τα 20 κιλά σε γραμμάρια και έχουμε: $20 \cdot 1.000 = 20.000\ γραμμάρια$. Ζητούμε το κλάσμα $\frac{300}{20.000}$ εκφρασμένο ως ισοδύναμο με παρανομαστή το 100. Οπότε έχουμε:

$$\frac{300}{20.000} = \frac{3}{200} = \frac{3:2}{200:2} = \frac{1{,}5}{100} \text{ ή } 1{,}5\%$$

Άσκηση 6 – Λύση

a) Για να βρούμε τον αριθμό των παιδιών που ασχολούνται με το μπάσκετ, πολλαπλασιάζουμε το ποσοστό εκφρασμένο ως δεκαδικό κλάσμα που αντιστοιχεί στα παιδιά αυτά, με τον συνολικό αριθμό παιδιών που είναι 275. Οπότε παίρνουμε:

$$\frac{32}{100} \cdot 275 = \frac{8.800}{100} = 88\ παιδιά$$

b) Ο αριθμός των παιδιών που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο είναι 110. Αναζητούμε το κλάσμα $\frac{110}{275}$ εκφρασμένο με παρανομαστή το 100. Οπότε έχουμε:

$$\frac{110}{275}=\frac{110:11}{275:11}=\frac{10}{25}=\frac{10\cdot 4}{25\cdot 4}=\frac{40}{100} \text{ ή } 40\%$$

c) Εκφράζουμε ως δεκαδικό κλάσμα το μέρος των παιδιών που ασχολούνται με το βόλεϊ αν αφαιρέσουμε από την ακέραια μονάδα τα αντίστοιχα δεκαδικά κλάσματα των παιδιών που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο και το βόλεϊ. Οπότε έχουμε:

$$1-\frac{32}{100}-\frac{40}{100}=\frac{100}{100}-\frac{32}{100}-\frac{40}{100}=\frac{100-32-40}{100}=\frac{28}{100} \text{ ή } 28\%$$

Άσκηση 7 – Λύση

a) Ο πληθυσμός είναι όλοι οι Έλληνες πολίτες με δικαίωμα ψήφου στις βουλευτικές εκλογές.Το δείγμα είναι κάτοικοι από την Αθήνα με μέγεθος 2000 κατοίκους. Η μεταβλητή είναι η επιλογή κόμματος με τιμές A, B, Γ .

b) Το δείγμα **δεν** είναι αντιπροσωπευτικό διότι η επιλογή του έγινε μόνο από μια περιφέρεια της Ελλάδας ενώ ο πληθυσμός αφορά σε πολίτες από ολόκληρη τη χώρα.

c) i. Για να βρούμε τον αριθμό των ατόμων που προτίμησαν το κόμμα Α, πολλαπλασιάζουμε το ποσοστό εκφρασμένο ως δεκαδικό κλάσμα που αντιστοιχεί στα άτομα αυτά, με τον συνολικό αριθμό ατόμων του δείγματος που είναι 2.000. Οπότε παίρνουμε:

$$\frac{42}{100}\cdot 2.000=\frac{84.000}{100}=840 \;\acute{\alpha}\tau o\mu\alpha$$

ii. Για να βρούμε τον ποσοστό των ατόμων του δείγματος που προτίμησαν το κόμμα Β, μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{780}{2.000}$ σε δεκαδικό με παρανομαστή το 100. Οπότε έχουμε:

$$\frac{780}{2.000}=\frac{780}{2.000}=\frac{780:20}{2.000:20}=\frac{39}{100} \text{ ή } 39\%$$

iii. Εκφράζουμε ως δεκαδικό κλάσμα το μέρος των ατόμων που προτίμησαν το κόμμα Γ αν αφαιρέσουμε από την ακέραια μονάδα τα αντίστοιχα δεκαδικά κλάσματα των ατόμων που προτίμησαν το κόμμα Α και το κόμμα Β. Οπότε έχουμε:

$$1-\frac{42}{100}-\frac{39}{100}=\frac{100}{100}-\frac{42}{100}-\frac{39}{100}=\frac{100-42-39}{100}=\frac{19}{100} \text{ ή } 19\%$$

Άσκηση 8 – Λύση

a) Ο πληθυσμός είναι οι Έλληνες πολίτες που γνωρίζουν ανάγνωση. Το δείγμα είναι οι πελάτες ενός βιβλιοπωλείου μεγέθους 400 ατόμων. Η μεταβλητή είναι ο αριθμός των βιβλίων που διαβάζουν οι Έλληνες ανά χρόνο.

b) Το δείγμα **δεν** είναι αντιπροσωπευτικό διότι η επιλογή του έγινε μόνο από ένα βιβλιοπωλείο και όχι από διαφορετικά από όλη την περιφέρεια, με τυχαία επιλογή.

c) i.Για να βρούμε το ποσοστό που αντιστοιχεί σε 220 αναγνώστες βιβλίων πρέπει να εκφράσουμε το κλάσμα $\frac{220}{400}$ ως δεκαδικό με παρανομαστή το 100. Οπότε έχουμε:

$$\frac{220}{400}=\frac{220:4}{400:4}=\frac{55}{100} \text{ ή } 55\%$$

ii. Για να βρούμε τον αριθμό των ατόμων που διάβασαν 1 βιβλίο πολλαπλασιάζουμε το ποσοστό που τους αντιστοιχεί, εκφρασμένο ως δεκαδικό κλάσμα, με το σύνολο του δείγματος. Οπότε έχουμε:

$$\frac{26}{100}\cdot 400=\frac{10.400}{100}=104\ \acute{\alpha}\tau o\mu\alpha$$

Ο αριθμός των ατόμων που διάβασαν 3 βιβλία προκύπτει αν αφαιρέσουμε από το μέγεθος του δείγματος, τα άτομα που διάβασαν 1 βιβλίο και 2 βιβλία. Οπότε παίρνουμε:

$$400-104-220=76\ \acute{\alpha}\tau o\mu\alpha$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 – Λύση

a) Πολλαπλασιάζουμε το ποσοστό εκφρασμένο σε δεκαδικό κλάσμα με το αντίστοιχο ποσό και παίρνουμε:

$$\frac{45}{100} \cdot 200 = \frac{45 \cdot 200}{100} = \frac{9.000}{100} = 90$$

b) Πολλαπλασιάζουμε το ποσοστό εκφρασμένο σε δεκαδικό κλάσμα με το αντίστοιχο ποσό και παίρνουμε:

$$\frac{34}{100} \cdot 45 = \frac{34 \cdot 45}{100} = \frac{1.530}{100} = 15{,}3$$

c) Πολλαπλασιάζουμε το ποσοστό εκφρασμένο σε δεκαδικό κλάσμα με το αντίστοιχο ποσό και παίρνουμε:

$$\frac{12}{100} \cdot 180 = \frac{12 \cdot 180}{100} = \frac{2.160}{100} = 21{,}6$$

d) Πολλαπλασιάζουμε το ποσοστό εκφρασμένο σε δεκαδικό κλάσμα με το αντίστοιχο ποσό και παίρνουμε:

$$\frac{5}{100} \cdot 1.220 = \frac{5 \cdot 1.220}{100} = \frac{6.100}{100} = 61$$

Άσκηση 2 – Λύση

a) Εκφράζουμε το κλάσμα $\frac{44}{50}$ ως δεκαδικό με παρανομαστή το 100 και παίρνουμε:

$$\frac{44}{50} = \frac{44 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{88}{100} \text{ ή } 88\%$$

b) Εκφράζουμε το κλάσμα $\frac{16}{48}$ ως δεκαδικό αριθμό και παίρνουμε:

$$\frac{16}{48} = \frac{16:16}{48:16} = \frac{1}{3} \cong 0{,}33 \cong \frac{33}{100} \text{ ή } 33\%$$

c) Εκφράζουμε το κλάσμα $\frac{50}{125}$ ως δεκαδικό με παρανομαστή το 100 και παίρνουμε:

$$\frac{50}{125} = \frac{50:5}{125:5} = \frac{10}{25} = \frac{10 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{40}{100} \text{ ή } 40\%$$

d) Εκφράζουμε το κλάσμα $\frac{87}{145}$ ως δεκαδικό αριθμό και παίρνουμε:

$$\frac{87}{145} = 0{,}60 = \frac{60}{100} \text{ ή } 60\%$$

Άσκηση 3 – Λύση

a) Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Από τα δεδομένα και την ισότητα $\boldsymbol{\alpha}\% = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{100}}$ δημιουργούμε την εξίσωση ως προς την μεταβλητή x ως εξής:

$$\frac{15}{100}x = 21$$
$$15x = 21 \cdot 100$$
$$15x = 2.100 \quad \text{άρα} \quad x = \frac{2.100}{15} = 140$$

b) Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Από τα δεδομένα και την ισότητα $\boldsymbol{\alpha}\% = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{100}}$ δημιουργούμε την εξίσωση ως προς την μεταβλητή x ως εξής:

$$\frac{10}{100}x = 108$$
$$10x = 108 \cdot 100$$
$$10x = 10.800 \quad \text{άρα} \quad x = \frac{10.800}{10} = 1.080$$

c) Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Από τα δεδομένα και την ισότητα $\boldsymbol{\alpha}\% = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{100}}$ δημιουργούμε την εξίσωση ως προς την μεταβλητή x ως εξής:

$$\frac{30}{100}x = 48$$
$$30x = 48 \cdot 100$$
$$30x = 4.800 \quad \text{άρα} \quad x = \frac{4.800}{30} = 160$$

d) Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Από τα δεδομένα και την ισότητα $\boldsymbol{\alpha}\% = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{100}}$ δημιουργούμε την εξίσωση ως προς την μεταβλητή x ως εξής:

$$\frac{65}{100}x = 400$$
$$65x = 400 \cdot 100$$
$$65x = 40.000 \quad \text{άρα} \quad x = \frac{40.000}{65} = \frac{40.000:5}{65:5} = \frac{8.000}{13}$$

Άσκηση 4 – Λύση

Σε κάθε υποερώτημα εκφράζουμε τα συγκρίσιμα ποσά **στην ίδια μονάδα μέτρησης.**

a) Θα πρέπει να μετατρέψουμε τα $2{,}7m^3\ \sigma\varepsilon\ L$. Οπότε έχουμε: $2{,}7m^3 = 2{,}7 \cdot 1000 = 2.700L$.
Μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{45}{2.700}$ σε ισοδύναμο δεκαδικό αριθμό με προσέγγιση χιλιοστού και λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\frac{45}{2.700} = \frac{45:45}{2.700:45} = \frac{1}{60} \cong 0{,}017 \text{ ή } 1{,}7\%$$

b) Μετατρέπουμε τις 2 ημέρες σε λεπτά ως εξής: $2 \cdot 24h = 48h = 48 \cdot 60min = 2.880min$.
Μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{90}{2.880}$ σε ισοδύναμο δεκαδικό αριθμό με προσέγγιση χιλιοστού και λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\frac{90}{2.880} = \frac{90:90}{2.880:90} = \frac{1}{32} \cong 0{,}031 \text{ ή } 3{,}1\%$$

c) Μετατρέπουμε τις 3 διετίες σε μήνες ως εξής: $3 \cdot 2 = 6\ \acute{\varepsilon}\tau\eta = 6 \cdot 12 = 72\ \mu\acute{\eta}\nu\varepsilon\varsigma$.
Μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{3}{72}$ σε ισοδύναμο δεκαδικό αριθμό με προσέγγιση χιλιοστού και λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\frac{3}{72} = \frac{3:3}{72:3} = \frac{1}{24} \cong 0{,}042 \text{ ή } 4{,}2\%$$

d) Μετατρέπουμε τοω 1 τόνο σε γραμμάρια ως εξής:
$1 \cdot 1.000 = 1.000\ \kappa\iota\lambda\acute{\alpha} = 1.000 \cdot 1.000 = 1.000.000\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\alpha}\rho\iota\alpha$.

Μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{250}{1.000.000}$ σε ισοδύναμο δεκαδικό αριθμό και λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\frac{250}{1.000.000} = \frac{250:250}{1.000.000:250} = \frac{1}{4.000} = 0{,}00025 \text{ ή } 0{,}025\%$$

Άσκηση 5 – Λύση

Έστω x ο συνολικός αριθμός των κοριτσίων και y ο συνολικός αριθμός των αγοριών του σχολείου. Από τα δεδομένα υπολογίζουμε:

- Για τον αριθμό των κοριτσιών δημιουργουμε την ακόλουθη εξίσωση:
  $\frac{85}{100}x = 102$
  $85x = 102 \cdot 100$
  $85x = 10.200$
  $x = \frac{10.200}{85} = 120$

  Ο συνολικός αριθμός των κοριτσιών είναι 120.

