ΑΡΝΟΣ βιβλία με στόχο!

Μαθηματικα Γενικής Παιδείας

Τετράδιο Σπουδής

Προετοιμασία για Πανελλήνιες - Πανεπιστήμιο

γ' Λυκείου

ΑΡΝΟΣ Online Education

АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛМОГОРОВ
1903-1987 ΜΧ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ & ΑΣΚΗΣΕΩΝ

100% επιτυχία **Μέθοδος ΑΡΝΟΣ**

Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο για Διδασκαλία & Μελέτη

Τετράδιο Σπουδής - Γιατί;

Το Τετράδιο Σπουδής ΑΡΝΟΣ είναι βασισμένο στη Μέθοδο ΑΡΝΟΣ, ένα σύστημα μάθησης με Στόχους – Υλοποίηση – Πιστοποίηση.
Βοηθάει το μαθητή να οικοδομήσει τη σκέψη του βήμα-βήμα, απλά και κατανοητά. Είναι Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο βάσει του οποίου γίνεται η διδασκαλία στο online μάθημα με «φυσικό» τρόπο. Ο δάσκαλος γράφει και υπογραμμίζει παράλληλα με το μαθητή.

Το Τετράδιο Σπουδής αποτελείται από:

- Οπτικοποιημένη Θεωρία με ροή & συνέχεια
- Ασκήσεις για Διδασκαλία και Εξάσκηση
- Συνδυαστικές και Επαναληπτικές Ασκήσεις
- Θέματα Προσομοίωσης Εξετάσεων

Πιστοποίηση Γνώσεων

Σε προγραμματισμένες ημερομηνίες διεξάγονται online ή/και δια ζώσης **Επαναληπτικά Τεστ Αξιολόγησης** στα οποία ο μαθητής πιστοποιεί και επαληθεύει τις γνώσεις του.

Για τους Γονείς

Πώς ο γονέας μπορεί να έχει εικόνα και εποπτεία στην πρόοδο του παιδιού του;
Το Τετράδιο Σπουδής είναι σχεδιασμένο με τέτοιον τρόπο για τη βήμα – βήμα εξάσκηση του μαθητή, μεταβαίνοντας με ασφάλεια από τα πιο απλά στα πιο σύνθετα. Επίσης, είναι ένας φυσικός τρόπος ο Γονέας να ελέγχει την πρόοδο του παιδιού του.

Πώς γίνεται η εποπτεία από το γονέα;

Σε κάθε μάθημα ελέγχει την ορθότητα των λύσεων, την κατανόηση και τη συμμετοχή του παιδιού στα μαθήματα.

Διδασκαλία στον ΑΡΝΟ σημαίνει:

- Απεριόριστη μελέτη με video lessons
- Αυτομάθηση στο App Arnos Learn
- Coaching εξατομικευμένο
- Μοτίβα Μάθησης και Εξάσκησης
- Κάθε Απορία για εμάς είναι Πρόκληση!

Μέθοδος ΑΡΝΟΣ

Η **Μέθοδος ΑΡΝΟΣ** οδηγεί κάθε μαθητή, ανεξαρτήτως γνώσεων ή επιπέδου, να μελετά από το επίπεδο όπου αισθάνεται άνετα, ώστε να διαμορφώσει γερές βάσεις για μάθηση.

Live Διδασκαλία Το online μάθημα γίνεται με φυσικό τρόπο, γιατί συνδυάζει την Τεχνολογία, το Πνεύμα, την Οργάνωση και την Εμπειρία.

Τετράδιο Σπουδής Είναι ο οδηγός για τη διδασκαλία του μαθήματος, την εξάσκηση του μαθητή και την πραγματοποίηση της online διδασκαλίας με Λόγο, Εικόνα και Παρατήρηση.

Καθηγητής Είναι ο σκηνοθέτης της διδακτικής πράξης, ο οποίος δρα σε ένα οργανωμένο εκπαιδευτικό οικοσύστημα με Στόχους, Μαθησιακό Πλάνο και Ευθύνη.

«Μέθοδος ΑΡΝΟΣ... το καταστάλαγμα μιας πορείας 35 ετών με εκπαιδευτικές και εκδοτικές επιτυχίες, με ταξίδια πολιτισμού, συμμετοχή σε Διεθνείς Εκθέσεις και αποτυχίες... μα, κυρίως, η παρακαταθήκη του ζευγολάτη πατέρα - Αρνού.»

Γιάννης Π. Κρόκος

ΑΡΝΟΣ
Online Education

Σολωμού 29, Αθήνα 210 38 22 157 | 210 38 22 495
arnos.gr | info@arnos.gr

Τετράδιο Σπουδής

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

Γ΄ Λυκείου

ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- Οδηγός για τη Διδασκαλία του Καθηγητή
- Οδηγός για τη Μελέτη του Μαθητή
- Διδασκαλία Online με φυσικό τρόπο
- Τόπος Εποπτείας Προόδου από το Γονέα
- Διδασκαλία με Πιστοποιημένους Καθηγητές ΑΡΝΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2022

ΑΡΝΟΣ
Online Education

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου

Λύσεις Τετραδίου Σπουδής

Συντακτική Ομάδα Κέντρου ΑΡΝΟΣ

Διευθυντής σειράς: Ιωάννης Π. Κρόκος

Συνεργάστηκαν: Γεώργιος Καραχάλιας

Βασίλειος Κ. Τσιλιβής

ΑΡΝΟΣ ONLINE EDUCATION

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

Μέρος Α. Στοιχεία Πιθανοτήτων & Στατιστικής

1ο Κεφάλαιο: Πιθανότητες

1.1. Πειράματα Τύχης, Δειγματικός Χώρος και Ενδεχόμενα……………………………………………4

1.2. Πιθανότητες: Ορισμοί και Εφαρμογές ………………………………………………………..14

1.3. Πιθανότητες και Πράξεις με Ενδεχόμενα ………………………………………………………27

1.4. Συνδυαστική & Πιθανότητες: Διατάξεις – Μεταθέσεις - Συνδυασμοί……………………47

2ο Κεφάλαιο: Στατιστική

2.1. Πληθυσμός - Δείγμα - Μεταβλητές …………………………………………………………………62

2.2. Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων ……………………………………………………………68

2.3. Μέτρα Θέσης και Μεταβλητότητας, Θηκόγραμμα, Συντελεστής Μεταβλητότητας……………………………………………………………………………………94

2.4. Κανονική Κατανομή και Εφαρμογές …………………………………………………………112

2.5. Πίνακες Συνάφειας και Ραβδογράμματα ……………………………………………………130

2.6. Σύγκριση Ποσοτικών Χαρακτηριστικών στις κατηγορίες ενός Ποιοτικού Χαρακτηριστικού ……………………………………………………………………………………156

2.7. Γραμμική Συσχέτιση Ποσοτικών Μεταβλητών και Διαγράμματα Διασποράς……….176

Κεφάλαιο 1 : Πιθανότητες

1.1. Πείραμα Τύχης, Δειγματικός χώρος και Ενδεχόμενα

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 - Λύση

Έχουμε ότι: $\Omega = \{ 0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{ x \in \Omega : x>2 \}$ και $B = \{ x \in \Omega :$ x είναι περιττός αριθμός $\}$.

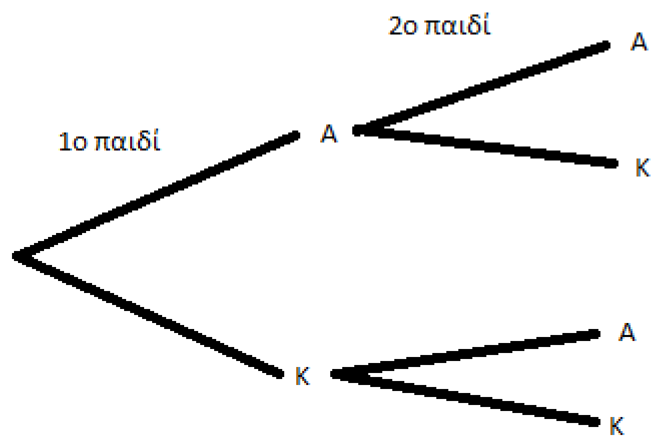
Καταλαβαίνουμε ότι: $A = \{ 3, 4\}$ και $B = \{1,3\}$.

a) $A \cap B = \{3\}$
b) $(A-B) \cup (B-A) = \{4\} \cup \{1\} = \{ 1, 4\}$
c) $A \cup B = \{1,3,4\}$
d) $A - B = \{4\}$
e) $B - A = \{1\}$
f) $(A \cup B)' = \{0,2\}$
g) $(A \cap B)' = \{ 0, 1, 2, 4\}$
h) $(B - A)' = \{ 0, 2, 3, 4\}$

Άσκηση 2 – Λύση

Α) Ο δειγματικός χώρος είναι: Ω = {ΑΑ,ΑΚ,ΚΑ,ΚΚ} .

Το δενδροδιάγραμμα απεικονίζεται ως ακολούθως:



Β) Α = {ΑΑ,ΑΚ,ΚΑ} , Β = {ΑΚ,ΚΚ} , Γ = {ΑΚ,ΚΑ,ΚΚ}

Α ∪ Β = Ω = {ΑΑ,ΑΚ,ΚΑ,ΚΚ} .

Α ∪ Γ = Ω = {ΑΑ,ΑΚ,ΚΑ,ΚΚ} .

Β∩Γ = {ΑΚ,ΚΚ}

Άσκηση 3 – Λύση

Ορίζουμε Τ = {Το σύνολο των παιδιών που παίζουν τέννις} και ομοίως

Μ = {Το σύνολο των παιδιών που παίζουν μπάσκετ}

I. Τ ∪ Μ
II. Τ – Μ
III. Τ ∩ Μ
IV. (Τ ∩ Μ)’
V. Μ ∪ Τ’

Άσκηση 4 – Λύση

Αιτιοκρατικό πείραμα

Είναι το πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών , κάτω από τις οποίες εκτελείται , καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα.

Για παράδειγμα, αν έχουμε ένα δοχείο με αποσταγμένο νερό σε θερμοκρασία 32 βαθμούς Κελσίου και το θερμάνουμε μέχρι η θερμοκρασία του να φτάσει τους 100 βαθμούς Κελσίου, τότε το νερό θα βράσει.

Πείραμα τύχης

Είναι το πείραμα στο οποίο δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνεται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Για παράδειγμα, ο χρόνος ζωής μιας λάμπας ή το πόσα e-mails δέχεται ένας εργαζόμενος, κατά τη διάρκεια της εργάσιμης ημέρας του.

I. Ο δειγματικός χώρος των φύλων της τράπουλας είναι:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K,A\}$$

II. **Ενδεχόμενο** ενός πειράματος τύχης :

Είναι το σύνολο που έχει ως στοιχεία τουλάχιστον ένα αποτέλεσμα του πειράματος.

Απλό ενδεχόμενο

Είναι το ενδεχόμενο περιέχει μόνο ένα στοιχείο.

Σύνθετο ενδεχόμενο

Είναι το ενδεχόμενο που περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία.

Έτσι, το ενδεχόμενο Β = { 1 } λέγεται απλό ενδεχόμενο, ενώ το Α = { 4, 5 } λέγεται σύνθετο ενδεχόμενο.

Βέβαιο ενδεχόμενο

Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο πραγματοποιείται πάντοτε. Γι'αυτο, λέμε ότι το Ω είναι βέβαιο ενδεχόμενο.

Αδύνατο ενδεχόμενο

Δεχόμαστε, ακόμα, ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο ∅ , το οποίο δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το ∅ είναι το αδύνατο ενδεχόμενο.

Ασυμβίβαστα ή ξένα ενδεχόμενα

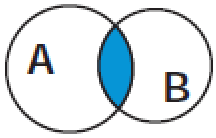
Δύο ενδεχόμενο Α και Β λέγονται **ασυμβίβαστα** ή **ξένα** , όταν $A \cap B = \emptyset$, δηλαδή όταν δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο.

Άσκηση 5 – Λύση

I. $A = \{3\}$ και $B = A = \{ 2,4,6 \}$. Άρα, $A \cap B = \emptyset$, τότε τα δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα ή ξένα.
II. Επειδή υπάρχει περίπτωση κάποιος που έχει γεννηθεί στην Ελλάδα να είναι καθολικός, τότε $A \cap B \neq \emptyset$
III. Επειδή υπάρχουν γυναίκες άνω των 30, που να είναι 30 χρόνια παντρεμένες, αυτό σημαίνει $A \cap B \neq \emptyset$
IV. $A \cap B = \emptyset$, τότε τα δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα ή ξένα.

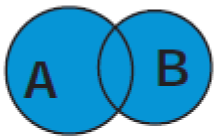
Άσκηση 6 – Λύση

Α) Α ∩ Β

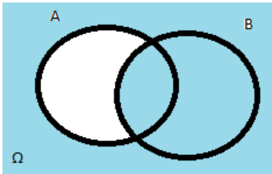


Ε) Α ∩ ∅ = ∅

Β) Α ∪ Β



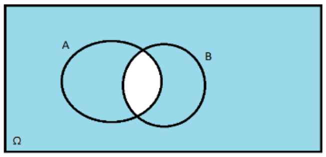
ΣΤ) Α' ∪ Β



Γ) Α ∪ ∅ = Α

Η) Α ∩ Ω = Α

Δ) Α ∩ Β'



Άσκηση 7 – Λύση

a) Α ∪ Β . Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α και Β.
b) Α ∩ Β . Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β.
c) Α ∩ Β' . Πραγματοποιείται μόνο το Α και όχι το Β.
d) Α' ∪ Β . Πραγματοποιείται το Β ή δεν πραγματοποιείται το Α.
e) Α' . Δεν πραγματοποιείται το Α .
f) (Α ∪ Β)' . Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β.
g) (Α-Β) ∪ (Β-Α) . Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα Α και Β.

Άσκηση 8 – Λύση

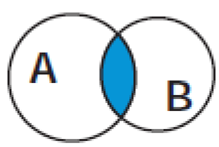
Α.	Β.	Γ.	Δ.	Ε.
ω ϵ (Β-Α)	ω ϵ (Α ∩ Β)	ω ϵ (Α ∪ Β)’	ω ϵ (Α ∩ Β’) ∪ (Α’ ∩ Β)	ω ϵ (Α ∪Β)

Άσκηση 9 – Λύση

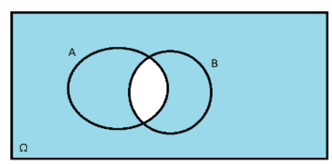
Ορίζουμε το ενδεχόμενο Α , αν ο καθηγητής είναι άνδρας και Β αν είναι μαθηματικός.

Συνεπώς, Α’ είναι το ενδεχόμενο ο καθηγητής να μην είναι άνδρας, δηλαδή να είναι γυναίκα και Β’ το ενδεχόμενο ο καθηγητής να μην είναι μαθηματικός.

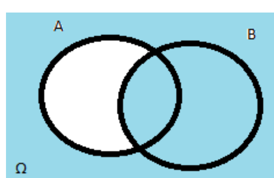
Α) Α ∩ Β



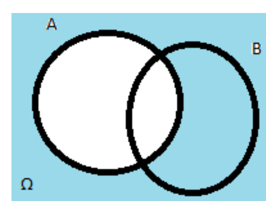
Γ) Α ∩ Β’



Β) Α’ ∪ Β

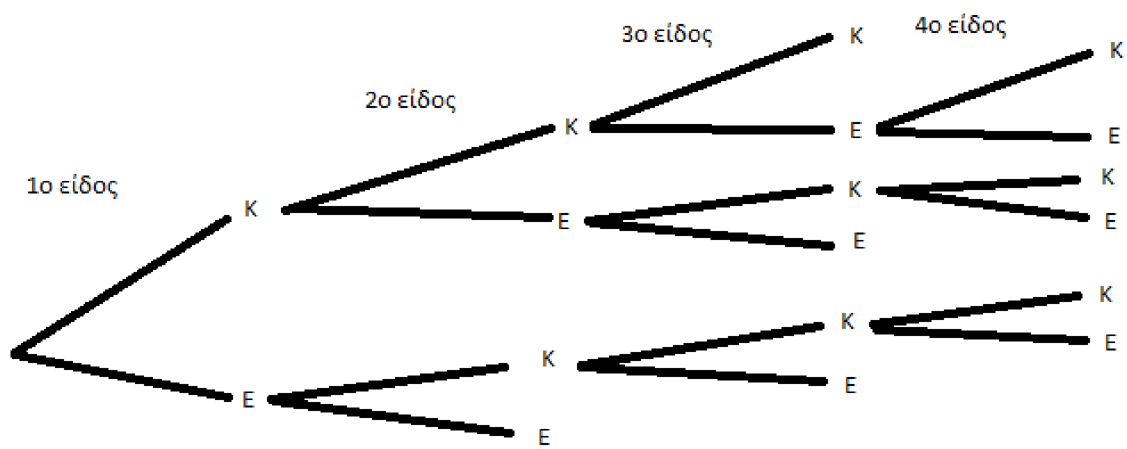


Δ) Α’ ∩ Β



Άσκηση 10 – Λύση

Α) Κατασκευάζουμε το ακόλουθο δενδροδιάγραμμα:



Με τη βοήθειά του, ο δειγματικός χώρος είναι:

Ω = {ΚΚΚ, ΚΚΕΚ, ΚΚΕΕ, ΚΕΚΚ, ΚΕΚΕ, ΚΕΕ, ΕΚΚΚ, ΕΚΚΕ, ΕΚΕ, ΕΕ}

Β) Α = {ΚΚΚ, ΚΚΕΚ,ΚΕΚΚ,ΕΚΚΚ}

Β = {ΚΚΚ, ΚΚΕΚ, ΚΚΕΕ, ΚΕΚΚ, ΚΕΚΕ, ΕΚΚΚ, ΕΚΚΕ}

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 - Λύση

i. Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων σε ένα πείραμα τύχης λέγεται δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης.
ii. Ένα ενδεχόμενο λέγεται σύνθετο όταν έχει περισσότερα από ένα στοιχεία.
iii. Ο δειγματικός χώρος Ω λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο.
iv. Το κενό σύνολο λέγεται αδύνατο ενδεχόμενο.
v. Αν η τομή δύο συνόλων ισούται με το κενό σύνολο, τότε τα ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα ή ξένα.

Άσκηση 2 – Λύση

Α) $A - B$

Β) $B - A$

Γ) $A \cup B$

Δ) $(A \cup B)'$

Ε) $(A \cup B) - (A \cap B)$

Άσκηση 3 – Λύση

Α) $A - B$

Β) $B - A$

Γ) $(A \cap B)'$

Δ) $(A - B) \cup (B - A)$

Άσκηση 4 – Λύση

Ορίζουμε το ενδεχόμενο Α = {Το σύνολο των ανθρώπων που έχουν αυτοκίνητο} και

Β = {Το σύνολο των ανθρώπων που έχουν μηχανάκι}.

Άρα, Α' = {Το σύνολο των ανθρώπων που δεν έχουν αυτοκίνητο} και ομοίως:

Β' = {Το σύνολο των ανθρώπων που δεν έχουν μηχανάκι}

Α) $A \cap B$ Γ) $A' \cap B'$ Ε) $A \cup B$

Β) $A \cup B$ Δ) $B - A$

Άσκηση 5 – Λύση

Ορίζουμε ως Ω = {Το σύνολο των θετικών διαιρετών του 48} .

Άρα:

$$\Omega = \{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$$

Άρα:

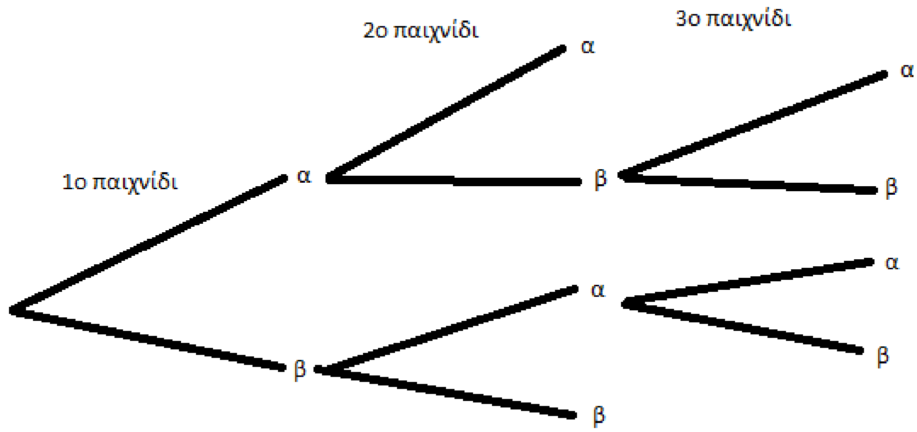
$$A = \{4,8,12,16,24,48\} \quad \text{και} \quad B = \{12,24,48\}$$

Άσκηση 6 – Λύση

$A = (A - B) \cup (A \cap B) \cup \emptyset$

Άσκηση 7 – Λύση

Κατασκευάζουμε το ακόλουθο δενδροδιάγραμμα:



Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

Ω = {αα , αβα , αββ , βαα , βαβ , ββ} .

1.2. Πιθανότητες: Ορισμοί και Εφαρμογές

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 - Λύση

Α) **Κλασικός ορισμός της Πιθανότητας**

Σε ένα πείραμα τύχης με ν ισοπίθανα αποτελέσματα, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α που περιέχει κ τέτοια αποτελέσματα είναι:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το A}}{\textbf{Πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\kappa}{\nu} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Β) **Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας**

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\kappa\}$ ένας δ.χ. ενός πειράματος τύχης. Σε κάθε ενδεχόμενο Α του Ω αποδίδουμε έναν πραγματικό αριθμό που ονομάζουμε πιθανότητα του Α και συμβολίζουμε με P(A), έτσι ώστε:

— $P(A) \geq 0$, για οποιοδήποτε Α του Ω

— $P(\Omega) = 1$

— Ικανοποιείται ο απλός προσθετικός νόμος: $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$ **.**

Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι οποιαδήποτε ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του Ω, τότε:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, γιατί όπως είδαμε και στην προηγούμενη παράγραφο, δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα, αν $A \cap B = \emptyset$ και τότε $P(A \cap B) = 0$.

Άσκηση 2 - Λύση

Α) Ορίζω ως Α το ενδεχόμενο το χαρτί να είναι 5. Τότε:

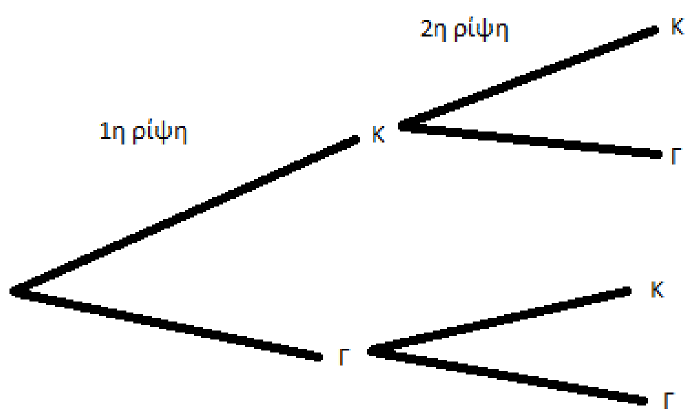
$$P(A) = \frac{\textit{Πλήθος} \text{ ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το A}}{\text{Πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Β) $P(A') = \frac{\textit{Πλήθος} \text{ ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το A}'}{\text{Πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}.$

Άσκηση 3 - Λύση

Σε μια τέτοια άσκηση θα μπορούσε να μας βοηθήσει στη σκέψη μας και το δενδροδιάγραμμα.

Ορίζουμε ως Κ το ενδεχόμενο να έρθει «κορώνα» και Γ το ενδεχόμενο να έρθει «γράμματα».



Άρα:

$$P(\Gamma) = \frac{\textit{Πλήθος} \text{ ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Γ}}{\text{Πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{1}{4}$$

Άσκηση 4 - Λύση

Το κουτί έχει συνολικά 10 + 15 + 5 + 10 = 40 μπάλες

i) Οι μαύρες μπάλες είναι 15. Άρα η πιθανότητα να είναι η μπάλα μαύρη $\frac{15}{40}$.

ii) Υπάρχουν 10 άσπρες και 15 μαύρες μπάλες. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{10+15}{40} = \frac{25}{40}$.

iii) Το να μην είναι η μπάλα ούτε κόκκινη ούτε πράσινη, σημαίνει ότι μπορεί να είναι άσπρη ή μαύρη.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{10+15}{40} = \frac{25}{40}$.

Άσκηση 5 - Λύση

Αν Λ, Π και Ν είναι τα ενδεχόμενα να κερδίσουν ο Λευτέρης, ο Παύλος και ο Νίκος αντιστοίχως, τότε

$P(Λ) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$, $P(Π) = \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$ και $P(N) = \frac{40}{100} = \frac{4}{10}$.

Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα έχουμε:

i) $P(Λ \cup Π) = P(Λ) + P(Π) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10}$ ή 50% .

ii) $P(Λ \cup N)' = 1 - P(Λ \cup N) = 1 - P(Λ) - P(N) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{4}{10} = \frac{3}{10}$ ή 30% .

Άσκηση 6 - Λύση

Από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι: $P(A \cap B) = \frac{11}{30}$.

Επειδή $P(A \cap B) \neq 0$, τότε τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

Άσκηση 7 - Λύση

$P(A \cup B) \le P(A) + P(B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \le P(A) + P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) \ge 0$) , που ισχύει .

Άσκηση 8 - Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο να έχει κάρτα D και B το ενδεχόμενο να έχει κάρτα V.

Έχουμε ότι:

$$P(A) = \frac{25}{100} \,, \quad P(B) = \frac{55}{100} \quad \text{και} \quad P(A \cap B) = \frac{15}{100}$$

Από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι: $P(A \cup B) = \frac{65}{100}$ ή 65% .

Άσκηση 9 - Λύση

I. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = κ+λ-μ$

II. $P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 – κ-λ+μ$

III. $P((A-B) \cup (B-A)) = P(A-B) + P(B-A) = P(A)- P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A)- 2P(A \cap B) + P(B) =$

$= κ+λ-2μ$

Άσκηση 10 - Λύση

Αν A και B τα ενδεχόμενα να μην έχει ένα νοικοκυριό τηλεόραση και Βίντεο αντιστοίχως, θα είναι:

$$P(A) = \frac{15}{100}\ ,\quad P(B) = \frac{40}{100}\ \text{ και }\ P(A \cap B) = \frac{10}{100}$$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{15}{100} - \frac{40}{100} + \frac{10}{100} = \frac{55}{100} \text{ ή } 55\%\ .$$

Άσκηση 11 - Λύση

Έχουμε ότι:

$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{P(A)}{1-P(A)} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4\,P(A) = 3(1 - P(A)) \Rightarrow 4\,P(A) = 3 - 3\,P(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7\,P(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{7}$$

Άρα:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

Άσκηση 12 - Λύση

Έχουμε ότι:

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{P}(A)} + \frac{1}{\boldsymbol{P}(A')} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{P}(A)} + \frac{1}{\mathbf{1}-\boldsymbol{P}(A)} \geq 4 \Leftrightarrow \mathbf{1} - \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(A) \geq 4(\mathbf{1} - \boldsymbol{P}(A))\,\boldsymbol{P}(A) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{1} - \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(A) \geq 4\,\boldsymbol{P}(A) - 4\,\boldsymbol{P}(A)^2 \Leftrightarrow 4\,\boldsymbol{P}(A)^2 - 4\,\boldsymbol{P}(A) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\mathbf{2}\boldsymbol{P}(A) - 1)^2 \geq 0\ ,$$

που ισχύει ως ταυτότητα.

Άσκηση 13 - Λύση

Έχουμε ότι:

$$A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \Rightarrow P(A \cap B) \leq 0{,}6 \ (1)$$

Έχουμε ότι:

$$P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow 0{,}6 + 0{,}7 - P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow 0{,}3 \leq P(A \cap B) \ (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι: $0{,}3 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}6$

Άσκηση 14 - Λύση

$P(B) - P(A') \leq P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) - 1 + P(A) \leq P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A \cup B) \leq 1$,

που ισχύει .

Άσκηση 15 - Λύση

Ναι, είναι πείραμα τύχης, καθώς δεν μπορούμε να προβλέψουμε την έκβασή του. Αν και η πιθανότητα του ενδεχομένου «εμφανίζεται κεφαλή» είναι 0,95, ωστόσο η πιθανότητα του ενδεχομένου «εμφανίζονται γράμματα» είναι 1-0,95=0,05, δηλαδή υπάρχει. Άρα δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα την έκβαση της ρίψης του κέρματος.

Άσκηση 16 - Λύση

Έρχεται διπλή ζαριά: πιθανότητα $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι περιττός: πιθανότητα $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι άρτιος: πιθανότητα $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια φέρνει άρτιο αποτέλεσμα: πιθανότητα $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

Το αποτέλεσμα και των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός: πιθανότητα $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός: πιθανότητα $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Άσκηση 17 - Λύση

α) Σωστό

β) Λάθος (η γέννηση αγοριού ή κοριτσιού δεν εξαρτάται από το μαιευτήριο),

γ) Σωστό

δ) Λάθος (δεν μας αναφέρει για τον προηγούμενο μήνα).

Άσκηση 18 - Λύση

Α) Στην κάλπη υπάρχουν συνολικά 11 σφαιρίδια.

Η πιθανότητα να βγάλουμε κόκκινο σφαιρίδιο είναι $\frac{5}{11}$ ενώ η πιθανότητα να βγάλουμε πράσινο σφαιρίδιο είναι $\frac{6}{11}$. Βγάζουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την κάλπη.

Το ενδεχόμενο «στην κάλπη απομένει ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα» είναι ίδιο με το ενδεχόμενο «το σφαιρίδιο που βγάλαμε είναι πράσινο».

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{6}{11}$.

Β) Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ν κόκκινα σφαιρίδια, με ν>5. Τότε τα πράσινα σφαιρίδια είναι ν+1. Το σύνολο των σφαιριδίων είναι 2ν+1.

Άρα η πιθανότητα να εξάγουμε τυχαία ένα πράσινο σφαιρίδιο από την κάλπη είναι $\frac{\nu+1}{2\nu+1}$.

Επομένως η πιθανότητα του ενδεχομένου «στην κάλπη απομένει ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα» είναι $\frac{\nu+1}{2\nu+1}$. Η πιθανότητα του ενδεχομένου σε αυτή την περίπτωση θα άλλαζε κατά:

$$\frac{\nu+1}{2\nu+1} - \frac{6}{11} = \frac{11(\nu+1)-6(2\nu+1)}{11(2\nu+1)} = \frac{5-\nu}{11(2\nu+1)}$$

Εφόσον $\nu > 5 \Leftrightarrow \nu - 5 > 0 \Leftrightarrow 5 - \nu < 0$, τότε $\frac{5-\nu}{11(2\nu+1)} < 0$.

Επομένως, σε αυτό το πείραμα τύχης, η πιθανότητα του ενδεχομένου «στην κάλπη απομένει ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα» θα μειωνόταν, αν αυξανόταν ο αριθμός των σφαιρών.

Άσκηση 19 - Λύση

Ένας δ.χ. του πειράματος τύχης είναι Ω = {ΚΚ, ΓΚ, ΚΓ, ΓΓ}.

Είναι Α = {ΓΚ, ΚΓ, ΓΓ}, Β = {ΚΚ, ΓΚ, ΚΓ}, Γ= {ΓΚ, ΚΓ}, Δ = {ΚΚ, ΓΓ}.

α) Τα Α και Β έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, άρα ισχύει P(A) = P(B).

Ομοίως ενεργούμε για τα ενδεχόμενα Γ και Δ.

β) Α ∪ Β = {ΚΚ,ΓΚ,ΚΓ,ΓΓ} = Ω Α ∩ Β = {ΓΚ,ΚΓ} Α - Β = {ΓΓ } .

γ) Γ΄ = {ΚΚ, ΓΓ} , Γ ∩ Δ = ∅ , Γ ∪Δ= Ω, Β ∪Γ΄ = {ΚΚ,ΓΚ,ΚΓ,ΓΓ} = Ω .

Άρα:

$$P(\Gamma') \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(\Gamma \cap \Delta) = P(\emptyset) = 0, \quad P(\Gamma \cup \Delta) = P(\Omega) = 1, \quad P(B \cup \Gamma') = 1.$$

Άσκηση 20 - Λύση

Έστω Α το ενδεχόμενο να έχει υπέρταση και Β το ενδεχόμενο να έχει στεφανιαία νόσο. Έχουμε:

$$P(A) = \frac{10}{100}, \ P(B) = \frac{6}{100} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{2}{100}.$$

Α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{2}{100} = \frac{14}{100}$ ΄14% .

Β) Το ενδεχόμενο να έχει το άτομο μόνο μια ασθένεια είναι το (Α-Β) ∪ (Β-Α) .

Τα ενδεχόμενα (Α-Β) και (Β-Α) είναι ασυμβίβαστα.

Άρα:

$$P((A-B) \cup (B-A)) = P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) =$$

$$= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - 2\frac{2}{100} = \frac{12}{100} \text{ ή } 12\%$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 - Λύση

$P(B') = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 - P(B) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{3}$.

Έχουμε ότι: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Άσκηση 2 - Λύση

Έχουμε ότι: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,6 = P(A) + P(A) – 0,2 \Leftrightarrow 2\ P(A) = 0,8 \Leftrightarrow P(A) = 0,4$.

Άσκηση 3 - Λύση

Η τάξη έχει συνολικά 4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30 μαθητές. Για να έχει η οικογένεια ενός μαθητή 3 παιδιά, πρέπει ο μαθητής αυτός να έχει δηλώσει ότι έχει 2 αδέλφια. Επειδή 9 μαθητές δήλωσαν ότι έχουν 2 αδέλφια, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{9}{30} = 0,3$ ή 30% .

Άσκηση 4 - Λύση

Έστω Α,Β τα ενδεχόμενα το φάρμακο να δημιουργεί παρενέργειες στην όραση και στο γαστρεντερικό αντίστοιχα . Τότε $P(A) < 0,07$, $P(B) = 0,05$ και $P(A \cap B) = 0,02$.

Η πιθανότητα να δημιουργεί παρενέργειες σε τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) < 0,07 + 0,05 – 0,02 = 0,10$$

Άρα, η πιθανότητα να μη δημιουργήσει παρενέργειες είναι: $P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) > 1 – 0,10 = 0,90$.

Άρα δεν κυκλοφορεί .

Άσκηση 5 - Λύση

Α) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

- Η: " η ομάδα που διαλέξαμε προκρίνεται στον ημιτελικό",
- Τ:" η ομάδα που διαλέξαμε προκρίνεται στον τελικό" .
- Το Τ είναι υποσύνολο του Η, έτσι: Η ∪ Τ = Η και Η ∩ Τ = Τ.

Αφού διαλέγουμε μια ομάδα στην τύχη τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα και ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας. Επομένως είναι:

- $N(H) = \frac{80}{100}25 = 20$ και έτσι $P(H) = \frac{N(H)}{N(\Omega)} = \frac{20}{25}$.
- $N(T) = \frac{80}{100}N(H) = 8$ και έτσι $P(T) = \frac{N(T)}{N(\Omega)} = \frac{8}{25}$.
- $P(A) = P(H \cup T) = P(H) = \frac{20}{25} = 0{,}8$.
- $P(B) = P(H - T) = P(H) - P(H \cap T) = P(H) - P(T) = \frac{20}{25} - \frac{8}{25} = \frac{12}{25}$.
- $P(\Gamma') = P(T') = 1 - P(T) = 1 - \frac{8}{25} = \frac{17}{25}$.
- $P(\Delta) = P(H' \cup T) = P(H') + P(T) - P(H' \cap T) = 1 - P(H) + P(T) = 1 - \frac{20}{25} + \frac{8}{25} = \frac{13}{25}$.

Αφού είναι $P(H' \cap T) = P(T - H) = 0$ διότι για να προκριθεί μια ομάδα στον τελικό πρέπει να νικήσει στον ημιτελικό .

Β) Έχουμε $P(A) > P(\Delta) > P(B) > P(\Gamma)$, άρα συμφέρει να στοιχηματίσουμε στο ενδεχόμενο Α .

Άσκηση 6 - Λύση

Συμβολίζουμε με A, T τα ενδεχόμενα "ο επιβάτης είναι άντρας" και "ο επιβάτης να έχει ξαναταξιδέψει με αεροπλάνο", αντίστοιχα . Τότε έχουμε από τα δεδομένα:

- $P(A \cap T') = P(A - T) = \frac{2}{10} = 0{,}2$
- $P(A' \cap T) = P(T - A) = \frac{3}{10} = 0{,}3$
- $P(A \cup T) = \frac{9}{10} = 0{,}9$

Α) Έχουμε $P(T - A) = \frac{3}{10} \Rightarrow P(T) - P(A \cap T) = \frac{3}{10}$

Έχουμε:

$$P(A \cup T) = \frac{9}{10} \Rightarrow P(A) + P(T) - P(A \cap T) = \frac{9}{10} \Rightarrow P(A) = \frac{9}{10} - \frac{3}{10} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Β) Έχουμε $P(A - T) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A) - P(A \cap T) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A \cap T) = \frac{2}{5}$

Γ) Έχουμε: $P(T) - P(A \cap T) = \frac{3}{10} \Rightarrow P(T) - \frac{2}{5} = \frac{3}{10} \Rightarrow P(T) = \frac{7}{10}$

Δ) $P(A' \cap T') = P(A \cup T)' = 1 - P(A \cup T) = 1 - \frac{9}{10} = 0{,}1$.

Άσκηση 7 - Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

Μ: ο μαθητής έγραψε καλά στα μαθηματικά

Β: ο μαθητής έγραψε καλά στη βιολογία

Α) Έχουμε: $P((M - B) \cup (B - M)) = P(M - B) + P(B - M) = P(M) - P(M \cap B) + P(B) - P(M \cap B) =$

$$= P(M \cup B) - P(M \cap B) = 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}5 .$$

Β) α) Έχουμε: $P(B) = 0{,}4$ και $P(M \cup B) = P(M) + P(B) - P(M \cap B) \Rightarrow P(M) = 0{,}5$

Άρα, $P(M - B) = P(M) - P(M \cap B) = 0{,}5-0{,}2 = 0{,}3$.

β) Έστω ν το πλήθος των μαθητών, τότε: $P(B - M) = \frac{600}{\nu} \Rightarrow 0{,}2 = \frac{600}{\nu} \Rightarrow \nu = 3000$.

Άσκηση 8 - Λύση

Α) Έχουμε ότι: $P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$.

Ακόμη αφού τα Α- Β και Β- Α είναι ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε για την πιθανότητα της ένωσής τους:

$P((A - B) \cup (B-A)) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$.

Άρα, $P(A' \cup B') \geq P[(A-B) \cup (B-A)] \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) \geq P(A \cup B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) \leq 1$, που ισχύει.

Β) Έχουμε: $P(B') = 0{,}7 \Leftrightarrow 1 - P(B) = 0{,}7 \Leftrightarrow P(B) = 0{,}3$.

Έχουμε:

- $P(B' - A) =0{,}2 \Leftrightarrow P(B') - P(A \cap B') = 0{,}2 \Leftrightarrow P(A \cap B') = 0{,}5 \Leftrightarrow P(A - B) = 0{,}5 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0{,}5$ **(1)**

- $P((A - B) \cup (B-A)) = 0{,}7 \Leftrightarrow P(A - B) + P(B - A) = 0{,}7 \Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0{,}2 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}1$

Από (1) έχουμε: $P(A) = 0{,}6$.

Άσκηση 9 - Λύση

Α) P(A ∪ B) ≥ $\frac{P(A)+P(B)}{2}$ ⇔ 2 P(A ∪ B) ≥ $P(A) + P(B)$ ⇔

⇔ 2P(A) + 2P(B) - 2P(A ∩ B) ≥ $P(A) + P(B)$ ⇔ P(A) + P(B) - P(A ∩ B) ≥ P(A ∩ B) ⇔

⇔ P(A ∪ B) ≥ P(A ∩ B) που ισχύει αφού A ∩ B ⊆ A ∪ B

Β) Έχουμε διαδοχικά από τη ζητούμενη σχέση:

P(A ∩ B) ≥ P(B) – P(A') ⇔ P(A ∩ B) ≥ P(B) – 1+P(A) ⇔ P(A) + P(B) - P(A ∩ B) ≤ 1 ⇔

P(A ∪ B) ≤ 1 , που ισχύει.

Γ) P(A) + P(B) ≤ 1 + P(A ∪ B) ⇔ P(A ∪ B)+ P(A ∩ B) ≤ 1 + P(A ∪ B) ⇔ P(A ∩ B) ≤ 1, που ισχύει.

Δ) P(A ∩ B) + P(A ∪ B) < P(A) + P(B) +1 ⇔ P(A) + P(B) < P(A) + P(B) +1 ⇔ 0<1 , που ισχύει.

Άσκηση 10 - Λύση

Α) $4\frac{\mathbf{P}(\mathrm{A})}{\mathbf{P}(\mathrm{A}')} + \frac{1}{\mathbf{P}(\mathrm{A})} \geq 5 \Leftrightarrow 4\frac{\mathbf{P}(\mathrm{A})}{1-\mathbf{P}(\mathrm{A})} + \frac{1}{\mathbf{P}(\mathrm{A})} \geq 5 \Leftrightarrow 4\mathbf{P}(\mathrm{A})^2+1 - \mathbf{P}(\mathrm{A}) \geq 5\,\mathbf{P}(\mathrm{A})-5\mathbf{P}(\mathrm{A})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\mathbf{P}(\mathrm{A})^2 - 6\,\mathbf{P}(\mathrm{A})+1 \geq 0 \Leftrightarrow (3\mathbf{P}(\mathrm{A})-1)^2 \geq 0$, που ισχύει ως ταυτότητα.

Β) α) Αν ισχύει ότι: $4\frac{\mathbf{P}(\mathrm{A})}{\mathbf{P}(\mathrm{A}')} + \frac{1}{\mathbf{P}(\mathrm{A})} = 5 \Leftrightarrow (3\mathbf{P}(\mathrm{A})-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3\,\mathbf{P}(\mathrm{A})-1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{3}$

και επειδή τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα θα ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας . Δηλαδή αν N(A) είναι το πλήθος των στοιχείων του Α θα έχουμε:

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{N(A)}{2004} \Leftrightarrow N(A) = 668$$

β) Αν N(B) = 1453 τότε (από τα ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα θα είναι:

$$\mathbf{P}(\mathrm{B}) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1453}{2004}$$

Αν τα ενδεχόμενα Α,Β είναι ξένα μεταξύ τους (ασυμβίβαστα) τότε θα ισχύει από τον απλό προσθετικό νόμο: P(A ∪ B) = P(A) + P(B) ⇒ P(A ∪ B) = $\frac{1}{3} + \frac{1453}{2004} = \frac{2121}{2004}$ >1 , άτοπο. Άρα δεν είναι ξένα μεταξύ τους.

1.3. Πιθανότητες και Πράξεις με Ενδεχόμενα

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 - Λύση

Α) Τα A και A' είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα και ισχύει: $A \cup A' = \Omega$

Από τον απλό προσθετικό νόμο προκύπτει ότι:

$P(\Omega) = P(A) + P(A') \Leftrightarrow P(A) + P(A') = 1 \Leftrightarrow P(A') = 1 - P(A)$

Β) Τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και η ένωσή τους είναι το A, δηλαδή:

$(A \cap B) \cup (A - B) = A$. Από τον απλό προσθετικό νόμο:

$P(\ (A \cap B) \cup (A - B)\ ) = P(A \cap B) + P(A - B) \Leftrightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$

Γ) Από το Β. έχω ότι: $P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$. Εφόσον $B \subseteq A$, ισχύει ότι $A \cap B = B$, άρα:

$P(A) = P(B) + P(A - B)$

Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι $P(A - B) \geq 0$ προκύπτει: $P(A) \geq P(B)$

Δ) Τα ενδεχόμενα $A - B$ και B είναι ασυμβίβαστα και ισχύει: $(A - B) \cup B = A \cup B$

Από τον απλό προσθετικό νόμο: $P((A - B) \cup B) = P(A - B) + P(B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$

Με τη βοήθεια του (Β.) για το $A - B$: $P(A \cup B) = [\ P(A) - P(A \cap B)\ ] + P(B) \Leftrightarrow$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ε) Από το Δ. έχω ότι: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Αφού A,B ασυμβίβαστα , τότε $P(A \cap B) = 0$.

Άρα, αν A,B ασυμβίβαστα, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Άσκηση 2 - Λύση

Α) $P(A \cup B) \geq \frac{P(A)+P(B)}{4} \Leftrightarrow 4P(A \cup B) \geq P(A)+P(B) \Leftrightarrow$

$4P(A)+4P(B)-4P(A \cap B) \geq P(A)+P(B) \Leftrightarrow 3P(A)+3P(B)-4P(A \cap B) \geq 0 \Leftrightarrow$

$3P(A \cup B) - P(A \cap B) \geq 0 \Leftrightarrow 3P(A \cup B) \geq P(A \cap B)$, που ισχύει γιατί $A \cap B \subseteq A \cup B$

Β) $P(A \cap B) \geq P(B) - P(A') \Leftrightarrow P(A \cap B) \geq P(B) - 1 + P(A) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$

$P(A \cup B) \leq 1$, που ισχύει.

Γ) $P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) \leq 1 + P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$P(A \cap B) \leq 1$, που ισχύει.

Δ) $P(A \cap B) + P(A \cup B) < P(A) + P(B) + 1 \Leftrightarrow P(A \cap B) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) < P(A) + P(B) + 1 \Leftrightarrow$

$1>0$, που ισχύει.

Άσκηση 3 - Λύση

Έχουμε ότι:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,5 = P(A) + P(A) - 0,2 \Rightarrow 2P(A) = 0,7 \Rightarrow P(A) = 0,35$.

Άσκηση 4 - Λύση

Έχουμε ότι: $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) \Rightarrow \frac{2}{5} = P(B) - \frac{1}{15} \Rightarrow P(B) = \frac{7}{15}$.

Άρα, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{7}{15} - \frac{1}{15} = \frac{9}{10}$.

Άσκηση 5 - Λύση

Επιλέγουμε τυχαία ένα δωμάτιο. Ονομάζουμε τα εξής ενδεχόμενα:

Α: «Το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει τζάκι».

Β: «Το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει καλοριφέρ».

Τότε $P(A) = 0,5$ και $P(B) = 0,2$.

Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει τζάκι και ούτε καλοριφέρ» γράφεται ως $A \cap B$ και έχουμε ότι: $P(A \cap B) = 0,1$.

α) Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε δεν έχει τζάκι» γράφεται ως A' και $P(A') = 1-0,5 = 0,5$.

β) Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε δεν έχει ούτε τζάκι, ούτε καλοριφέρ» γράφεται ως $(A \cup B)'$ και $P((A \cup B)') = 1-P(A \cup B)$.

Έχουμε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)\text{ , άρα } P(A \cup B) = 0,5+0,2-0,1 = 0,6 \text{ .}$$

Έτσι, θα έχουμε $P((A \cup B)') = 1-P(A \cup B) = 1-0,6 = 0,4$.

γ) Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει μόνο τζάκι» γράφεται ως $A-B$.

$P(A) = P(A \cap B)+P(A-B)$, άρα $0,5 = 0,1+P(A-B) \Leftrightarrow P(A-B) = 0,4$.

Άσκηση 6 - Λύση

α) Λάθος. Δεν είναι απαραίτητα το $B \subseteq A$.

Θα μπορούσαν τα Α και Β να είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.

β) Σωστή.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, άρα $P(A \cap B) = 0{,}1$, επομένως τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

γ) Λάθος. Θα μπορούσε να είναι σωστή μόνο στην περίπτωση που τα Α και Β ήταν ασυμβίβαστα.

δ) Λάθος.

Στην περίπτωση που τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα μπορεί να ισχύει $P(A) + P(B) > 1$.

ε) Σωστή. Ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ και $P(A \cup B) \leq 1$ (από τον ορισμό της πιθανότητας).

Άρα $P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$.

στ) Σωστή.

Στην περίπτωση αυτή τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα. Γενικότερα, αν $P(A) + P(B) > 1$, τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα, εφόσον αν ήταν ασυμβίβαστα θα ήταν $P(A \cup B) = P(A) + P(B) > 1$, που είναι άτοπο.

ζ) Λάθος. Δεν είναι απαραίτητο να είναι ασυμβίβαστα.

η) Σωστή, καθώς $A \cap B \subseteq A$.

Άσκηση 7 - Λύση

Αν A είναι το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στην θεατρική ομάδα» και B «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στην ομάδα στίβου», τότε, P(A) = $\frac{32}{120} = \frac{4}{15}$ και P(B) = $\frac{28}{120} = \frac{7}{30}$.

Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει και στις δύο ομάδες» είναι το P(A ∩ B) = $\frac{16}{120} = \frac{2}{15}$.

Α) Ισχύει P(A ∪B)= P(A)+P(B)-P(A ∩ B). Άρα, εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι:

$$P(A \cup B)= \frac{11}{30}$$

Β) P(A¬B) = P(A) - P(A ∩ B) . Άρα, εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι: P(A ∩ B) = $\frac{2}{15}$.

Γ) Πρώτα θα βρούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου», δηλαδή του B-A .

$$P(B¬A) = P(B) - P(A \cap B)$$

Άρα, εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι: P(B¬A) =0,1 .

Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει σε μία μόνο από τις δύο ομάδες» είναι η ένωση των ασυμβίβαστων ενδεχομένων A-B και B-A .

$$P((A-B) \cup (B-A)) = P(A-B) + P(B-A) = \frac{7}{30} .$$

Δ) Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια δε συμμετέχει σε καμία ομάδα» είναι το:

$$P(A \cup B)' = 1- P(A \cup B) = \frac{19}{30} .$$

Άσκηση 8 - Λύση

Επιλέγουμε τυχαία ένα/μια μαθητή/τρια. Θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα:

Κ: «μαθήτρια» με P(K)=0,55.

Μ: «ο/η μαθητής/τρια παίζει μπάσκετ» με P(M)=0,4.

«μαθήτρια που παίζει μπάσκετ»: $P(K \cap M) = 0{,}1$.

Α) Ισχύει $P(K \cup M)= P(K)+P(M)-P(K \cap M)$. Άρα, εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι:

$$P(K \cup M)= 0{,}85$$

Β) $P(K \neg M) = P(K) - P(K \cap M)$. Άρα, εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι: $P(K \neg M) = 0{,}45$.

Γ) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «μαθητής και να παίζει μπάσκετ», το οποίο είναι το ίδιο με το ενδεχόμενο «να μην είναι κορίτσι και να παίζει μπάσκετ» .

$$P(M \neg K) = P(M) - P(K \cap M)$$

Άρα, εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι: $P(M \neg K) = 0{,}3$.

Δ) $P(K') = 1 - P(K) = 0{,}45$

Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «μαθητής ή να παίζει μπάσκετ», δηλαδή:

$$P(K' \cup M)= P(K') + P(M) - P(K' \cap M)$$

Άρα, εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι: $P(K' \cup M)= 0{,}55$.

