ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

# Αρχείο Εκφωνήσεων ΓΕ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)
# ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 1

| | | |
|---|---|---|
| Ημερομηνία ανάρτησης: | Κυριακή | 10 Οκτωβρίου 2021 |
| Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής: | Τετάρτη | 17 Νοεμβρίου 2021 |
| Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων: | Παρασκευή | 19 Νοεμβρίου 2021 |

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση των ασκήσεων συνιστάται η μελέτη των παραδειγμάτων και των λυμένων ασκήσεων στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της **1ης** εργασίας αναφέρονται στα:

- **Κεφάλαιο 1** (Πίνακες – Ορίζουσες – Γραμμικά Συστήματα) και
- **Κεφάλαιο 2** (Εισαγωγή στους Διανυσματικούς Χώρους, Βάση και διάσταση)

του συγγράμματος του ΕΑΠ "**Γραμμική Άλγεβρα**" των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Για την κατανόηση της ύλης συνιστάται να μελετηθεί επίσης το εξής **βοηθητικό υλικό** (στο `study.eap.gr`):

| | |
|---|---|
| Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : | Σύνολα Αριθμών<br>Συναρτήσεις,<br>Πίνακες,<br>Διανυσματικοί Χώροι |
| Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό: | Κεφ1. Εισαγωγικές Έννοιες,<br>Κεφ2. Γραμμικά Συστήματα,<br>Κεφ3. Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα,<br>Κεφ4. Ορίζουσες,<br>Κεφ5. Οι χώροι $\mathbb{R}^n$,<br>Κεφ6. Διανυσματικοί Χώροι,<br>Κεφ7. Βάση και Διάσταση. |

## Σκοπός της εργασίας αυτής είναι:

- Να σας εξοικειώσει με την άλγεβρα πινάκων και τις κλιμακωτές μορφές, τις μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων, τον υπολογισμό και τις βασικές ιδιότητες των οριζουσών, τα κριτήρια αντιστρεψιμότητας πινάκων και τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα.
- Να σας βοηθήσει στην κατανόηση των εννοιών του διανυσματικού χώρου και υπόχωρου, της γραμμικής ανεξαρτησίας διανυσμάτων, των συνόλων γεννητόρων, των βάσεων και της διάστασης ενός διανυσματικού χώρου καθώς και να σας επιτρέψει να εκτελείτε με άνεση και ακρίβεια τους απαιτούμενους υπολογισμούς.

**Άσκηση 1** (Μον. 20)

A) (μον. 8). Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ και $B = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$. Εφόσον υπολογίσετε τους πίνακες $ABA$, $BAB$, $(AB)^T$, $(BA)^T$, $BA$, $AB$ προσπαθήστε να κάνετε την αντιστοίχιση στις δύο παρακάτω στήλες (μεταξύ ίσων ποσοτήτων):

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $ABA$ | 1) | $AB$ |
| b) | $BAB$ | 2) | $A$ |
| c) | $(AB)^T$ | 3) | $BA$ |
| d) | $(BA)^T$ | 4) | $B$ |

B) (μον. 6). Δίνεται ο $3 \times 3$ πίνακας $E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Να υπολογιστούν η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα $E$ και ο βαθμός του.

Γ) (μον. 6). Δίνεται ο $4 \times 4$ πίνακας $F = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 1 \\ -10 & 2 & -1 & -2 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}$. Να εξετάσετε εάν τα διανύσματα στηλών του πίνακα $F$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα και να δώσετε το βαθμό του πίνακα $F$.

**Άσκηση 2** (Μον. 20)

A) (μον. 5). Δίνεται ένας $n \times n$ πίνακας $A$ για τον οποίον ισχύει η σχέση $A^3 + 3A^2 - 3I = 4A$. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A$ είναι αντιστρέψιμος και να υπολογίσετε τον αντίστροφό του $A^{-1}$.

B) (μον. 5). Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. Να υπολογίσετε τον πίνακα $B = A^2$ και τον πίνακα $\mathrm{adj}(B)$.

Γ) (μον. 10). Δίνονται οι $4 \times 4$ πίνακες $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -10 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ και $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

i) (4 μον.) Να υπολογίσετε την ορίζουσα (χρησιμοποιώντας στοιχειώδης πράξεις γραμμών) των πινάκων $C$ και $D$.

ii) (6 μον.) Να εξετάσετε αν οι πίνακες $C$ και $D$ είναι αντιστρέψιμοι. Αν είναι αντιστρέψιμοι να υπολογίσετε τον αντίστροφό τους.

**Άσκηση 3** (Μον. 20)

A) (μον. 6). Ελέγξτε αν έχει λύση $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 4 \\ x - 5y + 3z &= 3 \\ 5x + y + z &= 41 \end{aligned}$$

Β) (μον. 7). Να βρεθούν όλες οι λύσεις $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ του γραμμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + y + z &= 1 \\ x + 5y - 4z &= -1 \end{aligned}$$

Γ) (μον. 7). Να βρεθούν όλες οι λύσεις $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ του γραμμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 3 \\ -3x + ay + 2z &= 8 \\ x - 3y + 4z &= 4a \end{aligned}$$

**Άσκηση 4** (Μον. 20)

Α) (μον. 9). Να εξεταστεί αν:

i) το σύνολο $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 7y + z - 1 = 0\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$

ii) το σύνολο $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2x^2 - y = 0\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$

iii) το σύνολο $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \geq 0\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$

Β) (μον. 11). Να εξεταστεί αν το σύνολο $X = \left\{ \begin{bmatrix} x+y & 3y \\ y & x \\ 3x & x-y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $M_{3,2}(\mathbb{R})$. Αν ναι, να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του $X$.

**Άσκηση 5** (Μον. 20)

Α) (μον. 7). Έστω $\mathbf{n}_1 = (1, -1, 2)$, $\mathbf{n}_2 = (-2, 2, -4)$, $\mathbf{n}_3 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{n}_4 = (2, 4, 5)$ διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Θέτουμε $S_1 = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$ και $S_2 = \{\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4\}$. Εξηγήστε ποιό από τα $S_1$, $S_2$ μπορεί να επεκταθεί σε βάση του $\mathbb{R}^3$, με την προσθήκη ενός ακόμη διανύσματος, και στη συνέχεια επεκτείνετέ το σε βάση του $\mathbb{R}^3$. Εξηγήστε γιατί αυτή η επέκταση δεν είναι μοναδική.

Β) (μον. 5). Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί ο χώρος των γραμμών, ο χώρος των στηλών και ο μηδενοχώρος του $A$ και οι διαστάσεις τους.

Γ) (μον. 8). Θεωρούμε τους υποχώρους του $\mathbb{R}^3$ $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$ και $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, y - z = 0\}$.

i) (μον 6). Βρείτε τη διάσταση των υποχώρων του $\mathbb{R}^3$: $U$, $W$, $U \cap W$ και $U + W$.

ii) (μον 2). Δείξτε ότι $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**