- Για τον αριθμό των αγοριών δημιουργουμε την ακόλουθη εξίσωση:
  $\frac{60}{100}y = 78$
  $60y = 78 \cdot 100$
  $60y = 7.800$
  $y = \frac{7.800}{60} = 130$

  Ο συνολικός αριθμός των αγοριών είναι 130.

Συνολικά οι μαθητές που συμμετείχαν στην εκδρομή ήταν $102 + 78 = 200$, από τους συνολικούς μαθητές του σχολείου που είναι $130 + 120 = 250$.

Λαμβάνουμε το κλάσμα $\frac{200}{250}$ και το μετατρέπουμε σε ισοδύναμο με παρανομαστή το 100 ως ακολούθως:

$$\frac{200}{250} = \frac{200:50}{250:50} = \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{80}{100} \text{ ή } 80\%$$

Άσκηση 6 – Λύση

Βρίσκουμε το ποσοστό του μισθού που περίσσεψε αφαιρώντας από το ποσοστό 100% τα αντίστοιχα ποσοστά που ξοδεύτηκαν*. Οπότε το ποσοστό του μισθού που περίσσεψε είναι:

$$100\% - 25\% - 28\% - 18\% - 14\% - 3\% = 12\%$$

Οπότε το ποσοστό 12% αντιστοιχεί σε 108€ από τον μισθό της Ελένης. Θεωρούμε x τον μισθό οπότε δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{12}{100}x = 108$$

$$12x = 108 \cdot 100$$

$$12x = 10.800$$

$$x = \frac{10.800}{12} = 900€$$

Ο συνολικός μισθός της Ελένης είναι 900€.

*Γενικά δεν προσθαφαιρούμε ποσοστά, γιατί θα καταλήξουμε σε λάθος συμπεράσματα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση όμως τα ποσοστά ως κλάσματα αναφέρονται στην ίδια ακέραια μονάδα.

Άσκηση 7 – Λύση

a) Ο πληθυσμός της έρευνας είναι οι Έλληνες πολίτες, το δείγμα 2.500 άτομα από όλη την Ελλάδα και η μεταβλητή η «δημοφιλία τραγουδιστή» με τιμές Α, Β, Γ.

b) Το δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό γιατί η επιλογή του έγινε τυχαία και πάρθηκε από ολόκληρη την περιφέρεια της χώρας.

c) i. Πολλαπλασιάζουμε το ποσοστό που προτίμησε τον τραγουδιστή Α με το πλήθος του δείγματος. Οπότε έχουμε την ακόλουθη ισότητα:

$$\frac{41}{100} \cdot 2.500 = \frac{41 \cdot 2.500}{100} = \frac{102.500}{100} = 1.025 \; άτομα$$

ii. Μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{800}{2.500}$ σε ισοδύναμο δεκαδικό με παρανομαστή το 100 ως ακολούθως:

$$\frac{800:100}{2.500:100} = \frac{8}{25} = \frac{8 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{32}{100} \text{ ή } 32\%$$

iii. Το ποσοστό που προτίμησε τον τραγουδιστή Γ προκύπτει αν αφαιρέσουμε τα ποσοστά των προτιμήσεων του Α και Β από το ποσοστό 100%. Οπότε έχουμε:

$$\frac{100}{100} - \frac{41}{100} - \frac{32}{100} = \frac{27}{100} \text{ ή } 27\%$$

Το ποσοστό προτίμησης του Γ στο δείγμα είναι 27%.

Άσκηση 8 – Λύση

a) ο πληθυσμός είναι οι Έλληνες πολίτες που παρακολουθούν τηλεόραση,το δείγμα είναι ενας συγκεκριμένος (άγνωστος) ατόμων από όλη την Ελλάδα και η μεταβλητή είναι «η δημοφιλία καναλιών» με τιμές Α, Β, Γ.

b) Έστω x το μέγεθος του δείγματος. Τότε από τα δεδομένα δημιουργούμε μια εξίσωση ως ακολούθως:

$\frac{40}{100}x = 300$

$40x = 300 \cdot 100$

$40x = 30.000$

$x = \frac{30.000}{40} = 750$

Το μέγεθος του δείγματος είναι 750 άτομα.

c) Το δείγμα (παρόλο που θεωρητικά είναι μικρό σε σχέση με τον πληθυσμό) είναι αντιπροσωπευτικό γιατί η επιλογή του έγινε τυχαία από όλη την περιφέρεια της χώρας και προσεγγίζει τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού.

d) i. Μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{240}{750}$ σε ισοδύναμο δεκαδικό με παρανομαστή το 100, ως ακολούθως:

$$\frac{240}{750} = \frac{240:30}{750:30} = \frac{8}{25} = \frac{8 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{32}{100}$$ ή 32% το ποσοστό προτίμησης του καναλιού Β.

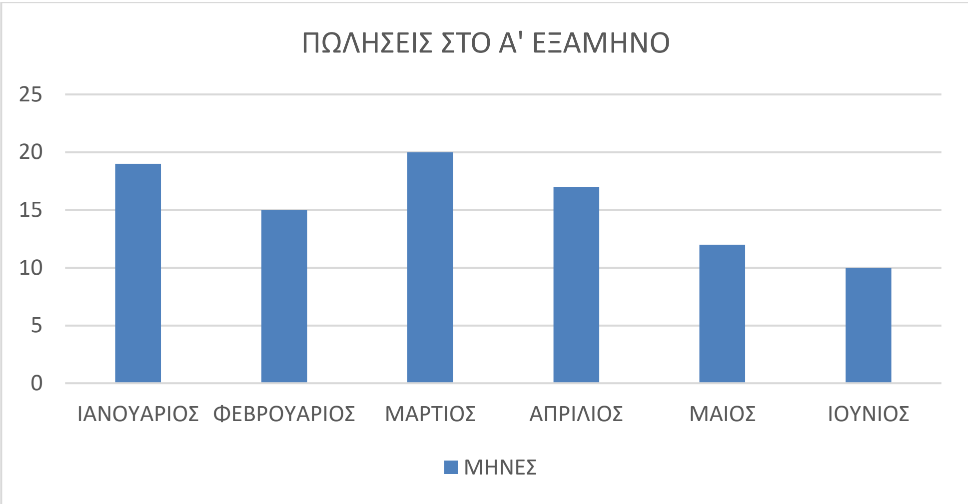
ii. Τα ποσοστά προτίμησης των καλαλιών Α και Β είναι: $40\% + 32\% = 72\%$. Οπότε το ποσοστό προτίμησης του καναλιού Γ θα είναι το υπόλοιπο από το 100% δηλαδή 28%.

4.2. Γραφικές παραστάσεις

Λύσεις

Άσκηση 1 – Λύση

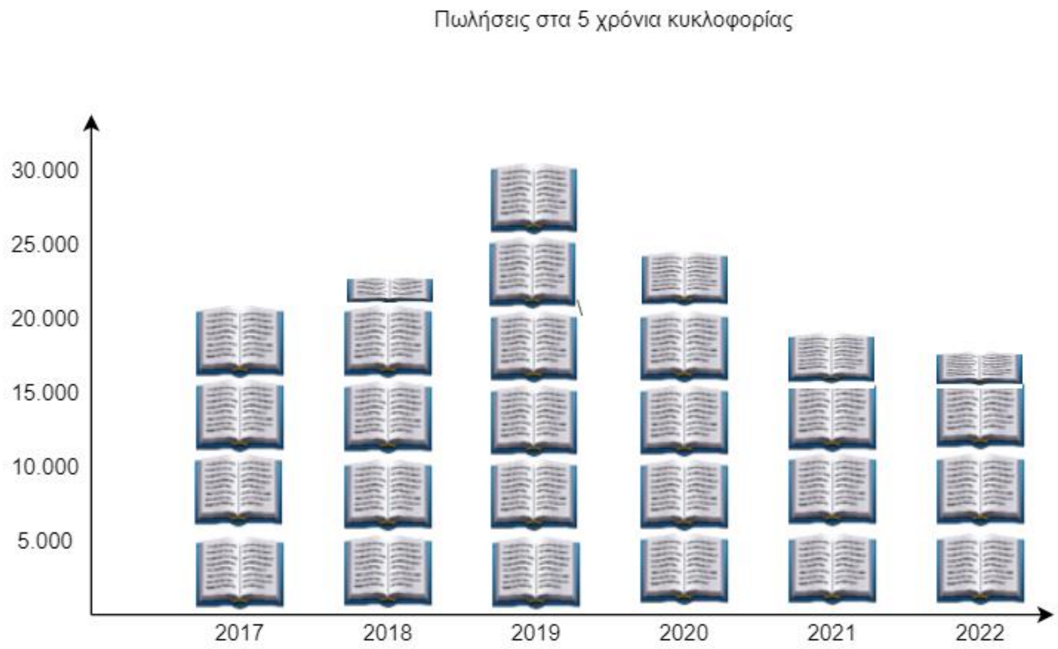
Κατασκευάζουμε το ραβδόγραμμα με οριζόντιο άξονα τους μήνες των πωλήσεων και κατακόρυφο τις πωλήσεις ανά μήνα, παρουσιάζοντας τις πωλήσεις στο α' εξάμηνο ως ακολούθως:



Άσκηση 2 – Λύση

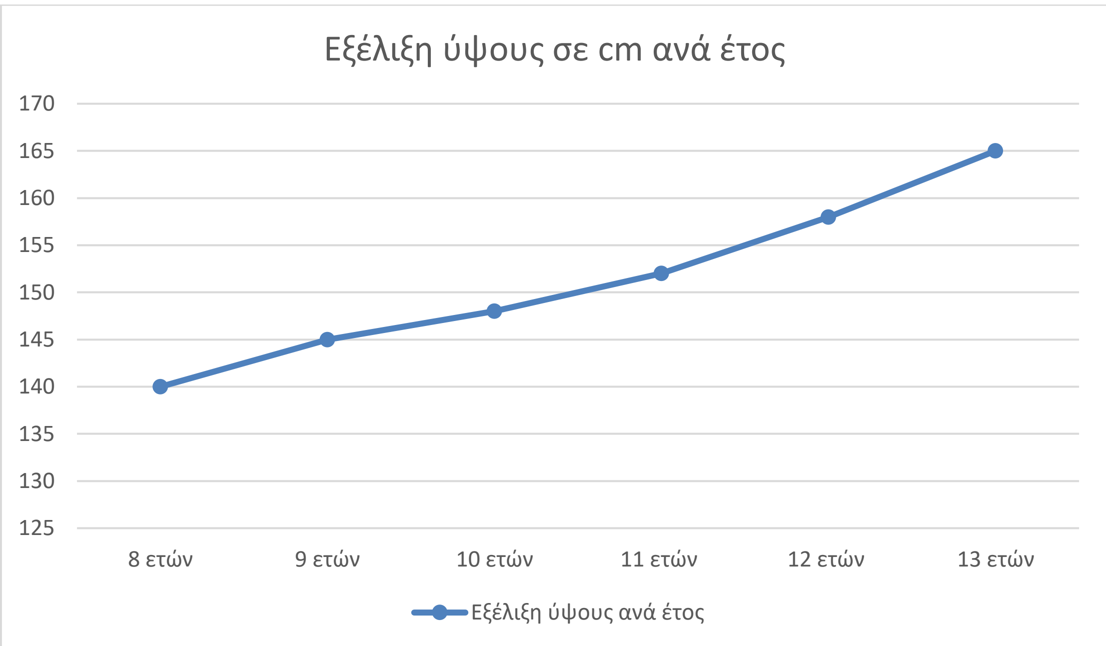
Στον οριζόντιο άξονα τοποθετήθηκαν τα έτη πωλήσεων και στον κατακόρυφο το πλήθος των πωλήσεων των βιβλίων. Στο ακόλουθο διάγραμμα παρουσιάζονται οι πωλήσεις στα 5 πρώτα έτη σε εικονόγραμμα, όπου αντιστοιχούμε:

 = 5.000 βιβλία



Άσκηση 3 – Λύση

Στον οριζόντιο άξονα του χρονογράμματος τοποθετήθηκε η ηλικία ανά έτος και στον κατακόρυφο άξονα τα ύψη μετρημένα σε εκατοστά. Παρουσιάζεται η εξέλιξη ύψους από την ηλικία των 8 ετών έως και την ηλικία των 13 ετών, ως ακολούθως:



Άσκηση 4 – Λύση

a) Αρχικά βρίσκουμε το σύνολο των ψήφων που πήραν τα κόμματα Α, Β, Γ από το άθροισμα:

$$250 + 140 + 90 = 480\ \psi ή\varphi o\iota$$

Οι ψήφοι που αντιστοιχούν στο κόμμα Δ προκύπτουν από τη διαφορά του συνόλου των ψήφων και των συνολικών ψήφων που πήραν τα κόμματα Α, Β, Γ. Οπότε οι ψήφοι του κόμματος Δ θα είναι:

$$540 - 480 = 60\ \psi ή\varphi o\iota$$

b) Μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{140}{540}$ σε δεκαδικό αριθμό με προσέγγιση εκατοστού και έχουμε:

$$\frac{140}{540} \cong 0{,}26 \cong \frac{26}{100} \text{ ή } 26\%$$

Το ποσοστό του κόμματος Β αντιστοιχεί περίπου σε 26%.

c) Θα πρέπει να υπολογίσουμε πόσες μοίρες σε κάθε κυκλικό τομέα αντιστοιχούν στο πλήθος των ψήφων του κάθε κόμματος. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\nu}{\alpha} = \frac{360^o}{\theta}$ όπου ν το μέγεθος του δείγματος, α το πλήθος των ψήφων κάθε κόμματος και θ η γωνία που θα αντιστοιχεί σε κάθε κόμμα στον κυκλικό τομέα του κυκλικού διαγράμματος. Υπολογίζουμε τις αντίστοιχες γωνίες και παίρνουμε:

- Για το κόμμα Α:

  $\frac{\nu}{\alpha_1} = \frac{360^o}{\theta_1}$

  $\frac{540}{250} = \frac{360^o}{\theta_1}$

  $540 \cdot \theta_1 = 250 \cdot 360^o$

  $\theta_1 = \frac{90.000^o}{540} \cong 167^o$ και ποσοστό $\frac{250}{540} \cong 0{,}46$ ή 46%

- Για το κόμμα Β:

  $\frac{\nu}{\alpha_2} = \frac{360^o}{\theta_2}$

  $\frac{540}{140} = \frac{360^o}{\theta_2}$

  $540 \cdot \theta_2 = 140 \cdot 360^o$ άρα $\theta_2 = \frac{50.400^o}{540} \cong 93^o$ και ποσοστό $\frac{140}{540} \cong 0{,}26$ ή 26%

- Για το κόμμα Γ:

$$\frac{\nu}{\alpha_3} = \frac{360^o}{\theta_3}$$

$$\frac{540}{90} = \frac{360^o}{\theta_3}$$

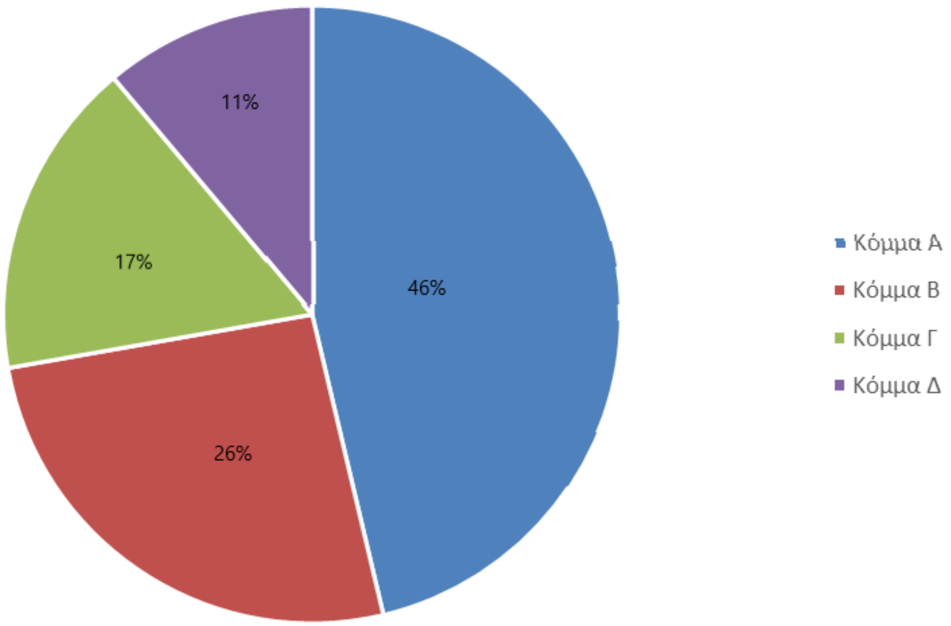
$$540 \cdot \theta_3 = 90 \cdot 360^o$$

$$\theta_3 = \frac{32.400^o}{540} = 60^o \text{ και ποσοστό } \frac{90}{540} \cong 0{,}17 \text{ ή } 17\%$$

Η γωνία θ_4 του κόμματος Δ θα το υπολογιστεί αφαιρώντας από τις 360^o τις αντίστοιχες γωνίες των τριών κομμάτων διότι έγιναν προσεγγίσεις δεκαδικών ψηφίων. Θα πρέπει στα τελικά αποτελέσματα το άθροισμα των γωνιών να ισούται ακριβώς με 360^o. Οπότε για τη γωνία θ_4 του κόμματος Δ, παίρνουμε:

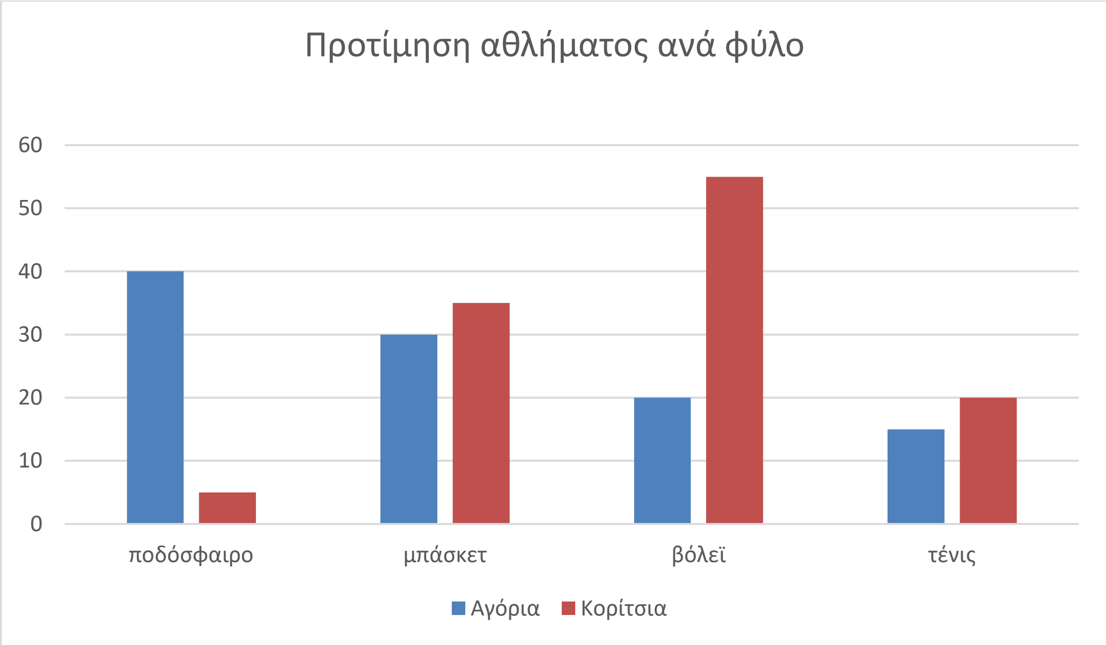
$$\theta_4 = 360^o - 167^o - 93^o - 60^o = 40^o \text{ και ποσοστό } 11\%$$

Το κυκλικό διάγραμμα θα έχει την μορφή:



Άσκηση 5 – Λύση

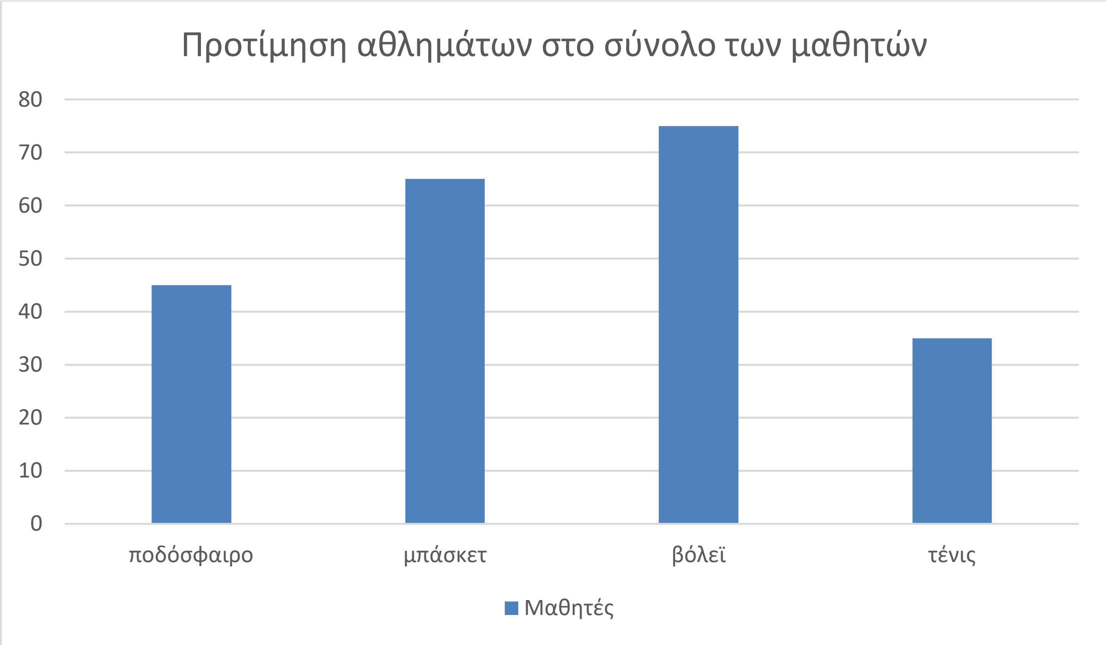
a) Στον οριζόντιο άξονα του ραβδογράμματος τοποθετούμε τα αθλήματα προτίμησης και στον κατακόρυφο το πλήθος αγοριών και κοριτσίων που τα προτιμούν. Το ραβδόγραμμα θα έχει την εξής μορφή:



b) Αθροίζουμε κατά σειρά και ανά άθλημα το πλήθος αγοριών και κοριτσιών στον πίνακα και παίρνουμε τον αθροιστικό πίνακα προτίμησης των αθλημάτων, ανεξαρτήτως του φύλου. Ο πίνακας είναι:

Άθλημα	Σύνολο
ποδόσφαιρο	45
μπάσκετ	65
βόλεϊ	75
τένις	35

Στον οριζόντιο άξονα του ραβδογράμματος τοποθετούμε τα αθλήματα προτίμησης και στον κατακόρυφο το πλήθος των μαθητών που τα προτιμούν. Το ραβδόγραμμα θα έχει την εξής μορφή:



Άσκηση 6 – Λύση

a) Από τον δεδομένο πίνακα μας δίνεται ότι το 30% των ατόμων αντιστοιχούν σε 60 άτομα. Έστω x τα συνολικά άτομα του δείγματος. Δημιουργούμε την εξίσωση:

$$\frac{30}{100}x = 60$$
$$30x = 60 \cdot 100$$
$$30x = 6.000$$
$$x = \frac{6.000}{30} = 200 \text{ άτομα}$$