Άσκηση 9 - Λύση

Για το πείραμα τύχης που περιγράφεται στην άσκηση έχουμε τα εξής ενδεχόμενα:

- F: «ο κάτοικος που πήραμε έχει συμβόλαιο με την Cosmote»
- T: «ο κάτοικος που πήραμε έχει συμβόλαιο με την Vodafone»
- «ο κάτοικος που πήραμε δεν έχει συμβόλαιο με καμιά από τις Cosmote και Vodafone»: $(A \cup B)'$

Άρα:

$$P(A)= 0{,}47 \ , \ P(B)= 0{,}35 \text{ και } P((A \cup B)')= 0{,}23 \ .$$

A) $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$. Άρα, εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι: $P(A \cup B) = 0{,}77$.

B) Ισχύει $P(A \cup B)= P(A)+P(B)-P(A \cap B)$. Άρα, εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι:

$$P(A \cap B)= 0{,}05$$

Άσκηση 10 - Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

- S: «ο κάτοικος έχει κάνει σκι»
- A: «ο κάτοικος έχει ταξιδέψει με αεροπλάνο»
- «ο κάτοικος έχει κάνει σκι και έχει ταξιδέψει με αεροπλάνο»: $S \cap A$

Από τα δεδομένα έχουμε $P(S')= 0{,}42$, $P(A')=0{,}58$ και $P(S \cap A)= 0{,}29$.

Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο κάτοικος δεν έχει κάνει σκι, ούτε έχει ταξιδέψει με αεροπλάνο», δηλαδή $(S \cup A)'$.

Αρχικά βρίσκουμε τις πιθανότητες $P(S)\ 1-P(S') = 1-0{,}42 = 0{,}58$ και $P(A) =1-P(A')=1-0{,}58 = 0{,}42$.

Άρα $P(S \cup A)= P(A)+P(S)-P(S \cap A)= 0{,}42+ 0{,}58-0{,}29 = 0{,}71$.

Επομένως $P((S \cap A)')= 1-P(S \cap A)= 1-0{,}71= 0{,}29$.

Άσκηση 11 - Λύση

Το κουτί έχει συνολικά 10 + 15 + 5 + 10 = 40 μπάλες

i) Οι μαύρες μπάλες είναι 15. Άρα η πιθανότητα να είναι η μπάλα μαύρη $\frac{15}{40}$.

ii) Υπάρχουν 10 άσπρες και 15 μαύρες μπάλες. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{10+15}{40} = \frac{25}{40}$.

iii) Το να μην είναι η μπάλα ούτε κόκκινη ούτε πράσινη, σημαίνει ότι μπορεί να είναι άσπρη ή μαύρη.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{10+15}{40} = \frac{25}{40}$.

Άσκηση 12 - Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

Μ: ο μαθητής έγραψε καλά στα μαθηματικά

Ι: ο μαθητής έγραψε καλά στην ιστορία

Α) Έχουμε:

$$P((M - I) \cup (I - M)) = P(M - I) + P(I - M) = P(M) - P(M \cap I) + P(I) - P(M \cap I) = P(M \cup I) - P(M \cap I) =$$

$$= 0{,}6 - 0{,}15 = 0{,}45$$

Β) α) Έχουμε: $P(I) = 0{,}4$ και $P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) \Rightarrow P(M) = 0{,}2$

Άρα, $P(M - I) = P(M) - P(M \cap I) = 0{,}2 - 0{,}15 = 0{,}05$.

β) Έστω ν το πλήθος των μαθητών, τότε: $P(I - M) = \frac{500}{\nu} \Rightarrow 0{,}35 = \frac{500}{\nu} \Rightarrow \nu = 1428$.

Άσκηση 13 - Λύση

Ισχύει P(A ∪B)= P(A)+P(B)-P(A ∩ B) . Άρα, εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι:

- P(A ∩B)= $\frac{11}{30}$
- P(A ∩B)' = 1 - P(A ∩B)= $\frac{19}{30}$
- P(A-B) = P(A)- P(A ∩ B) = $\frac{6}{30}$

Άσκηση 14 - Λύση

Έχουμε ότι A ∩ B ⊆ A ⇒ P(A ∩ B) ≤ P(A) ⇒ P(A ∩ B) ≤ 0,6 (1) .

Έχουμε ότι:

$$P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow 0{,}6 + 0{,}7 - P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow 0{,}3 \leq P(A \cap B) \;(2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι: 0,3 ≤ P(A ∩ B) ≤ 0,6

Άσκηση 15 - Λύση

Α) Στην κάλπη υπάρχουν συνολικά 11 σφαιρίδια.

Η πιθανότητα να βγάλουμε κόκκινο σφαιρίδιο είναι $\frac{5}{11}$ ενώ η πιθανότητα να βγάλουμε πράσινο σφαιρίδιο είναι $\frac{6}{11}$. Βγάζουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την κάλπη.

Το ενδεχόμενο «στην κάλπη απομένει ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα» είναι ίδιο με το ενδεχόμενο «το σφαιρίδιο που βγάλαμε είναι πράσινο».

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{6}{11}$.

Β) Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ν κόκκινα σφαιρίδια, με ν>5.

Τότε τα πράσινα σφαιρίδια είναι ν+1. Το σύνολο των σφαιριδίων είναι 2ν+1. Άρα η πιθανότητα να εξάγουμε τυχαία ένα πράσινο σφαιρίδιο από την κάλπη είναι $\frac{\nu+1}{2\nu+1}$.

Επομένως η πιθανότητα του ενδεχομένου «στην κάλπη απομένει ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα» είναι $\frac{\nu+1}{2\nu+1}$.

Η πιθανότητα του ενδεχομένου σε αυτή την περίπτωση θα άλλαζε κατά:

$$\frac{\nu+1}{2\nu+1} - \frac{6}{11} = \frac{11(\nu+1)-6(2\nu+1)}{11(2\nu+1)} = \frac{5-\nu}{11(2\nu+1)}.$$

Εφόσον $\nu > 5 \Leftrightarrow \nu - 5 > 0 \Leftrightarrow 5 - \nu < 0$, τότε $\frac{5-\nu}{11(2\nu+1)} < 0$.

Επομένως, σε αυτό το πείραμα τύχης, η πιθανότητα του ενδεχομένου «στην κάλπη απομένει ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα» θα μειωνόταν, αν αυξανόταν ο αριθμός των σφαιρών.

Άσκηση 16 - Λύση

Έχουμε τα εξής σύνολα:

Ω = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20} που έχει σύνολο 21 στοιχεία.

Α = {ω ε Ω: ω πολλαπλάσιο του 3} = {3,6,9,12,15,18} που έχει 6 στοιχεία.

Β = {ω ε Ω: ω πολλαπλάσιο του 4} = {4,8,12,16,20} που έχει 5 στοιχεία.

Α) $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{21}$

Β) $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{21}$. Άρα, $P(B') = 1 - P(B) = \frac{16}{21}$.

Άσκηση 17 - Λύση

Έστω Α το ενδεχόμενο να έχει υπέρταση και Β το ενδεχόμενο να έχει στεφανιαία νόσο. Έχουμε:

$$P(A) = \frac{10}{100},\ P(B) = \frac{6}{100} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{2}{100}.$$

Α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{2}{100} = \frac{14}{100}$ ’14% .

Β) Το ενδεχόμενο να έχει το άτομο μόνο μια ασθένεια είναι το $(A-B) \cup (B-A)$.

Τα ενδεχόμενα $(A-B)$ και $(B-A)$ είναι ασυμβίβαστα.

Άρα:

$$P((A-B) \cup (B-A)) = P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) =$$

$$= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - 2\frac{2}{100} = \frac{12}{100} \text{ ή } 12\%$$

Άσκηση 18 - Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

- Γ: οι μαθητές που μιλάνε Γερμανικά
- Ι: οι μαθητές που μιλάνε Ισπανικά

Έχουμε: $P(\Gamma) = 0{,}8$, $P(I) = 0{,}3$ και $P(\Gamma \cap I) = 0{,}2$.

Τότε $P(\Gamma \cap I)' = 1 - P(\Gamma \cap I) = 0{,}8$.

$P(\Gamma - I) = P(\Gamma) - P(\Gamma \cap I) = 0{,}6$.

Άσκηση 19 - Λύση

$P(A\cap B) \geq P(B) - P(A') \Leftrightarrow P(A\cap B) \geq P(B) - 1 + P(A) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A\cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$

$P(A \cup B) \leq 1$, που ισχύει.

Άσκηση 20 - Λύση

Α1. $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) \Rightarrow P(A) = P(A-B) + P(A\cap B) \Rightarrow P(A) = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{1}{20}$.

Α2. Επειδή ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα τότε σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας είναι: $P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{n}$.

Από τον προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(B) = \frac{5}{\nu} - \frac{1}{10} .$$

Α3. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Β και όχι το Α είναι ίση με $\frac{1}{10}$.

Επομένως:

$$P(B-A) = P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow P(B) - P(A\cap B) = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{5}{\nu} - \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{10} \Rightarrow \nu = 20 .$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 - Λύση

Α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{7}{8} = P(A) + P(B) - \frac{1}{8} \Rightarrow P(A)+P(B) = 1$

Β) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α,Β είναι η ένωση των ασυμβίβαστων ενδεχομένων Α-Β και Β-Α .

Τα ενδεχόμενα $(A- B)$, $(B - A)$ είναι ξένα μεταξύ τους αφού: $(A- B)\cap(B- A) =\varnothing$.

Επομένως ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος και κατά συνέπεια είναι:

$$P((A-B) \cup (B-A)) = P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) = 1 - 2\, P(A\cap B) = 1 - 2\frac{7}{8} = \frac{3}{4}$$

Άσκηση 2 - Λύση

Α) Παίρνουμε τυχαία μια μπάλα από το κουτί . Επομένως τα ενδεχόμενα είναι απλά και ισοπίθανα και άρα ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας .

Τα ενδεχόμενα Π : "επιλέγω πράσινη μπάλα", Κ :"επιλέγω κίτρινη μπάλα" και Γ : "επιλέγω γαλάζια μπάλα" είναι ασυμβίβαστα με πιθανότητες:

$$P(\Pi) = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} = \frac{x}{x+y+5}\ , \quad P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} = \frac{5}{x+y+5}\ , \quad P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{y}{x+y+5}\ .$$

Επίσης: $P(\Pi \cup \Gamma) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\Pi)+ P(\Gamma) = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x}{x+y+5} + \frac{y}{x+y+5} = \frac{3}{4} \Rightarrow\ x + y = 5$ (1)

Επίσης:

$$P(K \cup \Gamma) = \frac{3}{5} \Rightarrow P(K)+ P(\Gamma) = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{5}{x+y+5} + \frac{y}{x+y+5} = \frac{3}{5} \Rightarrow\ 3x - 2y = 10 \ (2)$$

Λύνοντας το σύστημα από (1) και (2) προκύπτει ότι: $x = 8$ και $y = 7$.

Άρα το κουτί περιέχει $x + y + 5 = 20$ μπάλες.

Β) $P(K \cup \Pi) = P(K) + P(\Pi) = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}$.

Άσκηση 3 - Λύση

Α) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί το Α είναι το Α'. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A') = 1 - P(A) = \frac{4}{5}.$$

Β) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα Α,Β είναι η $P(A\cup B)$.

Από τον προσθετικό νόμο έχουμε: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{47}{60}$.

Γ) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α,Β είναι το $(A\cup B)'$.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P(A \cup B)' = 1- P(A \cup B) = \frac{13}{60}$.

Δ) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το Α είναι, $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{7}{60}$.

Ε) Ας υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα Α,Β, δηλαδή την

$$P((A-B)\cup(B-A)).$$

Τα ενδεχόμενα $(A-B),(B-A)$ είναι ξένα μεταξύ τους αφού $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$.

Επομένως ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος και κατά συνέπεια είναι:

$$P((A-B) \cup (B-A)) = P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{21}{30}.$$

ΣΤ) Τέλος το ενδεχόμενο πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα Α,Β είναι το $(A\cap B)'$.

Επομένως η πιθανότητα είναι: $P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = \frac{11}{12}$.

Άσκηση 4 - Λύση

Α) Έχουμε $0 \le P(A) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \kappa^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \kappa \le 1$ (1) και $0 \le P(B) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 5\kappa^2 - 7\kappa + 3 \le 1$.

Παίρνοντας διακρίνουσα και βρίσκοντας τις ρίζες, έχουμε ότι: $\frac{2}{5} \le \kappa \le 1$ (2).

Επίσης τα Α,Β είναι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω .

Σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 6\kappa^2 - 7\kappa + 3$$

Όμως:

$$0 \le P(A \cup B) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 6\kappa^2 - 7\kappa + 3 \le 1 \Leftrightarrow 6\kappa^2 - 7\kappa + 3 \ge 0 \text{ και } 6\kappa^2 - 7\kappa + 2 \le 0$$

Παίρνοντας διακρίνουσα και βρίσκοντας τις ρίζες, έχουμε ότι $\frac{1}{2} \le \kappa \le \frac{2}{3}$ (3).

Από (1) (2) (3) έχουμε ότι: $\frac{1}{2} \le \kappa \le \frac{2}{3}$.

Β) Ισχύουν οι ισοδυναμίες,

- $0 \le P(A) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 2P(A) \le 2 \Leftrightarrow 3 \le 2P(A) + 3 \le 5$ και
- $0 \le P(A) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 2P(A) \le 2 \Leftrightarrow -5 \le 2P(A) - 5 \le -3$

Επομένως η σχέση $|2P(A) + 3| - |2P(A) - 5| = p$ γίνεται:

$$|2P(A) + 3| - |2P(A) - 5| = p \Leftrightarrow 2P(A) + 3 - (-2P(A) + 5) = p \Leftrightarrow P(A) = \frac{\rho+2}{4}.$$

Όμως:

$$0 \le P(A) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{\rho+2}{4} \le 1 \Leftrightarrow -2 \le \rho \le 2 \Leftrightarrow |\rho| \le 2$$

Γ) Επειδή A,B δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω έχουμε:

$$P(A) + P(B) \le 1 \Leftrightarrow P(A) + \frac{4P(A)}{9P(A)-1} \le 1 \Leftrightarrow 9P(A)^2 - 6P(A) + 1 \le 0 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}, \text{ επειδή } P(A) > \frac{1}{9}.$$

$$P(B) = \frac{4P(A)}{9P(A)-1} = \frac{2}{3}.$$

Άσκηση 5 - Λύση

A) Έστω A το ενδεχόμενο A: " η εξίσωση $\psi^2 - 8\psi + \lambda = 0$ να μην έχει πραγματικές ρίζες ." **.** Οι λύσεις της εξίσωσης $(x-10)(x-11)\cdot \ldots \cdot (x-20) = 0$, είναι $x = 10$ ή $x = 11$ ή......ή $x = 20$, οπότε ο δειγματικός χώρος είναι Ω= {10,11,12,...,20} με πλήθος στοιχείων N(Ω) = 11 .

Η εξίσωση $\psi^2 - 8\psi + \lambda = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν η διακρίνουσα της είναι αρνητική.

Δηλαδή εφόσον, $\Delta < 0 \Leftrightarrow 64 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 16$ και επειδή $\lambda \in \Omega$, τότε $\lambda \in \{17,18,19,20\}$.

Επομένως το ενδεχόμενο A, είναι A = {17,18,19,20} .

Αφού ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{11}$$

B) Η εξίσωση $\psi^2 - 8\psi + \lambda = 0$ έχει πραγματικές ρίζες όταν η διακρίνουσα είναι μη αρνητική, δηλαδή αν και μόνο αν $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow \lambda \le 16$ **.**

Οι ρίζες είναι ρητές όταν η διακρίνουσα είναι τετράγωνο ακεραίου. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν $\lambda \in \{12,15,16\}$ αφού πράγματι τότε θα είναι $\Delta = 16 = 4^2$, $\Delta = 4 = 2^2$, $\Delta = 0$ αντίστοιχα.

Τα απλά ενδεχόμενα έχουν πιθανότητες $P(i) = ki,\ i \in \Omega$. Τότε από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας είναι:

$$P(10)+P(11)+\ldots+P(20) = 1 \Leftrightarrow 10k+11k+\ldots+20k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{165}.$$

Οπότε εάν $B=\{12,15,16\}$ είναι το ενδεχόμενο η εξίσωση $\psi^2-8\psi+\lambda=0$ να έχει ρητές ρίζες, τότε:

$$P(B) = P(12)+P(15)+P(16) = 12k+15k+16k = 43k=\frac{43}{165}$$

Άσκηση 6 - Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α: συμμετέχει στο διαγωνισμό της ΕΜΕ , Β: συμμετέχει στο διαγωνισμό της ΕΕΦ.

Από τα δεδομένα έχουμε :

$P(A) = 20\%, P(B) = 15\%, P(A \cap B) = 8\%$

Ε1. Είναι $P((A\cup B)') = 100\% - 35\% + 8\% = 73\%$

Ε2. Είναι $P((A-B)\cup(B-A)) = P(A)+P(B) - 2P(A\cap B) \Leftrightarrow P((A-B)\cup(B-A)) = 19\%$

Ε3. Είναι $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) = 12\%$

Ε4. Είναι $P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 92\%$.

Άσκηση 7 - Λύση

Α) Από τα δεδομένα έχουμε: $P(B\cap\Gamma) = 0{,}2$, $P(A\cap B) = 0{,}4$ και $P(A) = 1 - P(A') = 0{,}5$

Επίσης $P(A \cap B') = P(\Gamma \cap B') \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = P(\Gamma) - P(A \cap B) \Rightarrow P(\Gamma) = 0{,}3$.

$A \cup B \cup \Gamma = \Omega \Rightarrow P(A \cup B \cup \Gamma) = 1 \Rightarrow P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(\Gamma \cap B) = 1 \Rightarrow$

$P(B) = 0{,}8$.

Β) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το Β είναι ίση με $P(B) - P(A \cap \Gamma) - P(\Gamma \cap B) = 0{,}2$

Γ) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το Α ή μόνο το Β είναι ίση με:

$$P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap \Gamma) - P(\Gamma \cap B) = 0{,}1$$

Άσκηση 8 - Λύση

Ο δειγματικός χώρος Ω έχει ως στοιχεία τους 216 μαθητές του Λυκείου, άρα είναι N(Ω) 216

Θεωρούμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

- G: «ο μαθητής μαθαίνει Γερμανικά»
- F: «ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά»

Το ενδεχόμενο: «ο μαθητής μαθαίνει μόνο Γερμανικά» είναι το G-F = G∩F' .

$$P(G\text{-}F) = \frac{N(G-F)}{N(\Omega)} = \frac{27}{216} = 0{,}125 \text{ ή } 12{,}5\% .$$

Το ενδεχόμενο: «ο μαθητής μαθαίνει μόνο Γαλλικά » είναι το F-G = F∩G'

$$P(F\text{-}G) = \frac{N(F-G)}{N(\Omega)} = \frac{54}{216} = 0{,}25 \text{ ή } 25\% .$$

Το ενδεχόμενο: «ο μαθητής να μην μαθαίνει ούτε Γερμανικά ούτε Γαλλικά» είναι το G'∩F' = (G∪F)' .

$$P((G\cup F)') = \frac{N((G\cup F)')}{N(\Omega)} = \frac{108}{216} = 0{,}5 \text{ ή } 50\% .$$

Α) Το ενδεχόμενο: «ο μαθητής μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις δύο αυτές γλώσσες» είναι το G∪F .

Άρα: P(G∪F) = 1 - P((G∪F)') = 0,5 .

Β) Έχουμε P(G∪F) = P(G) + P(F) – P(G∩F) και P(F-G) = P(F) – P(G∩F) . Αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε:

$$P(G\cup F) - P(F\text{-}G) = P(G)$$

Τότε, P(G) = 0,25

Γ) Έχουμε P(G∪F) = P(G) + P(F) – P(G∩F) και P(G-F) = P(G) - P(G∩F) . Αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε:

$$P(G\cup F) - P(G\text{-}F) = P(F)$$

Τότε, P(F) = 0,25

Δ) Έχουμε P(G∪F) = P(G) + P(F) – P(G∩F). Τότε, P(G∩F) = 0,125

Ε) Το ενδεχόμενο: «να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο αυτές γλώσσες» είναι το (G-F)∪(F-G) με πιθανότητα:

$$P((G\text{-}F) \cup (F\text{-}G)) = P(G\text{-}F) + P(F\text{-}G) - 2\,P(G\cap F)$$

Τότε, P((G-F) ∪ (F-G)) = 0,375

ΣΤ) Το ενδεχόμενο: «να μαθαίνει το πολύ μία από τις δύο αυτές γλώσσες» είναι το $G' \cup F' = (G \cap F)'$ με πιθανότητα:

$$P(G \cap F)' = 1 - P(G \cap F) = 0{,}875$$

Άσκηση 9 - Λύση

Θεωρούμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

- A: «να έχει αυτοκίνητο»
- M: «να έχει μηχανάκι»

Είναι: $P(A')=0{,}65$ και $P(M')=0{,}80$. Ισχύει: $P(A')=1-P(A)$

Επομένως έχουμε:

$$P(A)=1-0{,}65=0{,}35 \text{ , δηλαδή } 35\%$$

Ισχύει: $P(M')=1-P(M)$

Επομένως έχουμε:

$$P(M)=1-0{,}80=0{,}20 \text{ , δηλαδή } 20\%$$

Το ενδεχόμενο: «να έχει μόνο αυτοκίνητο» είναι το $A-M= A \cap M'$ με πιθανότητα $P(A \cap M')=0{,}25$

Α) $P(A-M) = P(A) - P(A \cap M)$. Τότε, $P(A \cap M) = 0{,}10$

Β) $P(A \cup M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M) = 0{,}45$

Γ) $P(A \cup M)' = 1 - P(A \cup M) = 0{,}55$

Δ) $P(M-A) = P(M) - P(M \cap A) = 0{,}10$

Ε) $P((M-A) \cup (A-M)) = P(A) + P(M) - 2\,P(A \cap M) = 0{,}35$

Άσκηση 10 - Λύση

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

$$\Omega = \{240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249\}$$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

- Α: «ο αριθμός διαιρείται με το 3» και
- Β: «ο αριθμός διαιρείται με το 5»

Αφού επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα,

άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας.

Το ενδεχόμενο Α είναι: $A = \{240, 243, 246, 249\}$ με $N(A) = 4$ και $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{10}$.

Το ενδεχόμενο Β είναι: $B = \{240, 245\}$ με $N(B) = 2$ και $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{10}$.

Α) $P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{10}$.

Β) Το ενδεχόμενο: «ο αριθμός διαιρείται με έναν τουλάχιστον από τους αριθμούς 3 και 5» είναι το $A \cup B$.

Άρα, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}5$

Γ) Το ενδεχόμενο: «ο αριθμός διαιρείται μόνο με το 3» είναι το Α-Β με: $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}3$

Δ) Το ενδεχόμενο: «ο αριθμός διαιρείται μόνο με έναν από τους αριθμούς 3 και 5» έχει πιθανότητα ίση

με: $P((B-A) \cup (A-B)) = P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B) = 0{,}4$

Ε) Το ενδεχόμενο: «ο αριθμός δεν διαιρείται ούτε με το 3 ούτε με το 5» είναι το $A' \cap B' = (A \cup B)'$

με πιθανότητα ίση με: $P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 0{,}5$

ΣΤ) Το ενδεχόμενο: «ο αριθμός διαιρείται με έναν το πολύ από τους αριθμούς 3 και 5» είναι

το $(A \cap B)'$ με $P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 0{,}9$.

1.4. Συνδυαστική & Πιθανότητες: Διατάξεις – Μεταθέσεις - Συνδυασμοί

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 - Λύση

Αφού 2 ομάδες αγωνίζονται κάθε φορά, πρόκειται για συνδυασμούς των 6 ομάδων, ανά 2. Δεν μας ενδιαφέρει πως θα επιλέξουμε τις ομάδες.

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6*5*4!}{2*4!} = 15 \text{ αγώνες}$$

Άσκηση 2 - Λύση

α) Οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 4 από έναν κύκλο 9 μαθητών είναι ίσοι με τους συνδυασμούς των 9 ανά 4.

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9*8*7*6*5!}{4!*5!} = 126 .$$

Η επιλογή συγκεκριμένου μαθητή ανάμεσα στους 4 σημαίνει ότι οι υπόλοιποι 3 μπορεί να είναι οποιοιδήποτε από τους υπόλοιπους 8. Άρα, οι τρόποι να επιλέξουμε τους 3 από τους 8 είναι:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8*7*6*5!}{3!*5!} = 56$$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{56}{126}$ = 0,44 .

β) Αν έχουμε ένα σύνολο ν μαθητών και επιλέγουμε, τυχαία, κ μαθητές , τότε ομοίως με πριν , θα έχουμε πιθανότητα ίση με:

$$\frac{\binom{\nu-1}{\kappa-1}}{\binom{\nu}{\kappa}} = \frac{\frac{(\nu-1)!}{(\kappa-1)!(\nu-1-\kappa+1)!}}{\frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}} = \frac{\frac{(\nu-1)!}{(\kappa-1)!(\nu-\kappa)!}}{\frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}} = \frac{(\nu-1)!(\nu-\kappa)!\kappa!}{(\nu-\kappa)!(\kappa-1)!\nu!} = \frac{(\nu-1)!\kappa!}{(\kappa-1)!\nu!}$$

Άσκηση 3 - Λύση

Υπάρχουν συνολικά 11 άτομα. Οι δυνατοί συνδυασμοί τους, ανά 3, ανεξαρτήτως φύλου είναι πλήθους:

$$\binom{11}{3} = \frac{11!}{3!(11-3)!} = 165$$

α) Οι δυνατοί συνδυασμοί των 5 γυναικών, ανά 3 είναι $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 20$.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{20}{165} = 0{,}12$.

β) Η πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχομένου «κανένας να μην είναι άνδρας» έχει υπολογιστεί στο ερώτημα (α). Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $1-\frac{20}{165} = 1-0{,}12 = 0{,}88$.

γ) Αν υπάρχει ακριβώς μία γυναίκα, τότε τα υπόλοιπα άτομα της τριάδας είναι άνδρες.

Επομένως, υπολογίζουμε τους συνδυασμούς των 6 ανδρών ανά 2. $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$.

Για κάθε μια από αυτές τις δυάδες μπορούν να προκύψουν τριάδες προσθέτοντας 1 γυναίκα από τις 5. Άρα υπάρχουν 5*15=75 τριάδες.

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{75}{165} = 0{,}45$.

Άσκηση 4 - Λύση

Υπάρχουν $\binom{18}{3} = \frac{18!}{3!(18-3)!}$ = 816 συνδυασμοί που μπορούμε να επιλέξουμε τυχαία τις 3 ασφάλειες από το κουτί, τις οποίες θα δοκιμάσουμε. Θα βρούμε το πλήθος των συνδυασμών για τους οποίους ένα κουτί χαρακτηρίζεται απαράδεκτο και επιστρέφεται. Οι συνδυασμοί είναι:

- Εκείνοι που και οι 3 ασφάλειες είναι ελαττωματικές. Έχουμε 4 ελαττωματικές, άρα σε

κάθε τριάδα θα λείπει 1 ελαττωματική. Συνεπώς έχουμε 4 συνδυασμούς.

Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του $\binom{4}{3}$ = 4 .

- Εκείνοι που οι 2 ασφάλειες είναι ελαττωματικές. Οι δυνατοί συνδυασμοί των 4 ελαττωματικών ανά 2 είναι $\binom{4}{2}$ =3 . Για κάθε έναν από αυτούς μπορούμε να επιλέξουμε 1 από τις 14 μη ελαττωματικές ασφάλειες, ώστε να συμπληρωθεί η τριάδα. Άρα έχουμε 14*3=52 συνδυασμούς με 2 ελαττωματικές ασφάλειες.
- Εκείνοι που έχουν 1 ελαττωματική ασφάλεια. Οι δυνατοί συνδυασμοί 4 ελαττωματικών ανά 1 είναι 4.

Για κάθε έναν από αυτούς μπορούμε να επιλέξουμε 1 μη ελαττωματική ασφάλεια, για να συμπληρωθεί η τριάδα, με $\binom{14}{1}$ = 14 τρόπους.

Άρα έχουμε 14*3=52 συνδυασμούς με 1 ελαττωματική ασφάλεια.

Συνολικά έχουμε 52+52+4 = 108 συνδυασμούς για τους οποίους το κουτί επιστρέφεται ως απαράδεκτο.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{108}{816}$ = 0,13 .

Άσκηση 5 - Λύση

Έχουμε 7 διακριτές κενές θέσεις για να βάλουμε σύμβολα Χ και Ι. Έχουμε επίσης 4 «Ι» και 3 «Χ».

Άρα, έχουμε $\binom{7}{4}$ = 35 τρόπους .

Για τις υπόλοιπες 6 θέσεις έχουμε $\binom{6}{2}$ = 15 τρόπους να τοποθετήσουμε τα «Χ» . Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με: $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$.

Άσκηση 6 - Λύση

Έχουμε: $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$. Επίσης: $\binom{\nu}{\nu-\kappa} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!(\nu-\nu+\kappa)!} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\kappa!} = \binom{\nu}{\kappa}$.

Άρα:

$$\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu-\kappa}$$

Άσκηση 7 - Λύση

Πρόκειται για μεταθέσεις των 6 γραμμάτων, οι οποίες έχουν πλήθος 6! = 6*5*4*3*2*1 = 720. Άρα τοποθετούνται με 720 τρόπους. Από όλους αυτούς τους τρόπους, 2 μόνο μας δίνουν τη λέξη ευθεία, επειδή έχουμε 2 Ε.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{2}{720}$.

Άσκηση 8 - Λύση

Φορώντας από όλα τα είδη, υπάρχουν: 2*4*3*10*3 = 720 τρόποι .

Οι τρόποι για να φοράει το μπλε μπουφάν είναι 4*3*10*3 = 360 .

Άρα η πιθανότητα να φοράει κανείς το μπλε μπουφάν είναι: $\frac{360}{720}$ = 0,5 .

Άσκηση 9 - Λύση

Κάθε ρίψη του αμερόληπτου ζαριού έχει 6 δυνατές εκβάσεις. Κάθε αποτέλεσμα του πειράματος τύχης των 5 διαδοχικών ρίψεων είναι μια τετράδα αριθμών.

Άρα, το πλήθος των δυνατών εκβάσεων του πειράματος τύχης είναι: $6^5 = 7776$ πιθανά αποτελέσματα

Το πλήθος των αποτελεσμάτων που οι 5άδες αποτελούνται από διαφορετικούς αριθμούς είναι το πλήθος των διατάξεων των 6 ανά 5 χωρίς επανάληψη.Άρα 6*5*4 = 120 .

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με: $\frac{120}{7776}$ = 0,015 .

Άσκηση 10 - Λύση

α) Ο τετραψήφιος αριθμός μπορεί να είναι ακόμα και ο 0000 αλλά και ο 9999.

Επομένως, τα τρία κεφαλαία γράμματα μπορούν να σχηματιστούν με 24^3 = 13824 τρόπους, ενώ ο αριθμός με 10^4 = 10000 τρόπους. Άρα το πλήθος των πινακίδων κυκλοφορίας είναι 13824*10000=138.240.000 .

β) Από τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου εκείνα που δεν ανήκουν στο λατινικό αλφάβητο είναι:

Γ, Δ, Θ, Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ, Ω

Άρα το πλήθος των γραμμάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι 24 – 10 = 14.

Άρα, τα τρία κεφαλαία γράμματα μπορούν να σχηματιστούν με 14^3 =2744 τρόπους. Συνεπώς το πλήθος των πινακίδων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι:

2744*10000=27.440.000

Άρα, η πιθανότητα μια πινακίδα να είναι κατάλληλη προς χρήση είναι $\frac{27.440.000}{138.240.000}$ = 0,19 .

Άσκηση 11 - Λύση

α) Οι εμφανίσεις μπορούν να μοιραστούν στους μαθητές με 5*4*3*2*1=120 τρόπους.

Οι τρόποι με τους οποίους ο Δημήτρης παίρνει το 7 είναι 4*3*2*1=24 , εφόσον ουσιαστικά μοιράζονται μόνο οι 4 υπόλοιπες φανέλες. Άρα η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης της φανέλα με το 7 είναι $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$.

Για το επόμενο ερώτημα, θα υπολογίσουμε με πόσους τρόπους παίρνει ο Δημήτρης το 7 και ο Θανάσης το 13. Οι τρόποι είναι 3*2*1=6 ώστε να πάρει ο Δημήτρης τη φανέλα με το νούμερο 7 και ο Θανάσης την αντίστοιχη φανέλα με το νούμερο 13.

Άρα από τους 24 τρόπους που ο Δημήτρης παίρνει το 7, υπάρχουν 6 τρόποι που ο Θανάσης παίρνει το 13.

Άρα, οι τρόποι που ο Δημήτρης παίρνει το 7 και ο Θανάσης δεν παίρνει το 13 είναι 24 – 6 = 18. Επομένως η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης το 7 και να μην πάρει ο Θανάσης το 13 είναι:

$$\frac{18}{120}=\frac{3}{20}$$

β) Οι τρόποι να μοιραστούν οι 5 από τις 7 εμφανίσεις στους 5 μαθητές είναι 7*6*5*4*3=2520 και οι διαφορετικοί τρόποι για να λάβει ο Δημήτρης τη φανέλα με το νούμερο 7 είναι σε πλήθος:

6*5*4*3=36 τρόποι

Επομένως η πιθανότητα είναι $\frac{360}{2520}=\frac{1}{7}$. Ο Δημήτρης παίρνει τη φανέλα με το νούμερο 7 και ο Θανάσης τη φανέλα με το νούμερο 13 με 5*4*3=60 τρόπους.

Άρα οι τρόποι ο Δημήτρης να πάρει τη φανέλα με το νούμερο 7 και ο Θανάσης να μην πάρει τη φανέλα με το νούμερο 13 είναι σε πλήθος: 360 – 60 = 300 τρόποι. Επομένως η πιθανότητα ο Δημήτρης να πάρει τη φανέλα με το νούμερο 7 και ο Θανάσης να μην πάρει τη φανέλα με το νούμερο 13 είναι: $\frac{300}{2520}=\frac{5}{42}$

Άσκηση 12 - Λύση

Για να επιλέξουμε 3 θέσεις από 7 θέσεις, έχουμε: 7*6*5*4*3*2=5040 τρόπους.

Οι τρόποι να επιλέξουμε τις 3 θέσεις ανάμεσα από 4 θέσεις είναι 4*3*2=24.

Επομένως η πιθανότητα είναι ίση με: $\frac{24}{5040}$ =0,0047.

Αυτή είναι η πιθανότητα να μείνει μια συγκεκριμένη θέση κενή, είτε είναι η πρώτη, είτε είναι η τελευταία.

Άσκηση 13 - Λύση

Πρόκειται για 7 παιδιά. Το πλήθος των τρόπων να μπουν στην σειρά είναι:

7*6*5*4*3*2*1=5.040 τρόποι

Θα βρούμε τους τρόπους να βρίσκονται στη σειρά 4 αγόρια, δίπλα-δίπλα. Είναι 4*3*2*1=24.

Κάνουμε το ίδιο για τα κορίτσια. Το πλήθος είναι 3*2*1=6.

Για κάθε τρόπο να τοποθετηθούν τα αγόρια έχουμε 6 τρόπους να τοποθετηθούν τα κορίτσια. Άρα οι συνολικοί τρόποι, αν μπουν αριστερά τα αγόρια και δεξιά τα κορίτσια, είναι 24*6=144 .

Αν μπουν αριστερά τα κορίτσια και δεξιά τα αγόρια έχουμε άλλους 144 τρόπους. Άρα συνολικά έχουμε 288 τρόπους να μπουν όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια.

Επομένως η πιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια είναι: $\frac{288}{5040}=\frac{2}{35}$.

Αν μπουν αριστερά τα κορίτσια και δεξιά τα αγόρια έχουμε άλλους 144 τρόπους. Άρα συνολικά έχουμε 288 τρόπους να μπουν όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια.

Επομένως η πιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια είναι:

$$\frac{288}{5040}=\frac{2}{35}$$

Άσκηση 14 - Λύση

Αν 4 παιδιά έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές εποχές, τότε έχουν γεννηθεί στις 4 εποχές με:

4*3*2*1=24 τρόποι

Οι τρόποι να έχουν γεννηθεί τα παιδιά στις 4 εποχές είναι 4^4 = 256 .

Άρα η πιθανότητα είναι ίση με: $\frac{24}{256}$ = 0,09

Άσκηση 15 - Λύση

Το πλήθος των τρόπων που μπορούν να καθίσουν τα 10 παιδιά είναι 10! . Άρα:

10*9*8*7*6*5*4*3*2*1=3628800

Έστω ότι επιλέγουμε πρώτα τις 2 θέσεις, από τις 10, που θα καθίσουν ο Κώστας και η Ελένη, βάζοντας πρώτα τον Κώστα στην πρώτη θέση που θα επιλέξουμε και την Ελένη στηδεύτερη. Για να επιλέξουμε τη θέση του Κώστα έχουμε 10 τρόπους.

Αν επιλέξουμε την πρώτη από τις 10 θέσεις, τότε η Ελένη έχει μόνο μία επιλογή, τη $2^η$ θέση, γιατί υποθέσαμε εξαρχής ότι επιλέγουμε τις 2 πρώτες θέσεις. Ανεπιλέγουμε την τελευταία από τις 10 θέσεις, τότε η Ελένη έχει μόνο μία επιλογή, την $9^η$θέση. Για κάθε μία από τις υπόλοιπες 8 ενδιάμεσες θέσεις για τον Κώστα, η Ελένη έχει 2 επιλογές, την προηγούμενη και την επόμενη (την ν-1 και την ν+1 θέση).

Επομένως, συνολικά υπάρχουν 1+1+2*8=18 διαφορετικές τοποθετήσεις του Κώστα και της Ελένης δίπλα-δίπλα.Για κάθε μία από αυτές τις τοποθετήσεις έχουμε 8*7*6*5*4*3*2*1=40320 τρόπους νακαθίσουν τα υπόλοιπα 8 παιδιά, στις υπόλοιπες 8 θέσεις.

Οι τρόποι να καθίσουν τα παιδιά, ώστε ο Κώστας και η Ελένη να είναι σε διπλανές θέσεις είναι:

18*40320=725760 τρόποι

Άρα, τελικά οι πιθανότητα να καθίσουν ο Κώστας και η Ελένη σε διπλανές θέσεις είναι ίση με:

$$\frac{725760}{3628800} = 0,2$$

Άσκηση 16 - Λύση

i) Μια στήλη ΠΡΟΠΟ είναι μια 13-άδα, στην οποία κάθε θέση μπορεί να συμπληρωθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, υπάρχουν συνολικά 3^{13} = 1.594.323 διαφορετικές στήλες.

ii) • Ευνοϊκή περίπτωση για το Α είναι κάθε στήλη στην οποία καθεμιά από τις 12 θέσεις συμπληρώνεται με το σωστό αποτέλεσμα και η εναπομένουσα θέση συμπληρώνεται με λαθεμένη πρόβλεψη.

Υπάρχουν $\binom{13}{12}$ τρόποι για να επιλέξουμε τους 12 αγώνες που συμπληρώνονται με το σωστό αποτέλεσμα, και 2 τρόποι για να συμπληρώσουμε τον αγώνα που απομένει με λάθος πρόβλεψη.

Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το Α είναι N(A) = $\binom{13}{12}$ *2 .

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{13}{12}*2}{1.594.323} = \frac{26}{1.594.323}$$

• Ευνοϊκή περίπτωση για το Β είναι κάθε στήλη στην οποία καθεμιά από τις 11 θέσεις συμπληρώνεται με το σωστό αποτέλεσμα και καθεμιά από τις υπόλοιπες 2 θέσεις συμπληρώνεται με μια λαθεμένη πρόβλεψη. Υπάρχουν $\binom{13}{11}$ τρόποι για να επιλέξουμε τις 11 θέσεις με το σωστό αποτέλεσμα και 2 τρόποι για να συμπληρώσουμε καθεμιά από τις υπόλοιπες 2 θέσεις με λαθεμένη πρόβλεψη.

Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το Β είναι N(B) = $\binom{13}{11}$ *2*2.

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{13}{11}*2*2}{1.594.323} = \frac{312}{1.594.323}$$

Άσκηση 17 - Λύση

Επειδή τελικά δεν έχει σημασία η σειρά κλήρωσης του κάθε αριθμού, οι δυνατές περιπτώσεις του πειράματος είναι τόσες όσοι και οι συνδυασμοί των 49 ανά 6, δηλαδή $N(\Omega) = \binom{49}{6}$.

Για να βρούμε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων σκεφτόμαστε ως εξής:

Υπάρχουν $\binom{6}{4}$ τρόποι για να επιλέξουμε 4 σωστά νούμερα από τα 6 που κληρώθηκαν. Στη συνέχεια μένουν $\binom{49-6}{6-4}=\binom{43}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα 2 λάθος νούμερα. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι $N(A)=\binom{6}{4}\binom{43}{2}$.

Άρα:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13545}{13983816}$$

Άσκηση 18 - Λύση

Αν Α είναι το ενδεχόμενο "δύο τουλάχιστον μαθητές να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα", τότε - είναι το ενδεχόμενο "οι κ μαθητές να έχουν γενέθλια σε διαφορετικές μέρες" και ισχύει P(A) =1− P(A').

Επομένως ο υπολογισμός της P(A)ανάγεται στον υπολογισμό της P(A') . Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων του πειράματος είναι:

$$N(\Omega) = 365*365*365...365 = 365^{\kappa}$$

αφού ένας μαθητής μπορεί να έχει γεννηθεί σε μια από τις 365 μέρες του έτους. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις για το A' είναι σε πλήθος: 365 (365 −1) (365 − 2)...[(365 − (κ −1)], αφού οι κ μαθητές πρέπει να έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές μέρες του έτους.

Επομένως:

$$P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{365\ (365-1)\ \ (365-2)\ldots[(365-(\kappa-1)]}{365^{\kappa}} = \frac{365*364*\ldots*(365-\kappa+1)}{365^{\kappa}}$$

Άσκηση 19 - Λύση

Για να φτιάξουμε έναν αριθμό, πρέπει να συμπληρώσουμε τις θέσεις μιας τετράδας.

Επειδή τα ψηφία μπορεί να επαναλαμβάνονται, κάθε θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 5 τρόπους και επομένως μπορούμε να φτιάξουμε $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 54$ διαφορετικούς αριθμούς.

Οι τετραψήφιοι αριθμοί με διαφορετικά ψηφία είναι όσες και οι διατάξεις των 5 ανά 4, δηλαδή $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{54} = \frac{24}{125} = 0{,}192$$

Άσκηση 20 - Λύση

Το πλήθος των μεταθέσεων των ν στοιχείων είναι ν!.

Το πλήθος των μεταθέσεων που αρχίζουν με 1 είναι $(\nu - 1)!$ και επομένως αυτές που δεν αρχίζουν με 1 είναι $\nu! - (\nu - 1)! = (\nu - 1)! \cdot \nu - (\nu - 1)! = (\nu - 1)!(\nu - 1)$

Άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου μια τυχαία από τις ν! μεταθέσεις να μην αρχίζει από 1 είναι ίση με:

$$\frac{(\nu - 1)!(\nu - 1)}{(\nu - 1)! \cdot \nu} = \frac{\nu - 1}{\nu}$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 - Λύση

Έστω O_1, O_2, O_3 οι οδηγοί και K_1, K_2, K_3 αντιστοίχως τα κλειδιά τους. Οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορεί να διανεμηθούν τα κλειδιά στους οδηγούς φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

O_1	O_2	O_3
K_1	K_2	K_3
K_1	K_3	K_2
K_2	K_1	K_3
K_2	K_3	K_1
K_3	K_1	K_2
K_3	K_2	K_1

• Επειδή το ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται μια μόνο φορά, έχουμε P(A) = $\frac{1}{6}$.

• Επειδή το ενδεχόμενο Β πραγματοποιείται τρεις φορές, έχουμε P(B) = $\frac{3}{6}$.

• Επειδή το ενδεχόμενο Γ πραγματοποιείται δύο φορές, έχουμε P(Γ) = $\frac{2}{6}$.

Άσκηση 2 - Λύση

Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε από 10 + 12 = 22 μαθητές να επιλέξουμε 3 είναι $\binom{22}{3}$.

Αν όλοι οι μαθητές είναι αγόρια, τότε υπάρχουν $\binom{12}{3}$ τρόποι επιλογής, ενώ αν όλοι είναι κορίτσια, τότε υπάρχουν $\binom{10}{3}$ τρόποι επιλογής.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$\frac{\binom{12}{3}+\binom{10}{3}}{\binom{22}{3}} = \frac{220+120}{1540} = \frac{17}{77}$$

Άσκηση 3 - Λύση

Σε 4 ρίψεις ενός ζαριού το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι 6·6·6·6 =6^4. Το ενδεχόμενο να μη φέρουμε 6 στις 4 ρίψεις ενός ζαριού έχει 5·5·5·5 = 5^4 ευνοϊκές περιπτώσεις. Επομένως η πιθανότητα να φέρουμε ένα τουλάχιστον 6 στις 4 ρίψεις ενός ζαριού είναι ίση με

$$1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296} = 0{,}518$$

Σε 24 ρίψεις δύο ζαριών το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι 36* 36*...* 36= 36^{24}. Το ενδεχόμενο να μη φέρουμε εξάρες στις 24 ρίψεις δύο ζαριών έχει:

35* 35*...* 35= 35^{24} ευνοϊκές περιπτώσεις

Επομένως η πιθανότητα να φέρουμε μια τουλάχιστον φορά εξάρες στις 24 ρίψεις δύο ζαριών είναι ίση με: $1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 1 – 0{,}5086 = 0{,}491$.

Παρατηρούμε ότι 0,518 > 0,491, δηλαδή η πιθανότητα να φέρουμε ένα τουλάχιστον 6 στις 4 ρίψεις ενός ζαριού είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να φέρουμε μια τουλάχιστον φορά εξάρες στις 24 ρίψεις δύο ζαριών.

Άσκηση 4 - Λύση

• Κάθε τρίγωνο θα έχει τις δύο κορυφές του στη μια ευθεία και την τρίτη κορυφή του στην άλλη ευθεία. Από τα 10 σημεία της ε_1 μπορούμε να επιλέξουμε δύο ως κορυφές ενός

τριγώνου με $\binom{10}{2}$ τρόπους. Η τρίτη κορυφή του τριγώνου μπορεί να επιλεγεί με τόσους τρόπους, όσα είναι τα σημεία που έχουμε ορίσει στην ε_2, δηλαδή με 20 τρόπους.

Επομένως υπάρχουν $20\binom{10}{2}$ τρίγωνα με τις δύο κορυφές τους στην ε_1 και την τρίτη στην ε_2.

Ανάλογα βρίσκουμε ότι υπάρχουν $10\binom{10}{2}$τρίγωνα με τις δύο κορυφές στην ε_2 και την τρίτη στην ε_1.

Άρα υπάρχουν συνολικά:

$$20\binom{10}{2}+10\binom{10}{2} = 2.800 \text{ τρίγωνα}$$

- Επειδή, όπως είδαμε, υπάρχουν $20\binom{10}{2}$ τρίγωνα με τη μια πλευρά τους στην ε_1, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$\frac{20\binom{10}{2}}{20\binom{10}{2}+10\binom{10}{2}} = \frac{900}{2800} = \frac{9}{28}$$

Άσκηση 5 - Λύση

Μπορούμε να κρεμάσουμε 3 κορνίζες σε 3 καρφιά με 3^3 = 27 τρόπους.

Άσκηση 6 - Λύση

Α) 10*9*8*7*6 = 30.240 τρόποι

Β) 10*9*8*7*2 = 10.080 τρόποι

Οι αριθμοί που είναι πολλαπλάσιοι του 5, τελειώνουν σε 0 ή σε 5.

Άρα, γι'αυτό βάζουμε το 2 στο τέλος.

Γ) 2 * (10-2)*(9-2) * (8-2) * (7-2) = 3.360 τρόποι

Βάζουμε το 2 μπροστά γιατί ο αριθμός αρχίζει με 1 ή 2.

Εφόσον δεν θέλουμε επανάληψη ψηφίου, αφαιρούμε κάθε φορά το 2 από τις υπόλοιπες θέσεις.

Δ) 10*10*10*10*10 = 100.000 τρόποι.

Άσκηση 7 - Λύση

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20*19*18*17!}{3!17!} = 1.140 \text{ τρόποι}$$

Άσκηση 8 - Λύση

Τα 52 φύλα μπορούν να μεταθετούν 52! Τρόπους.

Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι τα 6 πρώτα φύλλα είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Τα υπόλοιπα 46 φύλα έχουν μεταθετεί με 46! τρόπους. Όμως για κάθε έναν από αυτούς τους 46! τρόπους, υπάρχουν 6! τρόποι ναβρεθούν τα 6 πρώτα φύλλα που είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Συνεπώς, έχουμε **6!· 46!** τρόπους. Άρα:

$$P(A) = \frac{6!\cdot 46!}{52!} = \frac{6!\cdot 46!}{52*51*50*49*48*47*46!} = \frac{360}{14.658.134.400}.$$

Άσκηση 9 - Λύση

Οι επιλογές μου είναι: $\binom{2}{1} + \binom{3}{2} = 2 + 3 = 5$ επιλογές .

Άσκηση 10 - Λύση

Η τάξη έχει συνολικά 8+12 = 20 παιδιά.

Α) Επιλέγω τυχαία 3 άτομα. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20*19*18*17!}{3!17!} = 1.140$ τρόπους.

Β) Αν όλοι οι μαθητές είναι αγόρια, τότε υπάρχουν $\binom{8}{3}$ τρόποι επιλογής, ενώ αν όλοι είναι κορίτσια, τότε υπάρχουν $\binom{12}{3}$ τρόποι επιλογής . Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$\frac{\binom{8}{3}+\binom{12}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{56+220}{1140} = \frac{276}{1140} = 0,24$$

Κεφάλαιο 2 : Στατιστική

2.1. Πληθυσμός – Δείγμα - Μεταβλητές

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 - Λύση

1) Όλοι οι δημότες της πόλης

2) Οι 500 δημότες που ρωτήθηκαν

3) Το σημαντικότερο πρόβλημα της πόλης

Άσκηση 2 - Λύση

1) Ένα δείγμα υπαλλήλων μιας εταιρείας θα μπορούσε να εξεταστεί ως προς τις αμοιβές τους.

