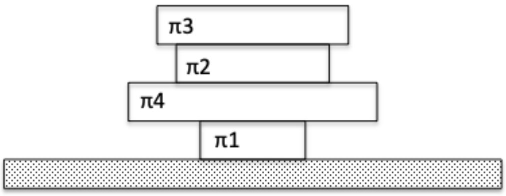
Θέμα 4, εργασία 1, 2021-2022: Αναπαράσταση Γνώσης και Συμπερασματολογία [*10 μονάδες*]

Οι παρακάτω προτάσεις κατηγορηματικής λογικής αφορούν μια στοίβα από 4 πίτες π1, π2, π3, π4, κάθε μια από τις οποίες έχει διάμετρο 1, 2, 3, και 4 αντίστοιχα. Η στοίβα με τις πίτες βρίσκεται πάνω σε ένα τραπέζι (Σχήμα 1).[1]



Σχήμα 1

1. $\neg(\pi1 = \pi2) \wedge \neg(\pi1 = \pi3) \wedge \neg(\pi1 = \pi4) \wedge \neg(\pi2 = \pi3) \wedge \neg(\pi2 = \pi4) \wedge \neg(\pi3 = \pi4)$
2. $\forall x(\mathrm{pie}(x) \Leftrightarrow (x=\pi1 \vee x=\pi2 \vee x=\pi3 \vee x=\pi4))$
3. $\forall x\ (\mathrm{pie}(x) \Rightarrow \neg(x = \mathrm{table}))$
4. $\forall x \forall y\ (\mathrm{on}(x, y) \Rightarrow \neg(x = y) \wedge \mathrm{pie}(x) \wedge (\mathrm{pie}(y) \vee y=\mathrm{table}))$
5. $\forall x\ (\mathrm{pie}(x) \Rightarrow \exists y(\mathrm{on}(x, y)))$
6. $\forall x \forall y \forall z\ (\mathrm{on}(x, y) \wedge \mathrm{on}(x, z) \Rightarrow y=z)$
7. $\forall x \forall y \forall z\ (\mathrm{on}(x, z) \wedge \mathrm{on}(y, z) \Rightarrow (x=y \vee z=\mathrm{table}))$
8. $\forall x\ (\mathrm{clear}(x) \Leftrightarrow \neg\exists y\ (\mathrm{on}(y, x)))$

(Σημείωση: Σε πολλές προτάσεις κάνουμε χρήση του κατηγορήματος ισότητας.)
Οι πρώτες τρεις προτάσεις προσδιορίζουν τα αντικείμενα του "μικρόκοσμου" με τις πίτες. Συγκεκριμένα δηλώνουν πως υπάρχουν 4 διακριτές πίτες που αναπαριστώνται από τις σταθερές π1, π2, π3, π4, και ένα τραπέζι (που δεν είναι πίτα) και αναπαριστάται από την σταθερά table.

Οι υπόλοιπες προτάσεις περιγράφουν την "φυσική" του μικρόκοσμου. Συγκεκριμένα,

- η (4) δηλώνει πως μια πίτα μπορεί να τοποθετηθεί είτε πάνω σε άλλη πίτα ή πάνω στο τραπέζι.
- η (5) δηλώνει πώς κάθε πίτα είναι πάνω σε κάποιο αντικείμενο.
- η (6) δηλώνει πώς μια πίτα δεν μπορεί να βρίσκεται ταυτόχρονα πάνω σε δύο διαφορετικά αντικείμενα.
- η (7) δηλώνει πώς πάνω σε μια πίτα μπορούμε να τοποθετήσουμε το πολύ ένα αντικείμενο.[2]
- η (8) ορίζει πως ένα αντικείμενο θεωρείται "καθαρό" (clear) όταν δεν έχει τίποτε άλλο από πάνω του.

1.Α. [2 *μονάδες*] Να μετατρέψετε τις προτάσεις (1) – (8) σε Συζευκτική Κανονική Μορφή (ΣΚΜ). Για να δεικτοδοτήσετε τις προτάσεις χρησιμοποιήστε το συμβολισμό 1.α, 1.β, 2.α, κλπ (αν για κάποια από τις προτάσεις (1) – (8) προκύπτουν >1 προτάσεις σε ΣΚΜ). Επισημαίνεται πως κατά την μετατροπή των προτάσεων (1) – (8) σε ΣΚΜ θα χρειαστεί σε δύο περιπτώσεις να εφαρμόσετε Skolemization απ' όπου θα προκύψουν δύο νέες συναρτήσεις. Τις δύο νέες αυτές συναρτήσεις θα πρέπει να τις ονομάσετε *f* και *g*.