Το ποσοστό των ατόμων που είδαν 2 ταινίες αντιστοιχεί σε ποσοστό 25%. Για να βρούμε το πλήθος τους πολλαπλασιάζουμε το ποσοστό εκφρασμένο σε δεκαδικό κλάσμα με παρανομαστή το 100, με το συνολικό πλήθος του δείγματος. Οπότε παίρνουμε:

$$\frac{25}{100} \cdot 200 = \frac{25 \cdot 200}{100} = 50 \text{ } άτομα$$

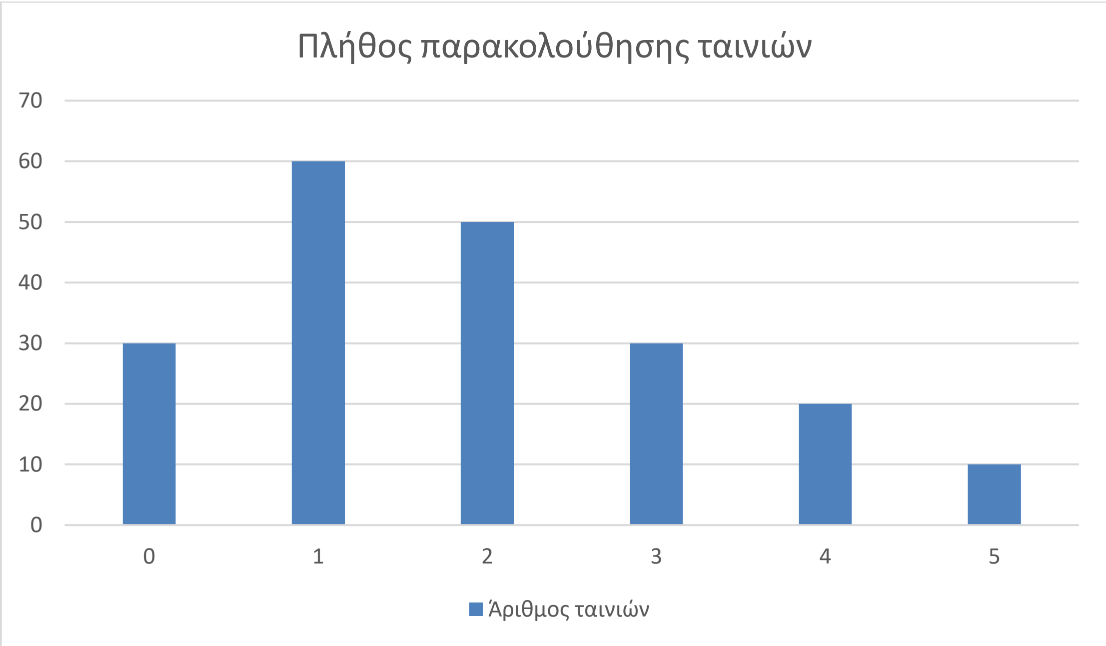
Για να βρούμε το πλήθος των ατόμων που είδαν 3 ταινίες αφαιρούμε από το συνολικό πλήθος του δείγματος το πλήθος των ατόμων που είδαν $0,1,2,4$ $και$ 5 ταινίες. Οπότε έχουμε:

$$200 - 30 - 60 - 50 - 20 - 10 = 30 \text{ άτομα}$$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

Αριθμός ταινιών	Αριθμός ατόμων
0	30
1	60
2	50
3	30
4	20
5	10

b) Στον οριζόντιο άξονα του ραβδογράμματος τοποθετούμε τον αριθμό ταινιών και στον κατακόρυφο το πλήθος των ατόμων που τις είδαν στον κινηματογράφο. Το ραβδόγραμμα θα έχει την εξής μορφή:



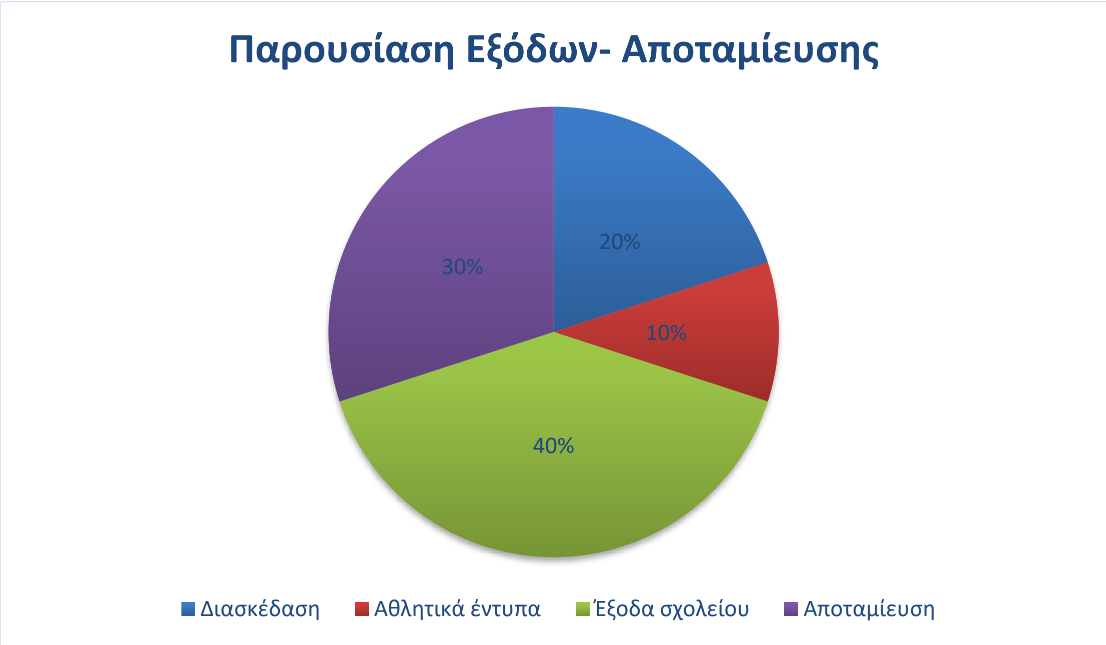
Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 – Λύση

Αρχικά θα υπολογίσουμε το ποσοστό αποταμίευσης. Συνολικά τα έξοδα του Λευτέρη αντιστοιχούν σε $40\% + 20\% + 10\% = 70\%$ από το χαρτζιλίκι του. Οπότε αποταμιεύει το υπόλοιπο 30%. Για να βρούμε τις γωνίες των κυκλικών τομέων του κυκλικού διαγράμματος, εφόσον δεν είναι γνωστό το αρχικό μέγεθος του δείγματος και τα επιμέρους ποσά εκφρασμένα σε ευρώ, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\boldsymbol{\theta = \alpha\% \cdot 360^o}$ ή $\boldsymbol{\theta = \frac{\alpha}{100} \cdot 360^o}$. Οπότε υπολογίζουμε ως εξής:

- Για τη διασκέδαση: $\theta_1 = \frac{20}{100} \cdot 360^o = \frac{7.200^o}{100} = 72^o$
- Για τα αθλητικά έντυπα: $\theta_2 = \frac{10}{100} \cdot 360^o = \frac{3.600^o}{100} = 36^o$
- Για τα έξοδα σχολείου: $\theta_3 = \frac{40}{100} \cdot 360^o = \frac{14.400^o}{100} = 144^o$
- Για την αποταμίευση: $\theta_4 = \frac{30}{100} \cdot 360^o = \frac{10.800^o}{100} = 108^o$

Οπότε το κυκλικό διάγραμμα θα έχει την ακόλουθη μορφή:



Άσκηση 2 – Λύση

a) Το σύνολο των ερωτηθέντων είναι 36 άτομα. Τα άτομα που απάντησαν «σχεδόν καλή» υγεία, αντιστοιχούν στο 25% του δείγματος. Για να βρούμε το πλήθος τους πολλαπλασιάζουμε το ποσοστό εκφρασμένο σε δεκαδικό κλάσμα με παρανομαστή το 100 και το πλήθος του δείγματος. Οπότε παίρνουμε:

$$\frac{25}{100} \cdot 36 = \frac{25 \cdot 36}{100} = \frac{900}{100} = 9 \; \acute{\alpha}\tau o\mu\alpha$$

b) Το πλήθος των ατόμων που απάντησαν «κακή» υγεία θα προκύψει από τη διαφορά του συνολικού πλήθος των ατόμων που ρωτήθηκαν, μείον το πλήθος των ατόμων με τις υπόλοιπες απαντήσεις. Δημιουργούμε την παράσταση:

$$36 - (3 + 8 + 14 + 9) = 36 - 34 = 2 \; \acute{\alpha}\tau o\mu\alpha$$

c) i. Τοποθετούμε στον οριζόντιο άξονα του ραβδογράμματος τις επιλογές κατάστασης της υγείας του δείγματος και στον κατακόρυφο άξονα το πλήθος των ατόμων. Το ραβδόγραμμα έχει την εξής μορφή:

ii. Θα πρέπει να υπολογίσουμε πόσες μοίρες σε κάθε κυκλικό τομέα αντιστοιχούν στο πλήθος των ατόμων για κάθε κατάσταση της υγείας. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\nu}{\alpha} = \frac{360^o}{\theta}$ όπου ν το μέγεθος του δείγματος, α το πλήθος των ατόμων σε κάθε επιλογή και θ η γωνία που θα αντιστοιχεί για κάθε κατηγορία απαντήσεων στον κυκλικό τομέα του κυκλικού διαγράμματος. Υπολογίζουμε τις αντίστοιχες γωνίες και λαμβάνουμε τα ακόλουθα αριθμητικά αποτελέσματα:

- Για τα άτομα που απάντησαν «Άριστη» υγεία:

$\frac{\nu}{\alpha_1} = \frac{360^o}{\theta_1}$

$\frac{36}{3} = \frac{360^o}{\theta_1}$

$36 \cdot \theta_1 = 3 \cdot 360^o$

$\theta_1 = \frac{1.080^o}{36} = 30^o$ και ποσοστό $\frac{3}{36} \cong 0{,}08$ ή 8%

- Για τα άτομα που απάντησαν «Πολύ καλή» υγεία:

$\frac{\nu}{\alpha_2} = \frac{360^o}{\theta_2}$

$\frac{36}{8} = \frac{360^o}{\theta_2}$

$36 \cdot \theta_2 = 8 \cdot 360^o$

$\theta_2 = \frac{2.880^o}{36} = 80^o$ και ποσοστό $\frac{8}{36} \cong 0{,}22$ ή 22%

- Για τα άτομα που απάντησαν «Καλή» υγεία:

$\frac{\nu}{\alpha_3} = \frac{360^o}{\theta_3}$

$\frac{36}{14} = \frac{360^o}{\theta_3}$

$36 \cdot \theta_3 = 14 \cdot 360^o$

$\theta_3 = \frac{5.040^o}{36} = 140^o$ και ποσοστό $\frac{14}{36} \cong 0{,}39$ ή 39%

- Για τα άτομα που απάντησαν «Σχεδόν καλή» υγεία:

$\frac{\nu}{\alpha_4} = \frac{360^o}{\theta_4}$

$\frac{36}{9} = \frac{360^o}{\theta_4}$

$36 \cdot \theta_4 = 9 \cdot 360^o$

$\theta_4 = \frac{3.240^o}{36} = 90^o$ και ποσοστό $\frac{9}{36} = 0{,}25$ ή 25%

- Για τα άτομα που απάντησαν «Κακή» υγεία:

$$\frac{\nu}{\alpha_5} = \frac{360^o}{\theta_5}$$

$$\frac{36}{2} = \frac{360^o}{\theta_5}$$

$$36 \cdot \theta_5 = 2 \cdot 360^o$$

$\theta_5 = \frac{720^o}{36} = 20^o$ και ποσοστό 6%

*Το ποσοστό αυτής της κατηγορίας υπολογίστηκε ως η διαφορά του ποσοστού 100% και των ποσοστών των υπολοίπων κατηγοριών, λόγω προσέγγισης δεκαδικών ψηφίων. Θα πρέπει το συνολικό άθροισμα των ποσοστών που αφορούν στο ίδιο δείγμα να είναι 100%.