Τότε η μεταβλητή είναι «ύψος αμοιβής», είναι ποσοτική και μερικές τιμές της θα μπορούσε να είναι 580, 750, 1250, 2500 Ευρώ. Ωστόσο, το ίδιο δείγμα υπαλλήλων θα μπορούσε να εξεταστεί ως προς τις σπουδές. Η μεταβλητή θα μπορούσε να είναι «επίπεδο σπουδών», που είναι ποιοτική και μερικέ τιμές της θα μπορούσαν να είναι: «απολυτήριο Γυμνασίου», «απολυτήριο Λυκείου», «πτυχίο ανώτατης εκπαίδευσης», «μεταπτυχιακό δίπλωμα», «διδακτορικό δίπλωμα» κ.α. Ή θα μπορούσε να είναι «κατεύθυνση σπουδών» που είναι ποιοτική και μερικές τιμές της είναι «οικονομικές», «μηχανικού», «διοικητικού» κ.α.

2) Ένα δείγμα προϊόντων θα μπορούσε να εξεταστεί με μεταβλητή την ποιότητα (ποιοτική μεταβλητή) και τιμές της θα μπορούσε να είναι: «αποδεκτό» και «απορριπτέο». Αλλά θα μπορούσε να εξεταστεί και με μεταβλητή το βάρος (ποσοτική μεταβλητή). Ομοίως για τα ερωτήματα 3, 4.

Άσκηση 3 - Λύση

Πρώτη στήλη: κατηγορία (είδος) οχήματος – ποιοτική μεταβλητή.

Δεύτερη στήλη: χρώμα οχήματος – ποιοτική μεταβλητή.

Τρίτη στήλη: ταχύτητα οχήματος στο συγκεκριμένο σημείο τη στιγμή της καταγραφής ποσοτική μεταβλητή.

Τέταρτη στήλη: πλήθος επιβατών τη στιγμή της καταγραφής – ποσοτική μεταβλητή.

Σχόλιο: Η ταχύτητα του οχήματος θα μπορούσε να θεωρηθεί συνεχής ή διακριτή μεταβλητή (ανάλογα με το αν «επιτρέπουμε» ή όχι όλες τις τιμές μεταξύ δύο ακέραιων αριθμών). Αντιθέτως, το πλήθος επιβατών προφανώς δεν μπορεί να θεωρηθεί συνεχής.

Άσκηση 4 - Λύση

Το δείγμα (οι τηλεθεατές που απάντησαν) δεν είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού της χώρας, αφού καθορίζεται από το ποιοι προτιμούν να βλέπουν τηλεόραση και ποιοι προτιμούν το συγκεκριμένο τηλεοπτικό κανάλι, ποια ώρα διεξάγεται η έρευνα, τον τρόπο ψηφοφορίας (τηλέφωνο, διαδίκτυο, κλπ), κοκ.

Άσκηση 5 - Λύση

Παραδείγματα ποιοτικών μεταβλητών: Χρώμα αυτοκινήτων , Φόβος , Πείνα.

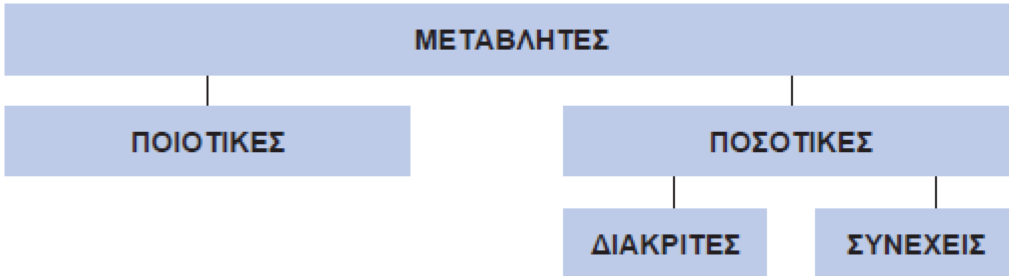
Παραδείγματα ποσοτικών μεταβλητών: Ο αριθμός των μελών μιας οικογένειας (1 άτομο,2 άτομα, 6 άτομα), η τιμή ενός αντικειμένου ($ 100, $ 200, $ 300), το βάρος ή η μάζα ενός σώματος (5 kg, 10 kg, 15 kg).

Άσκηση 6 - Λύση

Δείγμα είναι ένα μέρος του πληθυσμού που είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού και το εξετάζουμε για την έρευνά μας.

Μεταβλητές είναι τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε τα άτομα ενός πληθυσμού. Συμβολίζονται με ένα κεφαλαίο γράμμα Χ, Υ, Ζ, ... κλπ . Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται **τιμές της μεταβλητής**.

Οι μεταβλητές διακρίνονται :



Ποιοτικές αν αναφέρονται σε ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του πληθυσμού και οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί, όπως είναι η ομάδα αίματος (με τιμές Α, Β, ΑΒ, Ο), το φύλο (με τιμές αγόρι, κορίτσι) κλπ .

Ποσοτικές αν αναφέρονται σε ένα ποσοτικό χαρακτηριστικό του πληθυσμού και οι τιμές τους είναι αριθμοί , όπως είναι ο ετήσιος αριθμός των τροχαίων ατυχημάτων, το ύψος των μαθητών κλπ.

- **Διακριτές** αν παίρνουν μεμονωμένες τιμές, όπως είναι ο αριθμός των παιδιών των οικογενειών(με τιμές 0,1,2,...) , το νούμερο των γυναικείων παπουτσιών ανά πόντο κλπ.
- **Συνεχείς** αν μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος (α,β), όπως είναι το βάρος των μαθητών, ο χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές για να απαντήσουν σε ένα διαγώνισμα κλπ.

Άσκηση 7 - Λύση

a) Ποσοτική Διακριτή
b) Ποιοτική
c) Ποσοτική Διακριτή
d) Ποιοτική
e) Ποσοτική Διακριτή
f) Ποσοτική Συνεχής
g) Ποιοτική
h) Ποσοτική Συνεχής
i) Ποσοτική Συνεχής
j) Ποσοτική Συνεχής

Άσκηση 8 - Λύση

α) Μισθός (ποσοτική), ηλικία (διακριτή), φύλο (ποιοτική), ικανοποίηση από τη δουλειά (ποιοτική), κτλ.

β) Βάρος (ποσοτική), ποιότητα (ποιοτική), κτλ.

γ) Χρόνος παρακολούθησης τηλεόρασης (ποσοτική), σταθμός προτίμησης (ποιοτική) κτλ.

δ) Χρόνος συμμετοχής (ποσοτική-συνεχής), αριθμός πόντων (ποσοτική διακριτή), κτλ.

Άσκηση 9 - Λύση

Πρέπει το δείγμα να είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού. Επομένως πρέπει να πάρουμε άτομα (των δύο φύλων και διαφόρων ηλικιών) από διάφορες περιοχές του πληθυσμού για τον οποίο αναφερόμαστε. Σωστό επομένως είναι το (ε) .

Άσκηση 10 - Λύση

α) Με το σχέδιο αυτό θα έχουμε υπερεκτίμηση του αριθμού των ανδρών.

β) Πιθανόν να έχουν τις ίδιες πολιτικές πεποιθήσεις.

γ) Θα έχουμε υπερεκτίμηση του εισοδήματος.

δ) Νέοι δεν είναι μόνο οι μαθητές Λυκείου. Ελλάδα δεν είναι μόνο η Αττική.

ε) Οι λόγοι απουσίας των μαθητών διαφέρουν κατά τη διάρκεια του έτους. Το Νοέμβριο μπορεί να απουσιάζουν λόγω κρυολογήματος, το Μάιο λόγω συμμετοχής σε εξετάσεις.

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 - Λύση

1) Ο πληθυσμός της έρευνας είναι το λύκειο με 120 μαθητές και το δείγμα είναι οι 10 μαθητές που ρώτησε.

2) Η μεταβλητή της έρευνας είναι «το πλήθος των παιδιών που έχουν οι οικογένειες των μαθητών» και είναι Ποσοτική Διακριτή. Οι παρατηρήσιμες τιμές είναι 0,1,2,3 και οι τιμές της μεταβλητής είναι από 0 μέχρι έναν αριθμό α , όπου α το πλήθος των παιδιών στις οικογένειες.

Άσκηση 2 - Λύση

Το καλύτερο θα ήταν να ρωτήσει άτομα από όλα τα δημοτικά διαμερίσματα,ανεξαρτήτου φύλου και ηλικίας άνω των 18 ετών, ώστε να ψηφίζουν. Άρα το (d) .

Άσκηση 3 - Λύση

Αν το δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό, τότε, σε 200 βίδες, οι 5 ήταν ελαττωματικές. Άρα, στις 30.000 βίδες κάθε ημέρα, οι $\frac{5*30.000}{200} = 750$ βίδες θα είναι ελαττωματικές. Άρα, στις 10 ημέρες θα είναι 10*750=7500 βίδες ελαττωματικές.

Άσκηση 4 - Λύση

Α) Ποιοτική

Β) Ποσοτική Διακριτή

Γ) Διακριτή

Δ) Ποσοτική / Συνεχής

Άσκηση 5 - Λύση

Α) Δείγμα

Β) Μεταβλητές

Γ) Τιμές της Μεταβλητής

Δ) Ποιοτικές / Ποσοτικές / Διακριτές / Συνεχείς

Άσκηση 6 - Λύση

Α) Ποιοτική

Β) Ποσοτική Διακριτή

Γ) Ποσοτιή Συνεχείς

Άσκηση 7 - Λύση

Α) Μεταβλητή «δημοσκόπηση για ένα ζήτημα» , είναι Ποιοτική και δεν θα δημιουργήσει αντιπροσωπευτικό δείγμα, γιατί εξαρτάται από το πλήθος των τηλεθεατών που θα καλέσουν για να ψηφίσουν, από την ηλικία, από τον τόπο διαμονής, κλπ.

Β) Μεταβλητή «τρόπος διασκέδασης των νέων στη χώρα μας» , είναι Ποιοτική και δεν θα δημιουργήσει αντιπροσωπευτικό δείγμα, γιατί μπορεί οι νέοι στα Χανιά να διασκεδάζουν εντελώς διαφορετικά από όλους τους άλλους νέους στην Ελλάδα.

Γ) Μεταβλητή «μέσος όρο των παιδιών των οικογενειών της περιοχής μας» , είναι Ποσοτική Διακριτή. Θα μπορούσε να δημιουργήσει ένα μικρό αντιπροσωπευτικό δείγμα, καθώς ρωτάμε τους μαθητές 2 σχολείων,δηλαδή ένας οικονοποιητικός αριθμός πληθυσμού, και οι απαντήσεις θα αντιπροσωπεύουν το μέσο όρο στην Ελλάδα.

2.2. Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 - Λύση

Για τον λόγο ότι η δεύτερη στήλη φαίνεται περίπου διπλάσια στο ύψος από την πρώτη στήλη, δόθηκε η λανθασμένη ερμηνεία. Όμως αυτό που πραγματικά φαίνεται είναι το άνω τμήμα των στηλών, αφού ο άξονας των τεταγμένων αρχίζει από το 500. Έτσι, το πραγματικό ύψος της πρώτης στήλης είναι 508, ενώ της δεύτερης είναι 517. Επομένως ο αριθμός των ληστειών αυξήθηκε μόνο κατά 9 σε σύνολο 500 και πλέον ληστειών. Το γεγονός αυτό δε δικαιολογεί την παραπάνω ερμηνεία.

Άσκηση 2 - Λύση

1) Για το ραβδόγραμμα μια ερώτηση με εύκολη απάντηση μπορεί να είναι: «Πόσες φορές περισσότερα είναι τα άτομα που το αγαπημένο τους κατοικίδιο ζώο είναι ο σκύλος σε σχέση με αυτά που είναι η χελώνα»;

2) Για το κυκλικό διάγραμμα μια ερώτηση με εύκολη απάντηση μπορεί να είναι: «Ποιο είναι το ποσοστό των ατόμων που το αγαπημένο τους κατοικίδιο ζώο είναι ο σκύλος»;

Άσκηση 3 - Λύση

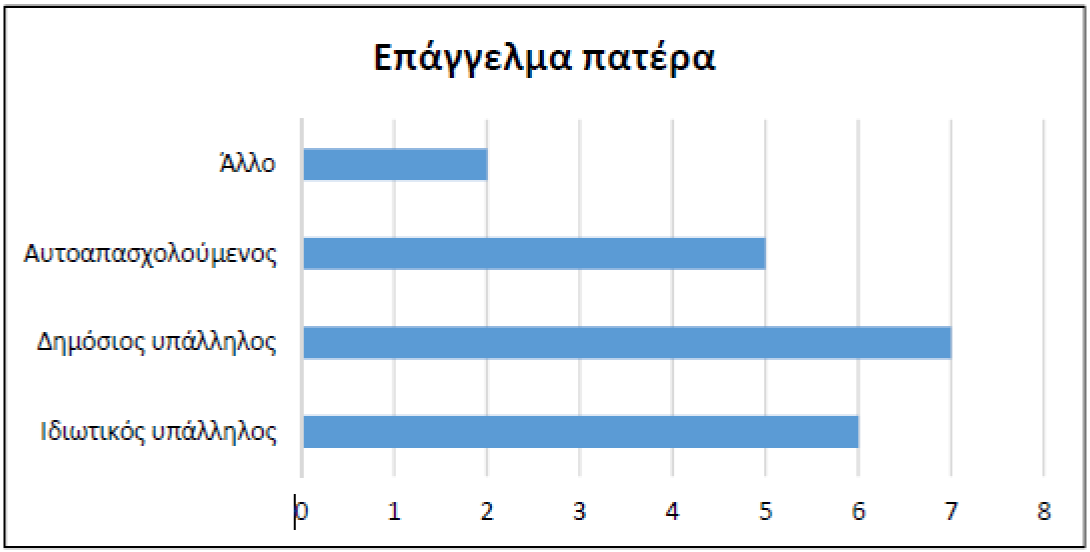
Οι σχετικές συχνότητες είναι: $f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{6}{20} = 0{,}3$ και $f_1\% = 30\%$.

Ομοίως, $f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{7}{20} = 0{,}35$ και $f_2\% = 35\%$. Ομοίως βρίσκονται και τα υπόλοιπα.

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας σχετικών συχνοτήτων:

Επάγγελμα πατέρα	Αριθμός ατόμων	σχετική συχνότητα	σχετική συχνότητα %
Ιδιωτικός υπάλληλος	6	0,3	30%
Δημόσιος υπάλληλος	7	0,35	35%
Αυτοαπασχολούμενος	5	0,25	25%
Άλλο	2	0,1	10%
Σύνολο	20	1,0	100%

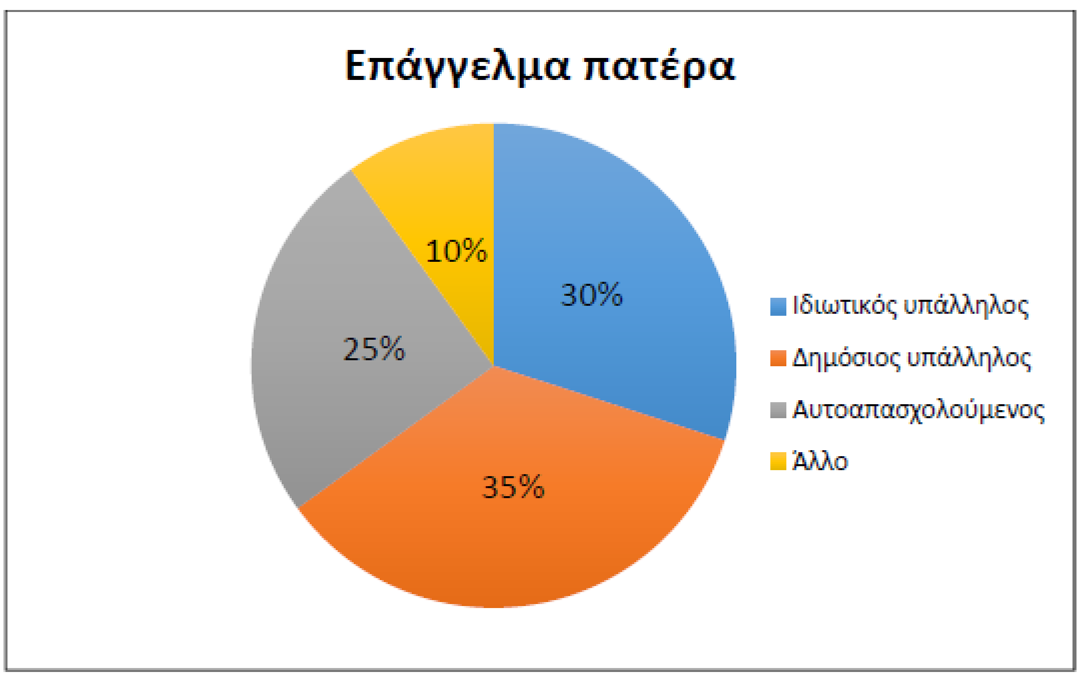
Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων και το κυκλικό διάγραμμα φαίνονται παρακάτω:



Για το ραβδόγραμμα:

Μετράμε για κάθε μια κατηγορία τον αριθμό των ατόμων (ν_i) και έτσι φτιάχνουμε το ραβδόγραμμα.

Δηλαδή: $\nu_{\alpha\lambda\lambda o}$ = 2 , $\nu_{\alpha\upsilon\tau o\alpha\pi\alpha\sigma\chi o\lambda o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\nu o\varsigma}$= 5 , $\nu_{\delta\eta\mu o\sigma\iota o\varsigma\ \upsilon\pi\alpha\lambda\lambda\eta\lambda o\varsigma}$=7 , $\nu_{\iota\delta\iota\omega\tau\iota\kappa o\varsigma\ \upsilon\pi\alpha\lambda\lambda\eta\lambda o\varsigma}$= 6 .



Πώς υπολογίζουμε τις επίκεντρες γωνίες του κυκλικού διαγράμματος;

Γνωρίζουμε ότι: $\alpha_i = 360° \cdot f_i$. Άρα:

- $\alpha_{άλλο} = 360° \cdot f_{αλλο} = 360°*0{,}1 = 36°$
- $\alpha_{αυτοαπασχολουμενος} = 360° \cdot f_{αυτοαπασχολουμενος} = 360°*0{,}25 = 90°$
- $\alpha_{δημοσιος\ υπαλληλος} = 360° \cdot f_{δημοσιος\ υπαλληλος} = 360°*0{,}35 = 126°$
- $\alpha_{ιδιωτικός\ υπαλληλος} = 360° \cdot f_{ιδιωτικός\ υπαλληλος} = 360°*0{,}3 = 108°$

Άσκηση 4 - Λύση

Το χρονόγραμμα φαίνεται παρακάτω:

Δηλαδή, στον κάθετο άξονα τοποθετούμε τα κέρδη, στον οριζόντιο άξονα τοποθετούμε τα έτη, και στη συνέχεια κατασκευάζουμε τα σημεία (έτος,κέρδη) και ενώνουμε τα σημεία.

Άσκηση 5 - Λύση

Οι επεμβάσεις σε ανελκυστήρες είναι το 27% των 60.400 κλήσεων, άρα είναι:

27% * 60400 = 16308 , και ομοίως υπολογίζουμε για τις υπόλοιπες κατηγορίες κλήσεων.

Δηλαδή 21%*60400=12.684 κλήσεις για παροχές βοήθειας, 47%*60400=28388 για κλήσεις πυρκαγιές και 5%*60400=3020 για κλήσεις ψευδών αγγελιών.

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων:

κατηγορίες κλήσεων	Αριθμός κλήσεων	σχετική συχνότητα %
Επεμβάσεις σε ανελκυστήρες	16.308	27%
Παροχές βοήθειας	12.684	21%
Πυρκαγιές	28.388	47%
Ψευδείς αγγελίες	3.020	5%
Σύνολο	60.400	100%

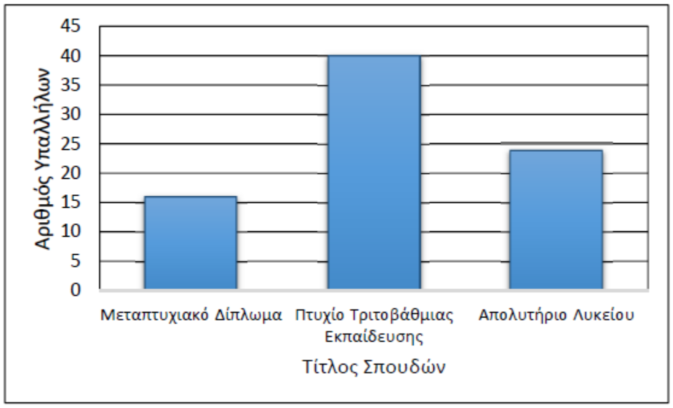
Άσκηση 6 - Λύση

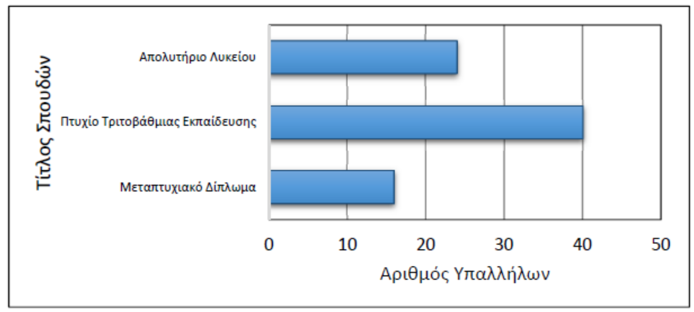
Οι κάτοχοι μεταπτυχιακού διπλώματος είναι το 20% των 80 υπαλλήλων, άρα 20% * 80 = 16 υπάλληλοι. Ομοίως βρίσκουμε ότι πτυχίο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης έχουν 40 υπάλληλοι(50%*80) και απόφοιτοι Λυκείου είναι 24 υπάλληλοι (30%*80). Κατασκευάζουμε έτσι τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων:

Τίτλος Σπουδών (μεταβλητή)	αριθμός υπαλλήλων (συχνότητα)	σχετική συχνότητα	σχετική συχνότητα %
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα	16	0,2	20%
Πτυχίο Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης	40	0,5	50%
Απολυτήριο Λυκείου	24	0,3	30%
Σύνολο υπαλλήλων	80	1,0	100%

Παρακάτω φαίνονται ραβδογράμματα και κυκλικά διαγράμματα που αναπαριστούν αυτά τα δεδομένα. Η επιλογή κάποιου από αυτά εξαρτάται από τους στόχους της παρουσίασης και την προτίμηση αυτού που το παρουσιάζει.

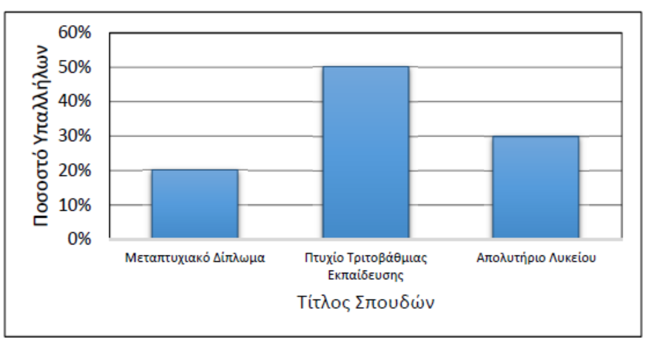
Ραβδογράμματα συχνοτήτων:

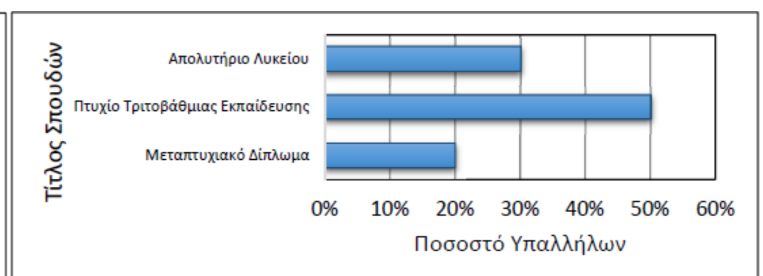




Δηλαδή τοποθετούμε για κάθε υπάλληλο το αντίστοιχο ν_i που έχει, και έτσι κατασκευάζεται το ραβδόγραμμα, είτε με τον αριθμό υπαλλήλων στον κάθετο άξονα, είτε στον οριζόντιο άξονα.

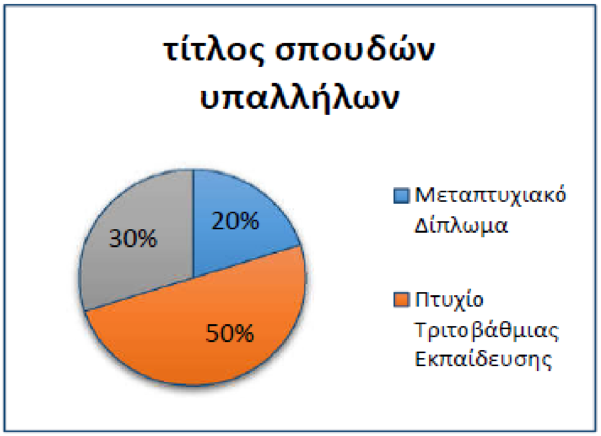
Ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων:

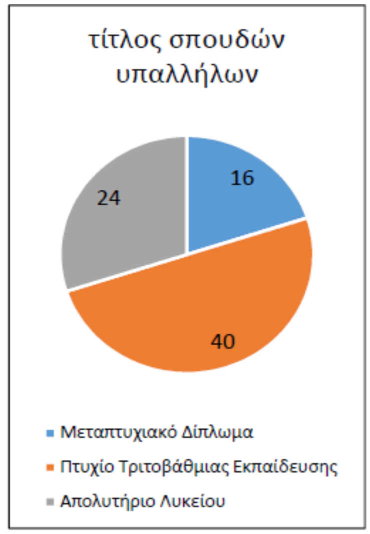




Επειδή ξέρουμε ότι $f_i\%=\frac{\nu_i}{\nu}$, κατασκευάζουμε έτσι το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, είτε με το ποσοστό υπαλλήλων στον κάθετο άξονα, είτε στον οριζόντιο άξονα.

Κυκλικά διαγράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων:





Επειδή ξέρουμε ότι $\alpha_i = \frac{360\nu_i}{\nu}$, βρίσκουμε το κάθε α_i, ώστε να βρούμε την κάθε επίκεντρη γωνία.

Πώς υπολογίζουμε τις επίκεντρες γωνίες του κυκλικού διαγράμματος;

Γνωρίζουμε ότι: $\alpha_i = 360° \cdot f_i$. Άρα:

- $\alpha_{απολυτηριο\ λυκειου} = 360° \cdot f_{απολυτηριο\ λυκειου} = 360°*0{,}3 = 108°$
- $\alpha_{μεταπτυχιακο} = 360° \cdot f_{μεταπτυχιακο} = 360°*0{,}2 = 72°$
- $\alpha_{πτυχιο\ τριτοβαθμιας} = 360° \cdot f_{πτυχιο\ τριτοβαθμιας} = 360°*0{,}5 = 180°$

Για το αριστερό σχήμα, έχουμε:

- $\alpha_{απολυτηριο\ λυκειου} = 360° f_{απολυτηριο\ λυκειου}\% = 30\%$
- $\alpha_{μεταπτυχιακο} = 360^* f_{μεταπτυχιακο}\% = 30\%$
- $\alpha_{πτυχιο\ τριτοβαθμιας} = 360^* f_{πτυχιο\ τριτοβαθμιας}\% = 30\%$

Για το δεξί σχήμα , έχουμε ότι:

- $\alpha_{απολυτηριο\ λυκειου} = \frac{360\nu_{απολυτηριο\ λυκειου}}{\nu} = 24$
- $\alpha_{μεταπτυχιακο} = \frac{360\nu_{μεταπτυχιακο}}{\nu} = 16$
- $\alpha_{πτυχιο\ τριτβαθμιας} = \frac{360\nu_{πτυχιο\ τριτβαθμιας}}{\nu} = 40$

Άσκηση 7 - Λύση

1) Μετά την καταμέτρηση και τους υπολογισμούς, ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων είναι ο ακόλουθος:

βαθμός (μεταβλητή)	αριθμός μαθητών (συχνότητα)	σχετική συχνότητα	σχετική συχνότητα %
14	1	0,04	4%
15	3	0,12	12%
16	7	0,28	28%
17	9	0,36	36%
18	3	0,12	12%
19	2	0,08	8%
Σύνολο	25	1,0	100%

Δηλαδή, μετράμε όλους τους βαθμούς και βγάζουμε ν=25. Μετά μετράμε πόσες φορές εμφανίζεται ο κάθε βαθμός.

Δηλαδή ο αριθμός 14 εμφανίζεται 1 φορά (ν_{14}=1) , ο αριθμός 15 εμφανίζεται 3 φορές (ν_{15}=3) , ο αριθμός 16 εμφανίζεται 7 φορές (ν_{17}=9) , ο αριθμός 18 εμφανίζεται 3 φορές (ν_{18}=3) και ο αριθμός 19 εμφανίζεται 2 φορές (ν_{19}=2) .

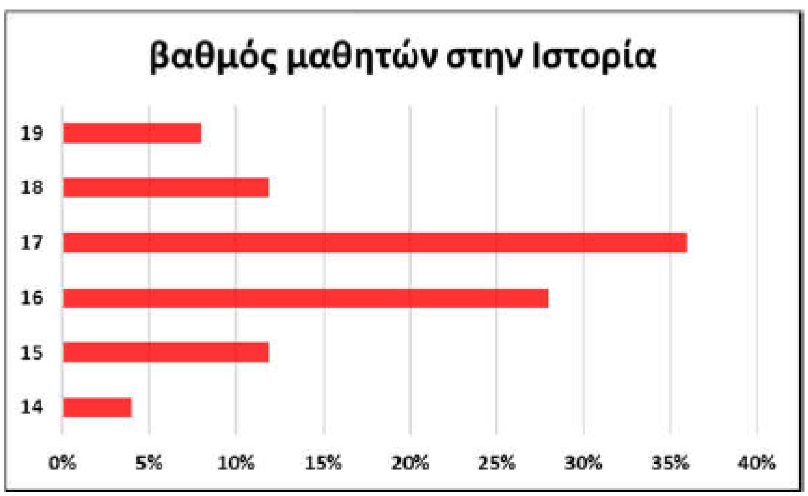
Για τις σχετικές συχνότητες, έχουμε ότι $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$.

Έτσι:

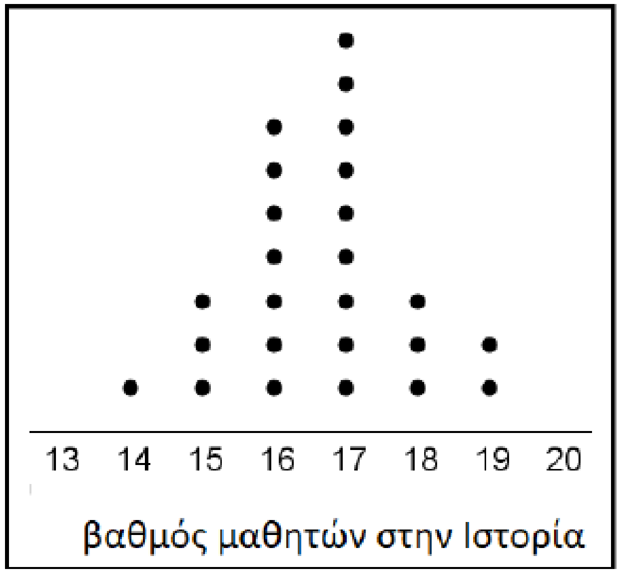
$$f_{14} = \frac{\nu_{14}}{\nu} = 0{,}04\ , \quad f_{15}=0{,}12\ , \quad f_{16}=0{,}28\ , \quad f_{17}=0{,}36\ , \quad f_{18}=0{,}12 \quad \text{και} \quad f_{19}=0{,}08$$

2) **Ραβδόγραμμα συχνοτήτων:**

Ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων:



Σημειόγραμμα:



Δηλαδή, βάζουμε στον οριζόντιο άξονα τους βαθμούς των μαθητών και πάνω από κάθε αριθμό, σημειώνουμε με κουκκίδες το πόσες φορές εμφανίζεται ο αριθμός.

Άσκηση 8 - Λύση

1) Μετά την καταμέτρηση και τους υπολογισμούς, ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων είναι ο ακόλουθος:

ένδειξη ζαριού (μεταβλητή)	συχνότητα	σχετική συχνότητα	σχετική συχνότητα %
1	5	0,167	16,7%
2	6	0,2	20%
3	4	0,133	13,3%
4	5	0,167	16,7%
5	6	0,2	20%
6	4	0,133	13,3%
Σύνολο	30	1,00	100%

Δηλαδή, έχουμε ν=30 και μετράμε κάθε φορά πόσες φορές εμφανίζεται ο κάθε αριθμός.

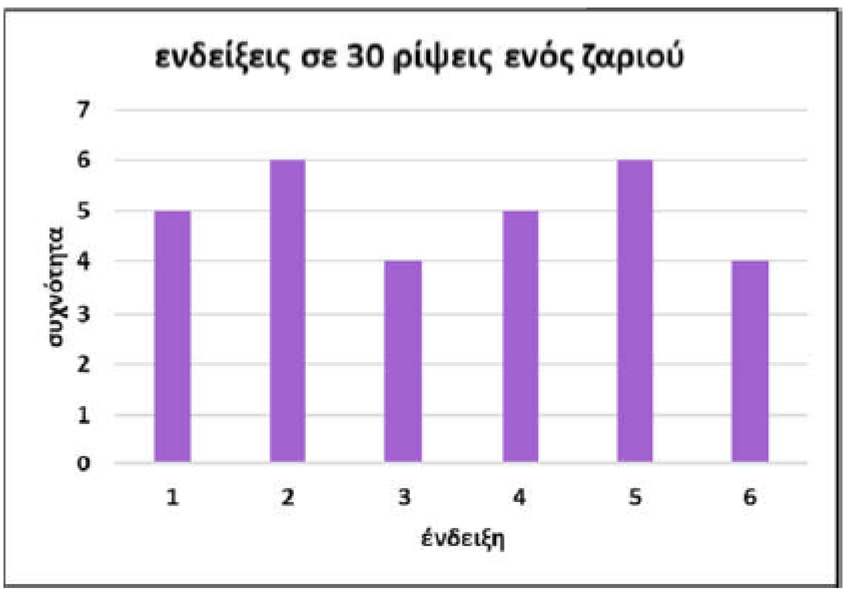
Έτσι, έχουμε:

$$\nu_1 = 5\,,\quad \nu_2 = 6\,,\quad \nu_3 = 4\,,\quad \nu_4 = 5\,,\quad \nu_5 = 6\,,\quad \nu_6 = 4$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις σχετικές συχνότητες από τον τύπο $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$. Έτσι:

$$f_1 = 0{,}167\,,\quad f_2 = 0{,}2\,,\quad f_3 = 0{,}133\,,\quad f_4 = 0{,}167\,,\quad f_5 = 0{,}2 \quad \text{και} \quad f_6 = 0{,}133.$$

2) Το **ραβδόγραμμα συχνοτήτων** φαίνεταιως ακολούθως:

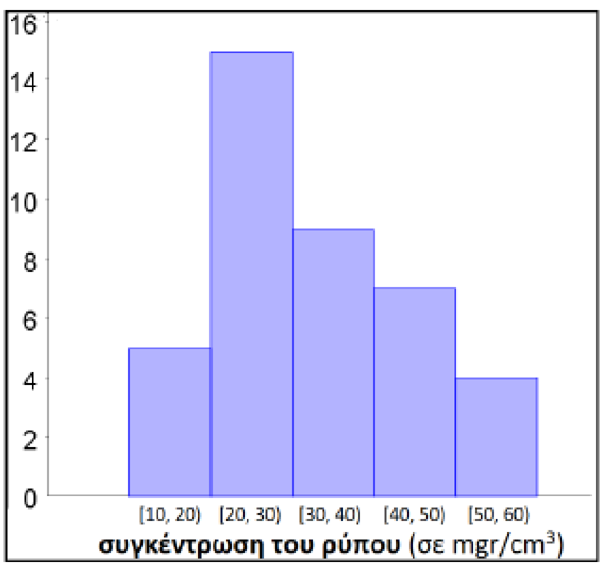


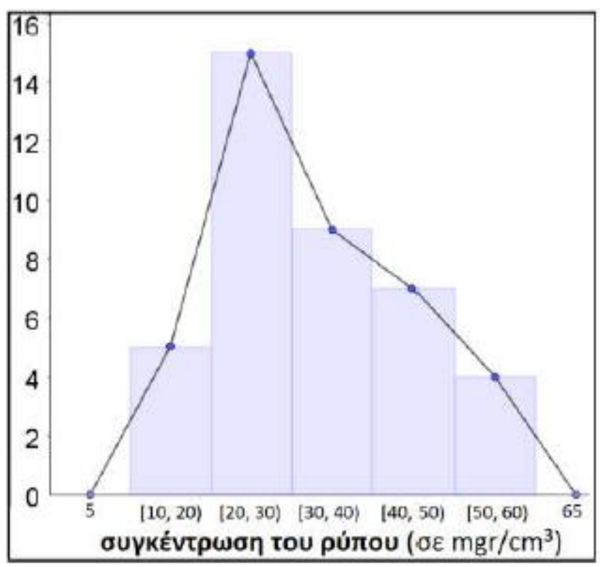
Άσκηση 9 - Λύση

Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων, αντιστοίχως:

συγκέντρωση του ρύπου (σε mgr/cm^3)	**συχνότητα**	**σχετική συχνότητα**	**σχετική συχνότητα** %
[10,20)	5	0,125	12,5%
[20,30)	15	0,375	37,5%
[30,40)	9	0,225	22,5%
[40,50)	7	0,175	17,5%
[50,60)	4	0,1	10%
Σύνολο	40	1,00	100%

Δηλαδή, σε κάθε διάστημα , π.χ. [10,20) μετράμε πόσες φορές εμφανίζεται ένας αριθμός. Έτσι, βρίσκουμε τη συχνότητα του κάθε διαστήματος. Για τη σχετική συχνότητα, όπως και στις προηγούμενες ασκήσεις, υπολογίζεται από τον τύπο: $f_i=\frac{\nu_i}{\nu}$. Ομοίως, για τις σχετικές συχνότητες % , απλά μετατρέπουμε σε ποσοστά τις σχετικές συχνότητες.





Αφού λοιπόν, κατασκευάσουμε το ιστόγραμμα, δηλαδή βάζουμε στον οριζόντιο άξονα τα διαστήματα της συγκέντρωσης του ρύπου και στον κάθετο άξονα τη συχνότητα, μπορούμε μετά να ενώσουμε τα μέσα κάθε κορυφής και να κατασκευάσουμε το πολύγωνο συχνοτήτων.

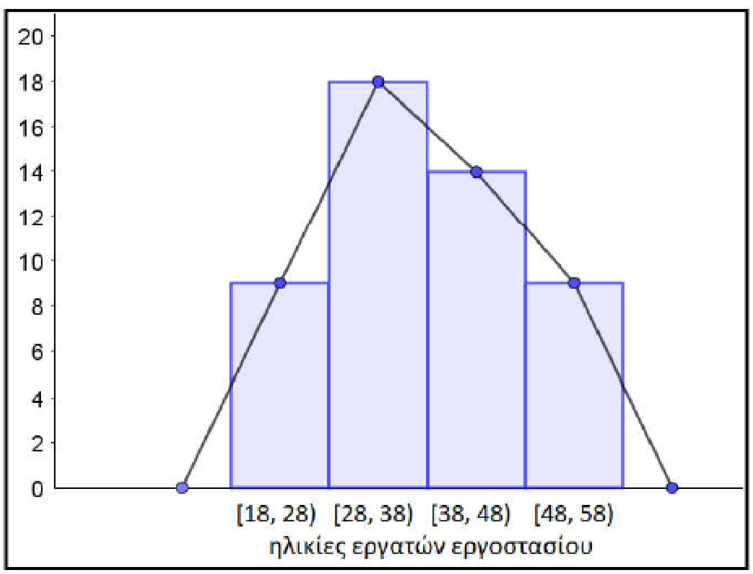
Άσκηση 10 - Λύση

Ο πίνακας συχνοτήτων μετά την ομαδοποίηση διαμορφώνεται ως εξής:

ηλικίες εργατών	συχνότητα	σχετική συχνότητα	σχετική συχνότητα %
[18,28)	9	0,18	18%
[28,38)	18	0,36	36%
[38,48)	14	0,28	28%
[48,58)	9	0,18	18%
Σύνολο	50	1,00	100%

Ομοίως, όπως και στην προηγούμενη άσκηση, υπολογίζουμε τη συχνότητα για κάθε διάστημα ξεχωριστά, έπειτα υπολογίζουμε τη σχετική συχνότητα από τον τύπο $f_i=\frac{\nu_i}{\nu}$ και τέλος, μετατρέπουμε τη σχετική συχνότητα σε ποσοστό για να βρούμε την %σχετική συχνότητα.

Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων φαίνεται παρακάτω:



Αφού λοιπόν, κατασκευάσουμε το ιστόγραμμα, δηλαδή βάζουμε στον οριζόντιο άξονα τα διαστήματα της ηλικίας των εργατών και στον κάθετο άξονα τη συχνότητα, μπορούμε μετά να ενώσουμε τα μέσα κάθε κορυφής και να κατασκευάσουμε το πολύγωνο συχνοτήτων.

Άσκηση 11 - Λύση

Επειδή έχουμε ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων (f_i %) , το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογωνίων θα πρέπει να ισούται με 100.

Το εμβαδόν του πρώτου ορθογωνίου είναι: E_1 = (1− 0) *10 =10

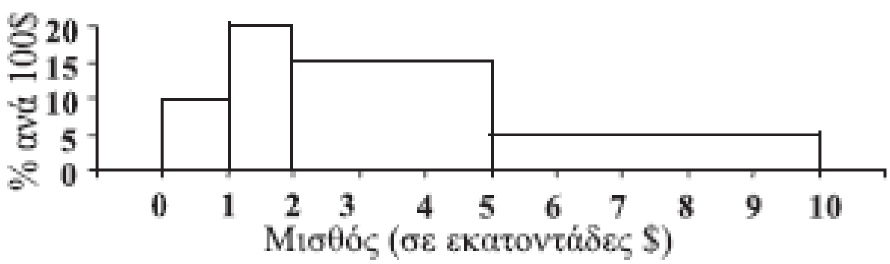
Το εμβαδόν του δεύτερου ορθογωνίου είναι: E_2 = (2 −1) * 20 = 20

Το εμβαδόν του τέταρτου ορθογωνίου είναι: E_4 = (10 − 5) *5 = 25.

Άρα, το εμβαδόν του τρίτου ορθογωνίου θα είναι:

$$E_3 = 100 - (10 + 20 + 25) = 45.$$

Επειδή το πλάτος του ορθογωνίου είναι 5 − 2 = 3, το ύψος του θα είναι 45 / 3 =15, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Άσκηση 12 - Λύση

α) Παριστάνουμε με Χ τη βαθμολογία των φοιτητών. Ο πίνακας κατανομής των συχνοτήτων και των σχετικών συχνοτήτων της μεταβλητής Χ είναι ο εξής:

Βαθμολογία x_i	Διαλογή	Συχνότ. v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστ. συχνότητα N_i	Αθρ. Σχετ. Συχν. $F_i\%$
1	ǀǀǀ	3	6	3	6
2	ǀǀ	2	4	5	10
3	卌	5	10	10	20
4	ǀǀǀ	3	6	13	26
5	卌 ǀǀ	7	14	20	40
6	卌 ǀǀǀǀ	9	18	29	58
7	卌 ǀǀ	7	14	36	72
8	卌 ǀǀ	7	14	43	86
9	卌	5	10	48	96
10	ǀǀ	2	4	50	100
Σύνολο	—	50	100	—	—

Δηλαδή, βρίσκουμε τη συχνότητα για κάθε βαθμολογία, έπειτα υπολογίζουμε τη σχετική συχνότητα από το γνωστό τύπο.

β) i) Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι από τους 50 φοιτητές 13 έχουν βαθμό κάτω από τη βάση. Άρα για $X \leq 4$, το αντίστοιχο ποσοστό είναι $\frac{13}{50} = 0{,}26 = 26\%$ (βλ. τελευταία στήλη $F_i\%$).

ii) Για $X \geq 9$ το αντίστοιχο ποσοστό είναι $\frac{5+2}{50} = \frac{7}{50} = 0{,}14 = 14\%$.

Ισοδύναμα από την τελευταία στήλη το ποσοστό είναι $100\% - 86\% = 14\%$.

iii) Ομοίως, για $7 \leq X \leq 9$ έχουμε τους φοιτητές με βαθμό 7,8 ή 9.

Συνεπώς το αντίστοιχο ποσοστό είναι $\frac{7+7+5}{50} = \frac{19}{50} = 0{,}38 = 38\%$.

Ισοδύναμα από την τελευταία στήλη το ποσοστό αυτό είναι:

$$96\% - 58\% = 38\%$$

Άσκηση 13 - Λύση

Φύλο	Βαθμολογία		Σύνολο
	≤ 5	> 5	
Α	11	18	29
Κ	9	12	21
Σύνολο	20	30	50

Άσκηση 14 - Λύση

α) Διαιρούμε τις συχνότητες των "κελλιών" του πίνακα της άσκησης 13 με το συνολικό αριθμό φοιτητών ν = 50.

Φύλο	Βαθμολογία		Σύνολο
	≤ 5	> 5	
Α	11/50 = 22%	36%	58%
Κ	18%	24%	42%
Σύνολο	40%	60%	100%

Δηλαδή το 22% των φοιτητών είναι αγόρια με βαθμό ≤ 5, κτλ.

β) Διαιρούμε τις συχνότητες των "κελλιών" κάθε γραμμής με το αντίστοιχο σύνολο της γραμμής.

Φύλο	Βαθμολογία		Σύνολο
	≤ 5	> 5	
Α	11/29 = 37,93%	62,07%	100%
Κ	42,86%	57,14%	100%
Σύνολο	—	—	—

Δηλαδή το 37,93% των αγοριών έχουν βαθμό ≤ 5, κτλ.

γ) Διαιρούμε τις συχνότητες των "κελλιών" κάθε στήλης με το αντίστοιχο σύνολο της στήλης.

Φύλο	Βαθμολογία		Σύνολο
	≤ 5	> 5	
Α	11/20 = 55%	60%	—
Κ	45%	40%	—
Σύνολο	100%	100%	—

Δηλαδή το 55% των φοιτητών με βαθμό ≤ 5 είναι αγόρια, κτλ.

Άσκηση 15 - Λύση

Παριστάνουμε με Χ τις ημέρες απουσίας:

α) Είναι Χ ≥1. Άρα έχουμε 8 + 5 + 4 + 5 + 8 + 0 + 5 + 2 + 1 = 38 εργάτες, δηλαδή το $\frac{38}{50}$ = 0,76 = 76% των εργατών απουσίασαν τουλάχιστον μια ημέρα. Ισοδύναμα αυτό μπορεί να βρεθεί αν από τους 50 εργάτες αφαιρέσουμε τους 12 που δεν απουσίασαν ποτέ από την εργασία τους.

β) Είναι Χ > 5. Άρα έχουμε 0 + 5 + 2 + 1 = 8 εργάτες, δηλαδή $\frac{8}{50}$ = 0,16 = 16%.

γ) Είναι 3 ≤ Χ ≤ 5. Άρα έχουμε 4 + 5 + 8 = 17 εργάτες, δηλαδή $\frac{17}{50}$ = 0,34 = 34%.

δ) Είναι Χ ≤ 5. Άρα έχουμε 12 + 8 + 5 + 4 + 5 + 8 = 42 εργάτες, δηλαδή $\frac{42}{50}$ = 0,84 = 84%.

ε) Είναι Χ = 5. Άρα έχουμε 8 εργάτες, δηλαδή $\frac{8}{50}$ = 0,16 = 16%.

Άσκηση 16 - Λύση

Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Α) ν = $\frac{\nu_2}{f_2} = \frac{4}{0{,}20}$ = 20

Β) $N_1 = N_2 - \nu_2$ = 6-4 = 2 = ν_1

Γ) $f_3 = F_3 - F_2$ = 0,60-0,30 = 0,30

Δ) $f_4 = \frac{f_4\%}{100} = \frac{25}{100}$ = 0,25

Ε) $\nu_6 = \nu - N_5$ = 20-19=1

Επομένως ο πίνακας συχνοτήτων είναι ο ακόλουθος:

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	2	0,10	2	0,10	10	10
2	4	0,20	6	0,30	20	30
3	6	0,30	12	0,60	30	60
4	5	0,25	17	0,85	25	85
5	2	0,10	19	0,95	10	95
6	1	0,05	20	1,00	5	100
Σύνολο	20	1,00	—	—	100	—

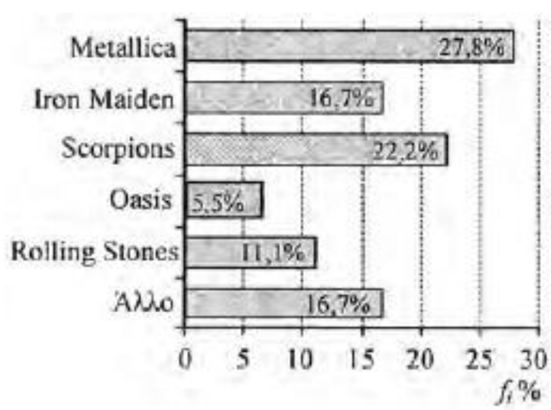
Άσκηση 17 - Λύση

Κατασκευάζουμε πρώτα τον **πίνακα συχνοτήτων**:

Μουσικό συγκρότημα, x_i	v_i	$f_i\%$
Metallica	5	27,8
Iron Maiden	3	16,7
Scorpions	4	22,2
Oasis	1	5,5
Rolling Stones	2	11,1
Άλλο	3	16,7
Σύνολο	18	100,0

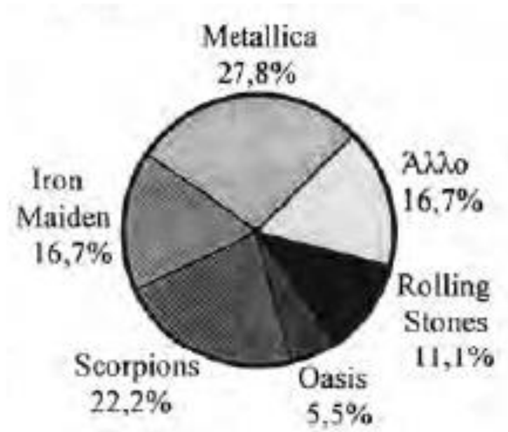
Δηλαδή υπολογίζουμε τη συχνότητα για κάθε συγκρότημα ξεχωριστά, και έπειτα υπολογίζουμε τη σχετική συχνότητα από το γνωστό τύπο. Τέλος, μετατρέπουμε τη σχετική συχνότητα σε % και έτσι βρίσκουμε την επί τοις εκατό σχετική συχνότητα.

Α) **Ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων:**



Δηλαδή, τοποθετούμε στον κάθετο άξονα τα συγκροτήμα και στον οριζόντιο άξονα την %σχετική συχνότητα για το καθένα.