Το κυκλικό διάγραμμα που αντιστοιχεί στο δείγμα είναι:

Άσκηση 3 – Λύση

a) Το πλήθος του δείγματος είναι 50 άτομα. Για να βρούμε το πλήθος των παιδιών που υποστηρίζουν τις ομάδες Α και Β θα πολλαπλασιάσουμε τα αντίστοιχα ποσοστά εκφρασμένα σε δεκαδικά κλάσματα με παρανομαστή το 100, με το πλήθος των παιδιών που ρωτήθηκαν. Οπότε παίρνουμε:

- Για την ομάδα Α έχουμε: $\frac{20}{100} \cdot 50 = \frac{20 \cdot 50}{100} = \frac{1.000}{100} = 10 \; \pi\alpha\iota\delta\iota\acute{\alpha}$
- Για την ομάδα Β έχουμε: $\frac{10}{100} \cdot 50 = \frac{10 \cdot 50}{100} = \frac{500}{100} = 5 \; \pi\alpha\iota\delta\iota\acute{\alpha}$

Έστω x παιδιά που υποστηρίζουν την ομάδα Δ. Οπότε τα παιδιά που υποστηρίζουν την ομάδα Γ θα είναι $x + 5$. Συνολικά τα παιδιά που υποστηρίζουν τις ομάδες Γ και Δ είναι 35 διότι τα παιδια που υποστηρίζουν τις ομάδες Α και Β είναι συνολικά 15. Δημιουργούμε την εξίσωση:

$$x + x + 5 = 35$$
$$2x = 30$$
$$x = \frac{30}{2} = 15$$

Οπότε τα παιδιά που υποστηρίζουν την ομάδα Δ είναι 15 και τα παιδιά που υποστηρίζουν την ομάδα Γ είναι 20.

b) Για να βρούμε το ποσοστό των παιδιών που υποστηρίζουν την ομάδα Γ και την ομάδα Δ μετατρέπουμε τα κλάσματα $\frac{15}{50}$ $\kappa\alpha\iota$ $\frac{20}{50}$ αντίστοιχα,σε δεκαδικά με παρανομαστή το 100. Οπότε παίρνουμε:

- Το ποσοστό των παιδιών που υποστηρίζουν την ομάδα Δ αντιστοιχει σε:

$$\frac{15}{50} = \frac{15 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{30}{100} \text{ ή } 30\%$$

- Το ποσοστό των παιδιών που υποστηρίζουν την ομάδα Γ αντιστοιχει σε:

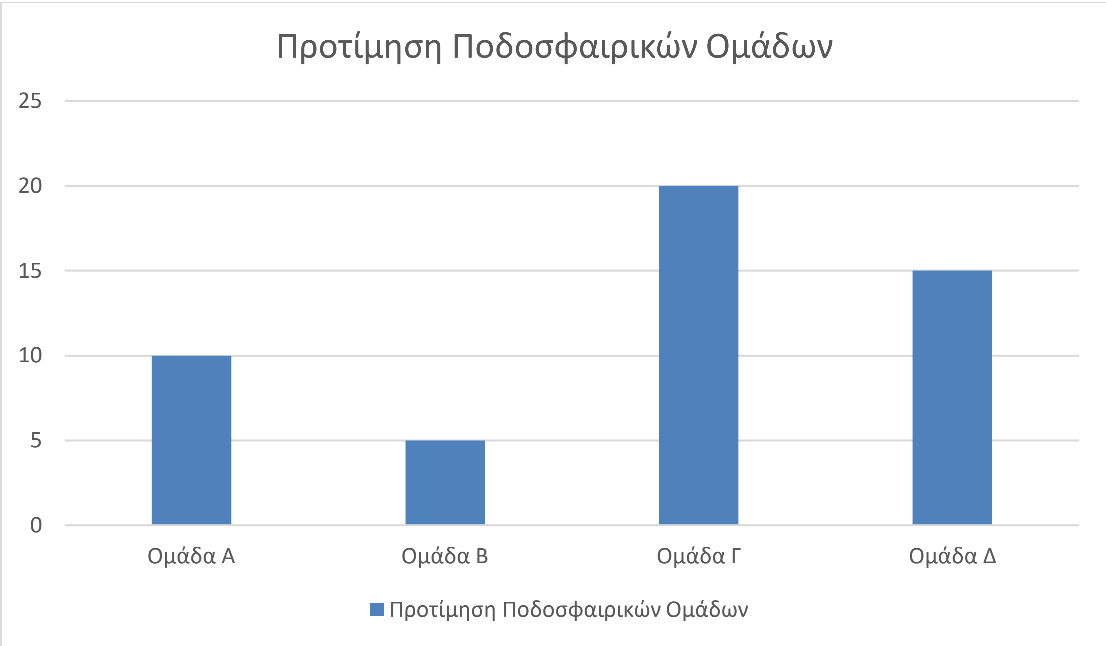
$$\frac{20}{50} = \frac{20 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{40}{100} \text{ ή } 40\%$$

Τελικά την ομάδα Α υποστηρίζει το 20%, την ομάδα Β το 10%, την ομάδα Γ το 40% και την ομάδα Δ το 30%.

c) Δημιουργούμε τον ακόλουθο πίνακα των δεδομένων ως ακολούθως:

Ποδοσφαιρική ομάδα	Πλήθος μαθητών
Α	10
Β	5
Γ	20
Δ	15

Στον οριζόντιο άξονα του ραβδογράμματος τοποθετούμε τις ποδοσφαιρικές ομάδες προτίμησης και στον κατακόρυφο άξονα το πλήθος των μαθητών που τις υποστηρίζουν. Το ραβδόγραμμα έχει την ακόλουθη μορφή:



Άσκηση 4 – Λύση

a) Από τα δεδομένα του χρονογράμματος παρατηρούμε ότι το έτος 2013 από την ισπανία αφίχθησαν στην Ελλάδα 350.000 τουρίστες. Το έτος 2014 αυξήθηκαν σε 400.000 τουρίστες, οπότε η αύξηση των αφίξεων αντιστοιχεί σε 50.000 τουρίστες. Για να βρούμε το ποσοστό της αύξησης θεωρούμε αρχική τιμή τους 350.000 τουρίστες και δημιουργούμε τον ακόλουθο πίνακα των αναλόγων ποσών:

	Έτος 2013	Αύξηση στο Έτος 2014
Αριθμός τουριστών	350.000	50.000
Ποσοστό	100	x

Σχηματίζουμε την εξίσωση:

$$350.000x = 50.000 \cdot 100$$
$$350.000x = 50.000 \cdot 100$$
$$350.000x = 5.000.000$$
$$x = \frac{5.000.000}{350.000} \cong 14{,}3\% \text{ με προσέγγιση δεκάτου.}$$

b) Από το χρονόγραμμα παρατηρούμε ότι:

- Το έτος 2010 αφίχθησαν από την Ιταλία 200.000 τουρίστες
- Το έτος 2011 αφίχθησαν από την Ιταλία 300.000 τουρίστες
- Το έτος 2012 αφίχθησαν από την Ιταλία 350.000 τουρίστες
- Το έτος 2013 αφίχθησαν από την Ιταλία 250.000 τουρίστες
- Το έτος 2014 αφίχθησαν από την Ιταλία 300.000 τουρίστες

Συνολικά για το χρονικό διάστημα 2010-2014 από την Ιταλία αφίχθησαν 1.400.000 τουρίστες.

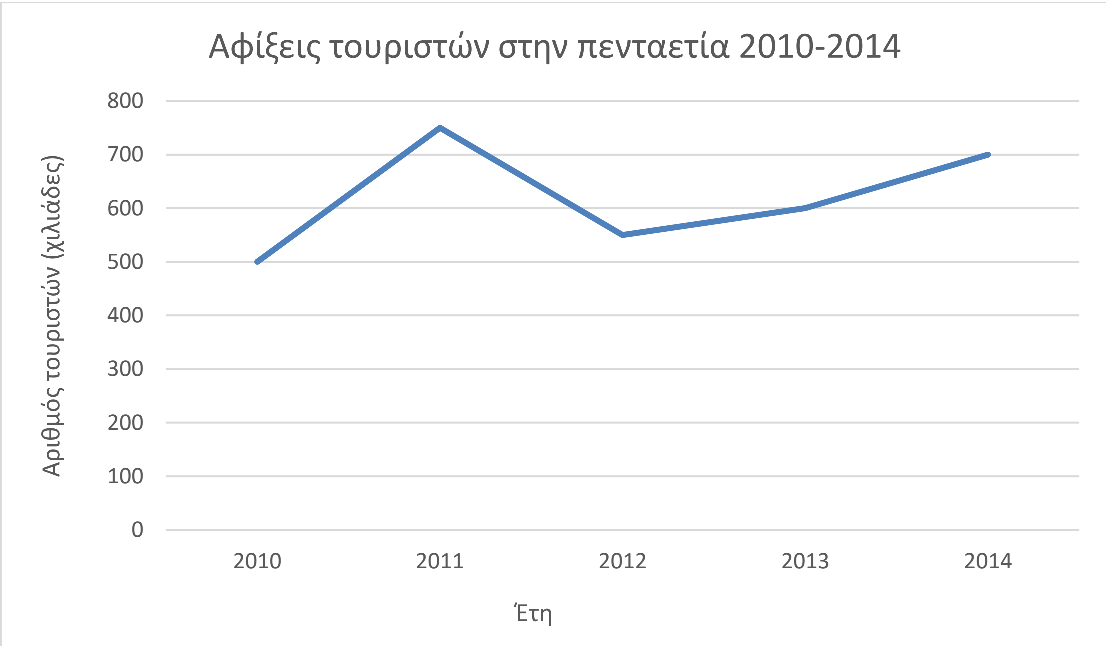
c) Θα βρούμε για κάθε έτος τον συνολικό αριθμό τουριστών που έφτασαν στην Ελλάδα ανεξαρτήτως προέλευσης, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα από το χρονόγραμμα.

- Για το έτος 2010: $200.000 + 300.000 = 500.000\ τουρίστες$
- Για το έτος 2011: $300.000 + 450.000 = 750.000\ τουρίστες$
- Για το έτος 2012: $200.000 + 350.000 = 550.000\ τουρίστες$
- Για το έτος 2013: $250.000 + 350.000 = 600.000\ τουρίστες$
- Για το έτος 2014: $300.000 + 400.000 = 700.000\ τουρίστες$

Δημιουργούμε τον ακόλουθο συγκεντρωτικό πίνακα των δεδομένων:

Έτος	Αριθμός τουριστών(χιλιάδες)
2010	500
2011	750
2012	550
2013	600
2014	700

Δημιουργούμε το χρονόγραμμα με οριζόντιο άξονα τα έτη και τον κατακόρυφο το πλήθος των τουριστών στην Ελλάδα. Το χρονόγραμμα έχει την ακόλουθη μορφή:



Άσκηση 5 – Λύση

Για να βρούμε το πλήθος των ψήφων που συγκέντρωσε ο υποψήφιος Γ χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\nu}{\alpha} = \frac{360^o}{\theta}$ και με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\frac{200}{\alpha} = \frac{360^o}{126^o}$$
$$360^o \cdot \alpha = 200 \cdot 126^o$$
$$360^o \cdot \alpha = 25.200^o$$
$$\alpha = \frac{25.200^o}{360^o} = 70\ \psi\acute{\eta}\varphi o\iota$$

Συνολικά οι υποψήφιοι Α και Γ συγκέντρωσαν $40 + 70 = 110\ \psi\acute{\eta}\varphi o\upsilon\varsigma$. Οπότε οι υποψήφιοι Β και Δ θα έχουν συνολικά 90 ψήφους. Έστω x οι ψήφοι του υποψήφιου Δ, τότε οι ψήφοι του υποψήφιου Β θα είναι $2x$. Δημιουργούμε την εξίσωση:

$$x + 2x = 90$$
$$3x = 90$$
$$x = \frac{90}{3} = 30$$

Οπότε ο υποψήφιος Δ συγκέντρωσε 30 ψήφους και ο υποψήφιος Β τους υπόλοιπους 60. Τα δεδομένα συγκεντώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Υποψήφιοι	Αριθμός ψήφων
A	40
B	60
Γ	70
Δ	30

Άσκηση 6 – Λύση

a) Οι υπάλληλοι που έλειψαν για 2 ημέρες είναι 18 και το ποσοστό που τους αντιστοιχεί είναι 45%. Για να βρούμε το μέγεθος του δείγματος x δημιουργούμε την εξίσωση:

$\frac{45}{100}x = 18$

$45x = 18 \cdot 100$

$x = \frac{1.800}{45} = 40\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda o\iota$

Για να βρούμε το πλήθος των υπαλλήλων που έλειψαν 1 ημέρα αφαιρούμε από το σύνολο των υπαλλήλων το σύνολο αυτών που είχαν $0{,}2{,}3\ \kappa\alpha\iota\ 4$ απουσίες. Δημιουργούμε την παράσταση:

$$40 - (4 + 18 + 6 + 2) = 40 - 30 = 10\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda o\iota$$