Β) **Το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων:**



Για τον υπολογισμό της κάθε επίκεντρης γωνίας, χρησιμοποιούμε όπως και σε προηγούμενη άσκηση, τον τύπο : $\alpha_i = 360° \cdot f_i$.

Άρα:

- $\alpha_{scorpions} = 360° \cdot f_{scorpions} = 79{,}92°$
- $\alpha_{oasis} = 360° \cdot f_{oasis} = 19{,}8°$
- $\alpha_{rolling\ stones} = 360° \cdot f_{rolling\ stones} = 39{,}96°$
- $\alpha_{\alpha\lambda\lambda o} = 360° \cdot f_{\alpha\lambda\lambda o} = 60{,}12°$
- $\alpha_{metallica} = 360° \cdot f_{metallica} = 100{,}08°$
- $\alpha_{iron\ maiden} = 360° \cdot f_{iron\ maiden} = 60{,}12°$

Άσκηση 18 - Λύση

Εάν ν = 450 το πλήθος των μαθητών, ν_i, i = 1,2,3,4 οι συχνότητες, f_i οι σχετικές συχνότητες και

α_i, i = 1,2,3,4 τα τόξα του κυκλικού διαγράμματος για τις τέσσερις κατηγορίες Άριστα, Λίαν Καλώς, Καλώς και Σχεδόν Καλώς, αντιστοίχως, θα έχουμε $\nu_2 = f_2 \cdot \nu = 0{,}30 \cdot 450 = 135$ και

$$\nu_2 = \frac{\alpha_3 * \nu}{360} = \frac{144*450}{360} = 180.$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τη συχνότητα ν_1 της τιμής X_1 = "Άριστα", χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $\nu_4 = 2\nu_1$:

$$\nu_1 + 135 + 180 + \nu_4 = 450 \Leftrightarrow \nu_1 + 135 + 180 + 2\nu_1 = 450 \Leftrightarrow \nu_1 = \frac{450 - 135 - 180}{3} = 45.$$

Άρα και $\nu_4 = 90$. Έτσι ο πίνακας συχνοτήτων είναι ο ακόλουθος:

i	x_i	ν_i	$f_i\%$	$\alpha_i = \frac{360\nu_i}{\nu}$
1	Άριστα	45	10	36
2	Λίαν Καλώς	135	30	108
3	Καλώς	180	40	144
4	Σχεδόν Καλώς	90	20	72
	Σύνολο	ν=450	100	360

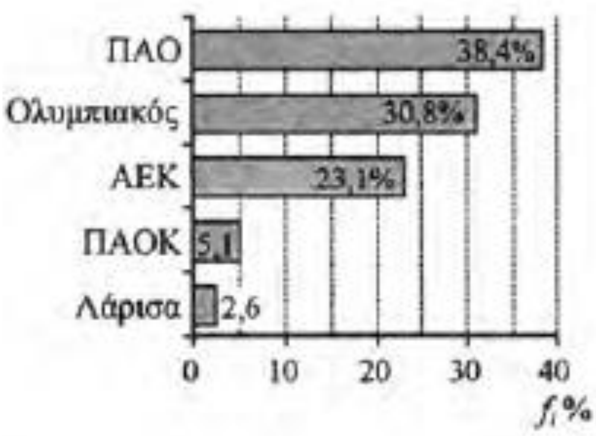
Άσκηση 19 - Λύση

Κατασκευάζουμε πρώτα τον πίνακα συχνοτήτων:

Ομάδα	ν_i	$f_i\%$
ΑΕΚ	9	23,1
Λάρισα	1	2,6
Ολυμπιακός	12	30,8
ΠΑΟ	15	38,4
ΠΑΟΚ	2	5,1
Σύνολο	39	100,0

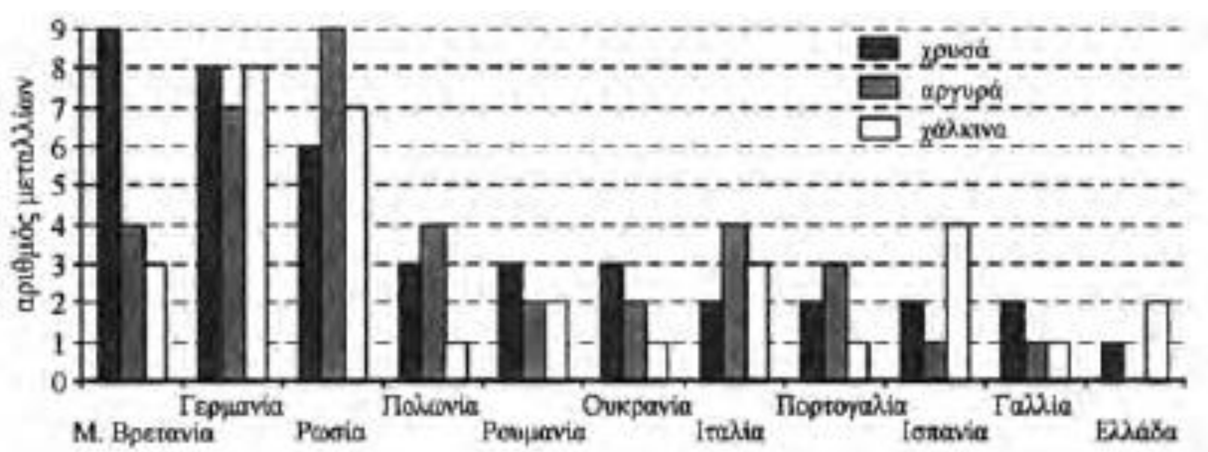
Όπως έχουμε δείξει και στις προηγούμενες ασκήσεις, υπολογίζουμε για κάθε ομάδα ξεχωριστά τη συχνότητα και στη συνέχεια από το γνωστό τύπο $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$, βρίσκουμε τις σχετικές συχνότητες για κάθε ομάδα. Τέλος, απλά μετατρέπουμε τις σχετικές συχνότητες σε ποσοστό και βρίσκουμε έτσι την %σχετική συχνότητα.

Συνεπώς το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων είναι:



Άσκηση 20 - Λύση

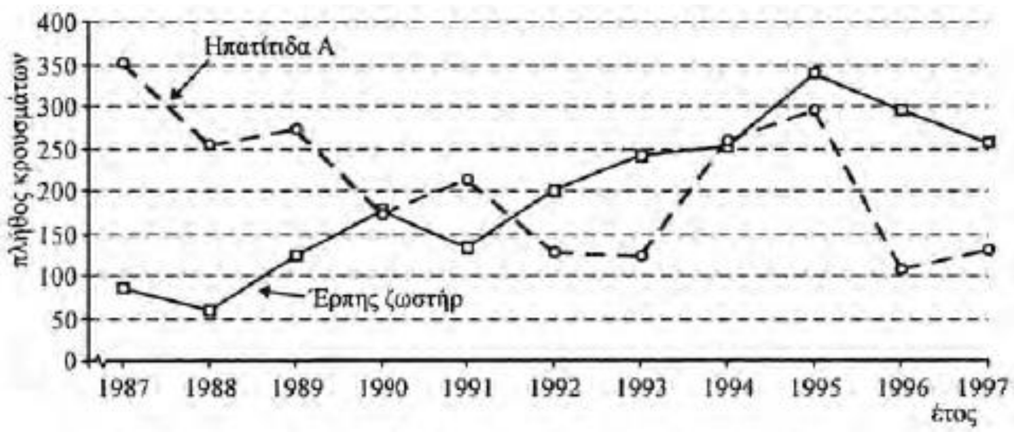
Εργαζόμαστε αντιστοίχως, όπως στα προηγούμενα παραδείγματα:



Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 - Λύση

Τα **χρονογράμματα** των δύο λοιμωδών νόσων δίνονται παρακάτω:



Έρπης ζωστήρ: Έχουμε ανοδική τάση μέχρι το 1995 και μετά ελαφρά πτώση.

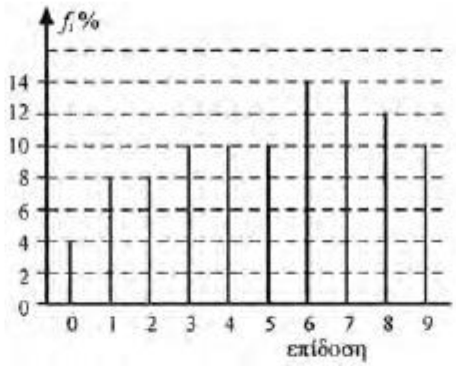
Ηπατίτιδα Α : Έχουμε καθοδική τάση μέχρι το 1993, σημαντική αύξηση τα έτη 1994 και 1995 και μετά πτώση στα επίπεδα του 1992-93.

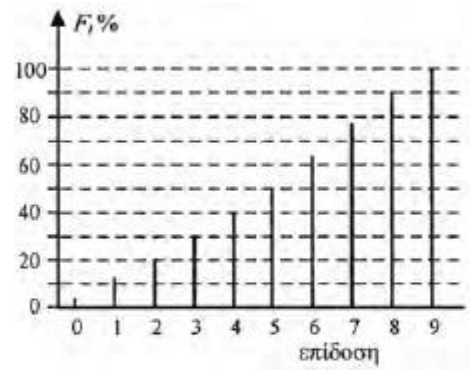
Άσκηση 2 - Λύση

α) Ο **πίνακας συχνοτήτων** της επίδοσης Χ των 50 υποψηφίων είναι:

x_i	Διαλογή	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	||	2	4	2	4
1	||||	4	8	6	12
2	||||	4	8	10	20
3	卌	5	10	15	30
4	卌	5	10	20	40
5	卌	5	10	25	50
6	卌 ||	7	14	32	64
7	卌 ||	7	14	39	78
8	卌 |	6	12	45	90
9	卌	5	10	50	100
Σύνολο	—	50	100	—	—

β) Τα **διαγράμματα σχετικών και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων** είναι τα ακόλουθα:





γ) Θέλουμε επίδοση μεγαλύτερη ή ίση του 8, $X \geq 8$. Άρα η σχολή θα πάρει 6 + 5 = 11 άτομα, δηλαδή το 22% των υποψηφίων.

δ) Αφού η σχολή θα πάρει το 36% των υποψηφίων σημαίνει ότι το 64% των υποψηφίων δεν θα επιλεγούν, δηλαδή όσοι έχουν επίδοση μικρότερη ή ίση του 6. Άρα θα επιλεγούν όσοι έχουν επίδοση μεγαλύτερη ή ίση του 7.

Άσκηση 3 - Λύση

Επειδή στον κατακόρυφο άξονα έχουμε το ποσοστό του εισοδήματος ανά χιλιάδες ευρώ, έχουμε:

$$y^* = \frac{f\,\%}{c} \Leftrightarrow f\,\% = y^* * c = 10*(20\text{-}15) = 10 – 5 = 50\%.$$

Άρα το 50% των οικογενειών της περιοχής έχουν εισόδημα από 15 έως 20 χιλιάδες ευρώ.

Άσκηση 4 - Λύση

Πρέπει το εμβαδόν του πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων να είναι 100 (τοις εκατό).

Όμως αυτό που έκανε ο μαθητής είναι περίπου ένα τρίγωνο με βάση (190 – 150) = 40 και ύψος 10.

Άρα έχει εμβαδόν $\frac{40 \cdot 10}{2}$ = 200. Συνεπώς είχε δίκιο ο καθηγητής.

Άσκηση 5 - Λύση

Οι βεβαιωθέντες θάνατοι από χρήση ναρκωτικών για τα έτη 1988-98 αναφορικά με την ηλικιακή ομάδα είναι:

Έτος	Ηλικία			Σύνολο
	≤ 20	21-30	≥ 31	
1988	7	43	12	62
1989	4	51	17	72
1990	2	34	30	66
1991	2	44	33	79
1992	1	47	31	79
1993	4	49	25	78
1994	8	71	67	146
1995	7	90	79	176
1996	14	98	110	222
1997	22	99	101	222
1998*	6	33	26	65

Άσκηση 6 - Λύση

Οι βεβαιωθέντες θάνατοι από χρήση ναρκωτικών για τα έτη 1988-98 αναφορικά με το φύλο είναι:

Έτος	Φύλο		Σύνολο
	Γυναίκες	Άνδρες	
1988	8	54	62
1989	10	62	72
1990	7	59	66
1991	5	74	79
1992	9	70	79
1993	8	70	78
1994	11	135	146
1995	14	162	176
1996	20	202	222
1997	20	202	222
1998·	9	56	65

Άσκηση 7 - Λύση

α) Παρατηρούμε ότι ολοένα και περισσότερο το ποσοστό των πτυχιούχων γυναικών Μαθηματικών πλησιάζει σημαντικά το αντίστοιχο ποσοστό των ανδρών. Ενώ δηλαδή το 1930 ο λόγος ανδρών-γυναικών Μαθηματικών ήταν 90% προς 10% το 1995 ο λόγος αυτός έγινε 55% προς 45%, αντίστοιχα.

β) Γυναίκες = 45%· 789 ≅ 355 Άνδρες = 55%· 789 ≅ 434.

γ) Το ποσοστό των πτυχιούχων γυναικών το 1974 ήταν 20% και εφόσον αυτές ήταν 173 συμπεραίνουμε ότι το σύνολο των πτυχιούχων ήταν $\frac{173\cdot 100}{20}$ = 865. Άρα οι άνδρες ήταν 692 (ποσοστό 80%).

δ) Γνωρίζουμε μόνο τα αντίστοιχα ποσοστά, άρα δεν μπορούμε να ξέρουμε τον αριθμό ανδρών και γυναικών που πήραν πτυχίο Μαθηματικού το έτος αυτό.

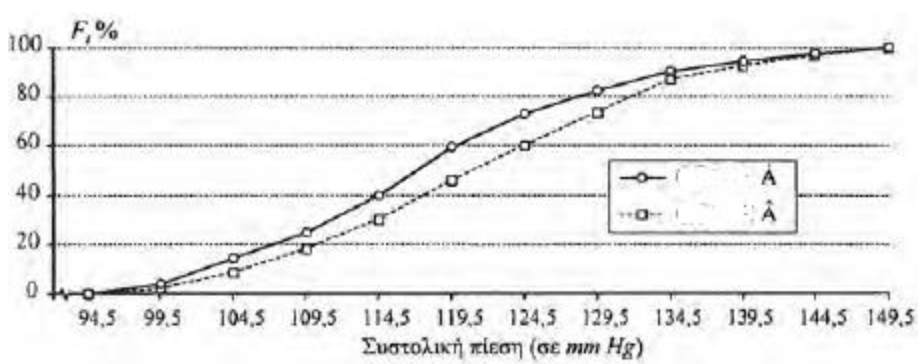
Άσκηση 8 - Λύση

α) Φάρμακο Α: $\frac{12+6+5+3}{150} = \frac{26}{150}$ = 0,173 = 17,3% .

Φάρμακο Β: $\frac{26+12+8+6}{200} = \frac{52}{200}$ = 0,26 = 26% .

β) Επειδή η μεταβλητή "συστολική πίεση" είναι συνεχής, η ομαδοποίηση σε κλάσεις της μορφής [,) είναι: [94,5 – 99,5) , [99,5 – 104,5) κτλ.

Επομένως τα **ιστογράμματα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων** για τη συστολική πίεση των γυναικών που λαμβάνουν τα φάρμακα Α και Β διαμορφώνονται ως ακολούθως:



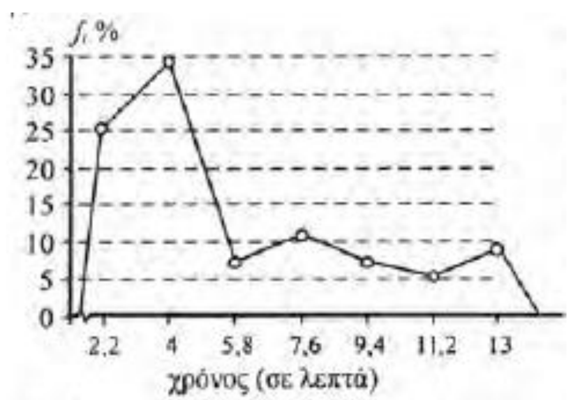
Άσκηση 9 - Λύση

α) Επειδή ν = 55 χρησιμοποιούμε κ = 7 ισοπλατείς κλάσεις. Το εύρος είναι R = 13,8 – 1,3 = 12,5 συνεπώς το πλάτος των κλάσεων είναι c = $\frac{R}{k} = \frac{12,5}{7} = 1,8$.

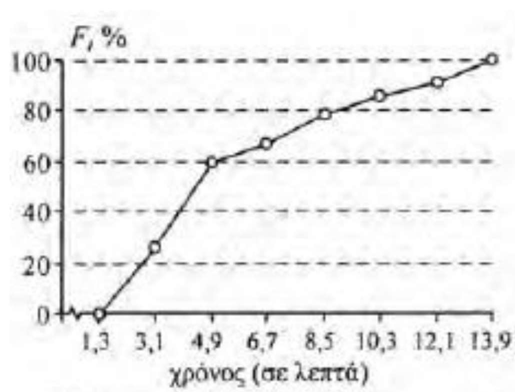
β) Ο **πίνακας συχνοτήτων** είναι ο ακόλουθος:

Κλάσεις [–)	Διαλογή	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	x_i
1,3-3,1	𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	14	25,5	14	25,5	2,2
3,1-4,9	𝍸 𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	19	34,5	33	60,0	4,0
4,9-6,7	𝍷𝍷𝍷𝍷	4	7,3	37	67,3	5,8
6,7-8,5	𝍸 𝍷	6	10,9	43	78,2	7,6
8,5-10,3	𝍷𝍷𝍷𝍷	4	7,3	47	85,5	9,4
10,3-12,1	𝍷𝍷𝍷	3	5,4	50	90,9	11,2
12,1-13,9	𝍸	5	9,1	55	100,0	13,0
Σύνολο:		55	100,0	—	—	—

γ) **Πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων:**



Πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων:



Άσκηση 10 - Λύση

α) Οι τιμές της μεταβλητής είναι: -1 , 0 , 2 , 3 .

β) Συνολικά, έχουμε ν = 30. Για την μεταβλητή -1 , έχουμε $\nu_{-1} = 9$.

Ομοίως, $\nu_0 = 6$ και $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = 12$.

Άρα:

$$f_{-1} = \frac{\nu_{-1}}{\nu} = \frac{9}{30} = 0{,}3 , \quad f_0 = \frac{\nu_0}{\nu} = \frac{6}{30} = 0{,}2 , \quad f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{3}{30} = 0{,}1 \quad \text{και} \quad f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{12}{30} = 0{,}4$$

Αντίστοιχα:

$$f_{-1}\% = 30\% , \quad f_0\% = 20\% , \quad f_2\% = 10\% \quad \text{και} \quad f_3\% = 40\%$$

Ο πίνακας συχνοτήτων είναι ο ακόλουθος:

Μεταβλητή	$\mathbf{\nu_i}$	$\mathbf{f_i}$	$\mathbf{f_i}\%$
-1	9	0,3	30%
0	6	0,2	20%
2	3	0,1	10%
3	12	0,4	40%
Σύνολο	**30**	**1**	100%

2.3 Μέτρα Θέσης και Μεταβλητότητας, Θηκόγραμμα, Συντελεστής Μεταβλητότητας

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 - Λύση

1) Με βάση την αναλογία της εκφώνησης, στις 10 μπάλες θα έχουμε 1 άσπρη, 2 μαύρες, 3 κόκκινες και 4 πράσινες. Αν οι τιμές των βαρών είναι οι παρατηρήσεις x_i με αντίστοιχες συχνότητες ν_i και σχετικές συχνότητες f_i, τότε:

$$\bar{x} = \frac{1*10+2*11+3*12+4*13}{10} = 12\text{gr}$$

x_i	v_i	f_i
10	1	0,10
11	2	0,20
12	3	0,30
13	4	0,40
Σύνολο	10	1,00

2) Με βάση την αναλογία της εκφώνησης, στις 20 μπάλες θα έχουμε 2 άσπρες, 4 μαύρες, 6 κόκκινες και 8 πράσινες. Αν οι τιμές των βαρών είναι οι παρατηρήσεις x_i με αντίστοιχες συχνότητες ν_i και σχετικές συχνότητες f_i, τότε:

$$\bar{x} = \frac{2*10+4*11+6*12+8*13}{20} = 12\text{gr}$$

x_i	v_i	f_i
10	2	0,10
11	4	0,20
12	6	0,30
13	8	0,40
Σύνολο	20	1,00

3) Παρατηρώντας προσεκτικά την παραπάνω διαδικασία καταλήγουμε ότι ανεξαρτήτως του πλήθους από τις μπάλες έχουμε:

$$\bar{x} = f_1 * x_1 + f_2 * x_2 + f_3 * x_3 + f_4 * x_4 = 0{,}10 * 10 + 0{,}20 * 11 + 0{,}30 * 12 + 0{,}40 * 13 = 12 \text{ gr}$$

Άσκηση 2 - Λύση

Η μέση τιμή (ο μέσος όρος) των βαθμών του Ανδρέα είναι το άθροισμα των βαθμών δια το πλήθος των μαθημάτων, δηλαδή: $\bar{x} = \frac{15 + 18 + 18 + 17}{4} = 17$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι:

Για το Βασίλη είναι $\bar{x} = \frac{17 + 20 + 20 + 19}{4} = 19$ και για το Γιάννη είναι $\bar{x} = \frac{11 + 14 + 14 + 13}{4} = 13$.

Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή των βαθμών του Βασίλη είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερη εκείνης του Ανδρέα. Αυτό οφείλεται στις 2 μονάδες που έχει πάρει παραπάνω ο Βασίλης από τον Ανδρέα σε κάθε μάθημα.

Ομοίως, αφού κάθε βαθμός του Γιάννη είναι κατά 4 μικρότερος του αντίστοιχου βαθμού του Ανδρέα, ο μέσος όρος του Γιάννη θα είναι κατά 4 βαθμούς μικρότερος του μέσου όρου του Ανδρέα.

Άσκηση 3 - Λύση

Αν υποθέσουμε ότι το πλήθος των υπαλλήλων είναι ν, τότε το άθροισμα των μισθών όλων των υπαλλήλων την περσινή χρονιά θα ήταν ν * 850 € και τη φετινή χρονιά θα είναι ν*850+ν*50 €, οπότε ο νέος μέσος όρος των μισθών θα είναι $\bar{x} = \frac{\nu * 850 + \nu * 50}{\nu} = 900$€.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε χωρίς τους παραπάνω υπολογισμούς που έχουν ως αφετηρία την υπόθεση ότι το πλήθος των υπαλλήλων είναι ν. Εφόσον κάθε μισθός αυξήθηκε κατά 50€, και ο μέσος όρος θα έχει αυξηθεί κατά 50€.

Άσκηση 4 - Λύση

1) Για όλες τις λίστες δεδομένων το εύρος είναι 100 - 0 = 100 . Οπότε, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εύρος για να διακρίνουμε διαφορές στη μεταβλητότητα μεταξύ των τριών ομάδων δεδομένων.

2) Αναζητώντας ποια ομάδα έχει περισσότερο διάσπαρτα δεδομένα, παρατηρούμε καταρχάς ότι όλες περιλαμβάνουν το 0, το 50 και το 100. Πέραν αυτών των τριών, στη δεύτερη ομάδα

(0, 48, 49, 50, 51, 52, 100) τα υπόλοιπα δεδομένα βρίσκονται πολύ κοντά στο κέντρο (που είναι η μέση τιμή, δηλ. το 50). Στην τρίτη ομάδα (0, 1, 2, 50, 98, 99, 100) τα υπόλοιπα δεδομένα βρίσκονται μακριά από το κέντρο (πιο κοντά στα άκρα 0 και 100). Τέλος, στην πρώτη ομάδα

(0, 20, 40, 50, 60, 80, 100) οι τιμές 20, 40, 60, 80 είναι πιο ομαλά τοποθετημένες ανάμεσα στα άκρα (0 και 100) και στο κέντρο (50). Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι τη μεγαλύτερη διασπορά έχει η τρίτη λίστα, τη μικρότερη διασπορά έχει η δεύτερη λίστα, ενώ η διασπορά της πρώτης λίστας βρίσκεται κάπου ανάμεσα στις δύο άλλες.

Άσκηση 5 - Λύση

Για τη μέση τιμή των τεσσάρων δειγμάτων έχουμε αντιστοίχως:

$$\bar{x}_1 = \frac{1+2+6}{3} = 3 \ , \ \bar{x}_2 = \frac{2+4+12}{3} = 6 \ , \ \bar{x}_3 = \frac{11+12+16}{3} = 13, \ \bar{x}_4 = \frac{12+14+22}{3} = 16$$

Ενώ για τις διαμέσους έχουμε αντιστοίχως:

$$\delta_1 = 2 \ , \ \delta_2 = 4 \ , \ \delta_3 = 12 \ , \ \delta_4 = 14$$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές του δεύτερου δείγματος είναι διπλάσιες των τιμών του πρώτου και για αυτό ισχύει: $\bar{x}_2 = 2\bar{x}_1$ και $\delta_2=2\delta_1$.

Οι τιμές του τρίτου δείγματος προέρχονται από τις τιμές του πρώτου αν τις αυξήσουμε κατά 10 και για αυτό ισχύει: $\bar{x}_3 = \bar{x}_1+10$ και $\delta_3=\delta_1+10$.

Τέλος, οι τιμές του τέταρτου δείγματος προκύπτουν αν διπλασιάσουμε τις τιμές του πρώτου και στο αποτέλεσμα προσθέσουμε 10. Για το λόγο αυτό ισχύει:

$$\bar{x}_4 = 2\bar{x}_1+10 \text{ και } \delta_4=2\delta_1+10$$

Άσκηση 6 - Λύση

Α) $\bar{x}_1 = \frac{1+3+4+5+7}{5} = 4$

$S^2{}_a = \frac{(1-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2}{5} = 4$ και $S_a = \sqrt{S^2{}_a} = 2$.

Β) $\bar{x}_2 = \frac{3+9+12+15+21}{5} = 12$

$S^2{}_\beta = \frac{(3-12)^2+(9-12)^2+(12-12)^2+(15-12)^2+(21-12)^2}{5} = 36$ και $S_\beta = \sqrt{S^2{}_\beta} = 6$.

Γ) $\bar{x}_3 = \frac{6+8+9+10+12}{5} = 9$

$S^2{}_\gamma = \frac{(6-9)^2+(8-9)^2+(9-9)^2+(10-9)^2+(12-9)^2}{5} = 4$ και $S_\gamma = \sqrt{S^2{}_\gamma} = 2$.

Δ) $\bar{x}_4 = \frac{-1+(-3)+(-4)+(-5)+(-7)}{5} = -4$

$S^2{}_\delta = \frac{(-1-(-4))^2+(-3-(-4))^2+(-4-(-4))^2+(-5-(-4))^2+(-7-(-4))^2}{5} = 4$ και $S_a = \sqrt{S^2{}_\delta} = 2$

Παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε τα δεδομένα της πρώτης ομάδας επί 3 παίρνουμε τα δεδομένα της δεύτερης. Η διακύμανση της δεύτερης ομάδας είναι 9πλάσια της διακύμανσης της πρώτης και η τυπική απόκλιση είναι τριπλάσια. Δηλαδή:

$$S^2{}_\beta = 9 * S^2{}_a \quad \text{και} \quad S_\beta = 3 * S_a$$

Αν στα δεδομένα της πρώτης ομάδας προσθέσουμε 5, παίρνουμε τα δεδομένα της τρίτης ομάδας. Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση της τρίτης ομάδας παραμένουν ίδιες με της πρώτης. Δηλαδή:

$$S^2{}_\gamma = S^2{}_\alpha \quad \text{και} \quad S_\gamma = S_\alpha$$

Τέλος, τα δεδομένα της τέταρτης ομάδας είναι τα αντίθετα της πρώτης, ή αλλιώς προκύπτουν από τα δεδομένα της πρώτης με πολλαπλασιασμό επί (-1). Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση της τέταρτης ομάδας παραμένουν ίδιες με της πρώτης. Δηλαδή:

$$S^2{}_\delta = S^2{}_\alpha \quad \text{και} \quad S_\delta = S_\alpha$$

Συνοψίζοντας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι πολλαπλασιάζοντας τα δεδομένα με κάποιον αριθμό, η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζεται με την απόλυτη τιμή του αριθμού. Αν όμως προσθέσουμε σε όλα τα δεδομένα τον ίδιο αριθμό, η τυπική απόκλιση δεν μεταβάλλεται.

Άσκηση 7 - Λύση

1) Για τη μέση τιμή (το μέσο όρο των βαθμών) έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{8+15+13+20+9+13+17+19+20+9+10+10+15+13+14+17}{16} = 13{,}875$$

Για να βρούμε τη διάμεσο διατάσσουμε τα δεδομένα (τους βαθμούς των μαθητών) σε αύξουσα σειρά:

8, 9, 9, 10, 10, 13, 13, 13, 14, 15, 15, 17, 17, 19, 20, 20.

Η διάμεσος των 16 παρατηρήσεων είναι ο μέσος όρος της $8^{ης}$ και της $9^{ης}$ παρατήρησης, δηλαδή:

$$\delta = \frac{13+14}{2} = 13{,}5$$

Η επικρατούσα τιμή είναι το 13, δηλαδή M_0 = 13 .

2) Το εύρος είναι R = 20 - 8 = 12 . Για την τυπική απόκλιση έχουμε:

$$S = \sqrt{\frac{(8-13{,}875)^2 + (9-13{,}875)^2 + \cdots + (20-13{,}875)^2}{16}} = 3{,}85$$

Τέλος, ο συντελεστής μεταβολής είναι:

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{3{,}85}{13{,}875} = 28\%$$

Άσκηση 8 - Λύση

Με δεδομένο ότι κανείς υπάλληλος δεν αποχωρεί και κανείς νέος δεν προσλαμβάνεται, εφόσον όλες οι ηλικίες θα έχουν αυξηθεί κατά 3 χρόνια, η μέση τιμή θα έχει αυξηθεί κι αυτή κατά 3 χρόνια και θα είναι 35 χρόνια.

Άσκηση 9 - Λύση

Για διευκόλυνση διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 19.

1) Η μέση τιμή είναι: $\bar{x} = \frac{12+12+13+\cdots+19}{20} = \frac{302}{20} = 15{,}1$.

Η επικρατούσα τιμή είναι $M_0 = 15$.

2) Η διάμεσος είναι ο μέσος όρος της 10ης και 11ης παρατήρησης, δηλαδή: $\delta = \frac{15+15}{2} = 15$.

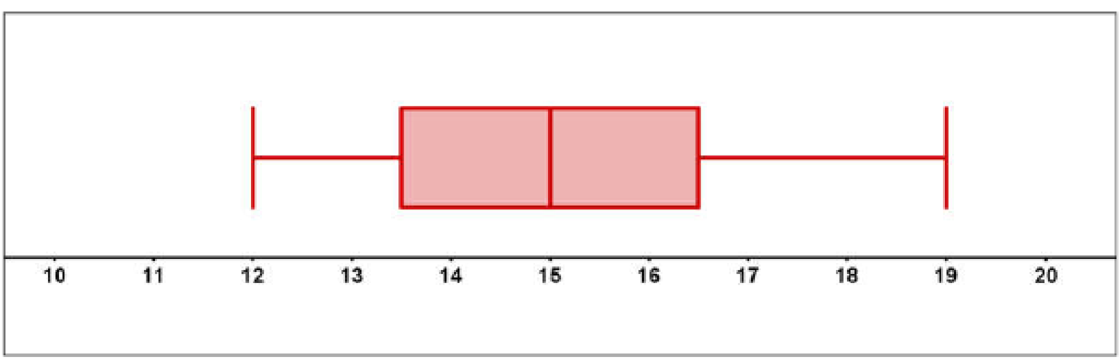
3) Το πρώτο τεταρτημόριο είναι ο μέσος όρος της 5ης και της 6ης παρατήρησης, ενώ το τρίτο τεταρτημόριο είναι ο μέσος όρος της 15ης και 16ης παρατήρησης. Δηλαδή έχουμε:

$$Q_1 = \frac{13+14}{2} = 13{,}5 \text{ , } Q_3 = \frac{16+17}{2} = 16{,}5 \text{ .}$$

4) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = Q_3 - Q_1 = 16{,}5 - 13{,}5 = 3$.

Το διάστημα $[Q_3 - 1{,}5 * Q \text{ , } Q_3 + 1{,}5 * Q]$ είναι το [9,21] στο οποίο περιλαμβάνονται όλες οι τιμές (άρα δεν υπάρχουν ακραίες τιμές).

Το θηκόγραμμα φαίνεται ως ακολούθως:



Στο θηκόγραμμα βλέπουμε την ελάχιστη τιμή (12), τη μέγιστη τιμή (19), τη διάμεσο (15) και το πρώτο και τρίτο τεταρτημόρια (13,5 και 16,5 αντιστοίχως).

Άσκηση 10 - Λύση

Εάν ονομάσουμε $\bar{x}_\alpha$ τη μέση επίδοση των αγοριών και $\bar{x}_\kappa$ τη μέση επίδοση των κοριτσιών, τότε το άθροισμα των βαθμολογιών των αγοριών είναι $17\bar{x}_\alpha$ και το άθροισμα των βαθμολογών των κοριτσιών είναι $13\bar{x}_\kappa$ = 13*15,6 (αυτό συμβαίνει επειδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε αγόρι έχει επίδοση ίση με τη μέση επίδοση των αγοριών και ότι κάθε κορίτσι έχει επίδοση ίση με τη μέση επίδοση των κοριτσιών). Τότε θα ισχύει: $\frac{17\bar{x}_\alpha+13*15{,}6}{30}$ = 16,8 .

Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε τη μέση επίδοση των αγοριών $\bar{x}_\alpha$ = 17,7 .

Άσκηση 11 - Λύση

Το πλήθος των μαθητών της Γ΄ τάξης είναι 500 – (200 + 180) = 120 . Το άθροισμα των ηλικιών των μαθητών της Α΄ τάξης θα είναι 200 *15,7 το άθροισμα των ηλικιών των μαθητών της Β΄ τάξης θα είναι 180 *16, 9 και το άθροισμα των ηλικιών των μαθητών της Γ΄ τάξης θα είναι: 120 *17,7 .

Οπότε, η μέση ηλικία των μαθητών του σχολείου θα είναι:

$$\frac{200*15{,}7+180*16{,}9+120*17{,}7}{500} = 16{,}6 .$$

Άσκηση 12 - Λύση

Το άθροισμα των τιμών όλων των παρατηρήσεων θα είναι 40 * 20 = 800 και μετά τις μεταβολές θα είναι 800 - 7 * 2 + 9 * 6 = 840 . Οπότε, η νέα μέση τιμή θα είναι: $\bar{x} = \frac{840}{40}$ = 21 .

Άσκηση 13 - Λύση

Η τυπική απόκλιση είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης (S^2), η οποία ορίζεται ως "η μέση τιμή των τετραγώνων των διαφορών της μέσης τιμής των παρατηρήσεων από τις παρατηρήσεις". Για να είναι η τυπική απόκλιση ίση με 0, και η διακύμανση θα είναι ίση με 0, άρα κάθε παρατήρηση θα διαφέρει από τη μέση τιμή κατά 0 (ας θυμηθούμε ότι αν το άθροισμα μη αρνητικών πραγματικών είναι μηδέν τότε όλοι οι προσθετέοι είναι μηδέν). Δηλαδή, όλες οι παρατηρήσεις θα είναι μεταξύ τους ίσες.

Άσκηση 14 - Λύση

Εύκολα βρίσκουμε ότι οι 6 διαδοχικοί ακέραιοι που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ = 7,5 είναι οι: 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Η τυπική τους απόκλιση θα είναι:

$$S = \sqrt{\frac{(5-7,5)^2+(6-7,5)^2+(7-7,5)^2+(8-7,5)^2+(9-7,5)^2+(10-7,5)^2}{6}} = 1,7.$$

<u>Σχόλιο:</u> Ένας τρόπος να βρούμε τους 6 διαδοχικούς ακεραίους με μέση τιμή 7,5, είναι να ονομάσουμε με ν τον μικρότερο, οπότε οι επόμενοι είναι ν+1, ν+2, ν+3, ν+4, ν+5 και να λύσουμε την εξίσωση:

$$\bar{x} = \frac{\nu+\nu+1+\nu+2+\nu+3+\nu+4+\nu+5}{6} = 7,5$$

Ένας άλλος (προφανώς πιο εύκολος) είναι να "μοιράσουμε" έξι διαδοχικούς αριθμούς έτσι ώστε το 7,5 να βρίσκεται στη μέση τους, άρα θα είναι τρεις κάτω από το 7,5 και τρεις πάνω από αυτό.

Άσκηση 15 - Λύση

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε αγόρι έχει βαθμολογία x και κάθε κορίτσι έχει y . Άρα το άθροισμα των βαθμών των αγοριών είναι ν_1x , το άθροισμα των βαθμών των κοριτσιών είναι ν_2y και το άθροισμα των βαθμών όλων των μαθητών/τριών είναι: $\nu_1\bar{x} + \nu_2\bar{y}$.

Αφού όλοι οι μαθητές είναι $\nu_1 + \nu_2$, ο μέσος όρος της βαθμολογίας θα είναι:

$$\bar{z} = \frac{\nu_1\bar{x} + \nu_2\bar{y}}{\nu_1 + \nu_2}$$

Άσκηση 16 - Λύση

Αν οι τιμές των παρατηρήσεων είναι x_i με αντίστοιχες συχνότητες ν_i , και το σύνολο των παρατηρήσεων είναι ν, τότε: $\bar{x} = \frac{\nu_1x_1+\nu_2x_2+\cdots\ldots+\nu_kx_k}{\nu}$. Άρα:

$$\bar{x} = \frac{\nu_1x_1}{\nu} + \frac{\nu_2x_2}{\nu} + \ldots + \frac{\nu_kx_k}{\nu} = f_1x_1+f_2x_2+\ldots.+ f_kx_k \, .$$

Δηλαδή, η μέση τιμή είναι ίση με το άθροισμα των γινομένων των τιμών της μεταβλητής επί τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες.

Άσκηση 17 – Λύση

Το άθροισμα των αμοιβών των 100 εργαζομένων πριν οποιαδήποτε αύξηση είναι 100*900=90.000€. Αφού οι αποδοχές των 40 χαμηλότερα αμειβόμενων εργαζομένων θα γίνουν όσο η μέση τιμή, δηλαδή 900€, αυτοί οι εργαζόμενοι θα έχουν μια μέση αύξηση κατά 100€, άρα αθροιστικά αύξηση:

40*100 = 4.000€

Οπότε, το άθροισμα των αμοιβών των 100 εργαζομένων διαμορφώνεται στις 94.000 €. Έτσι, η νέα μέση τιμή θα είναι : $\frac{94000}{100}$ = 940 .

Άσκηση 18 – Λύση

Α)<u>Μέση τιμή:</u> Η μέση τιμή $\bar{x}$ ενός συνόλου ν παρατηρήσεων ορίζεται ως το ημιάθροισμα των παρατηρήσεων δια του πλήθους τους. $\bar{x} = \frac{t_1+t_2+\cdots+t_\nu}{\nu}$.

<u>Διάμεσος (δ)</u> ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Β) <u>Τεταρτημόρια $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$, $\mathbf{Q_3}$</u>

Όπως ορίσαμε τη διάμεσο δ, έτσι ώστε το πολύ 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες του δ και το πολύ 50% των παρατηρήσεων να είναι μεγαλύτερες του δ, μπορούμε ανάλογα να ορίσουμε και τα εκατοστημόρια P_κ , k =1, 2, ..., 99. Ειδική περίπτωση εκατοστημορίων είναι τα P_{25}, P_{50}, P_{75}, τα οποία καλούνται **τεταρτημόρια** και συμβολίζονται με Q_1 , Q_2 και Q_3 αντίστοιχα.

- Για το Q_1 έχουμε αριστερά το πολύ 25% και δεξιά το πολύ 75% των παρατηρήσεων.
- Για το Q_2 έχουμε Q_2 = δ, δηλαδή συμπίπτει με τη διάμεσο.
- Για το Q_3 έχουμε αριστερά το πολύ 75% και δεξιά το πολύ 25% των παρατηρήσεων.

Για τον ευκολότερο υπολογισμό των Q_1 και Q_3 έχουμε:

- Όταν το πλήθος των διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός, διακρίνουμε το πρώτο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_1 και το δεύτερο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_3.
- Όταν το πλήθος των διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, αφαιρούμε από το δείγμα τη διάμεσο και διακρίνουμε το πρώτο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_1 και το δεύτερο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_3.

Εύρος R

Είναι το απλούστερο από τα μέτρα διασποράς και ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης x_{min} παρατήρησης από τη μέγιστη x_{max} παρατήρηση. Δηλαδή:

$$R = \text{μέγιστη παρατήρηση} - \text{ελάχιστη παρατήρηση} = x_{max} - x_{min}$$

Γ) Ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q

Είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 από το τρίτο τεταρτημόριο Q_3.

Δηλαδή: $Q = Q_3 - Q_1$.

Δ) Διακύμανση $\boldsymbol{s^2}$

Είναι η μέση τιμή των τετραγώνων των διαφορών της μέσης τιμής των παρατηρήσεων από τις παρατηρήσεις. Δηλαδή:

$$s^2 = \frac{(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + (t_3 - \bar{x})^2 + \ldots + (t_\nu - \bar{x})^2}{\nu}$$

Η διακύμανση δεν εκφράζεται με τις μονάδες που εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Τυπική απόκλιση s

Είναι η τεραγωνική ρίζα της διακύμανσης . Δηλαδή: $s = \sqrt{s^2}$.

Η τυπική απόκλιση έχει το πλεονέκτημα ότι εκφράζεται με τις μονάδες, που εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Συντελεστής Μεταβλητότητας CV

Είναι η διαίρεση της τυπικής απόκλισης με τη μέση τιμή . Αν η μέση τιμή είναι <0 , τότε χρησιμοποιούμε την απόλυτη μέση τιμή.

Άρα:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\bar{x}}$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι καθαρός αριθμός και εκφράζεται συνήθως ως ποσοστό.

Ανάμεσα σε 2 συντελεστές μεταβλητότητας, προτιμάμε τον μικρότερο, γιατί υποδηλώνει ότι έχουμε περισσότερη ομοιογένεια στις τιμές της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει.

Άσκηση 19 – Λύση

Α) Έχουμε ν=13 παρατηρήσεις, οι οποίες σε αύξουσα σειρά είναι: 0 1 1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 9.

Άρα, η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση (έβδομη στη σειρά), δ= 4.

Β) Έχουμε ν=14 παρατηρήσεις οι οποίες σε αύξουσα σειρά είναι: 0 1 1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 9 9.

Άρα, η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων (της έβδομης και όγδοης στη σειρά), δηλαδή δ = $\frac{4+5}{2}$ = 4,5 .

Παρατηρούμε ότι, η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη όταν οι παρατηρήσεις αυτές τοποθετηθούν με σειρά τάξης μεγέθους. Ακριβέστερα, η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

Άσκηση 20 – Λύση

Α) Για να βρούμε την επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων:

0 1 1 2 2 2 3 4 4 4 5 5 7 8

κατασκευάζουμε τον πίνακα συχνοτήτων που βλέπουμε στα δεξιά.

x_i	ν_i
0	1
1	2
2	3
3	1
4	3
5	2
7	1
8	1

Οι τιμές 2 και 4 είναι και οι δύο επικρατούσες τιμές, γιατί καθεμιά έχει συχνότητα 3.

Βλέπουμε εδώ ότι η επικρατούσα τιμή μπορεί να μην είναι μοναδική.

Β) Όταν όλες οι παρατηρήσεις είναι διαφορετικές, τότε λέμε ότι δεν υπάρχει επικρατούσα τιμή. Έτσι, για τις παρατηρήσεις 0, 1, 2, 7, 8, 9 δεν έχουμε επικρατούσα τιμή.

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 - Λύση

Α) Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής συμπληρώνουμε τις τρεις πρώτες στήλες του παρακάτω πίνακα:

x_i	ν_i	$x_i\nu_i$	$x_i^2\nu_i$
50	4	200	10000
55	6	330	18150
60	8	480	28800
65	12	780	50700
70	14	980	68600
75	10	750	56250
80	6	480	38400
Σύνολο	ν=60	$\Sigma x_i\nu_i$=4000	$\Sigma x_i^2\nu_i$=270900

Επομένως, ο μέσος χρόνος για την κάλυψη της συγκεκριμένης απόστασης είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum \nu_i x_i}{\nu} = \frac{4000}{60} = 66{,}67 \text{ sec}$$

Έχουμε ν= 60 παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά, άρα η διάμεσος είναι ο μέσος όρος της 30ης και 31ης παρατήρησης, δηλαδή ο μέσος όρος των παρατηρήσεων 65 και 70, άρα:

$$\delta = \frac{65+70}{2} = 67{,}5 \text{ sec}$$

Η επικρατούσα τιμή είναι η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα, άρα M_0= 70 sec.

Β) Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης:

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η διακύμανση της μεταβλητής Χ είναι:

$$S^2 = \frac{1}{\nu} * [\sum x_i{}^2\nu_i - \frac{\Sigma\left(x_{i\nu_i)}\right)^2}{\nu}] = \frac{1}{60} * [270900 - \frac{4000^2}{60}] = 70{,}56\ sec^2$$

και η τυπική απόκλιση s = $\sqrt{70{,}56}$ = 8,4 sec .

Γ) Θέλουμε να υπολογίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο, Q_1. Αριστερά της διαμέσου δ = 67,5 έχουμε 30 παρατηρήσεις. Η διάμεσος αυτών των 30 πρώτων παρατηρήσεων είναι το ημιάθροισμα της 15ης και 16ης παρατήρησης, δηλαδή $Q_1 = \frac{60+60}{2}$ = 60 sec. Δηλαδή, ύστερα από μία ώρα από τη στιγμή της εκκίνησης το 25% των μαθητών κάλυψαν τη συγκεκριμένη απόσταση.

Άσκηση 2 - Λύση

α) Έχουμε $y_i = x_i$ + c, i =1, 2, ...,ν επομένως:

i) $$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_\nu}{\nu} = \frac{x_1 + c + x_2 + c + \ldots + x_\nu + c}{\nu}$$
$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu} + \frac{\nu c}{\nu} = \overline{x} + c$$

ii) $$s_y^2 = \frac{(y_1 - \overline{y})^2 + (y_2 - \overline{y})^2 + \ldots + (y_\nu - \overline{y})^2}{\nu}$$
$$= \frac{(x_1 + c - \overline{x} - c)^2 + (x_2 + c - \overline{x} - c)^2 + \ldots + (x_\nu + c - \overline{x} - c)^2}{\nu}$$
$$= \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_\nu - \overline{x})^2}{\nu} = s_x^2.$$

Άρα και $s_y = s_x$.

β) Έχουμε y_i = cχ_i, i =1, 2, ...,ν επομένως:

i) $$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_\nu}{\nu} = \frac{cx_1 + cx_2 + \ldots + cx_\nu}{\nu} = c\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu} = c\overline{x}$$

ii) $$s_y^2 = \frac{(y_1 - \overline{y})^2 + (y_2 - \overline{y})^2 + \ldots + (y_\nu - \overline{y})^2}{\nu}$$
$$= \frac{(cx_1 - c\overline{x})^2 + (cx_2 - c\overline{x})^2 + \ldots + (cx_\nu - c\overline{x})^2}{\nu}$$
$$= \frac{c^2\left[(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_\nu - \overline{x})^2\right]}{\nu} = c^2 s_x^2.$$

Άρα και s_y = |c|$*$ s_x .

Άσκηση 3 - Λύση

Αν x είναι ο πρώτος άρτιος, τότε οι ζητούμενοι άρτιοι αριθμοί θα είναι:

x, x + 2, x + 4, x + 6, x + 8, x + 10 .

Επειδή η μέση τιμή τους είναι ίση με 15 έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{\mathrm{x+\,x+2+\,x+4+\,x+6+\,x+8+\,x+10}}{6} = 15$$

Άρα. $\bar{x}$= 10 . Άρα οι αριθμοί είναι οι: 10, 12, 14, 16, 18, 20.

Η διάμεσός τους είναι η δ = $\frac{14+16}{2}$ = 15 .

Άσκηση 4 - Λύση

α) Ναι, όταν και οι δέκα τιμές είναι ίσες με 1.

β) Όχι, η μέση τιμή είναι πάντα ανάμεσα στη μικρότερη και τη μεγαλύτερη παρατήρηση.

γ) Ναι, για παράδειγμα οι τιμές: 1 1 1 1 1 1 3 3 3 3.

Άσκηση 5 - Λύση

α) $\bar{x}$ = $\frac{9*205+216}{10}$ = $\frac{1845+216}{10}$ = 206,1 cm.

β) $\frac{9*205+x}{10}$ = 208 . Άρα $\bar{x}$ = 235 cm.

Άσκηση 6 - Λύση

Αν παραστήσουμε με Χ την ηλικία των μαθητών, τότε έχουμε τα παρακάτω δεδομένα:

$$\nu_A = 18 , \quad \nu_K = 12 , \quad \nu = \nu_A + \nu_K = 30, \quad \bar{x}_A = 18{,}8 , \; \bar{x} = 15{,}4$$

Αν $\bar{x}_K$ είναι η μέση ηλικία των κοριτσιών, τότε θα είναι $\bar{x} = \frac{\nu_A * \bar{x}_A + \nu_K * \bar{x}_K}{\nu_A + \nu_K}$.

Οπότε αντικαθιστώντας τα δεδομένα έχουμε: $\bar{x}_K$ = 14,8 .

Άσκηση 7 - Λύση

α) Ο αριθμητικός μέσος είναι: $\frac{12+10+16+18+14}{5}$ = 14.

β) Ο σταθμικός μέσος είναι: $\frac{2*12+3*10+1*16+1*18+3*14}{2+3+1+1+3}$ = 13 .

Για να μεγαλώσει ο σταθμικός μέσος πρέπει να έχει μεγάλους βαθμούς στα μαθήματα που έχουν και μεγαλύτερους συντελεστές. Έπρεπε λοιπόν ο μαθητής να δώσει ιδιαίτερη προσοχή στα μαθήματα με τους συντελεστές στάθμισης 3.

Άσκηση 8 - Λύση

Εφόσον οι αριθμοί είναι πέντε, η διάμεσος θα είναι ο μεσαίος αριθμός. Επειδή όμως δ = 6 προκύπτει ότι ένας από τους αριθμούς που ζητούμε είναι το 6. Επειδή όμως η μέση τιμή είναι επίσης 6, αν x είναι ο πέμπτος αριθμός θα έχουμε: $\bar{x} = \frac{5+6+8+9+x}{5}$ = 6. Άρα, x = 2 .

Επομένως οι άλλοι δύο αριθμοί είναι οι 2 και 6.

Άσκηση 9 - Λύση

Ο πίνακας συχνοτήτων της μεταβλητής Χ που παριστά τον βαθμό στα Μαθηματικά των 40 μαθητών, είναι:

x_i	ν_i	$x_i\nu_i$	N_i
10	1	10	1
11	1	11	2
12	4	48	6
13	2	26	8
14	5	70	13
15	8	120	21
16	6	96	27
17	4	68	31
18	3	54	34
19	5	95	39
20	1	20	40
Σύνολο	40	618	—

Επομένως :

Α) $\bar{x} = \frac{\sum \nu_i x_i}{\sum \nu_i} = \frac{618}{40} = 15{,}45$.

Β) $\delta = \frac{20\eta\ \pi\alpha\rho. + 21\eta\ \pi\alpha\rho.}{2} = \frac{15.+15}{2} = 15$.

Δηλαδή το πολύ 50% των μαθητών και μαθητριών έχουν βαθμό στα Μαθηματικά κάτω από 15 και το πολύ 50% πάνω από 15.

Γ) $M_0 = 15$.

Δ) $Q_1 = \frac{10\eta\ \pi\alpha\rho. + 11\eta\ \pi\alpha\rho.}{2} = \frac{14+14}{2} = 14$.

$Q_3 = \frac{30\eta\ \pi\alpha\rho. + 31\eta\ \pi\alpha\rho.}{2} = \frac{17+17}{2} = 17$.

Συγκεκριμένα εδώ έχουμε $\frac{13}{40} = 32{,}5\%$ με βαθμό μικρότερο του 15 και $\frac{19}{40} = 47{,}5\%$ με βαθμό μεγαλύτερο του 15.

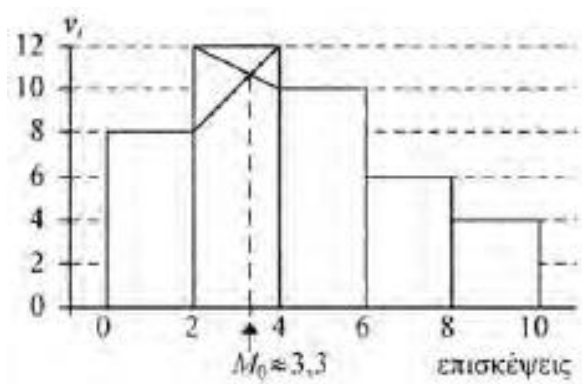
Άσκηση 10 - Λύση

Ο πίνακας συχνοτήτων είναι:

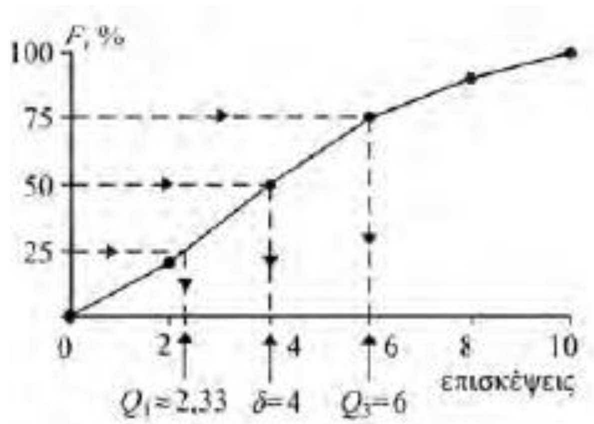
Επισκέψεις [-)	x_i	ν_i	$x_i \nu_i$	N_i	$F_i\%$
0-2	1	8	8	8	20
2-4	3	12	36	20	50
4-6	5	10	50	30	75
6-8	7	6	42	36	90
8-10	9	4	36	40	100
Σύνολο	—	40	172	—	—

Α) $\bar{x} = \frac{\sum \nu_i x_i}{\sum \nu_i} = \frac{172}{40} = 4{,}3$.

Β) $M_0 = 3{,}3$.



Γ) $Q_1 = 2{,}33$, δ = 4 , $Q_1 = 6$.



2.4. Κανονική Κατανομή και Εφαρμογές

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

1) Παρατηρούμε ότι η κατανομή έχει μια συμμετρία ως προς ένα σημείο Μ

2) Το πολύ 10 λεπτά: Προσθέτουμε τα ποσοστά μέχρι την τιμή 10. Δηλαδή 3%+14%+33%=50%.
Τουλάχιστον 10 λεπτά: Προσθέτουμε τα ποσοστά από την τιμή 10 και πάνω.

Δηλαδή 33%+ 14%+3% = 50%

3) Από 8 εως 12 λεπτά: 33%+33% = 66% .

4) Τουλάχιστον 8 λεπτά: Προσθέτουμε τα ποσοστά από την τιμή 8 και πάνω.

Δηλαδή 33%+33%+ 14%+3% = 83%

Άσκηση 2 – Λύση

1) Τα ύψη των ενήλικων ανθρώπων ακολουθούν κανονική κατανομή με μ=450 cm και σ=16cm. Ισχύουν: $\mu - 2\sigma = 450 - 2\cdot 16 = 418$ και $\mu + 2\sigma = 450+2\cdot 16 = 482$.

Παίρνουμε ένα πολύ μεγάλο δείγμα ενηλίκων στην Ευρώπη. Θέλουμε να εκτιμήσουμε το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που δεν περνάνε από τα τούνελ, δηλαδή από 450 cm.

Το ποσοστό των αυτοκινήτων του δείγματος που το ύψος τους (σε cm) ανήκει στο διάστημα (418 , 482) εκτιμάται σε 95%.

Λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής εκτιμούμε:

• Το ποσοστό των αυτοκινήτων του δείγματος που το ύψος τους ανήκει στο διάστημα

(450, 482) σε 95 : 2 = 47,5 %.

• Το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που είναι ψηλότερα από 450 cm σε 50%.

Επομένως, το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που είναι ψηλότερα από 482 cm, άρα και από την πόρτα, εκτιμάται σε 50% - 47,7% = 2,5%

2) Υποθέτουμε ότι το τούνελ έχει ύψος υ cm. Έστω ένα τυχαίο αυτοκίνητο και το ενδεχόμενο «το τυχαίο αυτοκίνητο έχει ύψος μεγαλύτερο από υ cm». Θέλουμε να βρούμε την τιμή του υ, ώστε η πιθανότητα του ενδεχομένου να είναι περίπου 0, 13%. Παρατηρούμε ότι 0,13% = 50% - 49,87% .

Επίσης ισχύει ότι $\mu+3\sigma = 450 + 3\cdot 16 = 498$.

Η πιθανότητα το τυχαίο αυτοκίνητο έχει ύψος μεγαλύτερο από 450 cm είναι 50% και η πιθανότητα να έχει ύψος (σε εκατοστά) που ανήκει στο διάστημα (μ, μ+3σ)=(450, 498) είναι περίπου ίση με

$\frac{99{,}74\%}{2}$ = 49,87% , λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής.

Άρα, η πιθανότητα το τυχαίο αυτοκίνητο έχει ύψος μεγαλύτερο από 498cm είναι περίπου

50% - 49,87% = 0,13%. Άρα το αυτοκίνητο πρέπει να έχει ύψος υ = 498 cm.

Άσκηση 3 – Λύση

1) Κανονική κατανομή

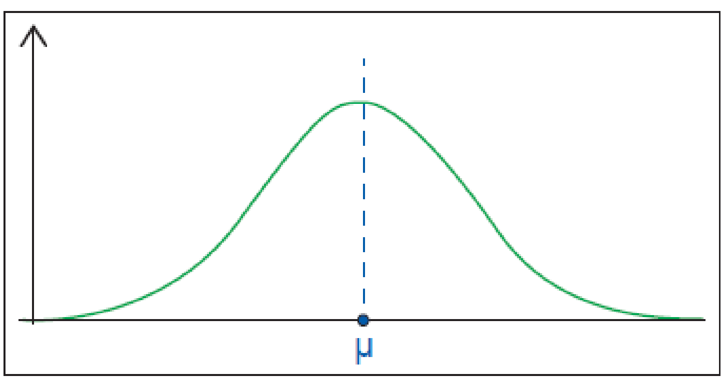
Είναι το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε πώς κατανέμονται σε έναν ιδεατό, άπειρο πληθυσμό οι τιμές μεταβλητών. Για την κανονική κατανομή, το μ εκφράζει το κέντρο συμμετρίας της και το σ είναι ένας δείκτης διασποράς της.

$$y = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Συμβολίζεται με N(μ,σ^2) , όπου μ = μέση τιμή και σ^2 = διακύμανση .

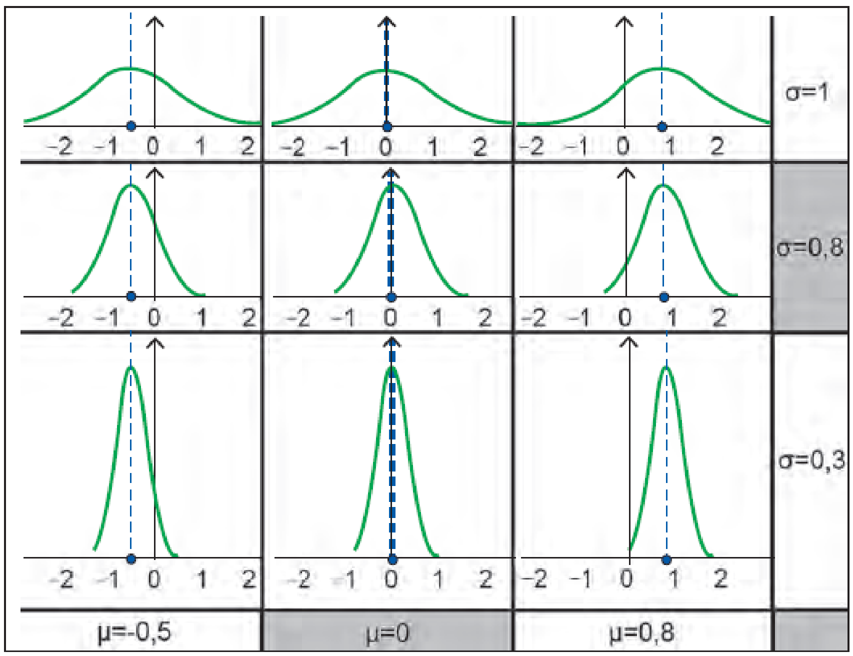
2) Γκαουσιανή καμπύλη

Είναι η γραφική παράσταση, όπου το πλήθος είναι αρκετά μεγάλο και το πλήθος των κλάσεων κατάλληλα μεγάλο, το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων τείνει να μοιάσει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y = $\frac{e^{\frac{-1}{2}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ για κάποιες τιμές των παραμέτρων μ και σ (η σ είναι θετική) .



Η ευθεία x = μ είναι ο άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \frac{e^{\frac{-1}{2}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Συνεπώς, η τιμή του σ καθορίζει πόσο «απλωμένη» ή «μαζεμένη» είναι η καμπύλη γύρω από το μ και ποιο είναι το μέγιστο «ύψος» της. Η τιμή του μ επηρεάζει τη «θέση» της καμπύλης καθώς καθορίζει τη θέση του άξονα συμμετρίας της. Όταν το σ μεγαλώνει, το σχήμα της μοιάζει να είναι πιο «απλωμένο» πάνω από τον οριζόντιο άξονα και το μέγιστο «ύψος» της καμπύλης μικραίνει. Τα αντίστροφα συμβαίνουν όταν το σ μικραίνει.



Άσκηση 4 – Λύση

1) Σε μια κανονική κατανομή το 50% περίπου του πληθυσμού είναι πάνω από μ. Οπότε, αφού το 50% περίπου έδωσε απαντήσεις που ήταν από 12 λεπτά και πάνω, θα είναι μ=12. Επιπλέον, το 100%-68%=32% περίπου του πληθυσμού αναμένεται να έδωσαν απαντήσεις κάτω από μ-σ και πάνω από μ+σ, οπότε το 16% των απαντήσεων αναμένεται να είναι κάτω από μ-σ. Οπότε, θα είναι μ-σ=10, και άρα σ=2. Δηλαδή εκτιμούμε ότι μ=12 λεπτά και σ=2 λεπτά.

2) 14=μ+σ και 16=μ+2σ. Οπότε μεταξύ 14 και 16 αναμένεται ότι απάντησαν περίπου $\frac{95\%-68\%}{2} = 13{,}5\%$ των μαθητών .

Άσκηση 5 – Λύση

1) Αφού το 50% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, θα είναι μ=65kg.

Αφού το $\frac{95\%}{2} = 47,5\%$ έχουν βάρος από 65 Kg έως 75 Kg θα είναι 75=μ+2σ, και άρα σ=5. Δηλαδή, μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι μ=65kg και σ=5kg.

2) Επειδή 55=μ-2σ και 70=μ+σ, στο διάστημα (55,70), δηλαδή στο (μ-2σ,μ+σ) αναμένεται να έχουν βάρος περίπου το 68% + $\frac{95\% - 68\%}{2}$ = 81,5% των μαθητών.

Άσκηση 6 – Λύση

1) α–Β, β–Γ, γ–Δ, δ–Α.

2) Το εύρος είναι περίπου 4 (μεταξύ του -2 και του 2 φαίνεται να είναι σχεδόν το 100% των παρατηρήσεων). Άρα, $6\sigma \approx 4$, οπότε $\sigma \approx 0,66$, άρα $\sigma > 0,3$.

Άσκηση 7 – Λύση

Έχουμε μ = 9 και σ = 4 . Ισχύουν **μ-σ** = 9-4 =**5** και **μ+σ** = 9+4 = **13** και **μ - 2σ** = 9 - 2·4 = **1** και

μ + 2σ = 9+2·4 = **17** και **μ-3σ** = 9-12 = **-3** και μ+3σ = **21** .

Δηλαδή (5,13) και (1,17) και (-3,21) .

Α) Το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται κάτω από 7 λεπτά ανήκει στο διάστημα (5,13) εκτιμάται σε 68%. Λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής εκτιμούμε:

Το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται κάτω από 7 λεπτά ανήκει στο διάστημα (5,13) σε $\frac{68\%}{2} = 34$ %. Το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που χρειάζονται κάτω από 7 λεπτά είναι 50%.

Επομένως, το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που που χρειάζονται κάτω από 7 λεπτά εκτιμάται σε 50% - 34% = 16% .

Β) Το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που ανήκει στο διάστημα (1,17) εκτιμάται σε 95%.

Λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής εκτιμούμε:

- Το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που ανήκει στο διάστημα (1,17) σε 95/2 = 47,5 %.
- Το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που είναι πάνω από 13 σε 50%.

Επομένως, το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που είναι πάνω από 13, εκτιμάται σε

$$50\% - 47{,}7\% \approx 2{,}5\%$$

Γ) Ομοίως με το Α .

Δ) Επειδή 5=μ-σ και 11 = $\frac{\mu+\sigma}{2}$ τότε από 5 έως 11 λεπτά για να πάνε στη δουλειά τους εκτιμάται το

$$68\% + \frac{68\%}{4} = 68\% + 17\% = 85\%$$

Άσκηση 8 – Λύση

Το ποσοστό των στοιχείων/ατόμων για τα οποία η τιμή της μεταβλητής είναι στο διάστημα

(μ - 3σ , μ + 3σ), είναι περίπου το 99,7% του πληθυσμού. Άρα κάτω από μ-3σ είναι 0,15% και πάνω από μ+3σ το 0,15% .

Άσκηση 9 – Λύση

Έχουμε μ =10 και σ = 2. Άρα:

• στο διάστημα (8, 12) έχουμε το 68%

• στο διάστημα (6, 14) έχουμε το 95%

• στο διάστημα (4, 16) έχουμε το 99,7%.

Συνεπώς το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται:

α) κάτω από 8 λεπτά είναι το $\frac{100\%-68\%}{2}$ = 16%

β) πάνω από 14 λεπτά είναι το $\frac{100\%-95\%}{2}$ = 2,5%

γ) το πολύ 10 λεπτά είναι το 50%

δ) μεταξύ 6 και 12 λεπτά είναι το $\frac{95\%-68\%}{2}$ + 68% = 81,5% .

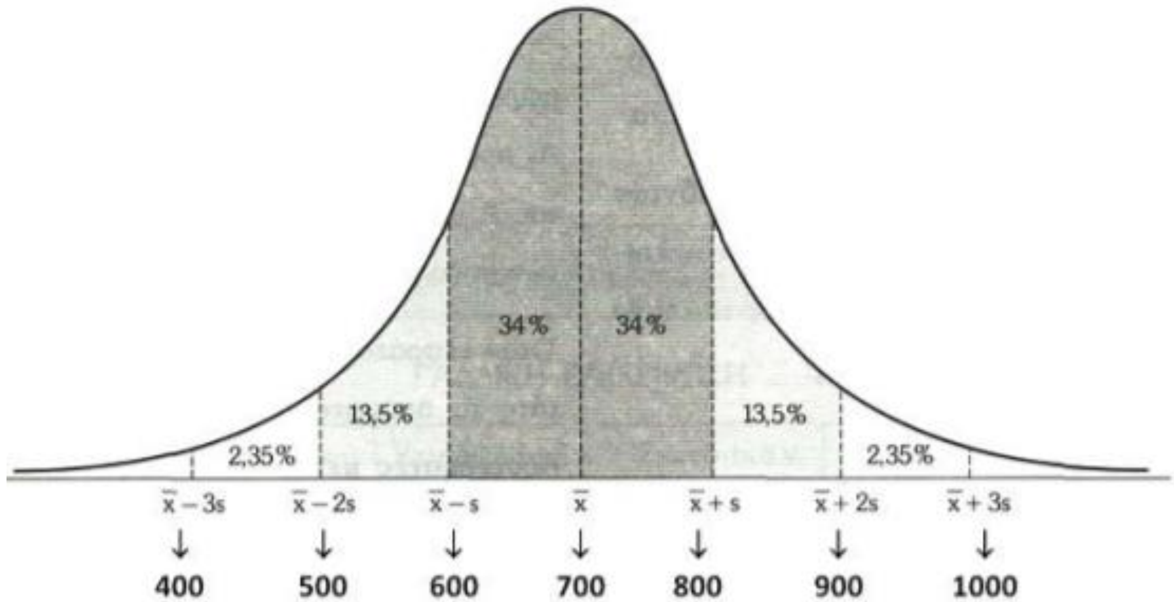
Άσκηση 10 – Λύση

Σε μια κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (μ-2σ, μ+2σ) άρα εκτός του διαστήματος αυτού βρίσκεται το υπόλοιπο 5%, από το οποίο το 2,5% είναι μικρότερες από μ-2σ ενώ το άλλο 2,5% είναι μεγαλύτερες από το μ+2σ. Επειδή το 2,5% των εργατών έχει μηνιαίο μισθό μικρότερο από 500 ευρώ, έχουμε: μ-2σ = 500 .

Σε μια κανονική κατανομή το 84% περίπου των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από μ+σ . Επειδή το 84% των εργατών έχει μισθό το πολύ 800 ευρώ, έχουμε: μ+σ = 800 .

Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε ότι μ= 700 και σ= 100 .

Επειδή μ=700 και σ=100 έχουμε την παρακάτω κατανομή:



Β) Για να βρούμε αν το δείγμα είναι ομοιογενές υπολογίζουμε τον συντελεστή μεταβλητότητας

CV = $\frac{\sigma}{\mu}$ = 0,143 = 14,3% . Εφόσον ο συντελεστής μεταβλητότητας ξεπερνά το 10%, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ) i. Αν η επιχείρηση απασχολεί 400 εργάτες τότε το ποσοστό των εργατών που έχουν μισθό από 500 έως 800 ευρώ όπως παρατηρούμε από το παραπάνω διάγραμμα είναι 13,5%+ 34% +34% =81,5% , άρα το πλήθος αυτών των εργατών είναι: 81,5%·400 =326.

ii. Το ποσοστό των εργατών που έχουν μισθό μεγαλύτερο από 900 ευρώ, όπως παρατηρούμε από το παραπάνω διάγραμμα, είναι $\frac{2,5\%}{2}$ άρα το πλήθος αυτών των εργατών είναι $\frac{2,5\%}{2}$ *400=5.

Άσκηση 11 – Λύση

Α) Γνωρίζουμε ότι στην κανονική κατανομή το εύρος R είναι περίπου ίσο με 6·σ, άρα

6·σ= 6.Άρα σ=1 . Επίσης το 95% των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα (μ-2σ, μ+2σ), οπότε λόγω συμμετρίας της κατανομής θα έχουμε ότι το 2,5% των παρατηρήσεων θα είναι μικρότερες από μ-2σ. Άρα μ-2σ =10 .Άρα μ-2=10. Τότε μ=12 .

Έτσι ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι CV = $\frac{\sigma}{\mu} = \frac{1}{12} < \frac{1}{10}$. Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

Β) Το διάστημα (13,14) είναι το (μ+σ, μ+2σ). Επίσης γνωρίζουμε ότι το 95% των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα (μ-2σ, μ+2σ) και το 68% των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα (μ-σ, μ+σ) , οπότε λόγω συμμετρίας της κατανομής θα έχουμε ότι το $\frac{95\%-68\%}{2}$ = 13,5% των παρατηρήσεων θα βρίσκεται στο διάστημα (μ+σ, μ+2σ) .

Άρα στο διάστημα (13,14) θα βρίσκονται $\frac{13,5}{100}$·400 = 54 παρατηρήσεις.

Γ) Αν οι τιμές αυξηθούν κατά 12 μονάδες, τότε σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του βιβλίου θα έχουμε ότι η νέα μέση τιμή μ' θα είναι μ'=μ+12= 24 και η νέα τυπική απόκλιση σ' θα είναι σ'=σ=1 .

Άρα ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι CV' = $\frac{\sigma'}{\mu'} = \frac{1}{24} = \frac{\mathrm{CV}}{2}$.

Άσκηση 12 – Λύση

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

στ) Λάθος

ζ) Λάθος

Άσκηση 13 – Λύση

Α) Αρχικά υπολογίζουμε τη μέση τιμή των τεσσάρων αυτών παρατηρήσεων. Έχουμε:

$$\mu = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = 5$$

Υπολογίζουμε τη διακύμανση $\sigma^2 = \frac{1}{4} * \sum_{i=1}^{4}(x_\iota - \mu)^2 = 5$.

Άρα σ = $\sqrt{5}$. Άρα CV = $\frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{5}}{5} > \frac{1}{10}$. Επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Β) Έχουμε: μ = $\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_\iota}{\nu}$. Άρα $\sum_{i=1}^{\nu} x_\iota$ = νμ .

$$\mu_y = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} y_\iota}{\nu} = \frac{\frac{2x_1-3\mu}{\sigma}+\frac{2x_2-3\mu}{\sigma}+\cdots+\frac{2x_\nu-3\mu}{\sigma}}{\nu} = \frac{2(x_1+x_2+\cdots+x_{\nu)-3\nu\mu}}{\nu\sigma} = \frac{2\nu\mu-3\nu\mu}{\nu\sigma} = \frac{-\nu\mu}{\nu\sigma} = -\frac{1}{CV_x}.$$

Άσκηση 14 – Λύση

Θεωρούμε το ενδεχόμενο Δ: “ Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β, Γ ”.

Τότε: Δ = ΑUΒUΓ = $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\}$ οπότε το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α, Β, Γ είναι το (ΑUΒUΓ)’ = $\{\omega_4\}$. Γνωρίζουμε ότι στην κανονική κατανομή ισχύει μ = δ. Αρα δ=2 .

Εχουμε CV = $\frac{\sigma}{\mu}$. Άρα, σ=0,2 .

Επίσης έχουμε ότι $\frac{\sigma}{\delta}$ = 0,1 και ότι $\frac{\delta}{\sigma}$ = 10.

Επομένως το σύνολο από το οποίο παίρνουν τιμές οι πιθανότητες P(A) , P(B) είναι το [2,0,2,0,1,20] . Όμως οι τιμές 2 και 10 απορρίπτονται αφού ως τιμές πιθανοτήτων δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερες του 1.

Επειδή A υποσύνολο B θα είναι P(A)≤P(B) και επειδή P(ω)≠0, έχουμε P(A)<P(B).

Άρα P(A)=0,1 , P(B)=0,2 . Άρα:

P(A) = P(ω_1) + P(ω_2) . Άρα, P(ω_1) + P(ω_2) = 0,1 .

P(B) = P(ω_1) + P(ω_2) +P(ω_5) . Άρα, 0,2 = 0,1 + P(ω_5) . Τότε, P(ω_5) = 0,1 .

Η πιθανότητα να συμβεί μόνο το Γ είναι P(ω_3) = 0,3 αφού το ενδεχόμενο ω_3 είναι μοναδικό απλό ενδεχόμενο του Γ που δεν ανήκει στα A και B.

Έτσι, από την βασική σχέση: P(ω_1) + P(ω_2)+ P(ω_3) +P(ω_4)+ P(ω_5) = 1 , ;εχουμε ότι P(ω_3) = 0,5. Άρα τα ενδεχόμενα A, B και Γ δεν θα πραγματοποιηθούν κατά 50%.

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 - Λύση

A) Έστω x_i οι βαθμολογίες των μαθητών του Γ1 στο A' τετράμηνο για τις οποίες ισχύει:

$\bar{x}_1$= 12 και s_1= 2. Οι βαθμολογίες αυτών στο B' τετράμηνο, θα είναι y_i=x_i+1 , με $\bar{y}$ = $\bar{x}_1$+1 = 12+1 = 13 και s_y=s_1=2 .

Άρα, ο συντελεστής μεταβλητότητας των βαθμολογίων του Γ1 στο B' τετράμηνο είναι:

$$CV_1 = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{2}{13}.$$

Έστω, t_i οι βαθμολογίες των μαθητών του Γ2 στο A' τετράμηνο για τις οποίες ισχύει:

$\bar{x}_2$=12 και s_2= 2 . Οι βαθμολογίες αυτών στο B' τετράμηνο θα είναι: φ_i=t_i+0,1t_i = 1,1t_i με

$\bar{\phi}$ = 1,1$\bar{x}_2$ = 1,1*12 και s_φ=1,1s_2=1,1*2 .

Άρα, ο συντελεστής μεταβλητότητας των βαθμολογίων του Γ2 στο Β' τετράμηνο είναι:

$$CV_2 = \frac{s_\varphi}{\bar{\varphi}} = \frac{1{,}1*2}{1{,}1*12} = \frac{2}{12}$$

Ισχύει $\frac{2}{13} < \frac{2}{12}$ άρα $CV_1 < CV_2$. Οπότε η βαθμολογία του Β' τετραμήνου στο Γ1 παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια σε σχέση με τη βαθμολογία στο Γ2.

Β) Ισχύει ότι $CV_2 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} > 0{,}1$.

Άρα, το δείγμα των βαθμολογιών του Γ2 στπ Β' τετράμηνο δεν είναι ομοιογενές. Αν στις βαθμολογίες των μαθητών του Γ2 στο Β' τετράμηνο προσθέσουμε τη σταθερά c>0, τότε γίνεται : $\omega_i = \varphi_i + c$. Άρα, η μέση τιμή θα είναι $\bar{\omega} = \bar{\phi} + c = 13{,}2 + c$ και τυπική απόκλιση θα είναι: $s_\omega = s_\varphi = 2{,}2$.

Αφού το δείγμα των βαθμολογιών ω_i είναι ομοιγενές, θα ισχύει ότι: $CV_\omega \leq 0{,}1$. Άρα, $\frac{s_\omega}{\omega} \leq 0{,}1$.

Τότε: $\frac{2{,}2}{13{,}2 + c} \leq 0{,}1$. Άρα, c ≥8,8 . Άρα η μικρότερη τιμή της σταθεράς c είναι 8,8 .

Γ) Οι βαθμολογίες των μαθητών του Γ1 στο Β' τετράμηνο αποτελούν κανονική κατανομή με $\bar{y} = 13$ και $s_y = 2$. Το ποσοστό των μαθητών του Γ1 που είχαν βαθμολογία από 11 έως 19, είναι το ίδιο με το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{y} - s_y\ ,\ \bar{y} + 3s_y)$ μιας κανονικής κατανομής, αφού είναι $\bar{y} - s_y = 11$ και $\bar{y} + 3s_y = 19$. Το ποσοστό αυτών των μαθητών είναι: $\frac{68\%}{2} + \frac{99{,}7\%}{2} = 83{,}85\%$.

Δ) Έστω x_i , i=1,2,….,ν οι βαθμολογίες των μαθητών του Γ1 στο Α' τετράμηνο για τις οποίες ισχύει:

$\bar{x}_1$= 12 και s_1= 2. Τα τετράγωνα των βαθμολογιών δίνονται από τον τύπο: $\tau_i = {x_i}^2$, i=1,2,….,ν .

Η μέση τιμή αυτών των βαθμολογιών είναι: $\bar{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu}$.

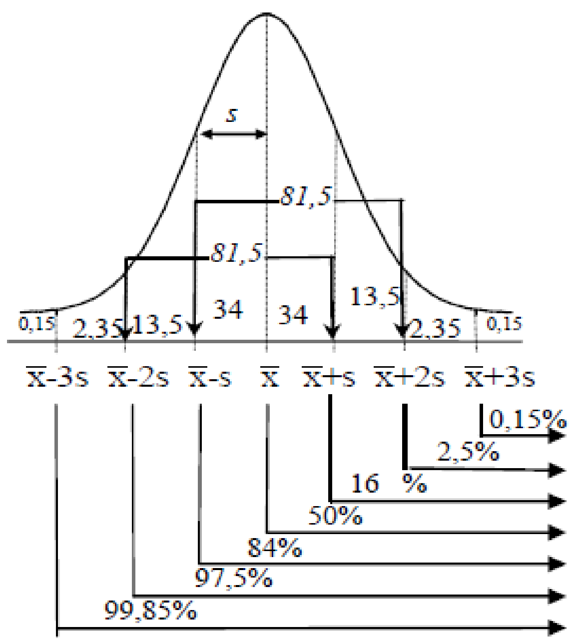
Από τον τύπο που δίνεται, έχουμε : ${s_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \frac{(\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2)^2}{\nu^2}$. Άρα, ${s_1}^2 = \bar{\tau} - (\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu})^2$.

Άρα, ${s_1}^2 = \bar{\tau} - {\bar{x}_1}^2$. Τέλος, $\bar{\tau} = {s_1}^2 + {\bar{x}_1}^2$.

Άσκηση 2 - Λύση

Α) Επειδή ο μέγιστος δείκτης του 16% των «λιγότερο έξυπνων μαθητών» είναι 84 έχουμε ότι μ-σ= 84 ,(1). Επειδή ο ελάχιστος δείκτης του 16% των «εξυπνότερων μαθητών» είναι 108, έχουμε ότι μ+σ= 108 (2). Λύνοντας το σύστημα, έχουμε μ=96 και σ = 12.

Β) Επειδή η κατανομή είναι κανονική ή περίπου κανονική, γνωρίζουμε ότι το εύρος είναι R = 6s = 72 και η διάμεσος δ είναι δ =μ= 96.



Γ) Το ποσοστό των μαθητών που έχει δείκτη νοημοσύνης τουλάχιστον 132, δηλαδή πάνω από μ+3σ=132, όπως φαίνεται από την καμπύλη συχνοτήτων είναι 0,15%.

Δ) CV = $\frac{\sigma}{\mu} = \frac{1}{8} > \frac{1}{10}$. Οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Αν ο δείκτης νοημοσύνης αυξηθεί κατά c τότε η νέα μέση τιμή είναι μ' = μ+ c = 96 + c και η νέα τυπική απόκλιση σ'=σ= 12. Ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι CV' = $\frac{\sigma'}{\mu'} = \frac{12}{96 + c}$. Για να είναι ομοιογενές πρέπει CV' <0,1. Άρα, c≥24 .

Άρα η ελάχιστη θετική ακέραια τιμή ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές είναι c = 24.

Άσκηση 3 - Λύση

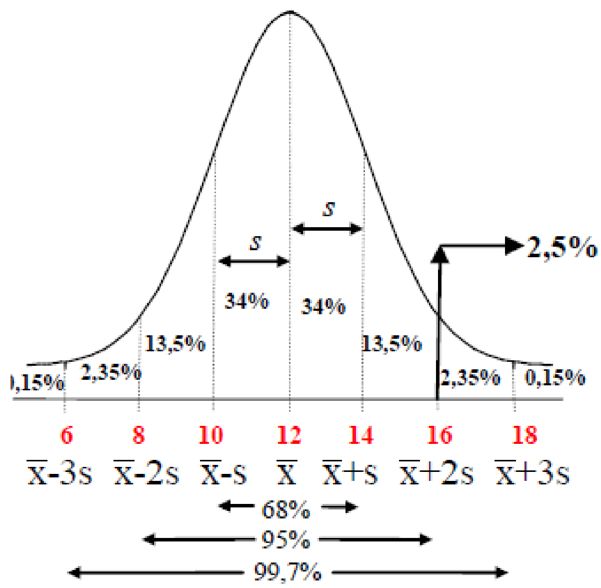
Α) Για τη διακύμανση έχουμε:

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu}\right\}=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{t_i^2}{\nu}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu^2}=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{t_i^2}{\nu}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu}t_i}{\nu}\right)^2=\overline{\left(x^2\right)}-\left(\overline{x}\right)^2$$

Οπότε ισχύει.

Β) α). Επειδή εξετάζουμε τους μαθητές ως προς τη βαθμολογία, έχουμε μόνο μη αρνητικές τιμές . Οπότε ισχύει μ^2 = 148 και CV = $\frac{1}{6}$. Υψώνοντας στο τετράγωνο και λυνοντας ως προς σ^2, έχουμε ότι

σ^2 = 4 . Η τυπική απόκλιση ισούται με τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης. Επομένως είναι σ= 2 .Επειδή οι παρατηρήσεις ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή η διάμεσος ισούται με τη μέση τιμή. Συνεπώς δ =μ= 12 .



β). Οι παρατηρήσεις ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή οπότε έχουμε την διπλανή καμπύλη. Συνεπώς πάνω από 16 βρίσκεται το 2,35%+0,15%=2,5% των παρατηρήσεων . Άρα οι 10 μαθητές με βαθμό πάνω από 16 είναι το 2,5% όλων των μαθητών .

Έστω ν το σύνολο όλων των μαθητών. Τότε αφού 10 μαθητές αποτελούν το 2,5% όλων των μαθητών θα είναι $\frac{2,5}{100}\nu$= 10. Άρα ν=400 μαθητές.

Άσκηση 4 - Λύση

Α) Επειδή το 84% των καταστημάτων έχουν κέρδη λιγότερα από 1200 ευρώ ,έχουμε μ+σ=1200. Ενώ επειδή το 97,5% των καταστημάτων έχουν κέρδη πάνω από 600 ευρώ, έχουμε μ-2σ=600. Λύνουμε το σύστημα και έχουμε σ=200 και μ=1000. Ακόμα, επειδή έχουμε κανονική κατανομή δ=μ=1000.

Β) σ^2 = 40000 και R=6σ=1200 .

Γ) CV = $\frac{\sigma}{\mu}$ = 0,2>0,1 . Άρα δεν είναι ομοιογενές . Έστω ότι κατά c > 0 πρέπει να αυξηθούν τα κέρδη των καταστημάτων, οπότε τα νέα κέρδη θα είναι y=x+c .

Τότε μ'=μ+c = 1000+c και σ'=σ=200 .

Πρέπει CV'≤0,1 . Λύνοντας το σύστημα, παίρνουμε ότι c≥1000. Επομένως για να συμβαίνει αυτό η μικρότερη τιμή της σταθεράς είναι η c = 1000 .

Δ) Επειδή τα κέρδη θα μειωθούν κατά 20%, τα νέα κέρδη θα είναι z =0,8x .

Άρα έχουμε μ''= 0,8, και σ'' = 0,8σ . CV'' = $\frac{\sigma''}{\mu''}$ = 0,2 .

Άσκηση 5 - Λύση

Έχουμε μ = 1000 και σ = 4.

- μ-σ = 996 , μ+σ = 1004. Στο (996,1004) έχουμε το 68%
- μ-2σ = 992 , μ+2σ = 1008. Στο (992,1008) έχουμε το 95%
- μ-3σ = 988 , μ+3σ = 1012. Στο (988,1012) έχουμε το 99,7%

Α) Λιγότερο από 996 ml είναι $\frac{100-68}{2}$% = 16%

Β) 992-1008 ml είναι $\frac{95-68}{2}\% + 68\%$ = 81,5%

Γ) Περισσότερο από 1008 ml είναι $\frac{100-95}{2}$% = 5%

Δ) 996-1008 ml είναι το $\frac{68+95}{2}$% = 81,5%

Άσκηση 6 - Λύση

Έχουμε μ = 16 και σ = 4.

- μ-σ = 12 , μ+σ = 20. Στο (12,20) έχουμε το 68%
- μ-2σ = 8 , μ+2σ = 24. Στο (8,24) έχουμε το 95%
- μ-3σ = 4 , μ+3σ = 28. Στο (4,28) έχουμε το 99,7%

Α) $\frac{95-68}{2}\% + 68\%$ = 81,5%

Β) $\frac{99{,}7-68}{2}\% + 68\%$ = 83,85%

Άσκηση 7 - Λύση

Έχουμε μ = 40 και 0,25*40 = σ. Άρα σ = 10 .

- μ-σ = 30 , μ+σ = 50. Στο (30,50) έχουμε το 68%
- μ-2σ = 20 , μ+2σ = 60. Στο (20,60) έχουμε το 95%
- μ-3σ = 10 , μ+3σ = 70. Στο (10,70) έχουμε το 99,7%.

Α) $\frac{100-68}{2}\% = 32\%$

Β) $\frac{100-95}{2}\% = 2{,}5\%$

Γ) $\frac{100-99{,}7}{2}\% = 0{,}15\%$

Δ) 50%

Άσκηση 8 - Λύση

Έχουμε μ = 12 και σ=2 .

- μ-σ = 10 , μ+σ = 14. Στο (10,14) έχουμε το 68%.
- μ-2σ = 8 , μ+2σ = 16. Στο (8,16) έχουμε το 95%.
- μ-3σ = 6 , μ+3σ = 18. Στο (6,18) έχουμε το 99,7%.

Α) $\frac{100-68}{2}\% = 32\%$

Β) $\frac{100-95}{2}\% = 2,5\%$

Γ) $\frac{95-68}{2}\% + 68\%$ = 81,5%

Δ) $\frac{100-95}{2}\% = 2,5\%$

Ε) $\frac{100-95}{2}\% + \frac{100-99,7}{2}\% + 68\% = 70,65\%$

Άσκηση 9 - Λύση

Έχουμε μ = 20 και σ=4 .

- μ-σ = 16 , μ+σ = 24. Στο (16,24) έχουμε το 68%.
- μ-2σ = 12 , μ+2σ = 28. Στο (12,28) έχουμε το 95%.
- μ-3σ = 8 , μ+3σ = 32. Στο (8,32) έχουμε το 99,7%.

Α) $\frac{100-95}{2}\% = 2,5\%$

Β) $\frac{100-68}{2}\% = 32\%$

Γ) $\frac{95-68}{2}\% + 68\%$ = 81,5%

Δ) $\frac{100-95}{2}\% = 2,5\%$

Άσκηση 10 - Λύση

Α) ‘Εχουμε ότι δ=μ. Αρα μ = 3 . Εχουμε μ-2σ =$\frac{3,04}{2}$. Αρα σ= 0,74 .

R=6σ = 4,44 και CV = $\frac{\sigma}{\mu}$ = 0,246 .

Β) μ-σ = 2,26 , μ+σ = 3,74. Στο (2,26, 3,74) έχουμε το 68%.

μ-2σ = 1,52 , μ+2σ = 4,48. Στο (1,52, 4,48) έχουμε το 95%.

μ-3σ = 0,78 , μ+3σ = 5,22. Στο (0,78,5,22) έχουμε το 99,7%.

Το ποσοστό των σωλήνων που έχουν μήκος από 2,96 m έως 3,02 m είναι:

$\frac{95-68}{2}\% + 68\%$ = 81,5%.

2.5. Πίνακες Συνάφειας και Ραβδογράμματα

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

Οι πίνακες συνάφειας χρησιμοποιούνται για την αναζήτηση σχέσεων ανάμεσα σε δύο ποιοτικές μεταβλητές.

Α) Θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε πίνακα συνάφειας

Β) Όχι, καθώς το φύλο και η χρήση διαδικτύου σε ώρες είναι ποσοτικές μεταβλητές

Γ) Όχι, καθώς ο βαθμός είναι ποσοτική μεταβλητή

Δ) Το φύλο είναι ποιοτική μεταβλητή. Η ικανοποίηση θα ήταν είτε ποιοτική (αν εκφραζόταν καθόλου/λίγο/αρκετά/πολύ ή με κάτι παρόμοιο) ή θα ήταν ποσοτική (αν εκφραζόταν με κάποια κλίμακα π.χ. ικανοποίηση από το 1 μέχρι το 10). Οπότε αντιστοίχως, θα μπορούσαμε ή όχι να κατασκευάσουμε πίνακες συνάφειας.

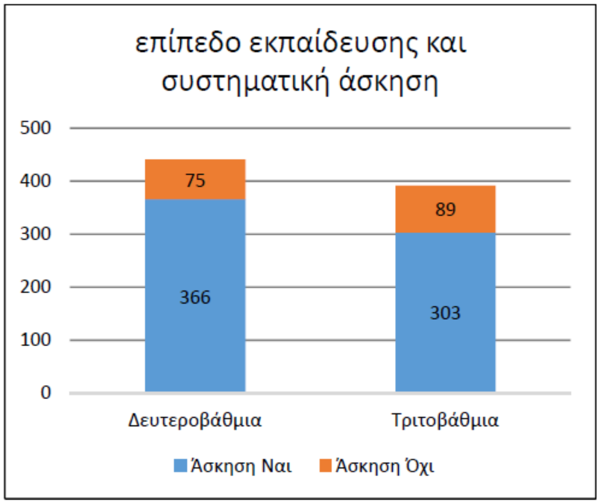
Ε) Θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε πίνακα συνάφειας

Άσκηση 2 – Λύση

α) Ο πίνακας συνάφειας φαίνεται συμπληρωμένος παρακάτω:

		Άσκηση		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Εκπαίδευση	Δευτεροβάθμια	366	75	441
	Τριτοβάθμια	303	89	392
	Σύνολο	669	164	833

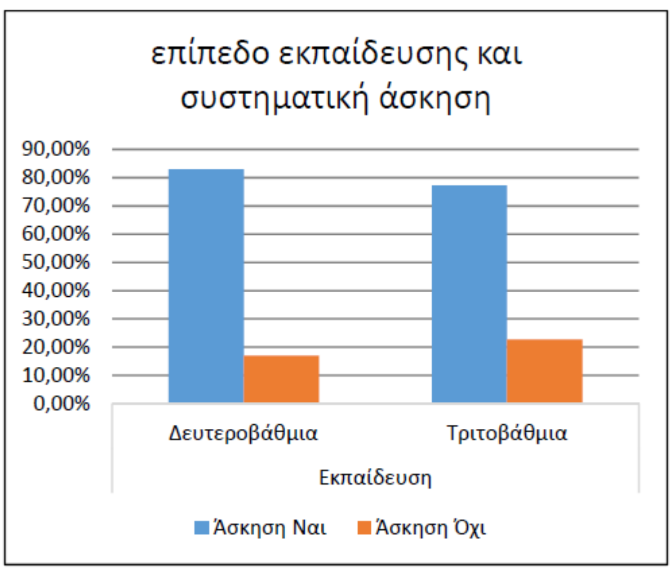
Το στοιβαγμένο ραβδόγραμμα των συχνοτήτων αυτού του πίνακα είναι το εξής:



β) Ο πίνακας συνάφειας σχετικών συχνοτήτων ως προς το επίπεδο εκπαίδευσης είναι ο εξής:

		Άσκηση		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Εκπαίδευση	Δευτεροβάθμια	82,99%	17,01%	100,00%
	Τριτοβάθμια	77,30%	22,70%	100,00%
	Σύνολο			

και το αντίστοιχο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμά του:



γ) Κυρίως από τον πίνακα συνάφειας και το ραβδόγραμμα του (β) ερωτήματος, φαίνεται ότι εκείνοι που έχουν ολοκληρώσει σπουδές σε ΑΕΙ ασκούνται ελαφρώς λιγότερο από εκείνους που έχουν ολοκληρώσει το Λύκειο.

Άσκηση 3 – Λύση

α) Το μεγαλύτερο ποσοστό γυναικών μόνιμων διδασκόντων παρατηρείται στο Χαροκόπειο και στο Πάντειο (41%) και το χαμηλότερο στο Πολυτεχνείο Κρήτης (14%)

β) Στο σύνολο των Ελληνικών Πανεπιστημίων, το ποσοστό των γυναικών μόνιμων διδασκόντων είναι

$$\frac{2589}{8483} = 0{,}30519 = 30{,}5\% \,.$$

Οπότε, το ποσοστό των γυναικών ξεπέρασε το γενικό μέσο ποσοστό τους στα εξής Πανεπιστήμια: Χαροκόπειο, Πάντειο, Δυτικής Μακεδονίας, Πελοποννήσου, Αθηνών, Σχολή Καλών Τεχνών και ΑΠΘ.

γ) Κάποιοι ενδεικτικοί τίτλοι του άρθρου θα μπορούσαν να είναι: "Η συμμετοχή των γυναικών ως καθηγήτριες στο Πανεπιστήμιο", ή "Το Ελληνικό Πανεπιστήμιο κυριαρχείται από άνδρες", ή "Μόνο 1 στις 3 καθηγήτριες στο Πανεπιστήμιο είναι γυναίκα".

Το σημαντικό κοινωνικό θέμα που αναδεικνύεται από αυτή την έρευνα, είναι το χαμηλό ποσοστό με το οποίο αντιπροσωπεύονται οι γυναίκες μεταξύ των καθηγητών στα Ελληνικά Πανεπιστήμια. Ένα τέτοιο άρθρο θα μπορούσε να αποτελέσει αφορμή για συζήτηση σχετικά με τις αιτίες και τις παραμέτρους αυτού του προβλήματος.

Σχόλιο:

Μερικά ερωτήματα τα οποία θα μπορούσαν να συζητηθούν είναι τα εξής:

- Συσχετίζεται ή όχι το ποσοστό των γυναικών μεταξύ των αποφοίτων των Πανεπιστημίων με το ποσοστό των γυναικών μεταξύ των καθηγητών των Πανεπιστημίων;
- Ποιοι λόγοι μπορεί να εμποδίζουν τις γυναίκες να ακολουθήσουν ακαδημαϊκή καριέρα;
- Πώς βιώνουν την ακαδημαϊκή καριέρα οι γυναίκες που την έχουν επιλέξει;

- Τι δυσκολίες αντιμετωπίζουν;

Στη μελέτη κάποιων από αυτά τα ερωτήματα (πχ στο πρώτο και ίσως λιγότερο στο δεύτερο) η στατιστική θα μπορούσε να αξιοποιηθεί. Σε κάποια άλλα (όπως στο τρίτο) ίσως να είναι χρήσιμη μια ποιοτική προσέγγιση, με συνεντεύξεις γυναικών, συνδέσεις με άλλα κείμενα και προσεγγίσεις κλπ.

Άσκηση 4 – Λύση

α) Στο σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος αντιστοιχεί το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα του σχήματος

(α) όπου το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων για τους ιδιοκτήτες και τους ενοικιαστές είναι 100% (10%+5%+25%+50%+10%=100%)

Στο σχήμα (β) το ραβδόγραμμα δείχνει το ποσοστό ικανοποίησης σε κάθε μία από τις δύο κατηγορίες (25%+12%+63%=100% για τους ιδιοκτήτες, 83%+17%=100% για τους ενοικιαστές).

β) Όπως προκύπτει από το σχήμα (α), ιδιοκτήτες είναι το 40% του δείγματος (10+5+25) ενώ ενοικιαστές είναι το 60% του δείγματος (50+10).

γ) Όπως προκύπτει από το σχήμα (α), πολύ ικανοποιημένοι είναι το 10%+50%=60% του δείγματος

δ) Στο (β), το 63% δείχνει το ποσοστό των λίγο ικανοποιημένων ιδιοκτητών στο σύνολο των ιδιοκτητών και το 83% δείχνει το ποσοστό των πολύ ικανοποιημένων ενοικιαστών στο σύνολο των ενοικιαστών.

ε) Αν το δείγμα είναι 200 κάτοικοι, οι πολύ ικανοποιημένοι ιδιοκτήτες είναι 10%*200 = 20 άτομα και οι ικανοποιημένοι ενοικιαστές είναι 10%*200 = 20 άτομα.

Άσκηση 5 – Λύση

Για την οργάνωση των δεδομένων μας θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα συνάφειας:

		Πίστη στα θαύματα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Εκπαίδευση	Δημοτικό	132	37	169
	Γυμνάσιο	392	82	474
	Λύκειο	45	12	57
	ΤΕΙ/ΑΕΙ	110	29	139
	Μεταπτυχιακό	52	15	67
	Σύνολο	731	175	906

α) Οι απόφοιτοι Γυμνασίου είναι $\frac{474}{906}$ = 0,523= 52,3% του δείγματος, οι απόφοιτοι Λυκείου είναι $\frac{57}{906}$ = 0,063 = 6,3% του δείγματος, και οι απόφοιτοι ΑΕΙ/ΤΕΙ είναι $\frac{139}{906}$ = 0,153 = 15,3% .

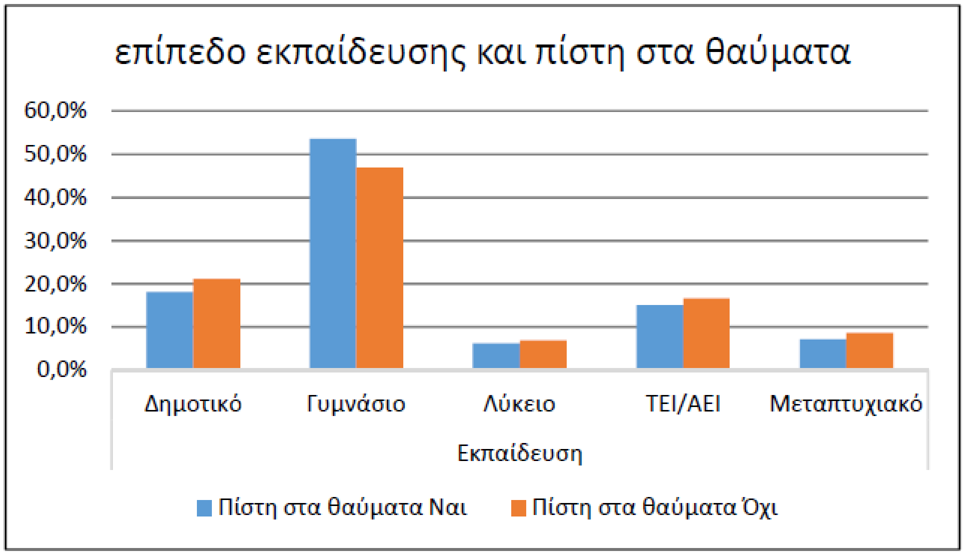
β) Το ποσοστό αποφοίτων Λυκείου που φαίνεται να πιστεύουν στα θαύματα είναι $\frac{45}{57}$ = 78,9%

Το ποσοστό αποφοίτων ΤΕΙ/ΑΕΙ που φαίνεται ότι δεν πιστεύουν στα θαύματα είναι $\frac{29}{139}$ =20,9%

γ) Ο πίνακας συνάφειας σχετικών συχνοτήτων ως προς την πίστη στα θαύματα είναι ο εξής:

		Πίστη στα θαύματα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Εκπαίδευση	Δημοτικό	18,1%	21,1%	
	Γυμνάσιο	53,6%	46,9%	
	Λύκειο	6,2%	6,9%	
	ΤΕΙ/ΑΕΙ	15,0%	16,6%	
	Μεταπτυχιακό	7,1%	8,6%	
	Σύνολο	100,0%	100,0%	

Το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ως προς την πίστη στα θαύματα φαίνεται παρακάτω:



δ) Από το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα του (ε) ερωτήματος φαίνεται μια μεγαλύτερη συμμετοχή στο "όχι" από ότι στο "ναι" για τα τρία υψηλότερα επίπεδα εκπαίδευσης, αλλά και για το Δημοτικό. Αντίστροφη είναι η εικόνα για τους απόφοιτους Γυμνασίου.