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

Ημέρες απουσίας	Αριθμός ατόμων
0	4
1	10
2	18
3	6
4	2
Σύνολο	40

b) i. Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι οι υπάλληλοι που έλειψαν από 1 έως 3 ημέρες είναι

$$10 + 18 = 28\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda o\iota$$

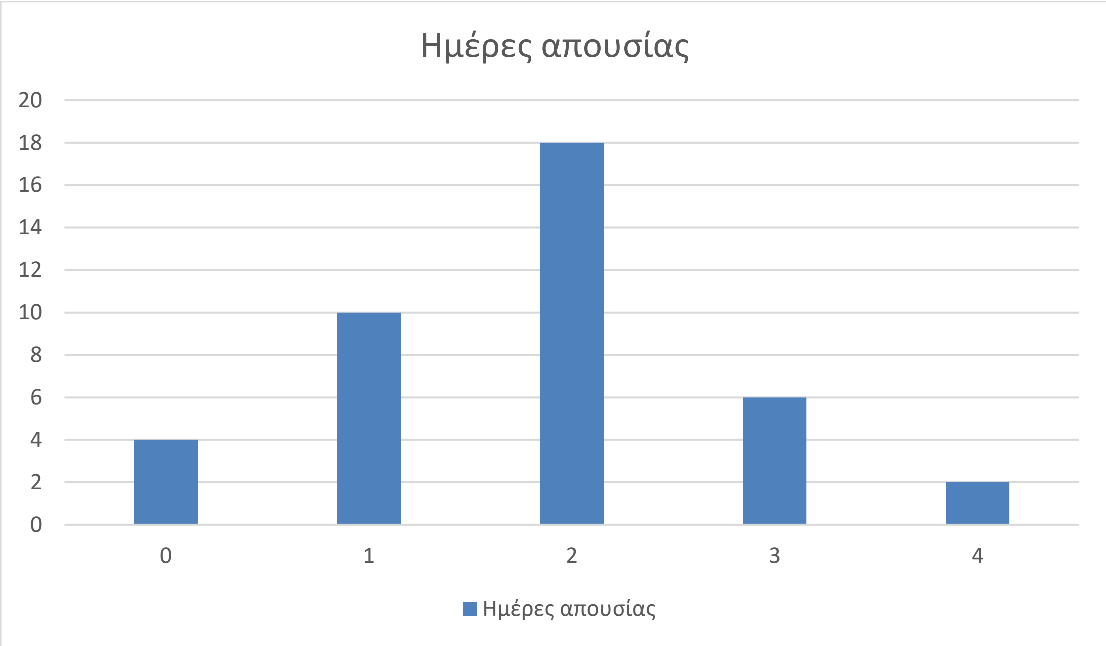
ii. Τουλάχιστον 3 ημέρες, δηλαδή 3 και 4 ημέρες απουσίας, έχουμε:

$$6 + 2 = 8\ \upsilon\pi\alpha\lambda\lambda\acute{\eta}\lambda o\upsilon\varsigma.$$

Για να βρούμε το ποσοστό που αντιστοιχεί στους υπαλλήλους αυτούς, μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{8}{40}$ σε δεκαδικό με παρανομαστή το 100 ως εξής:

$$\frac{8}{40} = \frac{8:8}{40:8} = \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{20}{100} \text{ ή } 20\%$$

c) i. Δημιουργούμε το ραβδόγραμμα με οριζόντιο άξονα τις ημέρες απουσίας και κατακόρυφο το πλήθος των υπαλλήλων. Το ραβδόγραμμα έχει την μορφή:



ii. Θα πρέπει να υπολογίσουμε πόσες μοίρες σε κάθε κυκλικό τομέα αντιστοιχούν στο πλήθος των ατόμων για κάθε ημέρα απουσίας.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\nu}{\alpha} = \frac{360^o}{\theta}$ όπου ν το μέγεθος του δείγματος, α το πλήθος των ατόμων σε κάθε επιλογή και θ η γωνία που θα αντιστοιχεί στις ημέρες απουσίας των υπαλλήλων, στον κυκλικό τομέα του κυκλικού διαγράμματος. Υπολογίζουμε τις αντίστοιχες γωνίες και παίρνουμε:

- Για τα άτομα που είχαν 0 ημέρες απουσίας:

$$\frac{\nu}{\alpha_1} = \frac{360^o}{\theta_1}$$

$$\frac{40}{4} = \frac{360^o}{\theta_1}$$

$$40 \cdot \theta_1 = 4 \cdot 360^o$$

$\theta_1 = \frac{1.440^o}{40} = 36^o$ και ποσοστό $\frac{4}{40} = 0{,}10$ ή 10%

- Για τα άτομα που είχαν 1 ημέρα απουσίας:

  $\frac{\nu}{\alpha_2} = \frac{360^o}{\theta_2}$

  $\frac{40}{10} = \frac{360^o}{\theta_2}$

  $40 \cdot \theta_2 = 10 \cdot 360^o$

  $\theta_2 = \frac{3.600^o}{40} = 90^o$ και ποσοστό $\frac{10}{40} = 0{,}25$ ή 25%

- Για τα άτομα που είχαν 2 ημέρες απουσίας:

  $\frac{\nu}{\alpha_3} = \frac{360^o}{\theta_3}$

  $\frac{40}{18} = \frac{360^o}{\theta_3}$

  $40 \cdot \theta_3 = 18 \cdot 360^o$

  $\theta_3 = \frac{6.480^o}{40} = 162^o$ και ποσοστό $\frac{18}{40} = 0{,}45$ ή 45%

- Για τα άτομα που είχαν 3 ημέρες απουσίας:

  $\frac{\nu}{\alpha_4} = \frac{360^o}{\theta_4}$

  $\frac{40}{6} = \frac{360^o}{\theta_4}$

  $40 \cdot \theta_4 = 6 \cdot 360^o$

  $\theta_4 = \frac{2.160^o}{40} = 54^o$ και ποσοστό $\frac{6}{40} = 0{,}15$ ή 15%

- Για τα άτομα που είχαν 4 ημέρες απουσίας:

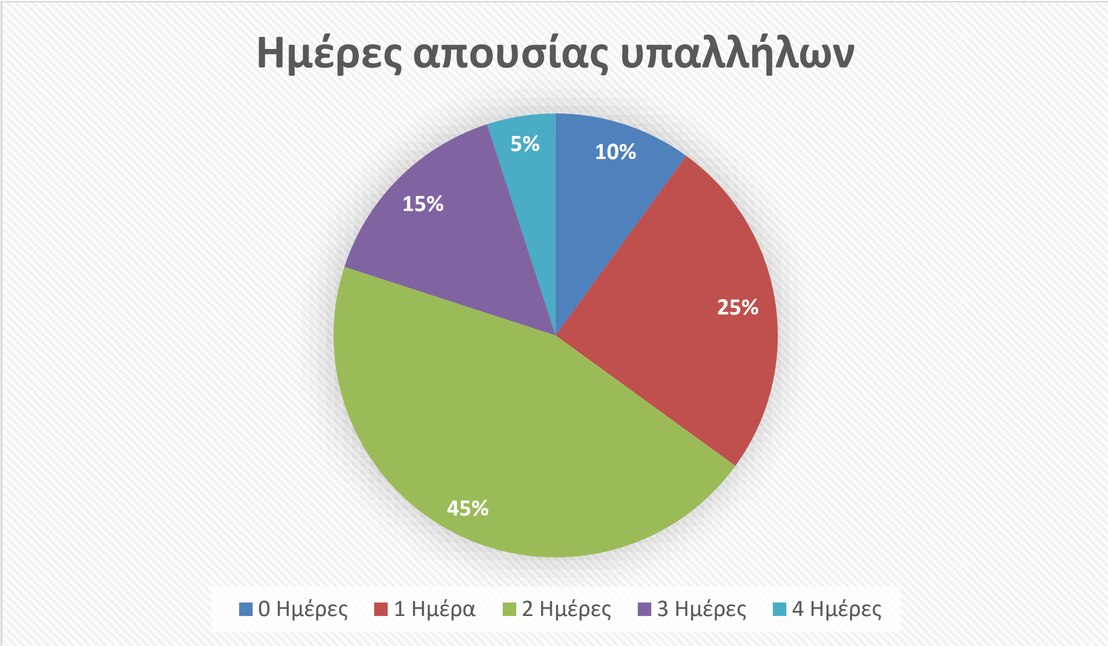
  $\frac{\nu}{\alpha_5} = \frac{360^o}{\theta_5}$

  $\frac{40}{2} = \frac{360^o}{\theta_5}$

  $40 \cdot \theta_5 = 2 \cdot 360^o$

  $\theta_5 = \frac{720^o}{40} = 18^o$ και ποσοστό $\frac{2}{40} = 0{,}05$ ή 5%

Το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα είναι το ακόλουθο:



4.5. Μέση τιμή - Διάμεσος

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 – Απάντηση

Για να βρούμε τη μέση τιμή ενός δείγματος διαιρούμε το άθροισμα των παρατηρήσεων με το πλήθος των παρατηρήσεων. Από τα δεδομένα παίρνουμε: $\textit{μέση τιμή} = \frac{240}{40} = 60$

Οπότε σωστή επιλογή η (i).

Ερώτηση Κατανόησης 2 – Απάντηση

Το άθροισμα των παρατηρήσεων ισούται με το γινόμενο του πλήθους των παρατηρήσεων και της μέσης τιμής. Οπότε έχουμε: $\textit{Άθροισμα παρατηρήσεων} = 56{,}7 \cdot 10 = 567$

Οπότε σωστή επιλογή (ii).

Ερώτηση Κατανόησης 3 – Απάντηση

i. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 6 οπότε η διάμεσος θα ισούται με την μέση τιμή των 2 μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδη της 3ης και 4ης παρατήρησης. Έστω x η 3η παρατήρηση, τότε έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$26 = \frac{x+27}{2}$$
$$x + 27 = 2 \cdot 26$$
$$x = 52 - 27$$
$$x = 25$$

Οπότε σωστή επιλογή η (i).

ii. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 6 οπότε η διάμεσος θα ισούται με την μέση τιμή των 2 μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδη της 3ης και 4ης παρατήρησης. Έστω ότι συμβολίζουμε με x την 3η παρατήρηση, τότε έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$27 = \frac{x+27}{2}$$
$$x + 27 = 2 \cdot 27$$
$$x = 54 - 27$$
$$x = 27$$

Οπότε σωστή επιλογή η (iii).

iii. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 6 οπότε η διάμεσος θα ισούται με την μέση τιμή των 2 μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδη της 3ης και 4ης παρατήρησης. Έστω x η 3η παρατήρηση, τότε έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$25 = \frac{x+27}{2}$$
$$x + 27 = 2 \cdot 25$$
$$x = 50 - 27$$
$$x = 23$$

Οπότε σωστή επιλογή η (iv).

Ερώτηση Κατανόησης 4 - Απάντηση

Από τον τύπο $μέση\ τιμή = \frac{άθροισμα\ παρατηρήσεων}{πλήθος\ παρατηρήσεων}$ για να βρούμε το πλήθος των παρατηρήσεων αρκει να διαρέσουμε το άθροισμα των παρατηρήσεων με τη μέση τιμή.

Οπότε παίρνουμε:

$$πλήθος\ παρατηρήσεων = \frac{120}{5} = 24$$

Οπότε σωστή επιλογή η (i).