Αν κατασκευάσουμε τον πίνακα συνάφειας ως προς το επίπεδο εκπαίδευσης, αυτό φαίνεται από τα μεγαλύτερα ποσοστά του "όχι" που συγκεντρώνουν οι τρεις υψηλότερες βαθμίδες (21,1%, 20,9% και 22,4%) σε σύγκριση με το ποσοστό του "όχι" που αφορά το σύνολο των συμμετεχόντων (19,3%).

		Πίστη στα θαύματα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Εκπαίδευση	Δημοτικό	78,1%	21,9%	100,0%
	Γυμνάσιο	82,7%	17,3%	100,0%
	Λύκειο	78,9%	21,1%	100,0%
	ΤΕΙ/ΑΕΙ	79,1%	20,9%	100,0%
	Μεταπτυχιακό	77,6%	22,4%	100,0%
	Σύνολο	80,7%	19,3%	100,0%

Αντίστοιχη παρατήρηση ισχύει και για το Δημοτικό (21,9%), ενώ η αντίστροφη παρατήρηση ισχύει για το Γυμνάσιο (17,3%). Ωστόσο, αν κανείς παραμέριζε τις λεπτομέρειες, θα μπορούσε να πει ότι περίπου 4 στους 5 συμμετέχοντες πιστεύουν στα θαύματα ανεξάρτητα από το επίπεδο εκπαίδευσης. Οι μικροδιαφορές που υπάρχουν ανά επίπεδο εκπαίδευσης δεν αλλάζουν την γενική εικόνα.

Άσκηση 6 – Λύση

α) Από τα δεδομένα που παρουσιάζονται εδώ φαίνεται κάποια συσχέτιση μεταξύ οικογενειακής κατάστασης και ικανοποίησης από την εργασία.

Ωστόσο, το συμπέρασμα ότι ο γάμος κάνει τους ανθρώπους περισσότερο ικανοποιημένους με την εργασία τους υπονοεί μια αιτιώδη σχέση: ο γάμος είναι η αιτία της ικανοποίησης από την εργασία ή κατά κάποιο τρόπο την προκαλεί.

Βέβαια, αυτό δεν ισχύει, διότι μια σχέση ανάμεσα στα δύο δεν είναι απαραίτητα αιτιώδης. Θα μπορούσε να συμβαίνει το αντίστροφο: η ικανοποίηση από την εργασία να προκαλεί τον γάμο. Ή τίποτα από τα δύο δεν προκαλεί το άλλο: θα μπορούσαν και τα δύο να συνδέονται αιτιωδώς με κάτι άλλο, πχ. το πόσο καλά αμειβόμενη είναι η εργασία.

β) Στην αιτιολόγησή του ο συντάκτης συγκρίνει το 64% των πολύ ικανοποιημένων που είναι οι παντρεμένοι με το 18,6% των πολύ ικανοποιημένων που είναι οι ανύπαντροι. Αυτή η σύγκριση όμως δεν είναι ασφαλής, εφόσον δηλώνεται ότι το πλήθος των παντρεμένων στο δείγμα είναι αρκετά μεγαλύτερο από το πλήθος των άλλων κατηγοριών. Από τα δεδομένα της άσκησης φαίνεται να υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στην ικανοποίηση από την εργασία και την οικογενειακή κατάσταση των συμμετεχόντων στην έρευνα. Πιο συγκεκριμένα, μεταξύ των παντρεμένων φαίνεται να αυξάνεται το ποσοστό όταν από τους λίγο ικανοποιημένους από την εργασία περνάμε στους πολύ ικανοποιημένους (από το 47,5% στο 56,7% και μετά στο 64%). Το αντίθετο συμβαίνει μεταξύ των ανύπαντρων (από το 30,3% στο 23,2% και μετά στο 18,6%).

Ας σημειώσουμε ότι, αν η ικανοποίηση από την εργασία δεν συσχετιζόταν με την οικογενειακή κατάσταση, θα περιμέναμε τα ποσοστά των τριών βαθμίδων ικανοποίησης να είναι περίπου ίδια στους παντρεμένους (δηλαδή, οι ράβδοι στην ομάδα παντρεμένοι να έχουν περίπου ίδιο ύψος). Και αντίστοιχα για τις δύο άλλες ομάδες (αν και τα ύψη των ράβδων στους ανύπαντρους αναμένεται να είναι χαμηλότερα από των παντρεμένων, εφόσον στο σύνολο του δείγματος οι ανύπαντροι είναι λιγότεροι από τους παντρεμένους)

Άσκηση 7 – Λύση

α) Ο πίνακας (α) συμπληρωμένος φαίνεται παρακάτω:

	Αιτούντες	Εισακτέοι	Ποσοστό εισακτέων
Άνδρες	8442	3714	44%
Γυναίκες	4321	1512	35%

Από τον πίνακα αυτό φαίνεται ότι πράγματι, οι άνδρες που υπέβαλλαν αίτηση ήταν πιο πιθανό από ό, τι οι γυναίκες να γίνουν δεκτοί.

β) Ο πίνακας (β) συμπληρωμένος φαίνεται παρακάτω:

	Άνδρες			Γυναίκες		
	Αιτούντες	Εισακτέοι	Ποσοστό εισακτέων	Αιτούντες	Εισακτέοι	Ποσοστό εισακτέων
Τμήμα Α	825	512	62%	108	89	82%
Τμήμα Β	560	353	63%	25	17	68%
Τμήμα Γ	325	120	37%	593	202	34%
Τμήμα Δ	417	138	33%	375	131	35%
Τμήμα Ε	191	54	28%	393	94	24%
Τμήμα Ζ	373	23	6%	341	24	7%

(ι) τα ποσοστά των ανδρών εισακτέων στα τμήματα Γ και Ε είναι υψηλότερα από τα αντίστοιχα ποσοστά των γυναικών, κατά 3 και 4 ποσοστιαίες μονάδες αντιστοίχως.

(ιι) τα ποσοστά των εισακτέων γυναικών στα τμήματα Α, Β, Δ και Ζ είναι υψηλότερα από τα αντίστοιχα ποσοστά των ανδρών κατά 20, 5, 2 και 1 ποσοστιαίες μονάδες αντιστοίχως.

γ) Στο σύνολο των 6 τμημάτων το ποσοστό των εισακτέων γυναικών είναι μικρότερο από εκείνο των ανδρών, παρά το ότι το ποσοστό των εισακτέων γυναικών είναι μεγαλύτερο από εκείνο των ανδρών σε 4 από τα 6 τμήματα.

Αυτό οφείλεται στο ότι οι αριθμοί των γυναικών που έκαναν αίτηση και μπήκαν για τα τμήματα Γ και Ε είναι από τους μεγαλύτερους αριθμούς που διαμορφώνουν το σύνολο των αιτουσών και των εισακτέων γυναικών. Δηλαδή τα τμήματα Γ και Ε "βαραίνουν" στον υπολογισμό του ποσοστού περισσότερο από τα άλλα.

δ) Οι άνδρες φαίνεται να απευθύνονται σε όλα τα τμήματα, αλλά έχουν σχεδόν "αποκλειστικότητα" στο τμήμα Β.

Ο γυναίκες απευθύνονται κυρίως στα Γ και Ε (όπου είναι περισσότερες από τους άνδρες υποψηφίους), λιγότερο στα Δ και Ζ και πολύ λίγο στα Α και Β.

Όσον αφορά το ποσοστό εισακτέων, τόσο οι άνδρες, όσο και οι γυναίκες έχουν υψηλά ποσοστά εισακτέων στα τμήματα Α και Β (αν και είναι μικρός ο αριθμός γυναικών εισακτέων στο Β) και πολύ χαμηλά στο Ζ. Γενικά, στα ποσοστά εισακτέων ανδρών και γυναικών ανά μήμα δεν φαίνεται διαφορά τέτοια, ώστε να μιλήσει κανείς για σημαντικά διαφορετικές ευκαιρίες μεταξύ ανδρών και γυναικών.

Άσκηση 8 – Λύση

α) Διαιρούμε τις συχνότητες των "κελλιών" του πίνακα της άσκησης 2 με το συνολικό αριθμό φοιτητών ν = 50.

Φύλο	Βαθμολογία		Σύνολο
	≤ 5	> 5	
Α	11/50 = 22%	36%	58%
Κ	18%	24%	42%
Σύνολο	40%	60%	100%

Δηλαδή το 22% των φοιτητών είναι αγόρια με βαθμό ≤ 5, κτλ.

β) Διαιρούμε τις συχνότητες των "κελλιών" κάθε γραμμής με το αντίστοιχο σύνολο της γραμμής.

Φύλο	Βαθμολογία		Σύνολο
	≤ 5	> 5	
Α	11/29 = 37,93%	62,07%	100%
Κ	42,86%	57,14%	100%
Σύνολο	—	—	—

Δηλαδή το 37,93% των αγοριών έχουν βαθμό ≤ 5, κτλ.

γ) Διαιρούμε τις συχνότητες των "κελλιών" κάθε στήλης με το αντίστοιχο σύνολο της στήλης.

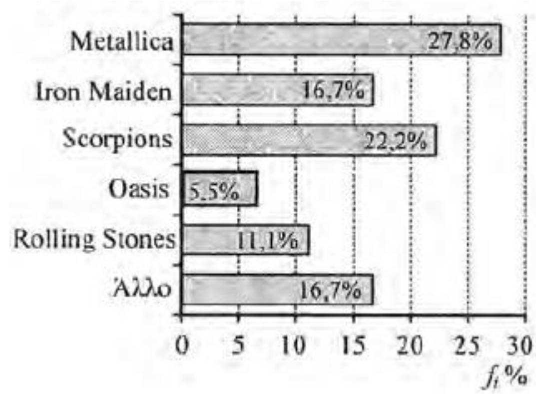
Φύλο	Βαθμολογία		Σύνολο
	≤ 5	> 5	
Α	11/20 = 55%	60%	—
Κ	45%	40%	—
Σύνολο	100%	100%	—

Δηλαδή το 55% των φοιτητών με βαθμό ≤ 5 είναι αγόρια, και ούτω καθεξής.

Άσκηση 9 – Λύση

Κατασκευάζουμε πρώτα τον πίνακα συχνοτήτων:

Μουσικό συγκρότημα, x_i	ν_i	$f_i\%$
Metallica	5	27,8
Iron Maiden	3	16,7
Scorpions	4	22,2
Oasis	1	5,5
Rolling Stones	2	11,1
Άλλο	3	16,7
Σύνολο	18	100,0



Άσκηση 10 – Λύση

Αν ν = 450 το πλήθος των μαθητών, ν_i, i = 1,2,3,4 οι συχνότητες, f_i οι σχετικές συχνότητες και α_i, i = 1,2,3,4 τα τόξα του κυκλικού διαγράμματος για τις τέσσερις κατηγορίες «Άριστα», «Λίαν Καλώ»ς, «Καλώς» και «Σχεδόν Καλώς», αντιστοίχως, θα έχουμε:

$$\nu_2 = f_2 \cdot \nu = 0{,}30 \cdot 450 = 135 \quad \text{και} \quad \nu_2 = \frac{\alpha_3 * \nu}{360} = \frac{144 * 450}{360} = 180.$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τη συχνότητα ν_1 της τιμής X_1 = "Άριστα", χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $\nu_4 = 2\nu_1$:

$$\nu_1 + 135 + 180 + \nu_4 = 450 \Leftrightarrow \nu_1 + 135 + 180 + 2\nu_1 = 450 \Leftrightarrow \nu_1 = \frac{450 - 135 - 180}{3} = 45.$$

Άρα και ν_4 = 90. Έτσι ο πίνακας συχνοτήτων είναι:

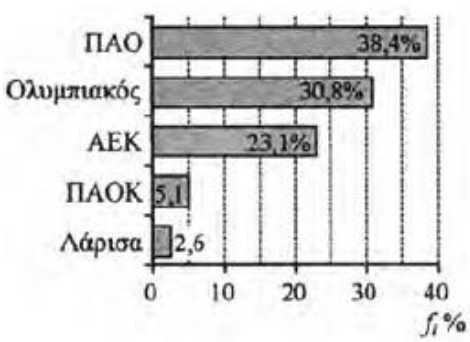
i	x_i	ν_i	$f_i\%$	$\alpha_i = \frac{360\nu_i}{\nu}$
1	Άριστα	45	10	36
2	Λίαν Καλώς	135	30	108
3	Καλώς	180	40	144
4	Σχεδόν Καλώς	90	20	72
	Σύνολο	ν=450	100	360

Άσκηση 11 – Λύση

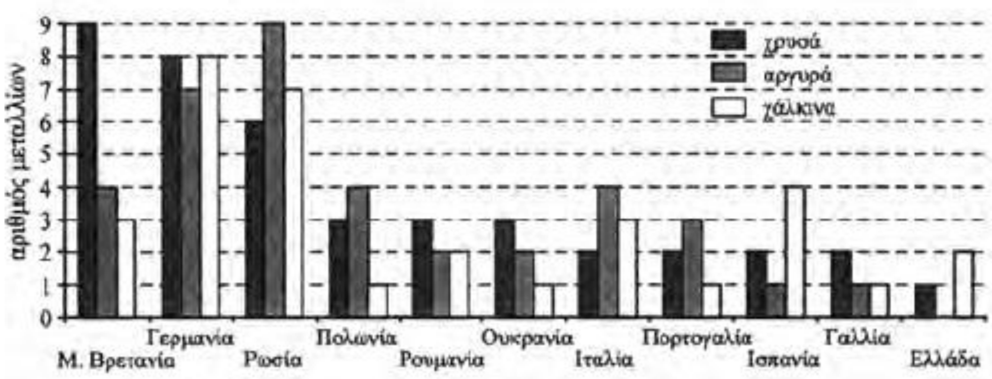
Κατασκευάζουμε πρώτα τον πίνακα συχνοτήτων:

Ομάδα	ν_i	$f_i\%$
ΑΕΚ	9	23,1
Λάρισα	1	2,6
Ολυμπιακός	12	30,8
ΠΑΟ	15	38,4
ΠΑΟΚ	2	5,1
Σύνολο	39	100,0

Συνεπώς το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων είναι:



Άσκηση 12 – Λύση

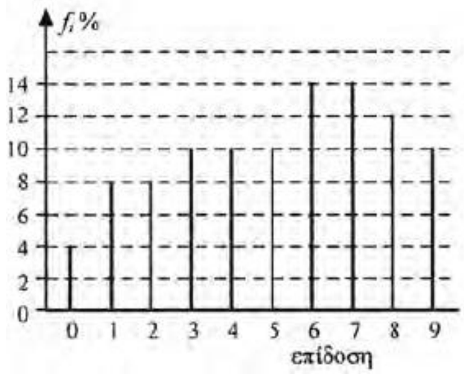


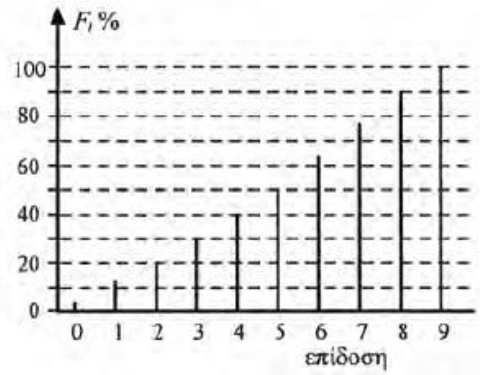
Άσκηση 13 – Λύση

α) Ο πίνακας συχνοτήτων της επίδοσης Χ των 50 υποψηφίων είναι:

x_i	Διαλογή	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	||	2	4	2	4
1	||||	4	8	6	12
2	||||	4	8	10	20
3	~~||||~~	5	10	15	30
4	~~||||~~	5	10	20	40
5	~~||||~~	5	10	25	50
6	~~||||~~ ||	7	14	32	64
7	~~||||~~ ||	7	14	39	78
8	~~||||~~ |	6	12	45	90
9	~~||||~~	5	10	50	100
Σύνολο	—	50	100	—	—

β) Τα διαγράμματα σχετικών και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων είναι:





γ) Θέλουμε επίδοση μεγαλύτερη ή ίση του 8, $X \geq 8$. Άρα η σχολή θα πάρει 6 + 5 = 11 άτομα, δηλαδή το 22% των υποψηφίων.

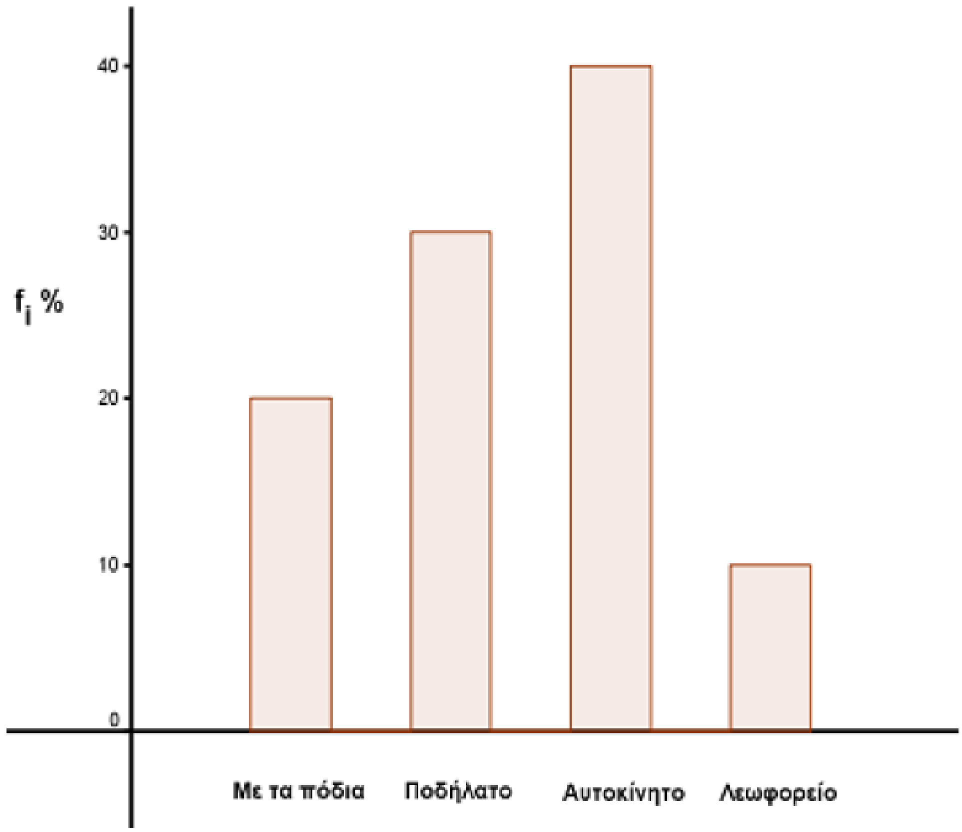
δ) Αφού η σχολή θα πάρει το 36% των υποψηφίων σημαίνει ότι το 64% των υποψηφίων δεν θα επιλεγούν, δηλαδή όσοι έχουν επίδοση μικρότερη ή ίση του 6. Άρα θα επιλεγούν όσοι έχουν επίδοση μεγαλύτερη ή ίση του 7.

Άσκηση 14 – Λύση

α)

ΜΕΣΟ	v_i	f_i%
Με τα πόδια	10	20
Ποδήλατο	15	30
Αυτοκίνητο	20	40
Λεωφορείο	5	10
ΣΥΝΟΛΟ	50	100

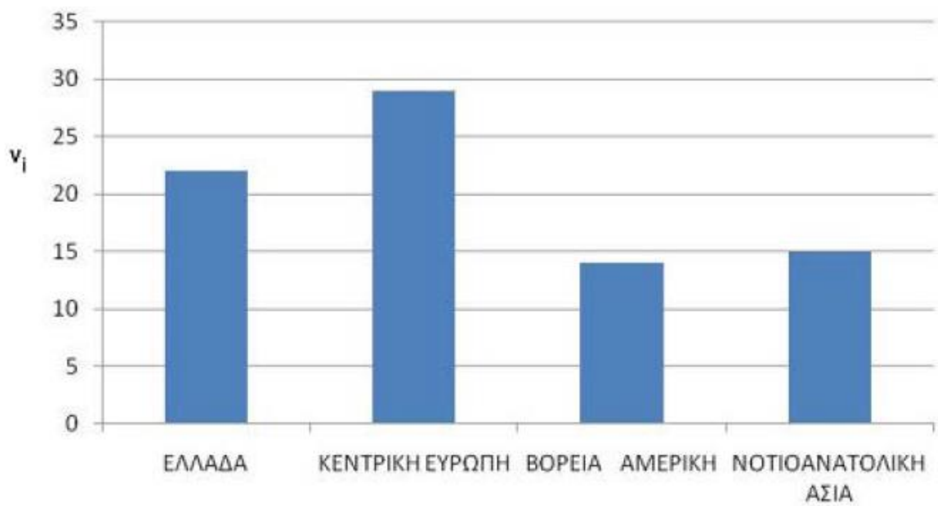
Το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό είναι τότε το παρακάτω:



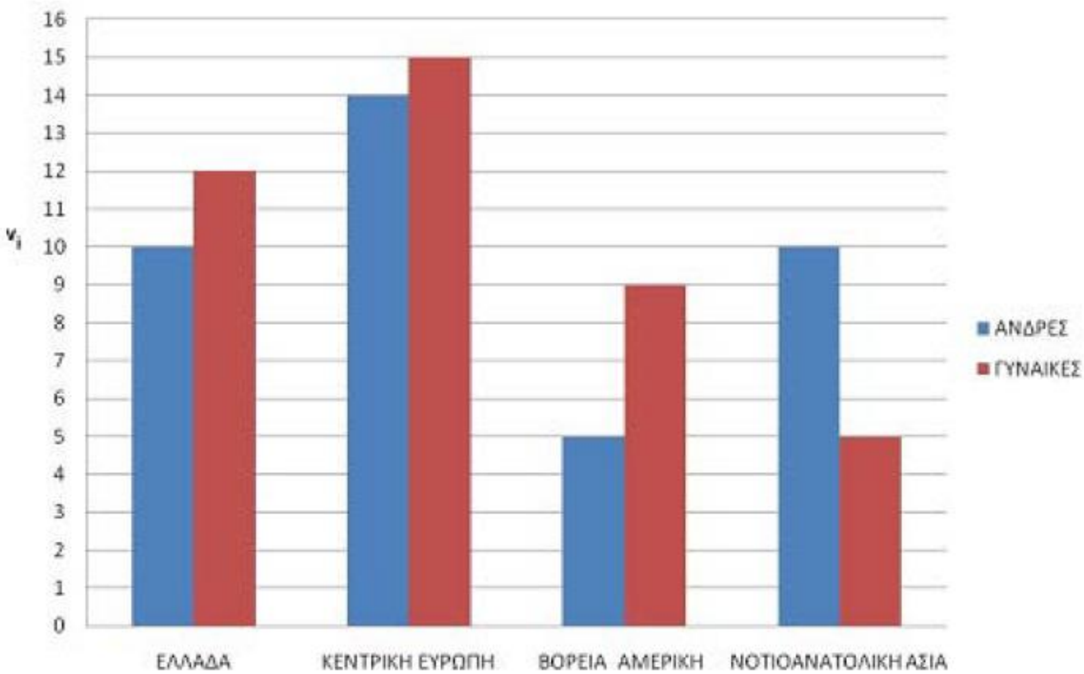
Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 - Λύση

Ι. Για το ραβδόγραμμα συχνοτήτων ως προς το σύνολο των εργαζομένων, χρησιμοποιούμε τα δεδομένα από τη στήλη ΣΥΝΟΛΟ και έχουμε



ΙΙ. Για το διπλό ραβδόγραμμα συχνοτήτων ως προς το φύλο των εργαζομένων, χρησιμοποιούμε τα δεδομένα από τις στήλες ΑΝΔΡΕΣ και ΓΥΝΑΙΚΕΣ και έχουμε

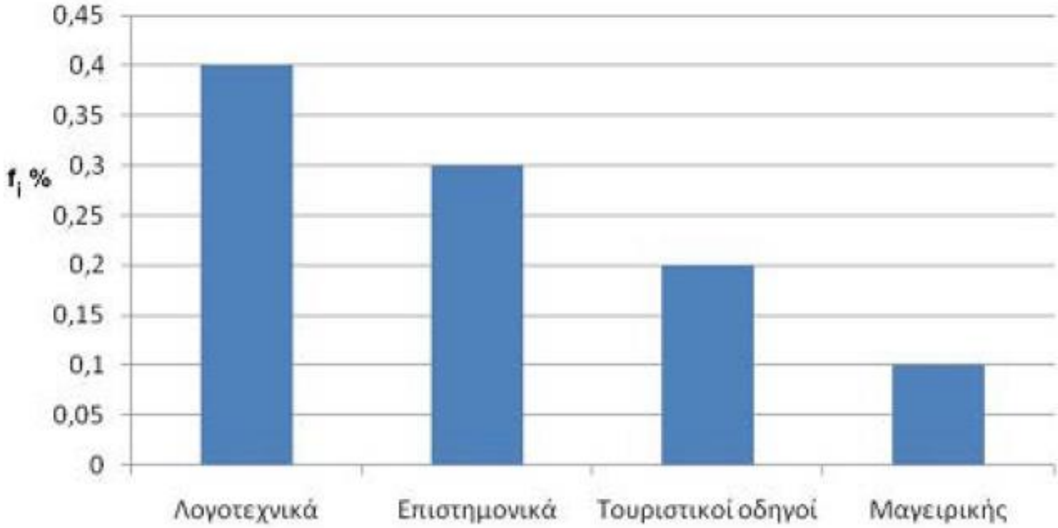


Άσκηση 2 - Λύση

I.

Είδος βιβλίων	ν_i	f_i
Λογοτεχνικά	12	0,4
Επιστημονικά	9	0,3
Τουριστικοί οδηγοί	6	0,2
Μαγειρικής	3	0,1
ΣΥΝΟΛΟ	30	1

ΙΙ. Από τον παραπάνω πίνακα κατασκευάζουμε το ακόλουθο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων



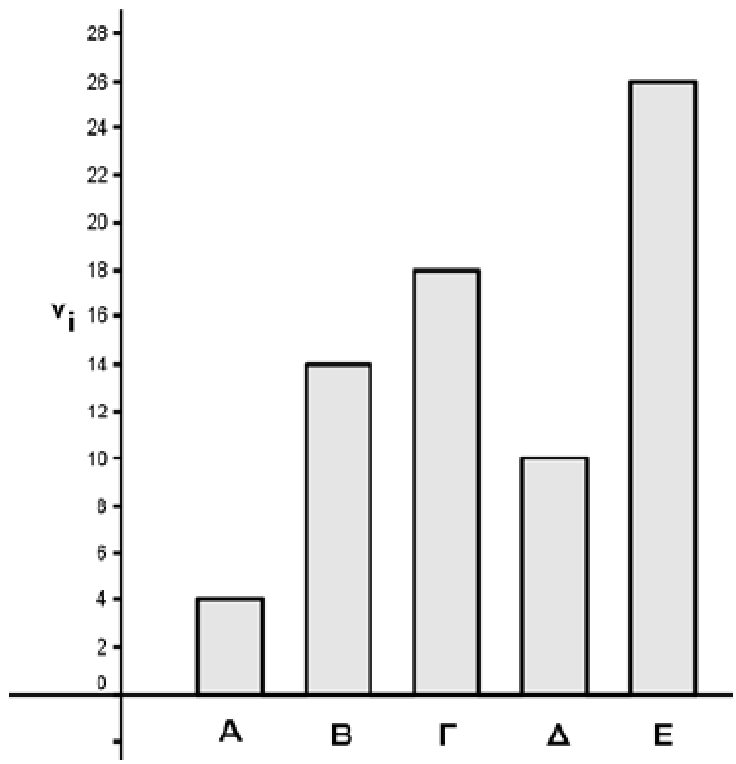
Άσκηση 3 - Λύση

Ι. Αν ν_i η συχνότητα της τιμής x_i , α_i η γωνία στο κυκλικό διάγραμμα του τόξου που αντιστοιχεί στην προηγούμενη συχνότητα και ν το σύνολο, τότε από την ισοδυναμία $\alpha_i = \frac{\nu_i}{\nu}*360$.

Τότε για την πόλη Α, έχουμε ν_1=4 και f_1= 0,056 , για την πόλη Β έχουμε ν_2=14 και f_2=0,194, για την πόλη Γ έχουμε ν_3=18 και f_3=0,25 , για την πόλη Δ έχουμε ν_4=10 και f_4=0,139 και για την πόλη Ε έχουμε ν_5=26 και f_5=0,361 . Έτσι έχουμε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων:

ΠΟΛΗ	ν_i	f_i	$f_i\%$
Α	4	0,056	5,6
Β	14	0,194	19,4
Γ	18	0,25	25
Δ	10	0,139	13,9
Ε	26	0,361	36,1
ΣΥΝΟΛΟ	40	1	100

ΙΙ. Από τον προηγούμενο πίνακα κατασκευάζουμε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων που απεικονίζεται στα δεξιά.



Άσκηση 4 - Λύση

Α) **Ραβδογράμματα**

Στην περίπτωση της μίας ποιοτικής μεταβλητής οι πληροφορίες που αντλούνται από τους πίνακες συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων αναπαριστώνται με τα **ραβδογράμματα** και τα κυκλικά διαγράμματα. Στην περίπτωση των δύο ποιοτικών μεταβλητών, οπτικοποιούμε τα αποτελέσματα ενός πίνακα συνάφειας συχνοτήτων με το **στοιβαγμένο ραβδόγραμμα** και τα αποτελέσματα ενός πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων με το **ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα**.

Β) **Σχέση αιτιότητας**

Είναι η ιδιότητα όπου δηλώνει ότι δύο μεταβλητές Α και Β σχετίζονται μεταξύ τους.

Με δεδομένο, λοιπόν, ότι δύο μεταβλητές Α και Β σχετίζονται, αυτό μπορεί να σημαίνει ότι:

- η μεταβλητή Α είναι η αιτία για τη μεταβλητή Β
- η μεταβλητή Β είναι η αιτία για τη μεταβλητή Α
- υπάρχει ένας τρίτος (συγχυτικός) παράγοντας ο οποίος να είναι η αιτία τόσο για το Α, όσο και για το Β.
- είναι απλά μια σύμπτωση, διότι απλά ένα τυχαίο γεγονός συνέβη στο δείγμα μας, ενώ στην πραγματικότητα, δηλαδή στον πληθυσμό, οι δύο μεταβλητές είναι ασυσχέτιστες.

Γ) **Πίνακας συνάφειας σχετικών συχνοτήτων**

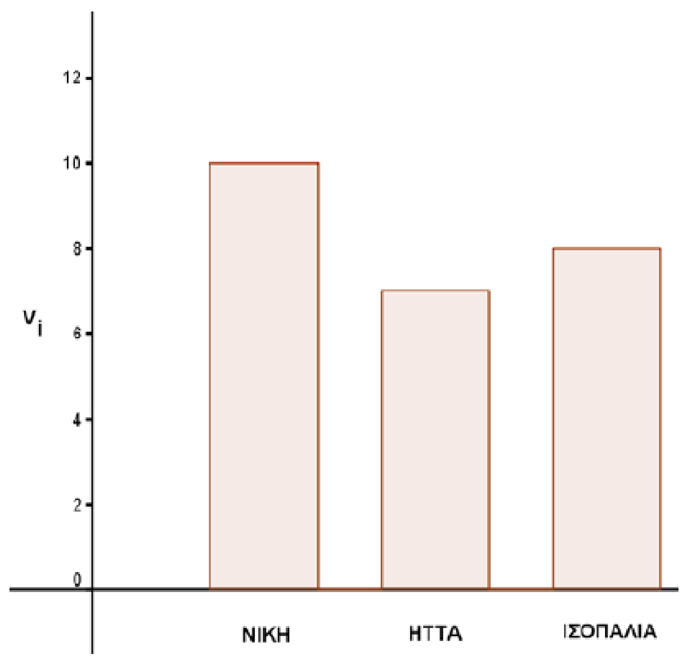
Είναι ο πίνακας, όπου εξετάζονται τα ποσοστά αντί για τις συχνότητες. Ο παραπάνω πίνακας μπορεί να μετατραπεί σε πίνακα σχετικών συχνοτήτων (%) ως προς το σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος ν.

		Τροχαίο Ατύχημα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Φύλο	Άνδρες	34,9%	29,3%	64,2%
	Γυναίκες	13,6%	22,2%	35,8%
	Σύνολο	48,5%	51,5%	100%

Η εμφάνιση των ποσοστών στο εσωτερικό ενός πίνακα συνάφειας μας δίνει τη δυνατότητα να διακρίνουμε τη μορφή της σχέσης που ενδεχομένως υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών ενός πίνακα. Στην περίπτωση δύο μεταβλητών, η μια μεταβλητή μπορεί να παίξει τον ρόλο της ανεξάρτητης μεταβλητής (το φύλο) και η άλλη να παίξει τον ρόλο της εξαρτημένης (από το φύλο) μεταβλητής (το τροχαίο ατύχημα).

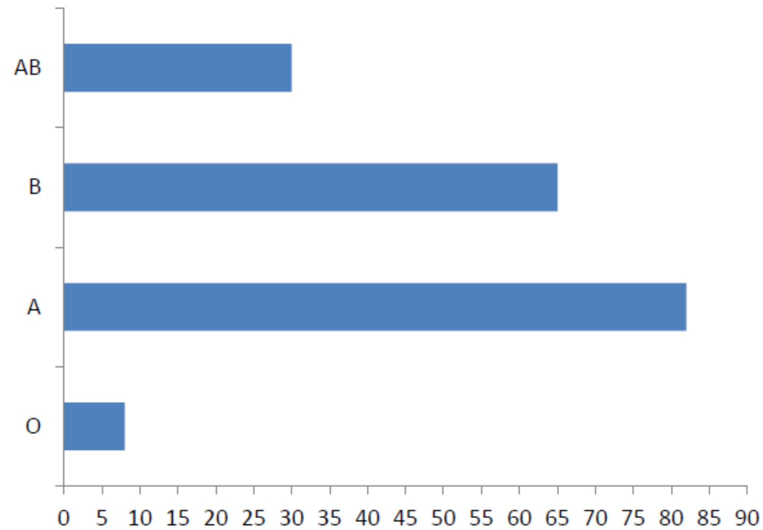
Άσκηση 5 - Λύση

Από τις συχνότητες του πίνακα κατασκευάζουμε το ραβδόγραμμα που απεικονίζεται στα δεξιά.

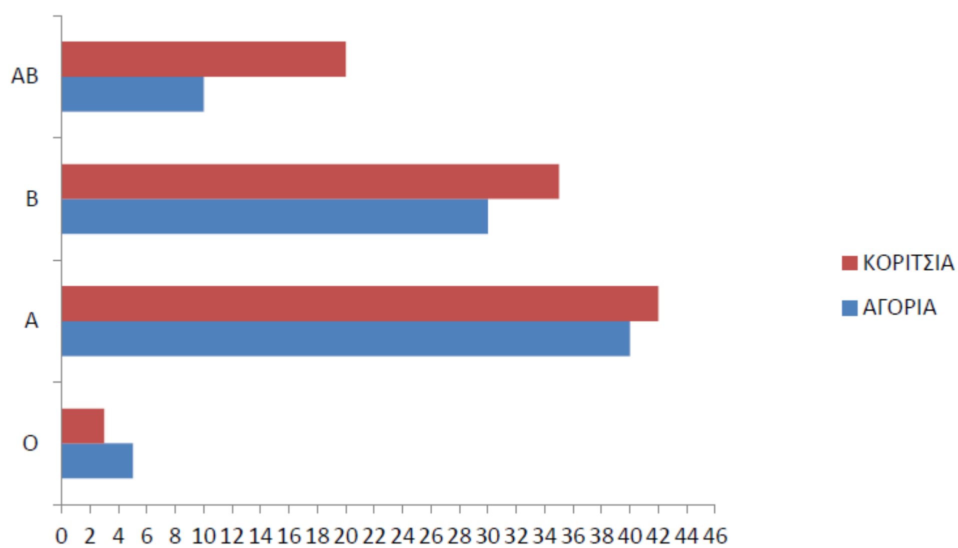


Άσκηση 6 - Λύση

Ι. Για το ραβδόγραμμα ως προς το σύνολο των μαθητών χρησιμοποιούμε τις συχνότητες στη στήλη ΣΥΝΟΛΟ και παίρνουμε το παρακάτω ραβδόγραμμα:



ΙΙ. Για το διπλό ραβδόγραμμα συχνοτήτων ως προς το φύλο των μαθητών χρησιμοποιούμε τις συχνότητες από τις στήλες ΑΓΟΡΙΑ και ΚΟΡΙΤΣΙΑ και έχουμε



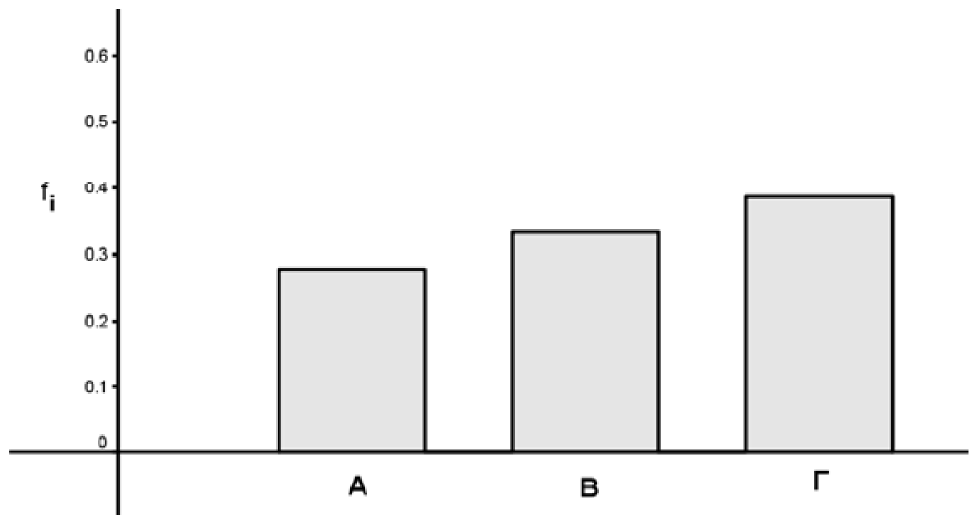
Άσκηση 7 - Λύση

Ισχύει ότι ω+ω+20+ω+40+360. Άρα ω=100.

Άρα οι γωνίες που αντιστοιχούν στις τιμές Α, Β και Γ είναι 100 , 120 και 140 .

Από την ισοδυναμία α_i = f_i*360 , έχουμε ότι: f_1=0,27, f_2=0,3 και f_3=0,38 .

και έτσι κατασκευάζουμε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων



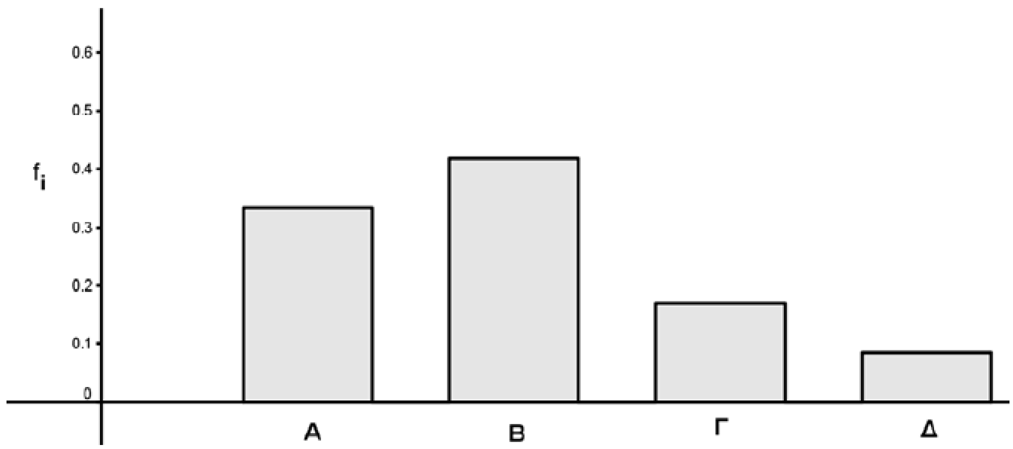
Άσκηση 8 - Λύση

Ι) Εχουμε α_i = $\frac{\nu_i}{\nu}$*360 . Αρα ν_1=40 , ν_2=50 , ν_3=20 και ν_4=10 και f_1= 0,3 , f_2=0,416 , f_3=0,16 , f_4=0,083 .

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων

Μορφωτικό επίπεδο	ν_i	f_i
Α	40	$0,\overline{3}$
Β	50	$0,41\overline{6}$
Γ	20	$0,1\overline{6}$
Δ	10	$0,08\overline{3}$
ΣΥΝΟΛΟ	80	1

II) Από τον πίνακα κατασκευάζουμε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων:

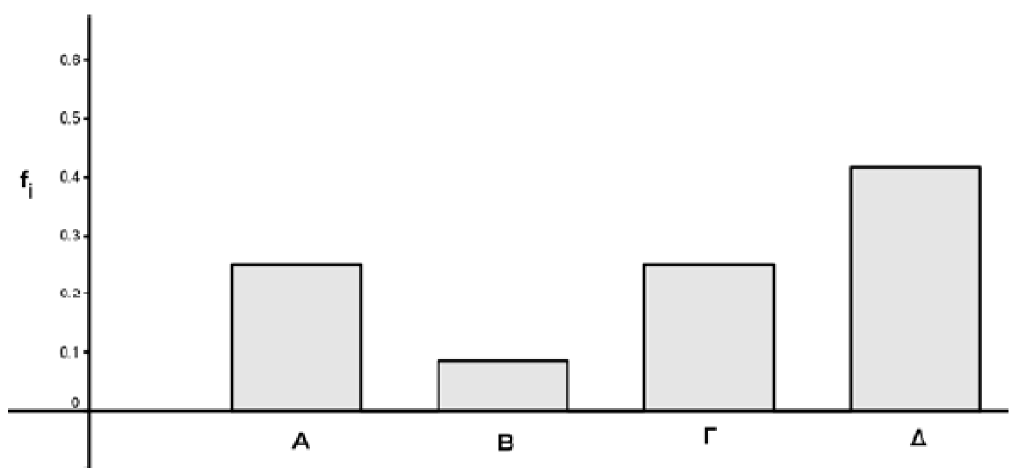


Άσκηση 9 - Λύση

I) Ισχύει $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ =360-90=270 . Εχουμε ότι $\frac{\alpha_2}{1} = \frac{\alpha_3}{3} = \frac{\alpha_4}{5} = \frac{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{9} = \frac{270}{9} = 30$. Άρα:

$$\alpha_2 = 30 \,,\ \alpha_3 = 90 \,,\ \alpha_4 = 150 \quad \text{και} \quad \alpha_1 = 90 \,.$$

II. Από την ισοδυναμία $\alpha_i = f_i * 360$, έχουμε ότι f_1=0,25 , f_2= 0,083 , f_3= 0,25 , f_4=0,416 και έτσι κατασκευάζουμε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων:



Άσκηση 10 - Λύση

Α) Το μέγεθος του δείγματος είναι ν = 500

Από τα δεδομένα του κυκλικού διαγράμματος και του πίνακα συχνοτήτων έχουμε:

1η Γραμμή: α_1=f_1*360 . Άρα f_1 = 0,1 . Έχουμε $f_1 = \frac{\nu_1}{\nu}$. Αρα ν_1 = 50 .

2η Γραμμή: f_2 = 0,15 . Έχουμε $f_2 = \frac{\nu_2}{\nu}$. Αρα ν_2 = 75 . Άρα α_2=54 .

3η Γραμμή: f_3 = 0,5 . Έχουμε $f_3 = \frac{\nu_3}{\nu}$. Αρα ν_3 = 250 . Άρα α_3=180 .

4η Γραμμή: α_4=360-180-54-36=90. ν_4=500-250-75-50=125 και f_4= 1-0,5-0,15-0,1=0,25 .

Τέλος για τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες έχουμε:

$F_1 = f_1$ =0,1 , $F_2 = F_1 + f_2$=0,10+0,15 = 0,25, $F_3 = F_2 + f_3$ = 0,25 + 0,50 = 0,75.

$F_4 = F_3 + f_4$ = 0,75+0,25 = 1.

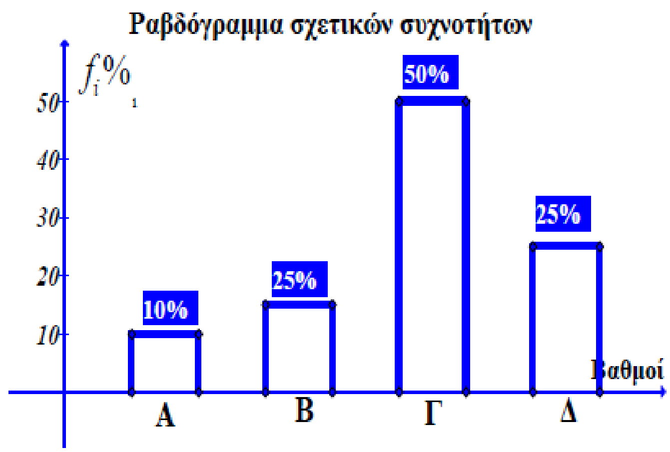
Σύμφωνα με τα παραπάνω στοιχεία ο πίνακας συχνοτήτων έχει ως εξής:

I	Βαθμός εξέτασης	Αριθμός μαθητών	f_i	α_i	F_i
1	Α	50	0,10	36^0	0,10
2	Β	75	0,15	54^0	0,25
3	Γ	250	0,50	180^0	0,75
4	Δ	125	0,25	90^0	1
Σύνολα		500	1	360^0	

Στις εξετάσεις έχει αποτύχει το 25%των μαθητών, δηλαδή $\frac{25}{100}500 = 125$ μαθητές.

Το 65%των μαθητών έχει πάρει βαθμό B, ή C, δηλαδή $\frac{65}{100}500 = 325$ μαθητές .

Β) Έτσι σχηματίζουμε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων:



Γ) Στις εξετάσεις έχει πετύχει το 75%των μαθητών, δηλαδή$\frac{75}{100}500 = 375$ μαθητές.

Δ) Στις εξετάσεις έχει αποτύχει το 25%των μαθητών, δηλαδή $\frac{25}{100}500 = 125$ μαθητές.

Ε) Το 65%των μαθητών έχει πάρει βαθμό B, ή C, δηλαδή $\frac{65}{100}500 = 325$ μαθητές .

2.6. Σύγκριση Ποσοτικών Χαρακτηριστικών στις κατηγορίες ενός Ποιοτικού Χαρακτηριστικού

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

α) Οι συντελεστές μεταβλητότητας των αμοιβών των δύο εταιρειών, για τα δείγματα, είναι:

$CV_A = \frac{s_A}{x_A} = \frac{80}{700} = 11\%$ και ομοίως $CV_E = \frac{s_E}{x_E} = 23\%$. Ισχύει ότι $CV_A < CV_E$, οπότε το δείγμα από την αμερικάνικη εταιρεία είναι πιο ομοιογενές από το αντίστοιχο ευρωπαϊκό δείγμα.

Β) Οι αμοιβές των συνεργατών της αμερικάνικης εταιρείας αυξάνονται κατά 250 δολάρια, οπότε η νέα μέση τιμή θα είναι $y_A = x_A + 250$, δηλαδή $y_A = 950$ δολάρια. Η νέα τυπική απόκλιση θα είν αι $s'_A = s_A = 80$.

γ) Οι νέοι συντελεστές μεταβλητότητας είναι:

$CV'_A = \frac{s'_A}{y'_A} = 8\%$. $CV'_E = \frac{s'_E}{y'_E} = 23\%$. Βλέπουμε ότι ισχύει η σχέση $CV'_A < CV'_E$, καθώς ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητος της νομισματικής μονάδας (δολάρια ή ευρώ).

δ) Κάτι που περιμένουμε να δούμε στα δύο θηκογράμματα είναι η μικρότερη μεταβλητότητα των αμοιβών του πρώτου δείγματος, δηλαδή της αμερικάνικης εταιρείας. Ωστόσο, για να συγκρίνουμε τα θηκογράμματα θα πρέπει οι αμοιβές να είναι υπολογισμένες στην ίδια νομισματική μονάδα. Θα προσαρμόσουμε το θηκόγραμμα της αμερικάνικης εταιρείας, χρησιμοποιώντας τη νομισματική ισοτιμία 1 δολάριο = 0,9 ευρώ για να το μετατρέψουμε. Χρησιμοποιούμε τον βοηθητικό πίνακα της αμερικάνικης εταιρείας, πολλαπλασιάζοντας τους αριθμούς με 0,9. Παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:

	Αμερικάνικη εταιρεία
$Q_1 \rightarrow$	805,32
$\delta \rightarrow$	852,39
$Q_3 \rightarrow$	900,45
Ακραίες τιμές	648,612 , 633,915 , 1119,114 , 1069,668

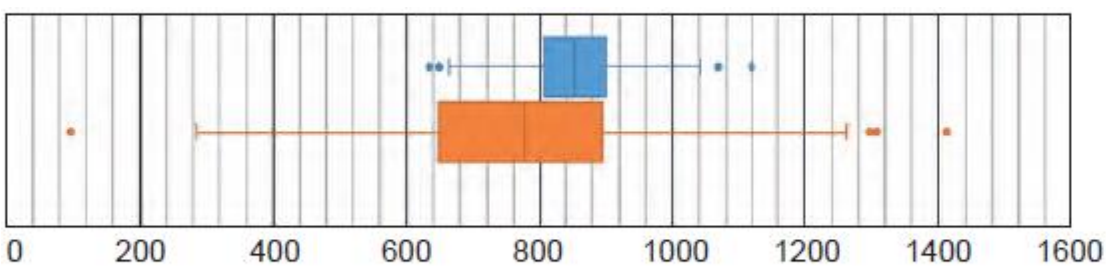
Υπολογίζουμε τα παρακάτω που μας χρειάζονται για να σχεδιάσουμε το νέο θηκόγραμμα:

Q = Q_3 - Q_1 = 900,45 - 805,32 = 95,13

Q_1 - 1,5Q = 805,32 - 1,5·95,13 = 662,625

Q_3 + 1,5Q = 900,45 +1,5·95,13 = 1043,145

Το νέο θηκόγραμμα για το δείγμα αμοιβών της αμερικάνικης εταιρείας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, μαζί με το θηκόγραμμα της ευρωπαϊκής εταιρείας.



Άσκηση 2 – Λύση

α) Για το B_1 είναι:

$\bar{x}_1 = \frac{20+17+14+10+20+17+13+9+19+16+12+9+19+16+12+8+17+15+10+8}{20} = \frac{280}{20} = 14$

Αντίστοιχα, υπολογίζουμε ότι σ_1= 4,04 . Ομοίως για το B_2: $\bar{x}_2$=14,95 και σ_2 = 4,09.

Από τα παραπάνω, το B_2 φαίνεται να έχει ελαφρώς υψηλότερη μέση επίδοση, χωρίς όμως τα δύο τμήματα να έχουν σημαντική διαφορά στη διασπορά των βαθμολογιών τους.

β) Για το Β1 βρίσκουμε ότι CV_1 = 28,8% και για το B_2 , CV_2 = 27,4% . Φαίνεται ότι το B_2 έχει λίγο περισσότερο ομοιογενές, κάτι που οφείλεται στη μεγαλύτερη μέση τιμή του.

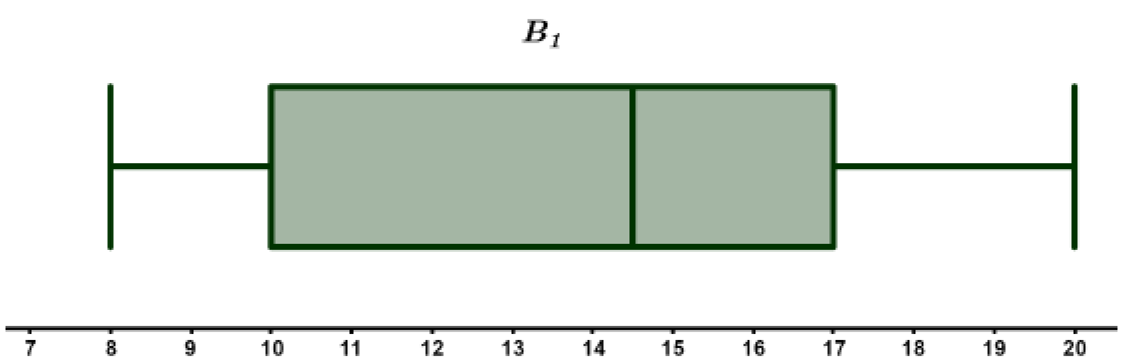
γ) Βρίσκουμε τα τεταρτημόρια για κάθε τμήμα:

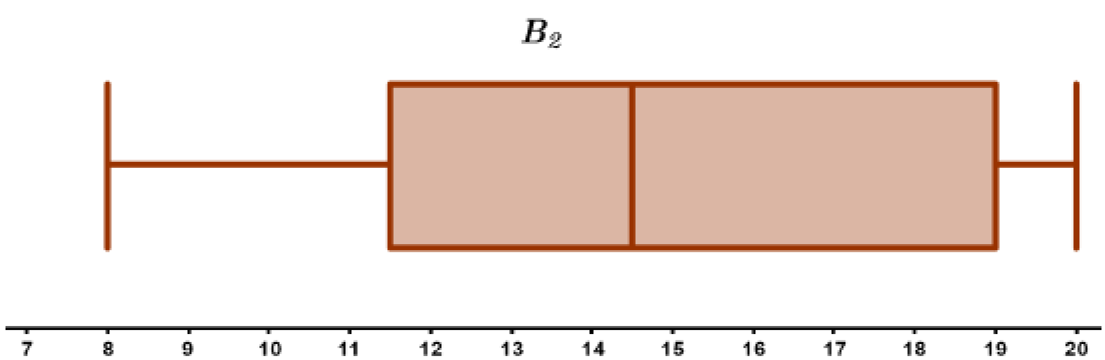
για το B_1 έχουμε: Q_1=10, Q_2=δ=14,5, Q_3=17, ενώ

για το B_2 έχουμε: Q_1=11,5, Q_2=δ=14,5, Q_3=19

Από αυτά προκύπτει ότι οι βαθμοί των μαθητών/τριών που θα βραβευτούν θα είναι για το B_1 από 17 και πάνω, ενώ για το Β2 από 19 και πάνω. Οι βαθμοί των μαθητών/τριών που θα πάρουν επιπλέον εργασία θα είναι για το Β1 από 10 και κάτω, ενώ για το B_2 από 11 και κάτω.

δ) Τα θηκογράμματα φαίνονται παρακάτω:





Άσκηση 3 – Λύση

α) Το εύρος για το τμήμα Α είναι R_A =17-2=15 και για το Β είναι R_B =19,5-1=18,5. Οπότε το τμήμα Β έχει μεγαλύτερο εύρος βαθμών.

β) Για το Α έχουμε: Q=Q_3-Q_1=13-9=4 και για το Β: Q=Q_3-Q_1=11-8=3. Άρα, μεγαλύτερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος βαθμών έχει το τμήμα Α.

γ) Στο τμήμα Β η κατανομή των βαθμών φαίνεται να είναι πιο συμμετρική γύρω από τη διάμεσο.

δ) Το "καλύτερο" θα μπορούσε να αναζητηθεί με διαφορετικά κριτήρια από τον καθένα μας. Με κριτήριο την μέση επίδοση καλύτερο φαίνεται να είναι το Α. Με κριτήριο τη συμμετρική κατανομή των βαθμών μάλλον είναι το Β. Με κριτήριο τη μικρότερη διασπορά των βαθμών καλύτερο φαίνεται μάλλον το Α. Με κριτήριο τους υψηλότερους βαθμούς (πάνω από 17) καλύτερο είναι το Β.

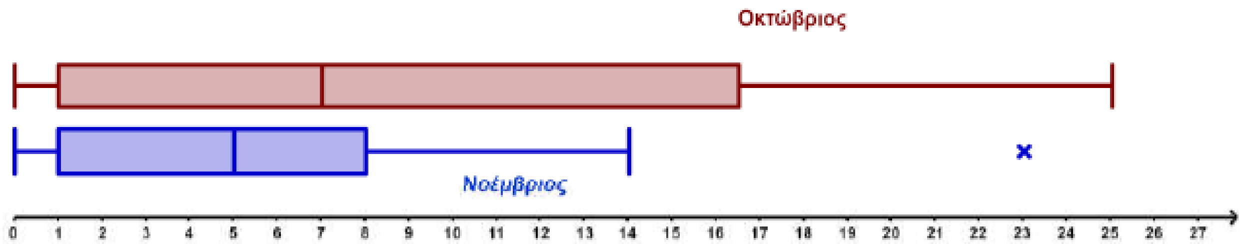
Ποιο όμως κριτήριο δείχνει καλύτερο; Μιλώντας για τη συμμετοχή σε μαθηματικό διαγωνισμό, το κριτήριο της υψηλότερης βαθμολογίας ίσως να είναι αυτό που θα κυριαρχήσει.

Αλλά σχετικά με τη διδασκαλία και την πρόοδο των μαθητών ίσως να είναι προτιμότερη μια μεγαλύτερη ομοιογένεια του τμήματος. Βέβαια, σε αυτή τη συζήτηση δεν λαμβάνουμε καθόλου υπόψη άλλα χαρακτηριστικά του τμήματος (πχ πολιτισμικό υπόβαθρο, φύλο των μαθητών, ιδιαίτερα ενδιαφέροντα, κλίσεις, δυσκολίες και ικανότητες των μαθητών κ.α.) που μπορεί να μετατοπίζουν τη συζήτηση από το "ποιο τμήμα είναι καλύτερο" στο "ποια είναι τα χαρακτηριστικά του κάθε τμήματος". Επιπλέον, ούτε οι επιδόσεις, ούτε τα χαρακτηριστικά είναι αναλλοίωτα στο χρόνο και στις διαφορετικές συνθήκες.

ε) Οι δύο υψηλότερες βαθμολογίες είναι 19 και 19,5 και τις πέτυχαν μαθητές/τριες από το τμήμα Β.

Άσκηση 4 – Λύση

Τα θηκογράμματα των απουσιών φαίνονται παρακάτω:



Από τα θηκογράμματα φαίνεται ότι τον Οκτώβριο έγιναν περισσότερες απουσίες.

Άσκηση 5 – Λύση

α) Οι μέσες τιμές για τη διάρκεια ζωής στα δύο δείγματα είναι x_A =22 χιλιάδες ώρες και x_B =24 χιλιάδες ώρες.

β) Για την μπαταρία Α το κόστος ανά χίλιες ώρες λειτουργίας είναι 38 : 22 = 1, 72 ευρώ. Για την μπαταρία Β το κόστος ανά χίλιες ώρες λειτουργίας είναι για την περίπτωση (ι) 40 : 24 = 1, 66 ευρώ και για την περίπτωση (ιι) είναι 42 : 24 = 1, 75 . Οπότε στην περίπτωση (ι) προτιμότερη είναι η μπαταρία Β, ενώ στην περίπτωση (ιι) προτιμότερη είναι η Α. Τα παραπάνω βασίζονται στα δεδομένα των δύο δειγμάτων και στην υπόθεση ότι η μπαταρία που θα αγοράσουμε θα έχει τον ίδιο χρόνο ζωής που έχει το αντίστοιχο δείγμα. Αυτή η υπόθεση δεν είναι βέβαιο ότι θα επαληθευτεί.

γ) Είτε χρησιμοποιώντας τον τύπο για τη διακύμανση και βρίσκοντας την τετραγωνική ρίζα, είτε με αξιοποίηση κάποιου λογιστικού φύλλου, βρίσκουμε τις τυπικές αποκλίσεις των δύο δειγμάτων: s_A =2,8 και s_B =4,7

δ) Έχουμε αντίστοιχα: $CV_A = \frac{2,8}{22}$ =12,7% , $CV_B = \frac{4,7}{24}$ =19,6% . Οπότε μεγαλύτερη ομοιογένεια παρουσιάζει το δείγμα των μπαταριών τύπου Α.

Άσκηση 6 – Λύση

α) Οι δύο πόλεις έχουν την ίδια μέση θερμοκρασία: $x_{Λ}$ =16,9 και $x_{Θ}$ =16,9 . Για τις διαμέσους έχουμε $\delta_{Λ}$ =17 και $\delta_{Θ}$ =16,5 . Επικρατούσα θερμοκρασία για τη Λαμία είναι M_0= 17 και για τη Θεσσαλονίκη είναι M_0=16.

β) Εφόσον $s_{Λ} > s_{Θ}$, μεγαλύτερη διασπορά έχουν οι θερμοκρασίες του δείγματος της Λαμίας.

γ) Οι πραγματικές θερμοκρασίες στη Λαμία θα είναι 5 βαθμούς μικρότερες από εκείνες του πίνακα, άρα θα είναι ως εξής:

	Θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου									
Λαμία (Λ)	**15**	**13**	**15**	**12**	**13**	**12**	**11**	**12**	**11**	**5**
Θεσσαλονίκη (Θ)	**18**	**16**	**17**	**15**	**16**	**12**	**16**	**17**	**20**	**22**

Η μέση τιμή θα είναι κατά 5 βαθμούς μικρότερη εκείνης που υπολογίστηκε, άρα $x_{Λ}$ =11,9 ενώ η τυπική απόκλιση παραμένει ίδια. Έτσι έχουμε:

$CV_{Λ} = \frac{2,66}{11,9} = 22\%$ και $CV_{Θ} = \frac{2,59}{16,9} = 15\%$.

Οπότε, μεγαλύτερη ομοιογένεια έχουν οι θερμοκρασίες στη Θεσσαλονίκη.

Άσκηση 7 – Λύση

α) Τις περισσότερες γεννήσεις το 1976 έχουμε στις ηλικίες 20-24 των μητέρων, το 1996 στις ηλικίες 25-29 και το 2016 στις ηλικίες 30-34. Αυτό μπορεί να συνδέεται με την αύξηση της πρόσβασης των γυναικών στις σπουδές και την εργασία που μεταθέτει για αργότερα τις γεννήσεις των παιδιών.

β) Η κορύφωση των γεννήσεων για το 2016 συμβαίνει στην ηλικία των 30-34. Το πολύγωνο συχνοτήτων φαίνεται κάπως συμμετρικό πριν και μετά την κορυφή του.

γ) Ο αριθμός των γεννήσεων για το 2016 ξεπερνάει τους αντίστοιχους αριθμούς για τα έτη 1996 και 1976 στις ηλικιακές ομάδες 30-34, 35-39, 40-44 και 45-49. Αυτό συνδέεται με το πρώτο ερώτημα, δηλαδή με τη μετατόπιση της καμπύλης των γεννήσεων σε μεγαλύτερες ηλικίες των μητέρων. Έτσι, βλέπουμε οι λιγότερες γεννήσεις στις μικρότερες ηλικίες (για το 2016) να εξισορροπούνται με περισσότερες γεννήσεις στις μεγαλύτερες.

Άσκηση 8 – Λύση

α) μ = 4,4 . Άρα, $\frac{2*1+3*3+4*1+5*2+6*\nu_5+7*1}{8+\nu_5}$ = 4,4 . Άρα ν_5 = 2

β) Οι τιμές σε αύξουσα σειρά είναι: 2 3 3 3 4 5 5 . . . 7.

Επειδή η δ = 4,5 = $\frac{4+5}{2}$, όσες τιμές έχουμε αριστερά της (δηλαδή 5) άλλες τόσες θα έχουμε προς τα δεξιά της. Άρα πρέπει να έχουμε ακόμη δύο 6. Συνεπώς ν_5 = 2 .

γ) Για να έχουμε δύο επικρατούσες τιμές πρέπει το ν_5 = 3, οπότε οι επικρατούσες τιμές θα είναι το 3 και το 6.

Άσκηση 9 – Λύση

α) Διακύμανση ή διασπορά ορίζεται ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των x_i από τη μέση τιμή τους. Μικρότερες (κατ' απόλυτη τιμή) αποκλίσεις έχουμε στη δεύτερη λίστα και μεγαλύτερες αποκλίσεις στην τρίτη λίστα. Άρα μικρότερη διασπορά έχουν οι τιμές της 2ης λίστας και μεγαλύτερη διασπορά της 3ης λίστας.

β) Όχι, γιατί έχουν το ίδιο εύρος.

Άσκηση 10 – Λύση

α) Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι ο εξής :

Κλάσεις	x_i	x_i^2	v_i	N_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i^2 \cdot v_i$
[0, 2)	1	1	35	35	35	35
[2, 4)	3	9	40	75	120	360
[4, 6)	5	25	45	120	225	1125
[6, 8)	7	49	50	170	350	2450
(8, 10)	9	81	30	200	270	2430
Σύνολο			200		1000	6400

β) Η μέση τιμή της βαθμολογία του δείγματος των 200 φοιτητών είναι:

μ = $\frac{1000}{200}$ = 5 . Αντίστοιχα, υπολογίζουμε τη διακύμανση σ^2 = 7 και τυπική απόκλιση σ = $\sqrt{7}$.

Ο συντελεστής μεταβλητότητας δίνεται από τον τύπο CV = $\frac{\sigma}{\mu}$ = 0,53 .

γ) Το 85% των φοιτητών είναι 85%·200=170 φοιτητές= N_4 . Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι ο βαθμός των φοιτητών αυτών δεν υπερβαίνει το 8.

Άσκηση 11 – Λύση

α) Επειδή ν = 100 και f_1%=35, f_1 =0,35 οπότε ν_1= f_1*ν = 35 . Όμοια ν_3= f_3*ν = 30.

Επειδή ν = ν_1+ν_2+ν_3+ν_4=100 έχουμε ν_2+ν_4 = 35 . (1)

Επειδή μ = 7 , έχουμε 7 = $\frac{2*35+6\nu_2+10*30+14\nu_4}{100}$. Άρα, $6\nu_2$+$14\nu_4$ = 330 . (2)

Από τη σχέση (1) έχουμε ν_2 = 35 - ν_4 , οπότε από την (2) προκύπτει

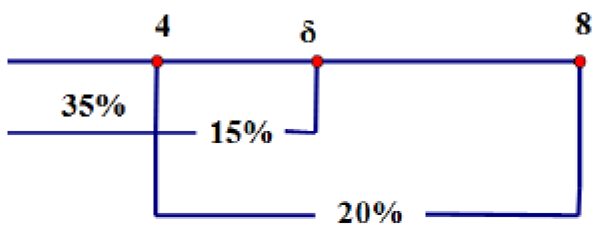
6(35-ν_4) + 14ν_4 = 330 . Άρα ν_4 = 15 και ν_2 = 20 . Άρα, f_4% = 15 και f_2% = 20 .

Ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

Κλάσεις	x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i \cdot \nu_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot \nu_i$
[0, 4)	2	35	0,35	35	35	70	4	140
[4, 8)	6	20	0,20	20	55	120	36	720
[8, 12)	10	30	0,30	30	85	300	100	3000
[12, 16)	14	*15*	0,15	15	100	210	196	2940
Σύνολο		100	1	100		700	336	6800

β) Η διάμεσος αντιστοιχεί στην τιμή x =δ της μεταβλητής X έτσι ώστε το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες με δ. Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι η διάμεσος δ θα είναι ένας αριθμός της 2ης κλάσης [4,8) τέτοιος ώστε στο διάστημα από 4 έως δ να ανήκει το 15% των παρατηρήσεων ώστε 35%+15%=50%.

Με βάση το παρακάτω σχήμα έχουμε:



$\frac{\delta-4}{8-4} = \frac{15}{20}$. Άρα, δ = 7 . Η διακύμανση υπολογίζεται 19 και η τυπική απόκλιση $\sqrt{19}$ = 4,36 .

γ) Για να εξετάσουμε την ομοιογένεια του δείγματος θα βρούμε το συντελεστή εταβλητότητας

CV = $\frac{\sigma}{\mu} = \frac{4{,}36}{7}$ = 0,623 = 62,3% . Επειδή ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι μεγαλύτερος από 10% το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

δ) Αν ο καθηγητής που διόρθωσε τα γραπτά ανεβάσει τη βαθμολογία όλων των μαθητών κατά μια μονάδα τότε ο μέσος όρος της βαθμολογίας θα ανέβει κατά μια μονάδα και θα γίνει

μ’ = μ+1 = 7+1 = 8.

Άσκηση 12 – Λύση

α) i) Ισχύει ότι $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$, όπου ν_i η συχνότητα της τιμής x_i.

Για i = 1, 2 , ….. , k έχουμε:

$0 \le \nu_i \le \nu \Leftrightarrow 0 \le \frac{\nu_i}{\nu} \le \frac{\nu}{\nu} \Leftrightarrow 0 \le f_i \le 1$, για i = 1, 2 , ….. , k .

ii) Ισχύει $f_1+f_2+.....+f_k = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + ... + \frac{\nu_k}{\nu} = \frac{\nu_1+\nu_2+\cdots..+\nu_k}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$.

β) Αν μ η μέση τιμή ενός δείγματος τιμών μιας μεταβλητής και σ η τυπική απόκλιση των τιμών αυτών, τότε ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας του δείγματος για μ ≠0 ορίζεται από το λόγο:

CV = $\frac{\sigma}{\mu}$ = . Αν μ<0 , τότε μπαίνει IμI .

Άσκηση 13 – Λύση

α) Εδώ το πλήθος των παρατηρήσεων είναι ν =10 , οπότε έχουμε: μ = $\frac{14+17+13+16+18+17+15+17+15+18}{10} = \frac{160}{10}$ = 16 .

Β) Εδώ το πλήθος των διαφορετικών μεταξύ τους παρατηρήσεων, είναι κ=8 , ενώ το

πλήθος όλων των παρατηρήσεων είναι ν =25. Σε αυτές τις περιπτώσεις, συμφέρει να κατασκευάσουμε τον πιο κάτω πίνακα συχνοτήτων, επισυνάπτοντας και τα γινόμενα $x_i\nu_i$

Χρόνος ποδηλατών x_i	**απόλυτη συχνότητα** ν_i	**γινόμενα** $x_i\nu_i$
8	3	24
10	3	30
11	4	44
13	3	39
14	3	42
15	5	75
16	3	48
18	1	18
Σύνολο	$\nu = 25$	$\sum_{i=1}^{8} x_i\nu_i = 320$

Άρα μ = 12,8 . Άρα, ο μέσος χρόνος όλων των ποδηλατών, είναι: μ = 12,8 λεπτά της ώρας.

Άσκηση 14 – Λύση

Εδώ, το πλήθος των τιμών της μεταβλητής (αριθμός επισκέψεων), είναι κ = 5 (αφού οι τιμές είναι: 2, 3, 4, 5, 6).

Είναι χρήσιμο, να κατασκευάσουμε τον πιο κάτω πίνακα:

Αριθμός επισκέψεων x_i	$f_i\%$	f_i	$x_i f_i$
2	5	0,05	0,10
3	25	0,25	0,75
4	45	0,45	1,80
5	15	0,15	0,75
6	10	0,05	0,30
Σύνολο	100%	1	3,70

Οπότε υπολογίζουμε ότι μ = 3,70 . Άρα η μέση τιμή του αριθμού των επισκέψεων των μαθητών στον οδοντίατρο, είναι μ = 3,70 φορές, περίπου 4 επισκέψεις.

Άσκηση 15 – Λύση

Αρχικά, προσδιορίζουμε το πλήθος σε μπάλες κάθε χρώματος. Στις 30 μπάλες, το 10% είναι 3 μπάλες, το 20% είναι 6, το 30% είναι 9 και το είναι 12 μπάλες. Άρα, μέσα στην κάλπη υπάρχουν 3Κ (Κόκκινες), 6Α (Άσπρες), 9Γ (Γαλάζιες) και 12Π (Πράσινες) μπάλες με

αντίστοιχα βάρη 8gr, 10gr, 9 gr, 12gr η κάθε μία.

Είναι χρήσιμο, να κατασκευάσουμε τον πιο κάτω πίνακα συχνοτήτων:

Βάρος μιας μπάλας x_i	**Αριθμός τους** v_i	**Σχετική Συχνότητα** f_i	$x_i f_i$
8	3	0,10	0,8
10	6	0,20	2
9	9	0,30	2,7
12	12	0,40	4,8
Σύνολο	30	1,00	10,3

Επομένως έχουμε: $\mu = 10,3$. Άρα το μέσο βάρος για όλες τις μπάλες της κάλπης, είναι 10,3gr.

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 - Λύση

α) Για το B_1 είναι:

$\bar{x}_1 = \frac{15+14+20+19+18+9+10+12+14+15}{10} = \frac{146}{10} = 14{,}6$

Αντίστοιχα, υπολογίζουμε ότι σ_1= 4,04 . Ομοίως για το B_2: $\bar{x}_2$=14,5 και σ_2 = 4,09.

Από τα παραπάνω, το B_2 φαίνεται να έχει ελαφρώς υψηλότερη μέση επίδοση, χωρίς όμως τα δύο τμήματα να έχουν σημαντική διαφορά στη διασπορά των βαθμολογιών τους.

β) Για το B1 βρίσκουμε ότι CV_1 = 27,6% και για το B_2 , CV_2 = 28,2% . Φαίνεται ότι το B_2 έχει λίγο περισσότερο ομοιογενές, κάτι που οφείλεται στη μεγαλύτερη μέση τιμή του.

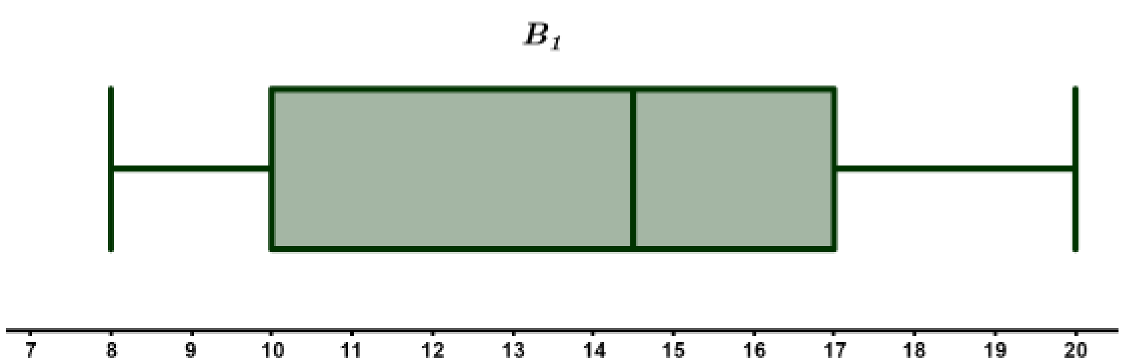
γ) Βρίσκουμε τα τεταρτημόρια για κάθε τμήμα:

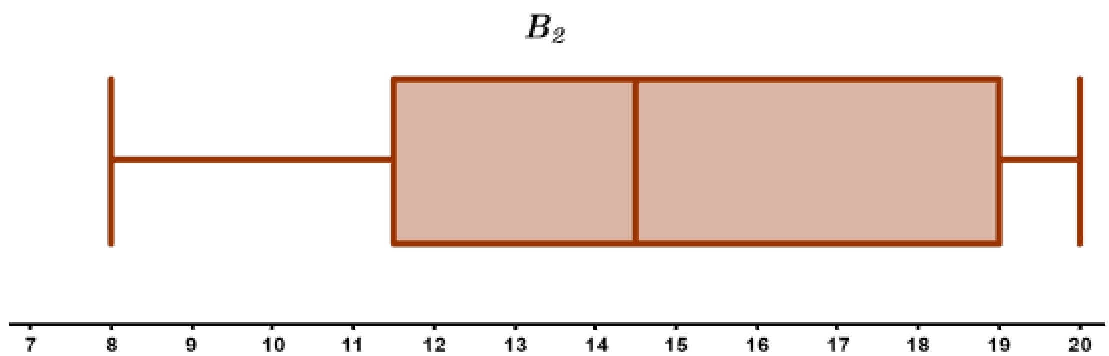
για το B_1 έχουμε: Q_1=10, Q_2=δ=14,6, Q_3=17, ενώ

για το B_2 έχουμε: Q_1=11,5, Q_2=δ=14,5, Q_3=19

Από αυτά προκύπτει ότι οι βαθμοί των μαθητών/τριών που θα βραβευτούν θα είναι για το B_1 από 17 και πάνω, ενώ για το B2 από 19 και πάνω. Οι βαθμοί των μαθητών/τριών που θα πάρουν επιπλέον εργασία θα είναι για το B1 από 10 και κάτω, ενώ για το B_2 από 11 και κάτω.

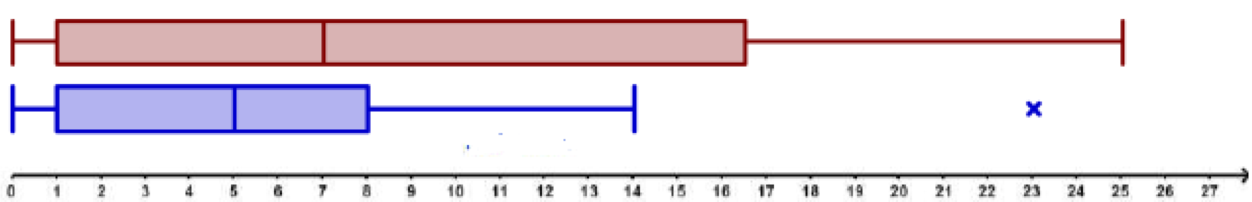
δ) Τα θηκογράμματα φαίνονται ως ακολούθως:





Άσκηση 2 - Λύση

Τα θηκογράμματα των απουσιών φαίνονται ως ακολούθως:



Από τα θηκογράμματα φαίνεται ότι τον Δεκέμβριο έγιναν περισσότερες απουσίες.

Άσκηση 3 - Λύση

Α)Σύμφωνα με τον ορισμό της διαμέσου και τη βοήθεια των αντίστοιχων τύπων έχουμε:

α) Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά:

1, 13, 14, 15, 16, 16, 18, 18, 19.

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι ν = 9 (περιττός), άρα η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση (πέμπτη κατά σειρά) και έχουμε: δ = 16

β) Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά: 6, 8,10, 13, 14, 15, 15, 17, 17, 20.

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι ν = 10 (άρτιος), άρα η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων (πέμπτη και έκτη κατά σειρά) και έχουμε: δ = 14,5

x_i	ν_i
Πλοίο	2
Τρένο	3
Αεροπλάνο	2
Αυτοκίνητο	1

Β) α) Κατασκευάζοντας τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η επικρατούσα τιμή είναι M_0 = τρένο .

x_i	ν_i
10	2
13	1
14	4
15	1
17	4
20	3

β) Στην περίπτωση αυτή, με τη βοήθεια του πίνακα κατανομής συχνοτήτων, παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο παρατηρήσεις (14 και 17) με τη μεγαλύτερη συχνότητα (4). Στην περίπτωση αυτή οι τιμές 14 και 17 είναι και οι δύο επικρατούσες τιμές. Άρα η επικρατούσα τιμή δεν είναι απαραίτητα μοναδική. Η αντίστοιχη κατανομή συχνοτήτων λέγεται δικόρυφη, ενώ όταν έχουμε πολλές κορυφές λέγεται πολυκόρυφη.

γ) Στην τελευταία περίπτωση διαπιστώνουμε ότι όλες οι παρατηρήσεις έχουν την ίδια συχνότητα. Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι δεν υπάρχει επικρατούσα τιμή.

Άσκηση 4 - Λύση

i) Ο αριθμητικός μέσος των διαφορών t_1 - $\bar{x}$, t_2 - $\bar{x}$, …., t_ν - $\bar{x}$ είναι ίσος με:

$$\frac{t_1 - \bar{x} + t_2 - \bar{x} + \cdots + t_\nu - \bar{x}}{\nu} = \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_\nu}{\nu} - \frac{\nu\,\bar{x}}{\nu} = \bar{x} - \bar{x} = 0 .$$

ii) Ο συντελεστής μεταβολής είναι ο αριθμός: CV = $\frac{\sigma}{\mu}$ = . Αν μ<0 , τότε μπαίνει ΙμΙ .

Άσκηση 5 - Λύση

α. Από τον τύπο ω_2=360 $\frac{\nu_2}{\nu}$ παίρνουμε ν = 27 άρα το πλήθος των τιμών είναι 27, οπότε

ν_3 = ν - ν_1-ν_2-ν_4 = 8 .

β. Η μέση τιμή είναι μ = 5 .

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό, η διάμεσος θα είναι η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή η 14η . Επειδή $\nu_1 + \nu_2$ = 13 , έπεται ότι η 14η παρατήρηση είναι $x_3 = 6$ άρα η διάμεσος είναι δ = $x_3 = 6$.

γ. δ. Υπολογίζεται ότι η διασπορά είναι $\frac{8}{3}$ και ότι η τυπική απόκλιση είναι $\sqrt{\frac{8}{3}}$.

Άρα CV = $\frac{\sigma}{\mu}$ = $\frac{\sqrt{\frac{8}{3}}}{5}$ > 0,1 . Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Άσκηση 6 - Λύση

Α) $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5$ = 50 . Άρα, 11+ α + 12+8+11 = 50 . Άρα, α=8

β) Για τις σχετικές συχνότητες f_i% , έχουμε : f_i%= $\frac{\nu_i}{\nu}$100 .

Άρα, f_1%=22 , f_2%=16 , f_3%=24 , f_4%=16 , f_5%=22 .

Για τις αθροιστικές συχνότητες N_i, έχουμε N_1= ν_1=11 , N_2 = N_1+ν_2=19 , N_3 = N_2+ν_3=31 ,

N_4 = N_3+ν_4= 39 , N_5 = ν= 50 .

Για τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i% , έχουμε : F_1% = f_1% = 22 , F_2% = F_1%+f_2%= 38% ,

F_3% = F_2%+f_3% = 62% , F_4% = F_3%+f_4% = 78 και F_5% = 100% .

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Τιμές (x_i)	Συχνότητα (ν_i)	Σχετική συχνότητα ($f_i\%$)	Αθροιστική συχνότητα (N_i)	Αθροιστική σχετική συχνότητα ($F_i\%$)
0	11	22	11	22
1	8	16	19	38
2	12	24	31	62
3	8	16	39	78
4	11	22	50	100
Σύνολο	50	100		

γ) Υπολογίζουμε ότι μ = 2 . Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι ν=50 άρτιος, η διάμεσος θα είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Άρα, δ=2 .

δ) Υπολογίζουμε διασπορά ίση με 2,08 και τυπική απόκλιση ίση με 1,4 . Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι . Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Άσκηση 7 - Λύση

Α)

Ημέρες άδειας $[,)$	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i\nu_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2\nu_i$
$[0,6)$	3	11	33	-10	100	1100
$[6,12)$	9	20	180	-4	16	320
$[12,18)$	15	5	75	2	4	20
$[18,24)$	21	5	105	8	64	320
$[24,30)$	27	10	270	14	196	1960
Σύνολο		51	663			3720

Β) μ = 13

Γ) Οι υπάλληλοι που δικαιούνται άδεια λιγότερο από 18 ημέρες ανήκουν στις 3 πρώτες κλάσεις, οπότε θα είναι 11+20+5=36 υπάλληλοι.

Δ) Υπολογίζουμε διακύμανση ίση με 72,9

Ε) Υψώνοντας σε ρίζα τη διακύμανση, βρίσκουμε τυπική απόκλιση ίση με 8,5

ΣΤ) Ο συντελεστής μεταβολής είναι 65,4% .

Άσκηση 8 - Λύση

Θα μειωθεί η μέση τιμή και η διασπορά/τυπική απόκλιση, καθώς αυξάνεται το ν .

Ο υπολογισμός είναι ανάλογος και στις προηγούμενες ασκήσεις.

Άσκηση 9 - Λύση

α. Αν οι 20 εργαζόμενοι με τον υψηλότερο μισθό έχουν μισθούς ίσους με 1800*20 .

Επίσης ο μέσος μισθός των 50 υπαλλήλων είναι x =1500 €.

Άρα ο μέσος μισθός των 30 χαμηλόμισθων υπαλλήλων και ο μέσος μισθός των 20 υψηλόμισθων υπαλλήλων είναι 1500.

Άρα ο μέσος μισθός των 30 χαμηλόμισθων υπαλλήλων είναι 1300€.

Β. Κάθε μισθός γίνεται 1,05*παλιό μισθό , άρα η νέα μέση τιμή μ' = μ +1,05*1500 = 1575 και η νέα τυπική απόκλιση σ' , θα είναι σ' = 1,05σ = 126 . Ο συντελεστής μεταβλητότητας θα γίνει 0,08=8% .

Δ. Ομοίως με το προηγούμενο ερώτημα μ μ''=μ+50 , σ''=σ .

Άσκηση 10 - Λύση

Α) Η πρώτη κλάση είναι [3,3+c) , η δεύτερη [3+c,3+2c) και η τρίτη [3+2c,3+3c) .

Άρα, 3+3c = 12 . Τότε c = 3 .

Επίσης, $\frac{f_2}{3} = \frac{f_3}{2} = \frac{f_4}{4} \Leftrightarrow \frac{f_2}{3} = \frac{f_3}{2} = \frac{f_4}{4} = \frac{f_2+f_3+f_4}{3+2+4} = \frac{1-f_1}{9} = \frac{0,9}{9} = 0,1$.

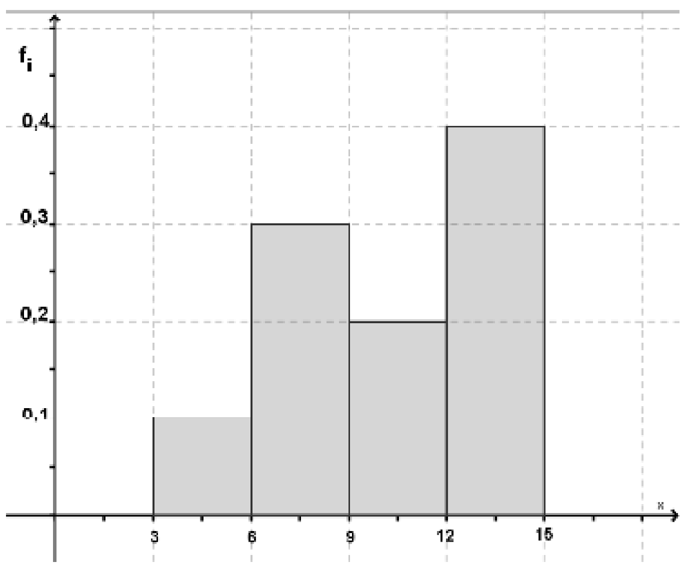
Άρα, $\frac{f_2}{3} = 0,1 \Leftrightarrow f_2 = 0,3$ και $\frac{f_3}{2} = 0,1 \Leftrightarrow f_3 = 0,2$ και $\frac{f_4}{4} = 0,1 \Leftrightarrow f_4 = 0,4$.

Έτσι, συμπληρώνεται ο ακόλουθος πίνακας:

Κλάσεις [,)	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
[3 , 6)	4,5	0,1	0,45	2,025
[6 , 9)	7,5	0,3	2,25	16,875
[9 , 12)	10,5	0,2	2,1	22,05
[12 , 15)	13,5	0,4	5,4	72,9
Σύνολο		1	10,2	113,85

Β) Υπολογίζεται ότι διασπορά είναι ίση με 9,81 .

Γ) Το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων είναι το ακόλουθο:



Δ) Ο συντελεστής μεταβολής είναι CV = $\frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{9,81}}{10,2}$ **> 0,1** , επομένως το δείγμα **δεν είναι ομοιογενές**.

2.7. Γραμμική Συσχέτιση Ποσοτικών Μεταβλητών και Διαγράμματα Διασποράς

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

Με κριτήριο το πόσο ισχυρή είναι η γραμμική συσχέτιση και ανεξάρτητα από το αν αυτή είναι θετική ή αρνητική, η διάταξη των τιμών του r σε αύξουσα σειρά είναι: 0, 0.2, -0.6, -0.7, 0.9, -1 .

Άσκηση 2 – Λύση

Τα δύο ζευγάρια μεταβλητών έχουν το ίδιο **ισχυρή** γραμμική συσχέτιση, αλλά για τις μεταβλητές X και Y η συσχέτιση είναι θετική, ενώ για τις Z και Φ είναι αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι όταν οι τιμές της μεταβλητής X αυξάνονται, οι τιμές της Y τείνουν να αυξάνονται, ενώ όταν οι τιμές της μεταβλητής Z αυξάνονται, οι τιμές της Φ τείνουν να μειώνονται.

Άσκηση 3 – Λύση

α) Για την περίπτωση (i) έχουμε A(6,8), B(18,18) και αναζητούμε την ευθεία y = α + βx η οποία διέρχεται από τα A και B. Οπότε έχουμε το σύστημα:

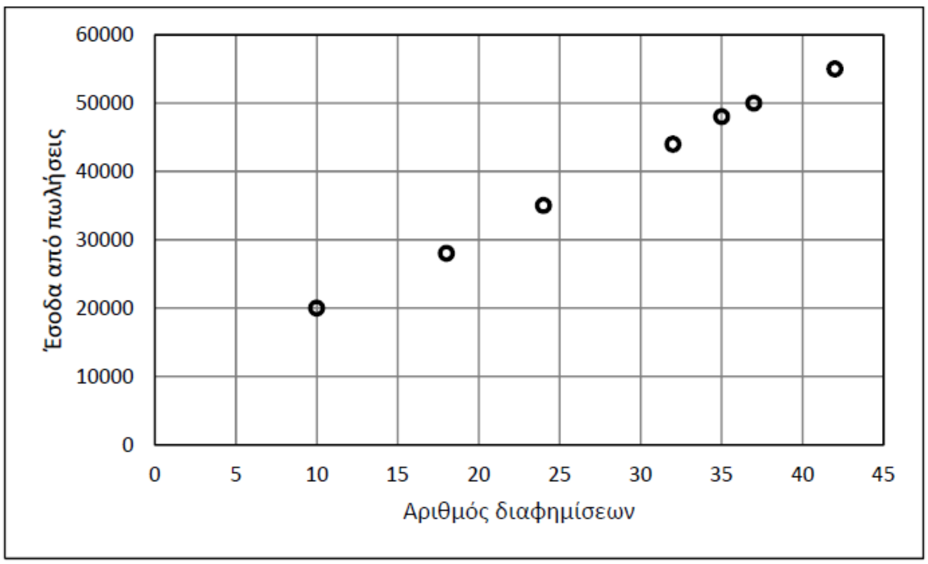
8=α+β*6 και το 18=α+β*18 , από τη λύση του οποίου προκύπτει ότι α = 3 και β = 0,83 . Οπότε η ευθεία είναι η y = 3 + 0, 83x

Ομοίως για την περίπτωση (ii) βρίσκουμε την ευθεία y = 46, 66 + 0, 66x .

β) Οι ευθείες του ερωτήματος (α) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση του βαθμού στη Φυσική αν ξέρουμε το βαθμό στα Μαθηματικά (για την περ i) και για την εκτίμηση του βάρους αν ξέρουμε το ύψος (για την περ. ii). Αυτές οι εκτιμήσεις μπορούν να γίνουν με κάποιους περιορισμούς. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε το βάρος για ηλικία 15 ετών ή για ηλικία 60 ετών, γιατί οι τιμές αυτές βρίσκονται έξω από το πεδίο των δεδομένων που έχουμε.

Άσκηση 4 – Λύση

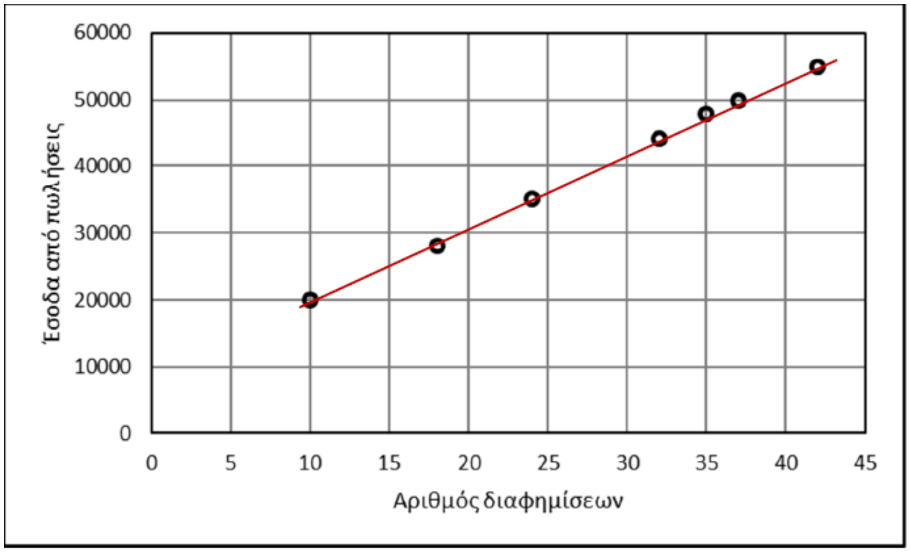
α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται ως ακολούθως:



Από το διάγραμμα διασποράς φαίνεται να υπάρχει **ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση** μεταξύ του αριθμού των διαφημίσεων και των εσόδων από πωλήσεις.

β) Χρησιμοποιώντας λογιστικό φύλλο ή κάποια εφαρμογή στατιστικής επεξεργασίας, ή ακόμη και τον τύπο για τον συντελεστή Pearson, βρίσκουμε $r = 0,9995$. Επειδή η τιμή του συντελεστή είναι πολύ κοντά στο 1, ο αριθμός των διαφημίσεων και τα έσοδα από πωλήσεις έχουν σχεδόν τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση.

γ) Επιλέγουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (10,20000) και (42,55000).

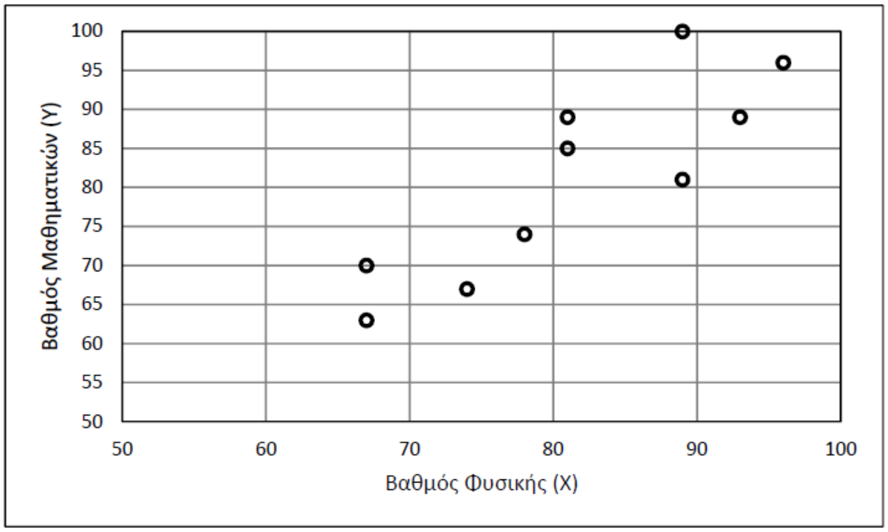


δ) Αν το πλήθος των διαφημίσεων που αγόραζε ένα κανάλι ήταν 30, τα έσοδα της εταιρείας διαφημίσεων εκτιμάμε ότι θα ήταν περίπου 42000.

ε) Για πλήθος διαφημίσεων 60, δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε τα έσοδα, εφόσον το 60 βρίσκεται έξω από το πεδίο των δεδομένων που έχουμε στη διάθεσή μας.

Άσκηση 5 – Λύση

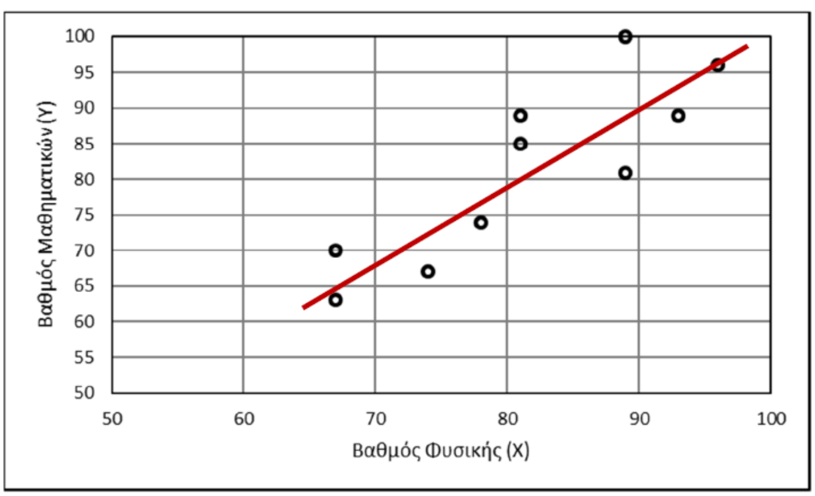
α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται ως ακολούθως:



Από το διάγραμμα διασποράς φαίνεται ισχυρή **θετική γραμμική συσχέτιση** μεταξύ των βαθμών των δύο μαθημάτων.

β) Υπολογίζουμε (πχ με χρήση λογιστικού φύλλου ή με τον τύπο) ότι $r = 0{,}86$. Η τιμή αυτή του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης Pearson δείχνει **ισχυρή** θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των βαθμών των δύο μαθημάτων.

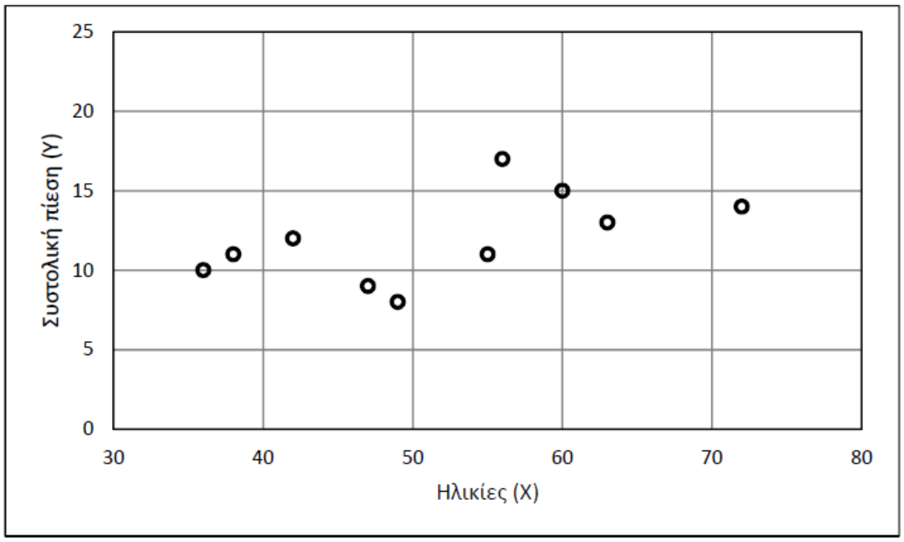
γ) Επιλέγουμε την ευθεία που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



δ) Για έναν μαθητή που έγραψε στη Φυσική 70, ένας αναμενόμενος βαθμός για το μάθημα των Μαθηματικών είναι περίπου 68.

Άσκηση 6 – Λύση

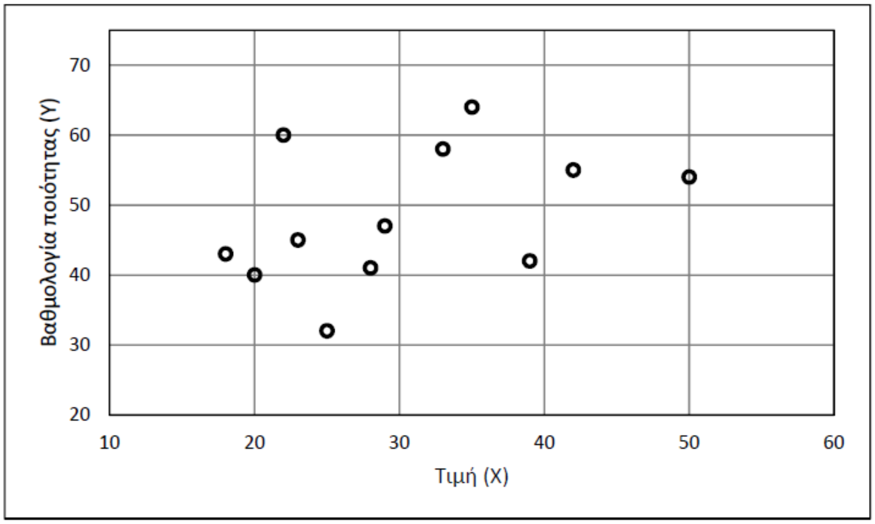
α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται ως ακολούθως:



β) Βρίσκουμε από τον τύπο ότι r = 0, 57 . Αυτή η τιμή δηλώνει ότι υπάρχει **θετική** γραμμική συσχέτιση, η οποία όμως δεν είναι **ισχυρή**.