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

Σε κάθε υποερώτημα για να βρούμε τη μέση τιμή θα χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο:

$μέση\ τιμή = \frac{άθροισμα\ παρατηρήσεων}{πλήθος\ παρατηρήσεων}$. Οπότε παίρνουμε ανά περίπτωση:

a) $μέση\ τιμή = \frac{8+7+6+(-3)+2+9+10+33}{8} = \frac{72}{8} = 9$

b) $μέση\ τιμή = \frac{3+4+5+6+4+8+10+8+6}{9} = \frac{54}{9} = 6$

c) $μέση\ τιμή = \frac{2+14+5+11+10+6+8}{7} = \frac{56}{7} = 8$

d) $μέση\ τιμή = \frac{-5+4+5+(-3)+3+7+3+(-2)}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Άσκηση 2 – Λύση

Σε κάθε υποερώτημα θα αναγράφουμε τις παρατηρήσεις από τη μικρότερη προς την μεγαλύτερη(σειρά μεγέθους). Οπότε έχουμε:

a) $-3, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 33$
Διαγράφοντας την πρώτη και τελευταία παρατήρηση παίρνουμε: $\cancel{-3}, 2, 6, 7, 8, 9, 10, \cancel{33}$
Συνεχίζουμε με την ίδια μέθοδο διαγράφοντας μία παρατήρηση αριστερά και μια δεξιά και καταλήγουμε στην σειρά: $\cancel{-3, 2, 6}, 7, 8, \cancel{9, 10}, \cancel{33.}$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο οπότε η διάμεσος θα προκύψει από την μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή:

$$διάμεσος = \frac{7+8}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

b) $3, 4, 4, 5, 6, 6, 8, 8, 10$
Όμοια με την περίπτωση (a) καταλήγουμε στην σειρά: $\cancel{3, 4, 4, 5}, 6, \cancel{6, 8, 8, 10}$
Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό οπότε η διάμεσος είναι ακριβώς η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή:

$$διάμεσος = 6$$

c) $2, 5, 6, 8, 10, 11, 14$
Όμοια με τις περίπτωσεις (a) και (b) καταλήγουμε στην σειρά: $\cancel{2, 5, 6}, 8, \cancel{10, 11, 14}$
Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό οπότε η διάμεσος είναι ακριβώς η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή:

$$διάμεσος = 8$$

d) $-5, -3, -2, 3, 3, 4, 5, 7$
Όμοια με τις περίπτωσεις (a), (b) και (c) καταλήγουμε στην σειρά: $\cancel{-5, -3, -2}, 3, 3, \cancel{4, 5, 7}$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο οπότε η διάμεσος θα προκύψει από την μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή:

$$διάμεσος = \frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Άσκηση 3 – Λύση

a) Με τη χρήση του ορισμού της μέσης τιμής : $μέση\ τιμή = \frac{άθροισμα\ παρατηρήσεων}{πλήθος\ παρατηρήσεων}$ παίρνουμε:

$$μέση\ τιμή = \frac{8+12+16+24+9+10+5+28}{8} = \frac{112}{8} = 14$$

b) Αναγράφουμε τις παρατηρήσεις από τη μικρότερη προς την μεγαλύτερη(σειρά μεγέθους).
Οπότε έχουμε: $5, 8, 9, 10, 12, 16, 24, 28$
Διαγράφοντας την πρώτη και τελευταία παρατήρηση παίρνουμε:

$$\cancel{5}, 8, 9, 10, 12, 16, 24, \cancel{28}$$

Συνεχίζουμε με την ίδια μέθοδο διαγράφοντας μία παρατήρηση αριστερά και μια δεξιά και καταλήγουμε στην σειρά:

$$\cancel{5, 8, 9}, 10, 12, \cancel{16, 24, 28}$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο οπότε η διάμεσος θα προκύψει από την μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή:

$$διάμεσος = \frac{10+12}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

c) i. Έστω x ο αριθμός που προσθέσαμε, άρα αλλάζει το πλήθος του δείγματος και πλέον αποτελείται από 9 παρατηρήσεις. Οπότε η νέα μέση τιμή θα δίνεται με την χρήση του ορισμού ως ακολούθως:

$$15 = \frac{8+12+16+24+9+10+5+28+x}{9} = \frac{112+x}{9}$$

$$112 + x = 9 \cdot 15$$

$$x = 135 - 112 = 23$$

ii. Η νέα αναγραφή σε σειρά μεγέθους με την προσθήκη της επιπλέον παρατήρησης είναι:

$$5, 8, 9, 10, 12, 16, 23, 24, 28$$

Με διαγραφή των παρατηρήσεων μία αριστερά και μία δεξιά και επαναλαμβάνοντας την διαδικασία καταλήγουμε:

$$\cancel{5, 8, 9, 10,} 12, \cancel{16, 23, 24, 28}$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό οπότε η διάμεσος είναι ακριβώς η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή: $διάμεσος = 12$

Άσκηση 4 – Λύση

a) Με τη χρήση του ορισμού της μέσης τιμής : $μέση\ τιμή = \frac{άθροισμα\ παρατηρήσεων}{πλήθος\ παρατηρήσεων}$ παίρνουμε:

$$6 = \frac{1+4+7+12+\alpha+2\alpha+\alpha-2}{7}$$
$$6 = \frac{22+4\alpha}{7}$$
$$22 + 4\alpha = 6 \cdot 7$$
$$4\alpha = 42 - 22$$
$$4\alpha = 20$$
$$\alpha = \frac{20}{4} = 5$$

b) Για $\alpha = 5$ οι παρατηρήσεις είναι: $1, 4, 7, 12, 5, 10, 3$
Αναγράφουμε τις τιμές των παρατηρήσεων σε σειρά μεγέθους και παίρνουμε:

$$1, 3, 4, 5, 7, 10, 12$$

Με διαγραφή των παρατηρήσεων μία αριστερά και μία δεξιά και επαναλαμβάνοντας την διαδικασία καταλήγουμε:

$$\cancel{1,3,4}, 5, \cancel{7,10,12}$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό οπότε η διάμεσος είναι ακριβώς η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή: $διάμεσος = 5$

Άσκηση 5 – Λύση

a) Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Από τον ορισμό της μέσης τιμής
$μέση\ τιμή = \frac{άθροισμα\ παρατηρήσεων}{πλήθος\ παρατηρήσεων}$ και με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\frac{2+10+5+8+14+11+x}{7} = 8$$
$$\frac{50+x}{7} = 8$$
$50 + x = 8 \cdot 7$ άρα $x = 56 - 50 = 6$

b) Αναγράφουμε τις τιμές των παρατηρήσεων σε σειρά μεγέθους και παίρνουμε:

$$2, 5, 6, 8, 10, 11, 14$$

Με διαγραφή των παρατηρήσεων μία αριστερά και μία δεξιά και επαναλαμβάνοντας την διαδικασία καταλήγουμε: $\cancel{2,5,6}, 8, \cancel{10,11,14}$
Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό οπότε η διάμεσος είναι ακριβώς η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή: $διάμεσος = 8$

Άσκηση 6 – Λύση

a) Από τον ορισμό της μέσης τιμής, έχουμε το ακόλουθο:

$$μέση\ τιμή = \frac{άθροισμα\ παρατηρήσεων}{πλήθος\ παρατηρήσεων}$$

Με αντικατάσταση λαμβάνουμε ότι:

$$μέση\ τιμή = \frac{7 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 + 5 + 0}{25} = \frac{50}{25} = 2$$

Η μέση τιμή του πλήθους των παιδιών για τις 25 οικογένειες είναι 2.

b) Αναγράφουμε τις τιμές των παρατηρήσεων σε σειρά μεγέθους ως εξής:

$$0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5$$

Με διαγραφή των παρατηρήσεων μία αριστερά και μία δεξιά και επαναλαμβάνοντας την διαδικασία καταλήγουμε: $\cancel{0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2,} 2, \cancel{2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5}$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό οπότε η διάμεσος είναι ακριβώς η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή: $διάμεσος = 2$

Άσκηση 7 – Λύση

a) Θα πρέπει ο συνολικός αριθμός των δωματίων να ισούται με το πλήθος τους, δηλαδή 50 δωμάτια. Δημιουργούμε την εξίσωση ως προς την μεταβλητή α ως εξής:

$$12 + 8 + \alpha + 18 + \alpha + 2 = 50$$
$$2\alpha + 40 = 50$$
$$2\alpha = 10$$
$$\alpha = \frac{10}{2} = 5$$

Ο πίνακας των δεδομένων θα είναι:

Αριθμός κρεβατιών	Αριθμός δωματίων
1	12
2	8
3	5
4	18
5	7
Σύνολο	50

b) Αρχικά θα υπολογίσουμε τον συνολικό αριθμό των κρεβατιών του ξενοδοχείου. Δημιουργούμε την παράσταση:

$$1 \cdot 12 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 18 + 5 \cdot 7 = 12 + 16 + 15 + 72 + 35 = 150\ κρεβάτια$$

Η μέση τιμή των κρεβατιών του ξενοδοχείου θα ισούται με του πηλίκο του συνόλου των κρεβατιών προς το πλήθος των δωματίων του ξενοδοχείου. Οπότε έχουμε:

$$μέση\ τιμή = \frac{150}{50} = 3\ κρεβάτια\ ανά\ δωμάτιο$$

c) Αναγράφουμε τις τιμές των 50 παρατηρήσεων σε σειρά μεγέθους ως εξής:

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, \\ 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5$$

Με διαγραφή των παρατηρήσεων μία αριστερά και μία δεξιά και επαναλαμβάνοντας την διαδικασία καταλήγουμε:

$$\cancel{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3}, 3, 4,$$

$$\cancel{4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5}$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο οπότε η διάμεσος θα προκύψει από την μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή:

$$διάμεσος = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

d) i. Τουλάχιστον 3 κρεβάτια, δηλαδή 3 ή 4 ή 5 κρεβάτια, παρατηρώντας τον πίνακα έχουν 30 δωμάτια. Μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{30}{50}$ σε δεκαδικό με παρανομαστή το 100 και έχουμε:

$$\frac{30}{50} = \frac{30 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{60}{100} \text{ ή } 60\% \text{ των δωματίων.}$$

ii. Το πολύ 3 κρεβάτια, δηλαδή 1 ή 2 ή 3 κρεβάτια, παρατηρώντας τον πίνακα έχουν 25 δωμάτια. Μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{25}{50}$ σε δεκαδικό με παρανομαστή το 100 και έχουμε:

$$\frac{25}{50} = \frac{25 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{50}{100} \text{ ή } 50\% \text{ των δωματίων}$$

Άσκηση 8 – Λύση

Από τον ορισμό της μέσης τιμής: $μέση\ τιμή = \frac{άθροισμα\ παρατηρήσεων}{πλήθος\ παρατηρήσεων}$, μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των παρατηρήσεων αν πολλαπλασιάσουμε το πλήθος των παρατηρήσεων με την μέση τιμή. Οπότε υπολογίζουμε το άθροισμα των βαθμών των αγοριών και των κοριτσιών ως εξής:

- Το άθροισμα των βαθμών των αγοριών είναι: $11 \cdot 13 = 143$
- Το άθροισμα των βαθμών των κοριτσιών είναι: $9 \cdot 12 = 108$

Το συνολικό άθροισμα των βαθμών της τάξης είναι: $143 + 108 = 251$ καθώς και το πλήθος των μαθητών είναι αθροιστικά 20. Η μέση τιμή της τάξης στο διαγώνισμα θα δίνεται από τον τύπο:

$$μέση\ τιμή = \frac{251}{20} = 12{,}55$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 – Λύση

Σε κάθε υποερώτημα για να βρούμε τη μέση τιμή θα χρησιμοποιούμε τον τύπο $μέση\ τιμή = \frac{άθροισμα\ παρατηρήσεων}{πλήθος\ παρατηρήσεων}$. Οπότε παίρνουμε ανά περίπτωση:

a) $μέση\ τιμή = \frac{167+174+170+167+165+174+166+171+169+172}{10} = \frac{1.695}{10} = 169{,}5$

b) $μέση\ τιμή = \frac{-4+(-5)+6+8+2+(-3)+0+4+3+(-7)+5+3}{12} = \frac{12}{12} = 1$

c) $μέση\ τιμή = \frac{0+1+2+50+98+99+100}{7} = \frac{350}{7} = 50$

d) $μέση\ τιμή = \frac{16+18+14+18+16+14}{6} = \frac{96}{6} = 16$

Άσκηση 2 – Λύση

Σε κάθε υποερώτημα θα αναγράφουμε τις παρατηρήσεις από τη μικρότερη προς την μεγαλύτερη(σειρά μεγέθους). Οπότε έχουμε:

a) $165, 166, 167, 167, 169, 170, 171, 172, 174, 174$
Διαγράφοντας την πρώτη και τελευταία παρατήρηση παίρνουμε:
$\cancel{165}, 166, 167, 167, 169, 170, 171, 172, 174, \cancel{174}$

Συνεχίζουμε με την ίδια μέθοδο διαγράφοντας μία παρατήρηση αριστερά και μια δεξιά και καταλήγουμε στην σειρά: $\cancel{165, 166, 167, 167}, 169, 170, \cancel{171, 172, 174, 174}$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο οπότε η διάμεσος θα προκύψει από την μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή:

$$διάμεσος = \frac{169 + 170}{2} = \frac{339}{2} = 169{,}5$$

b) -7, -5, -4, -3, 0, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 8
Όμοια με την περίπτωση (a) καταλήγουμε στην σειρά: ~~-7, -5, -4, -3, 0~~, 2, 3~~, 3, 4, 5, 6, 8~~

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο οπότε η διάμεσος θα προκύψει από την μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή:

$$διάμεσος = \frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

c) $0, 1, 2, 50, 98, 99, 100$

Όμοια με τις περίπτωσεις (a) και (b) καταλήγουμε στην σειρά: $\cancel{0, 1, 2}, 50, \cancel{98, 99, 100}$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό οπότε η διάμεσος είναι ακριβώς η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή: $διάμεσος = 50$

d) $14, 14, 16, 16, 18, 18$
Όμοια με τις περίπτωσεις (a), (b) και (c) καταλήγουμε στην σειρά: $\cancel{14, 14}, 16, 16, \cancel{18, 18}$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο οπότε η διάμεσος θα προκύψει από την μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή: $διάμεσος = \frac{16+16}{2} = \frac{32}{2} = 16$

Άσκηση 3 – Λύση

Υπολογίζουμε το συνολικό άθροισμα των εννέα αριθμών αν πολλαπλασιάσουμε την μέση τιμή τους με το πλήθος τους. Δηλαδή θα ισχύει:

$$\acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu = 9 \cdot 4 = 36$$

Έστω x ο αριθμός που προστίθεται. Το πλήθος των παρατηρήσεων πλέον είναι 10 και το αθροισμά τους συνολικά είναι: $36 + x$

Από τον ορισμό της μέσης τιμής και με αντικατάσταση παίρνουμε την εξίσωση:

$$\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta} = \frac{\acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu}{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu}$$

$$5 = \frac{36+x}{10} \quad \text{άρα} \quad 36 + x = 5 \cdot 10 \quad \text{δηλαδή} \quad x = 50 - 36 = 14$$

Άσκηση 4 – Λύση

a) Έστω x ο πρώτος αριθμός, τότε ο δεύτερος θα είναι $2x$. Από τον ορισμό της μέσης τιμής δημιουργούμε την εξίσωση:

$$\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta} = \frac{\acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu}{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu}$$

$$5 = \frac{3+4+5+6+11+x+2x}{7}$$

$$\frac{29+3x}{7} = 5$$

$$29 + 3x = 5 \cdot 7$$

$$3x = 35 - 29 \quad \text{άρα} \quad 3x = 6 \quad \text{δηλαδή} \quad x = \frac{6}{3} = 2$$

Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι το 2 και το 4.

b) Αναγράφουμε σε σειρά μεγέθους τους αριθμούς ως εξής: $2, 3, 4, 4, 5, 6, 11$

Διαγράφοντας κάθε φορά έναν όρο αριστερά και έναν δεξιά, επαναλαμβάνοντας την διαδικασία, καταλήγουμε στη σειρά: $\cancel{2, 3, 4}, 4, \cancel{5, 6, 11}$
Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό οπότε η διάμεσος είναι ακριβώς η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή: $\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma = 4$

Άσκηση 5 – Λύση

a) Από τον ορισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$μέση\ τιμή = \frac{172 + 175 + 183 + 177 + 190 + 193 + 189 + 195}{8} = \frac{1.474}{8} = 184{,}25cm$$

b) Αναγράφουμε σε σειρά μεγέθους τα ύψη ως εξής: $172, 175, 177, 183, 189, 190, 193, 195$

Διαγράφοντας κάθε φορά έναν όρο αριστερά και έναν δεξιά, επαναλαμβάνοντας την διαδικασία, καταλήγουμε στη σειρά: $\cancel{172, 175, 177,} 183, 189, \cancel{190, 193, 195}$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο οπότε η διάμεσος θα προκύψει από την μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή:

$$διάμεσος = \frac{183 + 189}{2} = \frac{372}{2} = 186cm$$

c) Βρίσκουμε την νέα μέση τιμή ως ακολούθως:

$$μέση\ τιμή = \frac{172 + 175 + 183 + 177 + 190 + 193 + 189 + 198}{8} = \frac{1.477}{8} = 184{,}625cm$$

Άσκηση 6 – Λύση

a) Από τον ορισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$μέση\ τιμή = \frac{2{,}75 + 3{,}05 + 3{,}15 + 2{,}55 + 2{,}25 + 2{,}95 + 3{,}25 + 2{,}85}{8} = \frac{22{,}8}{8} = 2{,}85kg$$

b) Αναγράφουμε σε σειρά μεγέθους τα βάρη ως εξής:

$$2{,}25, 2{,}55, 2{,}75, 2{,}85, 2{,}95, 3{,}05, 3{,}15, 3{,}25$$

Διαγράφοντας κάθε φορά έναν όρο αριστερά και έναν δεξιά, επαναλαμβάνοντας την διαδικασία, καταλήγουμε στη σειρά: $\cancel{2{,}25, 2{,}55, 2{,}75}, 2{,}85, 2{,}95, \cancel{3{,}05, 3{,}15, 3{,}25}$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο οπότε η διάμεσος θα προκύψει από την μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή:

$$διάμεσος = \frac{2{,}85 + 2{,}95}{2} = \frac{5{,}8}{2} = 2{,}9\ kg$$

Άσκηση 7 – Λύση

a) Από τον ορισμό της μέσης τιμής για το τμήμα Α, έχουμε:

$$μέση\ τιμή = \frac{300 + 325 + 330 + 305 + 315 + 310 + 320 + 315}{8} = \frac{2.520}{8} = 315€$$

Αναγράφουμε τους μισθούς σε σειρά μεγέθους και παίρνουμε:

$$300, 305, 310, 315, 315, 320, 325, 330$$

Διαγράφοντας ανά έναν όρο από αριστερά και δεξιά και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία παίρνουμε:

$$\cancel{300, 305, 310}, 315, 315\cancel{, 320, 325, 330}$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο οπότε η διάμεσος θα προκύψει από την μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή:

$$διάμεσος = \frac{315 + 315}{2} = \frac{630}{2} = 315€$$

b) Από τον ορισμό της μέσης τιμής για το τμήμα Β, έχουμε:

$$μέση\ τιμή = \frac{310 + 250 + 290 + 340 + 270 + 330 + 310}{7} = \frac{2.100}{7} = 300€$$

Αναγράφουμε τους μισθούς σε σειρά μεγέθους και παίρνουμε:

$$250, 270, 290, 310, 310, 330, 340$$

Διαγράφοντας ανά έναν όρο από αριστερά και δεξιά και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία λαμβάνουμε ότι: $\cancel{250, 270, 290}, 310, \cancel{310, 330, 340}$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό οπότε η διάμεσος είναι ακριβώς η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή: $διάμεσος = 310€$

c) Το συνολικό άθροισμα των μισθών του τμήματος Α είναι 2.520€ και του τμήματος Β αντίστοιχα 2.100€. Αν θεωρούσαμε τα τμήματα ως ένα δείγμα με μέγεθος 15 άτομα τότε η μέση τιμή των μισθών θα ήταν το συνολικό αθροισμά τους προς το πλήθος των υπαλλήλων. Η μέση τιμή και των δύο τμημάτων μαζί θα είναι ίση με:

$$μέση\ τιμή = \frac{2.520 + 2.100}{15} = \frac{4.620}{15} = 308€$$

Αναγράφουμε και τους 15 μισθούς σε σειρά μεγέθους και έχουμε:

$$250, 270, 290, 300, 305, 310, 310, 310, 315, 315, 320, 325, 330, 330, 340$$

Διαγράφοντας ανά έναν όρο από αριστερά και δεξιά και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία παίρνουμε:

$$\cancel{250, 270, 290, 300, 305, 310, 310}, 310, \cancel{315, 315, 320, 325, 330, 330, 340}$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό οπότε η διάμεσος είναι ακριβώς η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή: $διάμεσος = 310€$

Άσκηση 8 – Λύση

a) Αρχικά υπολογίζουμε το συνολικό άθροισμα των υψών του δείγματος μεγέθους 7 ατόμων. Πολλαπλασιάζουμε την μέση τιμή του δείγματος με το πλήθος του δείγματος και το άθροισμα των υψών θα είναι:

$$άθροισμα\ υψών = 7 \cdot 173 = 1.211\ cm$$

Η αποχώρηση δύο ατόμων μείωσε το άθροισμα των υψών κατά $170cm\ και\ 166cm$, καθώς και το μέγεθος του δείγματος που πλέον αποτελείται από 5 άτομα. Υπολογίζουμε το νέο άθροισμα των υψών ως εξής:

$$άθροισμα\ υψών = 1.211 - 170 - 166 = 875cm$$

Η νέα μέση τιμή θα ισούται με: $μέση\ τιμή = \frac{875}{5} = 175cm$

b) Η προσθήκη ενός ατόμου αρχικά θα αυξήσει το μέγεθος του δείγματος κατά 1 και θα έχουμε πλέον 8 άτομα. Υπολογίζουμε το νέο άθροισμα των υψών που θα είναι ίσο με:

$$\acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \upsilon\psi\acute{\omega}\nu = 1.211 + 181 = 1.392cm$$

Η νέα μέση τιμή θα ισούται με: $\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta} = \frac{1.392}{8} = 174cm$

c) Το μέγεθος του δείγματος είναι αμετάβλητο αφού είχαμε την αποχώρηση ενός ατόμου και την προσθήκη ενός νέου. Αυτό που μεταβάλλεται είναι το άθροισμα των υψών με τον εξής τρόπο:

- Αρχικά το άθροισμα των υψών θα μειωθεί σε: $1.211 - 182 = 1.029cm$
- Τελικά το άθροισμα των υψών με την νέα προσθήκη είναι: $1.029 + 175 = 1.204cm$

Η νέα μέση τιμή θα ισούται με: $\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta} = \frac{1.204}{7} = 172cm$

d) Έστω x το ύψος σε εκατοστά του ατόμου που προστέθηκε. Το νέο άθροισμα των υψών θα είναι: $1.211 + x$

Το μέγεθος του δείγματος πλέον είναι 8 άτομα, οπότε από τον ορισμό της μέσης τιμής λαμβάνουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$176 = \frac{1.211+x}{8}$$

$$1.211 + x = 8 \cdot 176$$

$$1.211 + x = 1.408$$

$$x = 1.408 - 1.211 = 197cm$$

e) Το άθροισμα των υψών των τριών ατόμων θα είναι το γινόμενο της μέσης τιμής των υψών τους το πλήθος τους. Οπότε έχουμε:

$$\acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \upsilon\psi\acute{\omega}\nu\ \tau\omega\nu\ \tau\rho\iota\acute{\omega}\nu\ \alpha\tau\acute{o}\mu\omega\nu = 3 \cdot 163 = 489cm$$

Το συνολικό άθροισμα των υψών και για τα 10 άτομα θα είναι:

$$\acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \upsilon\psi\acute{\omega}\nu = 1.211 + 489 = 1700cm$$

Η νέα μέση τιμή θα ισούται με: $\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta} = \frac{1.700}{10} = 170cm$

Γιατί επιλέγω Τετράδιο Σπουδής;

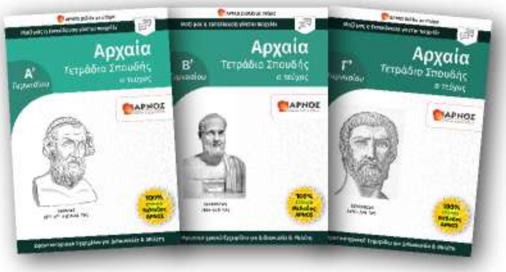
- Είναι απαραίτητο διδακτικό εργαλείο βασισμένο στους στόχους του μαθήματος και τον τρόπο Υλοποίησής του.
- Σε αυτό βρίσκεται το υλικό Διδασκαλίας για τον Καθηγητή και Μελέτης για το Μαθητή.
- Το Τετράδιο Σπουδής σε συνδυασμό με το course οδηγούν το **Μαθητή** στην **Αυτομάθηση**.
- Είναι το Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο πραγματοποίησης της **online διδασκαλίας με φυσικό τρόπο**.
- Με αυτό **ενημερώνονται** άμεσα **οι γονείς** και **ελέγχουν την πρόοδο** του παιδιού τους.

Τετράδια Σπουδής για:

Γυμνάσιο

Μαθηματικά

Αρχαία



Γλώσσα

Φυσικά

13-15 ετών