Άσκηση 7 – Λύση

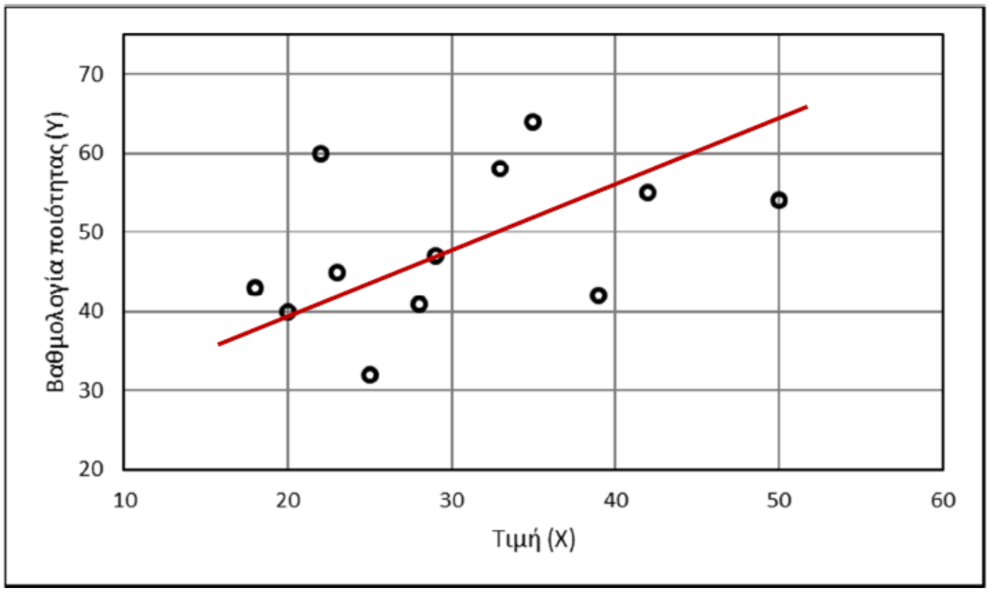
α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται ως ακολούθως:



β) Από το διάγραμμα φαίνεται να υπάρχει κάποια ασθενής γραμμική συσχέτιση ανάμεσα στην τιμή και την βαθμολογία ποιότητας. Υπολογίζοντας τον συντελεστή Pearson βρίσκουμε r = 0,40 κάτι που επιβεβαιώνει την εκτίμηση για **θετική ασθενή** γραμμική συσχέτιση.

γ) Επειδή η συσχέτιση είναι ασθενής, δεν μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι χαμηλότερη τιμή σημαίνει χαμηλότερη ποιότητα. Για παράδειγμα υπάρχει κράνος με τιμή 39 € και βαθμολογία 42, και άλλο με τιμή 22 € και βαθμολογία 60.

δ) Μια ευθεία που θα μπορούσε να περιγράφει τη σχέση του αναμενόμενου βαθμού ποιότητας ενός ποδηλατικού κράνους με την τιμή του φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

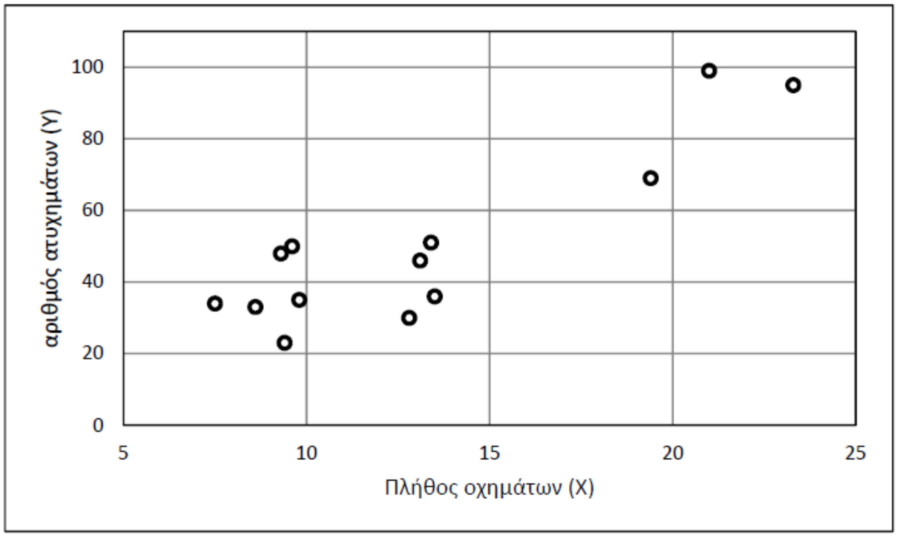


Άσκηση 8 – Λύση

Αρχικά, φαίνεται ότι υπάρχει μια θετική γραμμική συσχέτιση ανάμεσα σε όλα τα μαθήματα, αν τα πάρουμε ανά δύο. **Ισχυρή** συσχέτιση υπάρχει μεταξύ Γλώσσας και Βιολογίας (0,81), Χημείας και Βιολογίας (0,80), Γλώσσας και Άλγεβρας (0,76).

Άσκηση 9 – Λύση

α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεταιως ακολούθως:



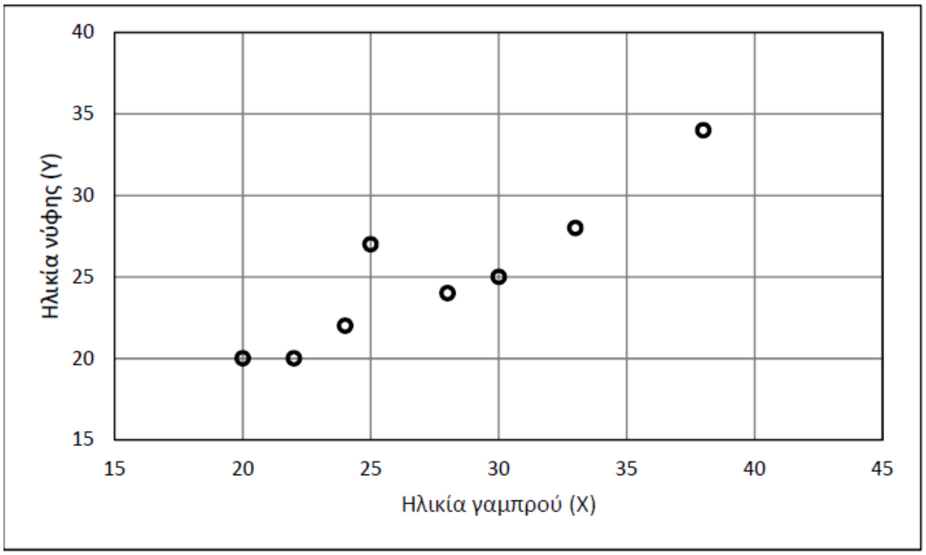
β) Υπολογίζουμε από τον τύπο ότι r = 0,90 . Η τιμή αυτή δείχνει ότι υπάρχει **θετική ισχυρή** γραμμική συσχέτιση μεταξύ του πλήθους των οχημάτων και του αριθμού ατυχημάτων για τις 15 χώρες.

Είναι ίσως αναμενόμενο μεγαλύτερος αριθμός αυτοκινήτων να συνδέεται με μεγαλύτερο αριθμό ατυχημάτων. Ωστόσο, έχει ενδιαφέρον να διερευνηθούν οι παράγοντες που κάνουν τις δύο μεταβλητές να μην είναι πλήρως γραμμικά συσχετισμένες.

Αυτό θα οδηγούσε σε επέκταση της έρευνας ώστε να συμπεριλάβει και άλλες διαστάσεις του προβλήματος.

Άσκηση 10 – Λύση

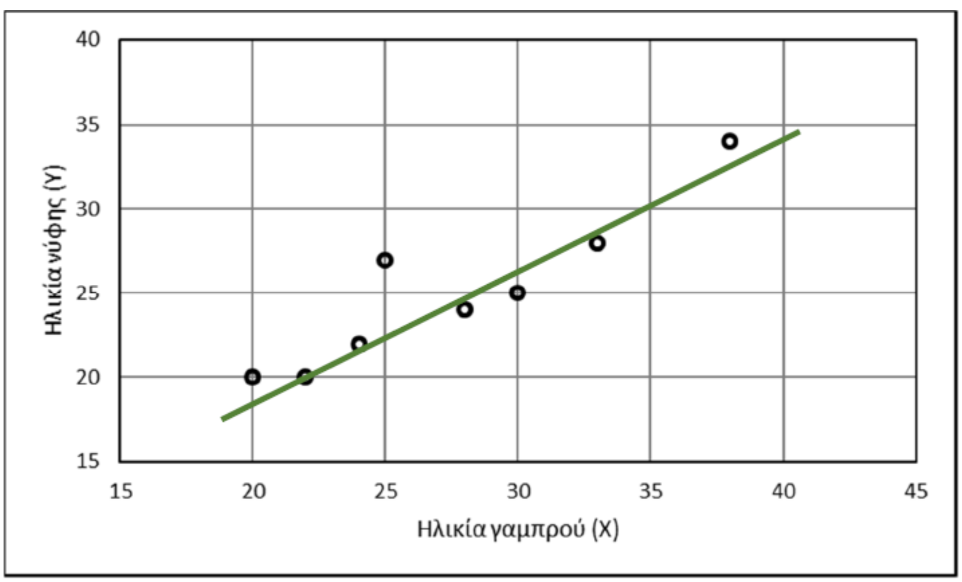
α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται ως ακολούθως:



Από το διάγραμμα φαίνεται να υπάρχει **θετική ισχυρή γραμμική συσχέτιση** μεταξύ των δύο ηλικιών.

β) Υπολογίζουμε ότι r = 0,92 , τιμή που επιβεβαιώνει την **ισχυρή γραμμική συσχέτιση** της ηλικίας του γαμπρού με εκείνη της νύφης.

γ) Η ευθεία παλινδρόμησης φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



δ) Αξιοποιώντας την παραπάνω ευθεία μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι αν ο γαμπρός είναι 34 ετών, η αναμενόμενη ηλικία της νύφης είναι περίπου 31 ετών.

Άσκηση 11 – Λύση

Δίνεται ότι y_i =α+βx_i , i = 1,2,…,ν . Άρα ισχύει ότι $\overline{y_\iota}$ = α+β $\overline{x_\iota}$.

Επίσης σ_y = ΙβΙ σ_x . Βάζουμε ΙβΙ γιατί δεν γνωρίζουμε το πρόσημο του β.

Γνωρίζουμε ότι ο τύπος του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης 2 ποσοτικών μεταβλητών είναι:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \nu \overline{x_\iota}\,\overline{y_\iota}}{\nu \sigma_x \sigma_y}$$

Αντικαθιστούμε y_i =α+βx_i και $\overline{y_\iota}$ = α+β $\overline{x_\iota}$, οπότε ο τύπος παίρνει τη μορφή:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i(\alpha+\beta x_i) - \nu \overline{x_\iota}(\alpha+\beta\, \overline{x_\iota})}{\nu \sigma_x \sigma_y}$$

Κάνουμε επιμεριστική ιδιότητα και θα αντικαταστήσουμε τον τύπο σ_y = ΙβΙ σ_x , οπότε ο τύπος του r θα λαμβάμνει την ακόλουθη μορφή:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \alpha x_i + \sum_{i=1}^{\nu} \beta {x_i}^2 - \nu\alpha\overline{x_\iota} - \beta\, \overline{x_i}^2}{\nu \mathrm{I}\beta\mathrm{I} {\sigma_x}^2}$$

Γνωρίζουμε ότι $\overline{x_\iota} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i$. Άρα , $\nu\alpha\overline{x_\iota} = \nu\alpha\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha x_i$. Άρα, ο προηγούμενος τύπος του r , μπορεί να γίνει:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \beta {x_i}^2 - \nu\beta\, \overline{x_i}^2}{\nu \mathrm{I}\beta\mathrm{I} {\sigma_x}^2} = \frac{\beta}{I\beta I}\,\frac{\sum_{i=1}^{\nu} {x_i}^2 - \nu\, \overline{x_i}^2}{\nu {\sigma_x}^2} \qquad (1)$$

Θυμόμαστε ότι ${\sigma_x}^2 = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} {x_i}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu}\right)$.

Οπότε, αν πολλαπλασιάσουμε με ν, έχουμε:

$$\text{ν}{\sigma_x}^2 = \sum_{i=1}^{\nu} {x_i}^2 - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2$$

Άρα, βρήκαμε πως θα αντικαταστήσουμε τον παρονομαστή.

Για τον αριθμητή, έχουμε ότι :

$$\sum_{i=1}^{\nu} {x_i}^2 - \nu\, {\overline{x_i}}^2 = \sum_{i=1}^{\nu} {x_i}^2 - \text{ν}\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{\nu} {x_i}^2 - \text{ν}\,\frac{1}{\nu^2}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{\nu} {x_i}^2 - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην (1) θα έχουμε:

$$\text{r} = \frac{\beta}{I\beta I}\,\frac{\sum_{i=1}^{\nu} {x_i}^2 - \frac{1}{\nu}(\sum_{i=1}^{\nu} x_i)^2}{\sum_{i=1}^{\nu} {x_i}^2 - \frac{1}{\nu}(\sum_{i=1}^{\nu} x_i)^2} = \frac{\beta}{I\beta I}\,.$$

Άρα, αν β>0 , τότε ΙβΙ = β και τότε r = $\frac{\beta}{\beta}$ = 1 .

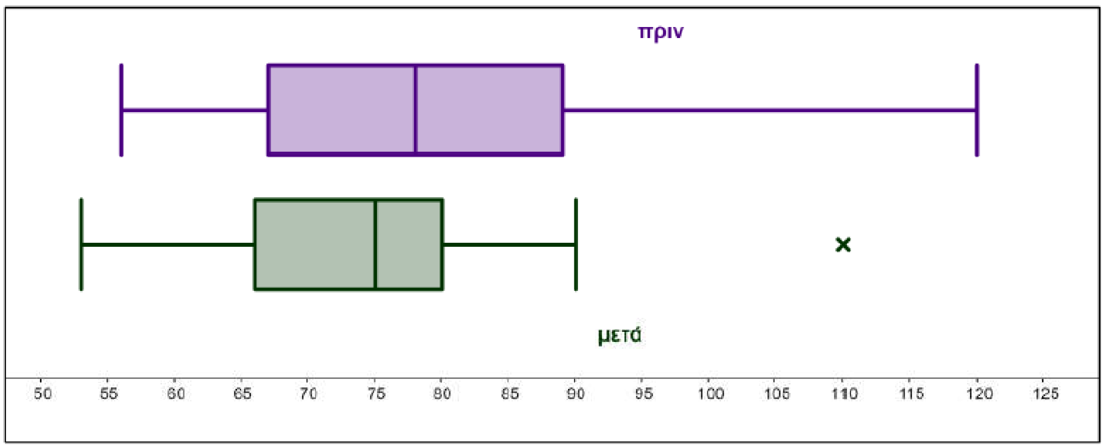
Αν β<0 , τότε ΙβΙ = - β και τότε r = $\frac{\beta}{-\beta}$ = -1 .

Άσκηση 12 – Λύση

α) Υπολογίζουμε ότι: $x_{\pi\rho\iota\nu}$ = 79,7 , $x_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$ = 74,5 , $S_{\pi\rho\iota\nu}$ = 15,4 , $S_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$ = 13,8 .

Κάποιος σχολιασμός θα μπορούσε να συνδέεται με τη μείωση του βάρους, αλλά πιθανόν και με τη μείωση της διασποράς.

β) Τα θηκογράμματα φαίνονται παρακάτω:



Φαίνεται να υπάρχει διαφορά μετά τη δίαιτα, καθώς και η μέση τιμή, αλλά και η διασπορά έχουν μειωθεί.

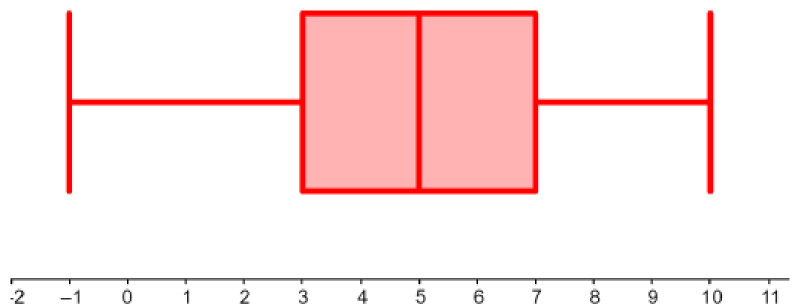
γ) Επιβεβαιώνεται η παρατήρησή μας για μείωση του βάρους, λόγω της μείωσης της μέσης τιμής. Φαίνεται από τις πλάγιες γραμμές με αρνητική κλίση που δείχνουν το βάρος πριν και το βάρος μετά.

Άσκηση 13 – Λύση

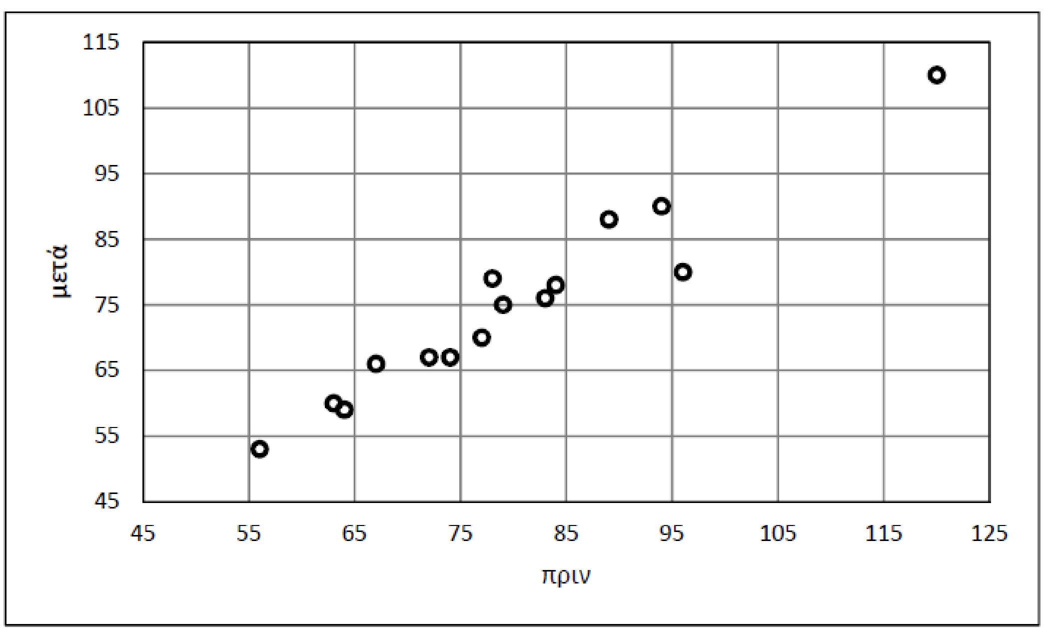
α) Η μεταβλητή Ζ φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$Z = X_{πριν} - X_{μετά}$	1	7	-1	3	16	10	1	3	5	7	4	4	6	5	7

και το αντίστοιχο θηκόγραμμα:

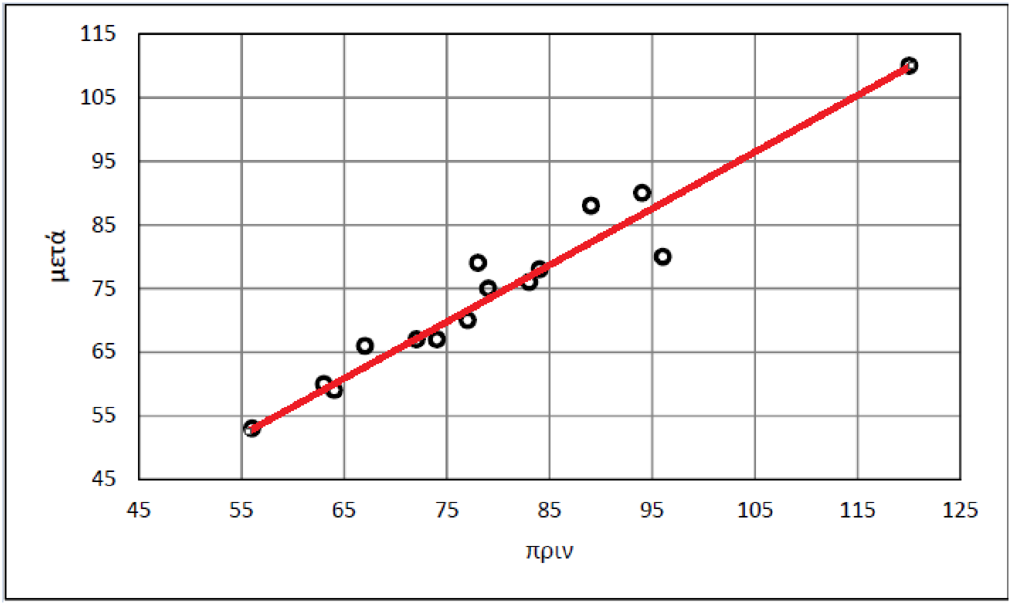


Β) Δίνεται το διάγραμμα διασποράς και ότι ο συντελεστής Pearson είναι r = 0,97 .



Γ) Υπολογίζεται ότι r=0,97 , που δείχνει ότι υπάρχει **απόλυτη θετική συσχέτιση** ανάμεσα στο βάρος μετά.

Δ)



Ε) Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα, εκτιμούμε ότι το νέο βάρος θα είναι γύρω στα 86 κιλά.

Άσκηση 14 – Λύση

Ο δειγματικός συντελεστής γραμμικής συσχέτισης του Pearson συμβολίζεται με r και ορίζεται από τον τύπο: r = $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

όπου, σ_{xy} είναι η συνδιακύμανση των μεταβλητών X , Y και μπορεί να δοθεί από τον τύπο:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(\chi_\iota - \bar{\chi})(y_\iota - \bar{y})}{\nu - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}\chi_\iota y_\iota - \nu\bar{\chi}\bar{y}}{\nu - 1}$$

$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}(\chi_\iota - \bar{\chi})^2}$ και ομοίως $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}(y_\iota - \bar{y})^2}$.

Αντικαθιστώντας στον αρχικό τύπο, θα έχουμε ότι:

$$r = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{\nu} \chi_\iota y_\iota - \nu\bar{\chi}\bar{y}}{\nu-1}}{\sqrt{\frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}(\chi_\iota-\bar{\chi})^2}\sqrt{\frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}(y_\iota-\bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \chi_\iota y_\iota - \nu\bar{\chi}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(\chi_\iota-\bar{\chi})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(y_\iota-\bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \chi_\iota y_\iota - \nu\bar{\chi}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} {\chi_\iota}^2 - \nu\bar{\chi}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} {y_\iota}^2 - \nu\bar{y}^2}}$$

Ο πληθυσμιακός συντελεστής γραμμικής συσχέτισης του Pearson ορίζεται ανάλογα και συμβολίζεται με ρ .

Άσκηση 15 – Λύση

Για τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των X και Y διευκολύνει ο παρακάτω πίνακας:

x	y	x^2	y^2	xy
10	21	100	441	210
13	24	169	576	312
17	29	289	841	493
21	25	441	625	525
25	36	625	1296	900
28	33	784	1089	924
30	40	900	1600	1200
Άθροισμα				
144	208	3308	6468	4564

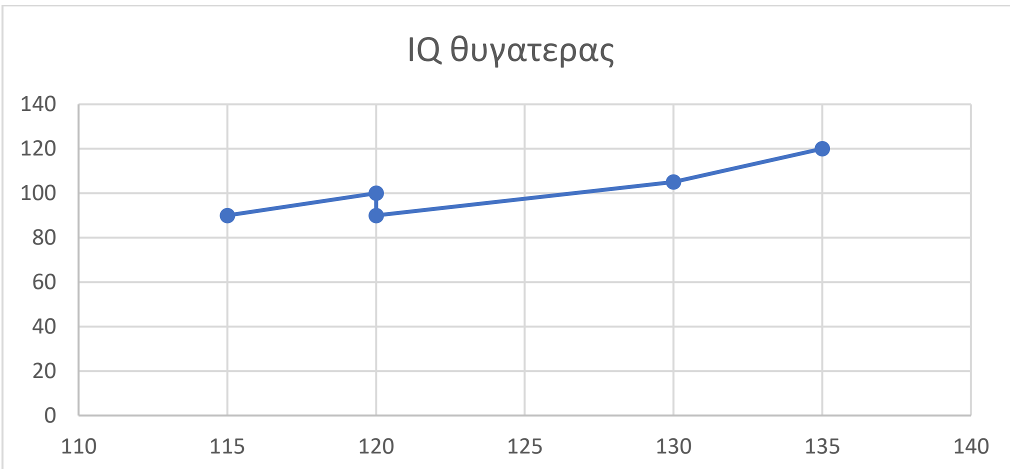
Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται από τη σχέση της άσκησης 14:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \chi_\iota y_\iota - \nu\bar{\chi}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} {\chi_\iota}^2 - \nu\bar{\chi}^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} {y_\iota}^2 - \nu\bar{y}^2}}$$

Εκτελώντας τις πράξεις, προκύπτει ότι: r = 0,9 .

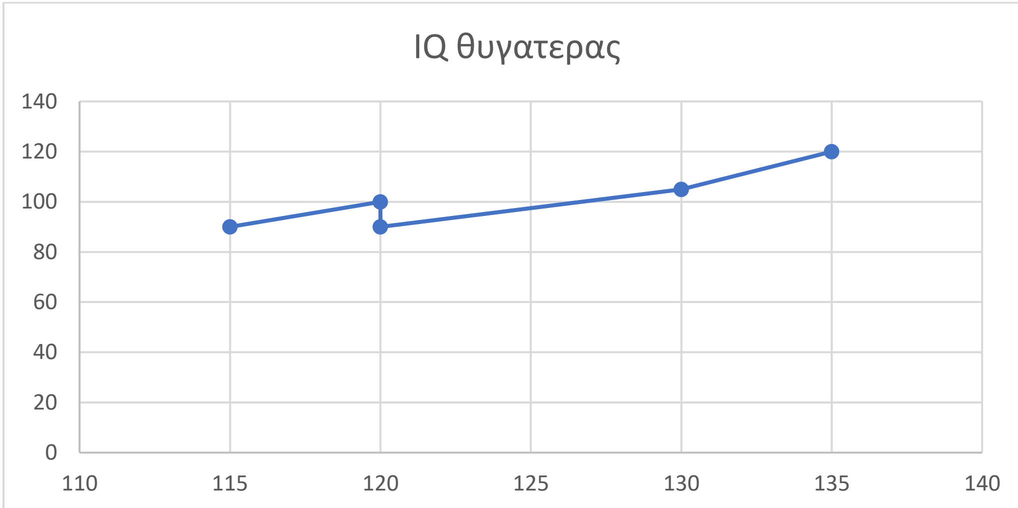
Άσκηση 16 – Λύση

Α) Τοποθετούμε στον άξονα των x τις τιμές και αντίστοιχα τον άξονα y. Προκύπτει λοιπόν, το ακόλουθο σχήμα:



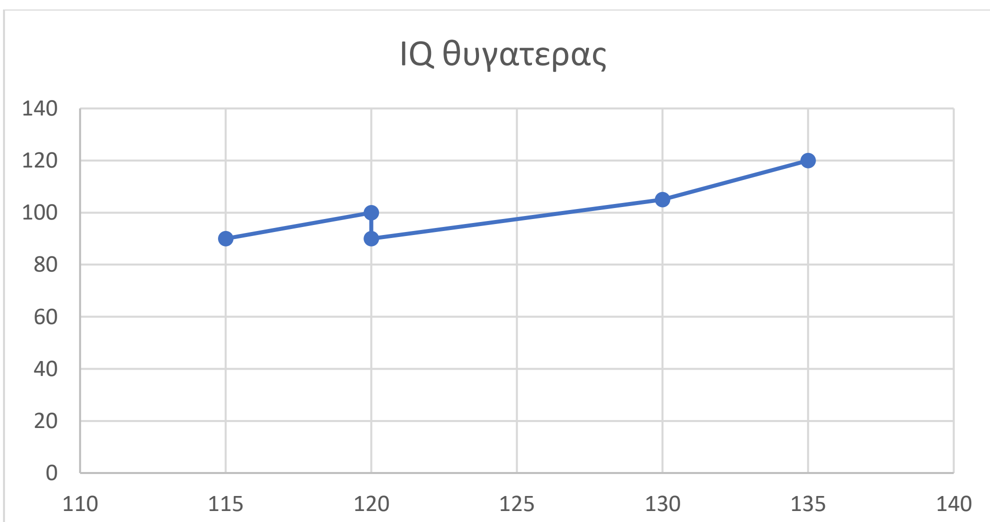
Παρατηρούμε ότι υπάρχει **θετική μεγάλη συσχέτιση** των 2 μεταβλητών.

Β) Ομοίως με το Α) προκύπτει το ακόλουθο σχήμα:



Παρατηρούμε ότι υπάρχει **θετική μέτρια συσχέτιση** των 2 μεταβλητών.

Γ) Ομοίως με το Α) προκύπτει το εξής σχήμα:



Παρατηρούμε ότι υπάρχει **αρνητική μέτρια συσχέτιση** των 2 μεταβλητών.

Άσκηση 17 – Λύση

Α) Για τον υπολογισμό του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών Χ και Υ, διευκολύνει ο ακόλουθος πίνακας:

x	y	x^2	y^2	xy
1	-2	1	4	-2
3	0	9	0	0
5	1	25	1	5
7	3	49	9	21
9	5	81	25	45
10	6	100	36	60
12	8	144	64	96
13	10	169	1000	130
Άθροισμα				
60	31	578	239	355

Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται από τη σχέση της άσκησης 14:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \chi_\iota y_\iota - \nu\bar{\chi}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} {\chi_\iota}^2 - \nu\bar{\chi}^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} {y_\iota}^2 - \nu\bar{y}^2}}$$

Εκτελώντας τις πράξεις, προκύπτει ότι: r = 0,9 , δηλαδή **αρκετά μεγάλη θετική γραμμική συσχέτιση,** όπως ακριβώς εκτιμήθηκε και από το διάγραμμα διασποράς (α) της προηγούμενης άσκησης.

Β) r = 0,59 **μέτρια θετική συσχέτιση**

Γ) r = – 0,70 **μεγάλη αρνητική συσχέτιση**

Άσκηση 18 – Λύση

Επειδή ν = 4 και $\bar{x}$ = 7, $\bar{y}$ = 4,5 έχουμε $\sum x_i$=ν$\bar{x}$ = 28 και $\sum y_i$=ν$\bar{y}$ = 18.

Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται από τη σχέση της άσκησης 14:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \chi_\iota y_\iota - \nu\bar{\chi}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} \chi_\iota{}^2 - \nu\bar{\chi}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} y_\iota{}^2 - \nu\bar{y}^2}} = \frac{4*138-28*18}{\sqrt{4*210-28^2}\sqrt{4*92-18^2}} = 0{,}97 \text{ .}$$

Άσκηση 19 – Λύση

x_i	y_i	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$
1	3	16	16	16
2	6	9	1	3
4	1	1	36	6
6	11	1	16	4
8	8	9	1	3
9	13	16	36	24
Άθροισμα				
30	42	54	106	56

Από την 2η γραμμή, έχουμε ότι : $(x_i-\bar{x})^2$ = 9 . Δηλαδή, $(2-\bar{x})^2$ = 9 .

Άρα. $2-\bar{x}$ = ± 3 . Άρα, είτε $\bar{x}$ = -1 είτε $\bar{x}$ = 5 . Επειδή όμως $\bar{x}$>0 , άρα $\bar{x}$ = 5 .

Ομοίως υπολογίζουμε από την 2η γραμμή ότι : $(y_i-\bar{y})^2$ =1 . Δηλαδή, $(6-\bar{y})^2$ = 1 .

Άρα. $6-\bar{y}$ = ± 1 . Άρα, είτε $\bar{y}$ = 5, είτε $\bar{y}$ = 7 . Επειδή $(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ = 3 , τότε $\bar{y}$ = 7 .

Εκτελώντας τις πράξεις, συμπληρώνεται και ο υπόλοιπος πίνακας.

Άσκηση 20 – Λύση

Υπολογίζουμε πρώτα τις μέσες τιμές x και y και στη συνέχεια βρίσκουμε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

Α) x = 3 , y = 0

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	4	-2	4	4	16	-8
2	2	-1	2	1	4	-2
3	0	0	0	0	0	0
4	-	1	-2	1	4	-2
5	-	2	-4	4	16	-8
Άθροισμα						
-	-	0	0	10	40	-20

Επομένως:

Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται από τη σχέση της άσκησης 14:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \chi_\iota y_\iota - \nu\bar{\chi}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} \chi_\iota{}^2 - \nu\bar{\chi}^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} y_\iota{}^2 - \nu\bar{y}^2}} = \frac{-20}{\sqrt{10}\sqrt{40}} = -1\ .$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι υπάρχει τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση.

β) Αν εργαστούμε όπως στην περίπτωση (α) βρίσκουμε r_2 =1, δηλαδή υπάρχει τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση. Συγκρίνοντας τις τιμές των (x, y) και τους αντίστοιχους συντελεστές γραμμικής συσχέτισης παρατηρούμε ότι: Εάν οι X, Y είναι αρνητικά συσχετισμένες οι X, –Y είναι θετικά συσχετισμένες.

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 - Λύση

α) Αν εργαστούμε όπως πριν, βρίσκουμε τον πίνακα:

x_i	y_i	${x_i}^2$	${y_i}^2$	$x_i y_i$
15,6	10,8	243,36	116,64	168,48
15,2	11,1	231,04	123,21	168,72
14,7	11,5	216,09	132,25	169,05
14,3	12,1	204,49	146,41	173,03
13,4	12,8	179,56	163,84	171,52
12,8	13,2	163,84	174,24	168,96
Άθροισμα				
86	71,5	1238,38,	856,59	1019,76

Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται από τη σχέση της άσκησης 14, ως ακολούθως:

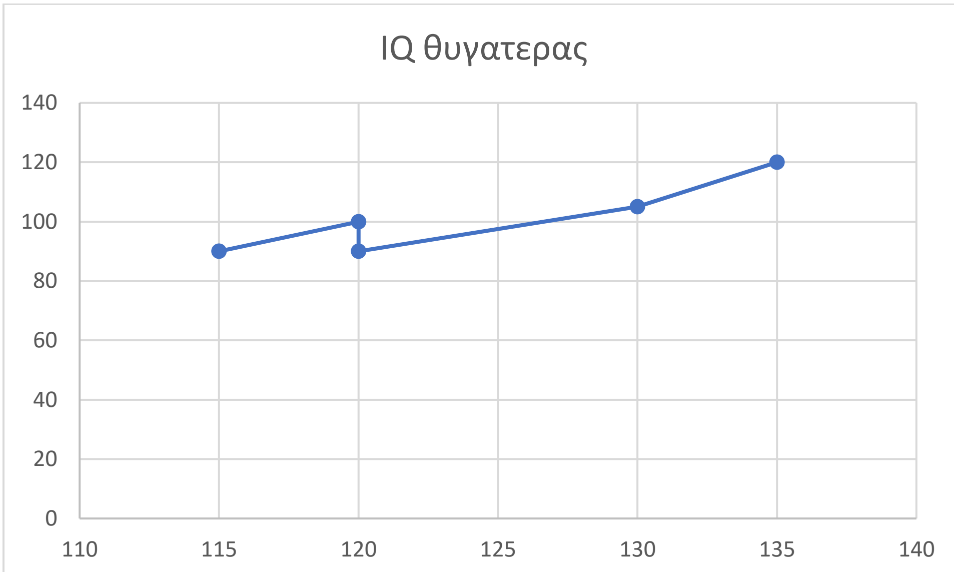
$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \chi_\iota y_\iota - \nu\bar{\chi}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} {\chi_\iota}^2 - \nu\bar{\chi}^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} {y_\iota}^2 - \nu\bar{y}^2}} = \frac{-30{,}44}{\sqrt{34{,}28}\sqrt{27{,}29}} = -1\ .$$

Έχουμε δηλαδή τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση μεταξύ της κατανάλωσης άπαχου και πλήρους γάλακτος.

β) Αν πολλαπλασιάσουμε τις παραπάνω τιμές των x_i και y_i με 3,8 βρίσκουμε την κατανάλωση σε λίτρα. Αν εργαστούμε όπως στην περίπτωση (α) βρίσκουμε πάλι ότι r ≈ – 1.

Άσκηση 2 - Λύση

α) Το διάγραμμα διασποράς είναι το ακόλουθο:



β) Από το διάγραμμα διασποράς εκτιμούμε ότι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι περίπου 0,90.

γ) Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x_i	y_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
85	90	625	400	500
90	100	400	100	200
95	90	225	400	300
100	105	100	25	50
110	120	0	100	0
115	110	25	0	0
120	125	100	225	150
120	110	100	0	0
130	130	400	400	400
135	120	625	100	250
Άθροισμα				
1100	1100	2600	1750	1850

από τον οποίο βρίσκουμε $\bar{x}$=110 , $\bar{y}$ =110 και r ≈ 0,87

Άσκηση 3 - Λύση

Α) $\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ = $\sum_{i=1}^{\nu}(x_i y_i - x_i\bar{y} - \bar{x}\, y_i + \bar{x}\bar{y})$ = $\sum x_i y_i$-$\bar{y}\sum x_i$ - $\bar{x}\sum y_i$ + $\sum \bar{x}\bar{y}$ =

= $\sum x_i y_i$ - ν$\bar{x}\bar{y}$- ν$\bar{x}\bar{y}$ + ν$\bar{x}\bar{y}$ = $\sum x_i y_i$ - ν$\bar{x}\bar{y}$

β) Για ν = 7 έχουμε: $\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ = $\sum x_i y_i$ - ν$\bar{x}\bar{y}$ = 308 – 7*4*9 = 56 .

Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται από τη σχέση της άσκησης 14:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \chi_\iota y_\iota - \nu\bar{\chi}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(\chi_\iota - \bar{\chi})^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(y_\iota - \bar{y})^2}} = \frac{56}{\sqrt{28}\sqrt{112}} = 1\ .$$

Άρα, έχουμε **τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση**.

Άσκηση 4 - Λύση

Αν παραστήσουμε με Χ τη βαθμολογία του εξεταστή Α και με Υ τη βαθμολογία του εξεταστή Β έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x_i	y_i	${x_i}^2$	${y_i}^2$	$x_i y_i$
55	54	3025	2916	2970
62	56	1844	3136	3472
71	61	5041	3721	4331
66	66	4356	4356	4356
63	63	3969	3969	3969
56	61	3136	3721	3416
72	73	5184	5329	5256
51	54	2601	2916	2754
Άθροισμα				
496	488	31156	30064	30524

Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται από τη σχέση της άσκησης 14, ως ακολούθως:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \nu\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \nu\bar{x}^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} y_i^2 - \nu\bar{y}^2}} = \frac{8*30524-496*488}{\sqrt{8*31156-496^2}\sqrt{8*30064-488^2}} = 0{,}77\ .$$

Επομένως έχουμε **αρκετά μεγάλη θετική γραμμική συσχέτιση** μεταξύ της βαθμολογίας των δύο εξεταστών.

Άσκηση 5 – Λύση

α) Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

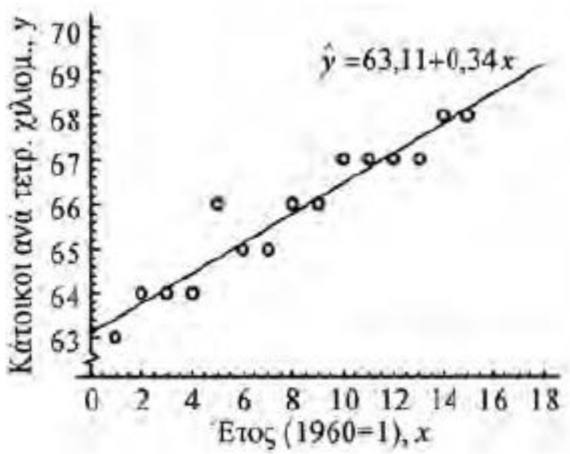
Έτος	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1960	1	63	1	63
1961	2	64	4	128
1962	3	64	9	192
1963	4	64	16	256
1964	5	66	25	330
1965	6	65	36	390
1966	7	65	49	455
1967	8	66	64	528
1968	9	66	81	594
1969	10	67	100	670
1970	11	67	121	737
1971	12	67	144	804
1972	13	67	169	871
1973	14	68	196	952
1974	15	68	225	1020
Άθροισμα				
-	120	987	1240	7990

Από τον πίνακα προκύπτουν οι ακόλουθοπι συντελεστές του γραμμικού υποδείγματος:

$$\hat{\beta} = \frac{\nu \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\nu \Sigma x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{15*7990-120*987}{15*1240-120^2} = 0{,}34 \text{ και}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \beta\bar{x} = 65{,}8\text{-}034*8 = 63{,}1 \,.$$

Άρα η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η y = 63,1+ 0,34x και παριστάνεται στο ακόλουθο διάγραμμα διασποράς:



β) Για x = 17 (έτος 1976) έχουμε y = 63,1+ 0,34 ·17 = 68,9 κάτοικοι/τετραγωνικό χιλιόμετρο που δεν διαφέρει και πολύ από τους 69,5 κατοίκους/ τετραγωνικό χιλιόμετρο που είχαμε σύμφωνα με την άσκηση.

Άσκηση 6 - Λύση

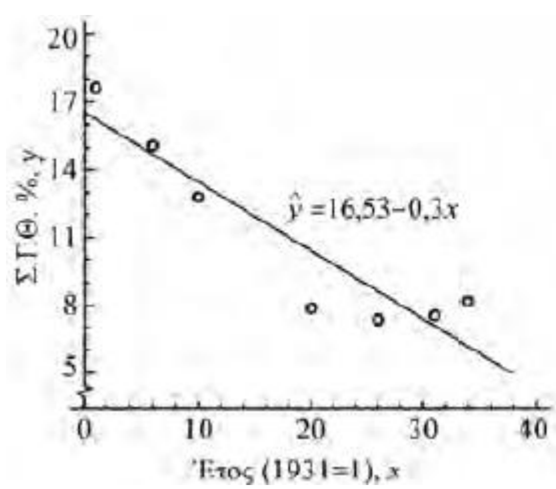
Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

Έτος	x_ι	y_ι	$\chi_\iota{}^2$	$x_\iota y_\iota$
1931	1	17,7	1	17,7
1936	6	15,1	36	90,6
1940	10	12,8	100	128
1950	20	7,9	400	158
1956	26	7,4	676	192,4
1961	31	7,6	961	235,6
1964	34	8,2	1156	278,8
Άθροισμα				
-	128	76,7	3330	1101,1

από τον οποίο βρίσκουμε: $\hat{\beta} = \frac{\nu\sum x_i y_i-(\sum x_i)(\sum y_i)}{\nu\Sigma x_i^2-(\sum x_i)^2} = \frac{7*1101,1-128*76,7}{7*3330-128^2}$ = -0,345 .

$$\hat{a} = \bar{y} - \beta\bar{x} = 10,96+035*18,29 = 16,53 .$$

Άρα η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η y = 16,53 – 0,3x και παριστάνεται στο ακόλουθο διάγραμμα διασποράς:



Άσκηση 7 - Λύση

Α) $\frac{s_{xy}}{{s_x}^2} = \frac{\frac{1}{\nu}\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\frac{1}{\nu}\sum(x_i-\bar{x})^2} = \frac{\sum x_i y_i-\nu\bar{x}\bar{y}}{\sum {x_i}^2-\nu\bar{x}^2} = \frac{\nu\sum x_i y_i-\sum x_i\sum y_i}{\nu\sum {x_i}^2-(\sum x_i)^2} = \hat{\beta}$.

β) Από την άσκηση 14, έχουμε ότι: r = $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$. Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με σ_x

και έχουμε:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{{\sigma_x}^2}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \hat{\beta}\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\,.$$

Άσκηση 8 - Λύση

Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

C	F	C^2	F^2	CF
15	59	225	3481	885
20	68	400	4624	1360
25	77	625	5929	1925
30	86	900	7396	2580
35	95	1225	9025	3325
Άθροισμα				
125	385	3375	30455	10075

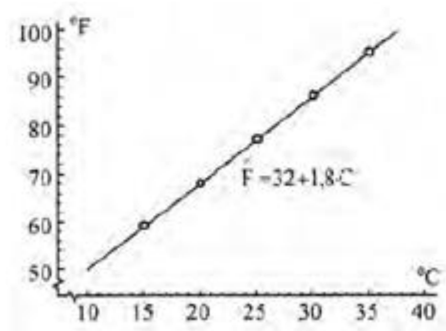
Από τον πίνακα έχουμε ότι ν=5 .

Γνωρίζουμε ότι $\bar{F} = \frac{\sum F}{\nu} = \frac{385}{5} = 77$.

Ομοίως, $\bar{C} = \frac{\sum C}{\nu} = \frac{125}{5} = 25$.

Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η $\hat{F} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,C$.

Από τον πίνακα μπορούμε να βρούμε ότι:



$$\hat{\beta} = \frac{\nu\sum FC-(\sum F)(\sum C)}{\nu\Sigma C^2-(\sum C)^2} = \frac{5*10075-385*125}{5*3375-125^2} = 1{,}8 \; .$$

Άρα:

$$\hat{\alpha} = \bar{F} - \hat{\beta}\;\bar{C} = 77 - 1{,}8*25 = 32 \; .$$

Τελικά, η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι : $\hat{F}$ = 32 + 1,8 C .

Άσκηση 9 – Λύση

r(X,Z) = $\frac{\sum(x_i-\bar{x})(z_i-\bar{z})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(z_i-\bar{z})^2}}$. Επειδή Z = λY έχουμε:

$$\bar{z} = \frac{z_1+z_2+\cdots+z_\nu}{\nu} = \frac{\lambda y_1+\lambda y_2+\cdots+\lambda y_\nu}{\nu} = \lambda\bar{y} \; .$$

Άρα:

$$z_i - \bar{z} = \lambda y_i - \lambda\bar{y} = \lambda(y_i - \bar{y})$$

Επίσης:

$$\sqrt{\sum(z_i-\bar{z})^2} = \sqrt{\lambda^2\sum(y_i-\bar{y})^2} = |\lambda|\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2} \; .$$

Αντικαθιστούμε στην αρχική σχέση και έχω την ακόλουθη τιμή για το συντελεστή r γραμμικής συσχέτισης:

$$r(X,Z) = \frac{\lambda}{I\lambda I}\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{\lambda}{I\lambda I}\, r(X,Y\,.)$$

Επομένως όταν λ > 0 ισχύει r(X,Z) = r(X,Y) , ενώ λ < 0 ισχύει r(X,Z) = – r(X,Y).

Άσκηση 10 - Λύση

Κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα συχνοτήτων:

x_i	ν_i	N_i	$x_i\nu_i$	$x_i^2\nu_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
0	10	10	0	0	12,50	12,50
1	25	35	25	25	31,25	43,75
2	20	55	40	80	25,00	68,75
3	12	67	36	108	15,00	83,75
4	6	73	24	96	7,50	91,25
5	5	78	25	125	6,25	97,50
6	2	80	12	72	2,50	100,00
Άθροισμα						
-	80	-	162	506	100,00	-

από τον οποίο βρίσκουμε:

Α) $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \nu_i}{\Sigma \nu_i} = \frac{162}{80} = 2{,}025$.

Όπως έχουμε δείξει στις προηγούμενες παραγράφους για τον υπολογισμό της διαμέσου και της επικρατούσας τιμής, έχουμε ότι: $\delta = \frac{2+2}{2} = 2$ και $M_0 = 1$.

Επίσης, όπως έχουμε δείξει στην άσκηση 11 , έχουμε ότι:

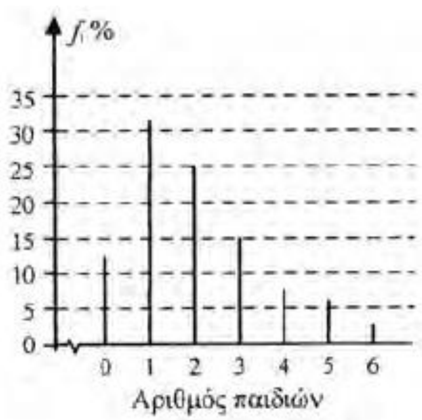
$$\nu\sigma_x^{\ 2} = \sum_{i=1}^{\nu} x_i^{\ 2} - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2$$

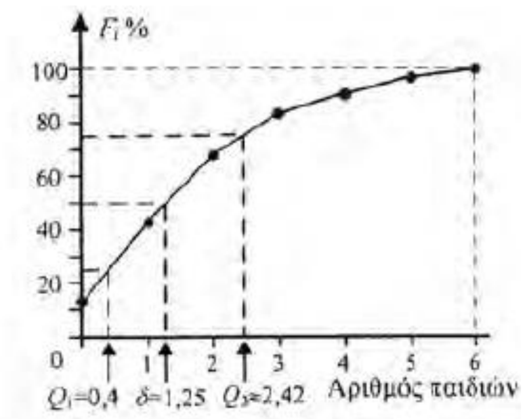
Εκτελώντας τις πράξεις, προκύπτει ότι: $\sigma_x^{\ 2} = 2{,}224$.

Άρα:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^{\ 2}} = 1{,}49$$

Β) Γ) Όπως έχουμε δείξει και στις προηγούμενες παραγράφους για την κατασκευή του διαγράμματος σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων, προκύπτουν τα εξής σχήματα:





Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων εκτιμούμε ότι:

$$Q_1 \approx 0{,}4, \quad \delta \approx 1{,}25 \quad \text{και} \quad Q_3 \approx 2{,}4.$$

Γιατί επιλέγω Τετράδιο Σπουδής;

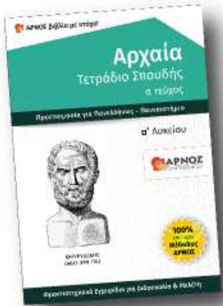
- Είναι απαραίτητο διδακτικό εργαλείο βασισμένο στους στόχους του μαθήματος και τον τρόπο Υλοποίησής του.
- Σε αυτό βρίσκεται το υλικό Διδασκαλίας για τον Καθηγητή και Μελέτης για το Μαθητή.
- Το Τετράδιο Σπουδής σε συνδυασμό με το course οδηγούν το **Μαθητή** στην **Αυτομάθηση**.
- Είναι το Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο πραγματοποίησης της **online διδασκαλίας με φυσικό τρόπο**.
- Με αυτό **ενημερώνονται** άμεσα **οι γονείς** και **ελέγχουν την πρόοδο** του παιδιού τους.

Τετράδια Σπουδής για:

Λύκειο

Μαθηματικά

Αρχαία



Γλωσσα

Χημεία

16-18 ετών