Οι ακόλουθες εκφράσεις δίνονται έτοιμες για να διευκολύνουν την προσέγγισή σας:

1.α $\{ \neg(\pi1 = \pi2) \}$
1.β $\{ \neg(\pi1 = \pi3) \}$
1.γ $\{\neg(\pi1 = \pi4) \}$
1.δ. $\{ \neg(\pi2 = \pi3) \}$
1.ε $\{ \neg(\pi2 = \pi4) \}$
1.ζ $\{ \neg(\pi3 = \pi4) \}$

4.α $\{ \neg\mathrm{on}(x, y), \neg(x = y) \}$
4.β $\{ \neg\mathrm{on}(x, y), \mathrm{pie}(x) \}$
4.γ $\{ \neg\mathrm{on}(x, y), \mathrm{pie}(y), y=\mathrm{table} \}$

[1] Στο θέμα 5 θα δούμε μια παραλλαγή του "μικρόκοσμου" με τις πίτες που επιτρέπει και την αναδιάταξη μιας στοίβας με την χρήση σπάτουλας.
[2] Το κατηγόρημα on(x, y) αφορά στο αντικείμενο x που βρίσκεται *ακριβώς* πάνω από το y (δηλαδή, που ακουμπάει το y). Για παράδειγμα για το Σχήμα 1 ισχύουν τα on(π2,π4) και on(π4,π1), αλλά δεν ισχύει το on(π2,π1).

Απάντηση:

Πρόταση 1: $\neg(\pi1 = \pi2) \wedge \neg(\pi1 = \pi3) \wedge \neg(\pi1 = \pi4) \wedge \neg(\pi2 = \pi3) \wedge \neg(\pi2 = \pi4) \wedge \neg(\pi3 = \pi4)$
έχει δοθεί έτοιμη από την εκφώνηση σε ΣΚΜ:
$\neg(\Pi1 = \Pi2)$
$\neg(\Pi1 = \Pi3)$
$\neg(\Pi1 = \Pi4)$
$\neg(\Pi2 = \Pi3)$
$\neg(\Pi2 = \Pi4)$
$\neg(\Pi3 = \Pi4)$
Σημείωση: η εκφώνηση έχει λάθος, τα π είναι σταθερές, θα έπρεπε να είναι με κεφαλαίο. Τα αλλάζω σε Π

Πρόταση 2: $\forall x(pie(x) \Leftrightarrow (x=\pi1 \vee x=\pi2 \vee x=\pi3 \vee x=\pi4))$
Η ισοδυναμία γράφεται ως δυο συνεπαγωγές.
$\forall x(pie(x) \Rightarrow (x=\pi1 \vee x=\pi2 \vee x=\pi3 \vee x=\pi4)) \wedge ((x=\pi1 \vee x=\pi2 \vee x=\pi3 \vee x=\pi4) \Rightarrow pie(x))$
Βήμα 1: $\forall x(\neg pie(x) \vee x=\pi1 \vee x=\pi2 \vee x=\pi3 \vee x=\pi4) \wedge (\neg(x=\pi1 \vee x=\pi2 \vee x=\pi3 \vee x=\pi4) \vee pie(x))$
Βήμα 2: $\forall x(\neg pie(x) \vee x=\pi1 \vee x=\pi2 \vee x=\pi3 \vee x=\pi4) \wedge \{(\neg(x=\pi1) \wedge \neg(x=\pi2) \wedge \neg(x=\pi3) \wedge \neg(x=\pi4)) \vee pie(x)\}$
Βήμα 6: $\forall x(\neg pie(x) \vee x=\pi1 \vee x=\pi2 \vee x=\pi3 \vee x=\pi4) \wedge$
$\{\neg(x=\pi1) \vee pie(x)\} \wedge \{\neg(x=\pi2) \vee pie(x)\} \wedge \{\neg(x=\pi3) \vee pie(x)\} \wedge \{\neg(x=\pi4) \vee pie(x)\}$
Βήμα 7:
$\neg pie(x) \vee x=\Pi1 \vee x=\Pi2 \vee x=\Pi3 \vee x=\Pi4$
$\neg(x1=\Pi1) \vee pie(x1)$
$\neg(x2=\Pi2) \vee pie(x2)$
$\neg(x3=\Pi3) \vee pie(x3)$
$\neg(x4=\Pi4) \vee pie(x4)$
Σημείωση: η εκφώνηση έχει λάθος, τα π είναι σταθερές, θα έπρεπε να είναι με κεφαλαίο. Τα αλλάζω σε Π

Πρόταση 3: $\forall x\ (pie(x) \Rightarrow \neg(x = TABLE))$
Βήμα 1: $\forall x\ (\neg pie(x) \vee \neg(x = TABLE))$
Βήμα 7: $\neg pie(y) \vee \neg(y = TABLE)$
Σημείωση: η εκφώνηση έχει λάθος, το table είναι σταθερά, θα έπρεπε να είναι με κεφαλαία (τουλάχιστον το πρώτο γράμμα). Το αλλάζω σε TABLE

Πρόταση 4: $\forall x \forall y\ (on(x, y) \Rightarrow \neg(x = y) \wedge pie(x) \wedge (pie(y) \vee y= TABLE))$
έχει δοθεί έτοιμη από την εκφώνηση σε ΣΚΜ:
$\neg on(z1, w1) \vee \neg(z1 = w1)$
$\neg on(z2, w2) \vee pie(z2)$
$\neg on(z3, w3) \vee pie(w3) \vee w3= TABLE$
Σημείωση: η εκφώνηση έχει λάθος, το κόμμα είναι $\vee$

Πρόταση 5: $\forall x\ (pie(x) \Rightarrow \exists y(on(x, y)))$
Βήμα 1: $\forall x\ (\neg pie(x) \vee \exists y(on(x, y)))$
Βήμα 3: $\forall x\ (\neg pie(x) \vee on(x, f(x)))$
Βήμα 7: $\neg pie(u) \vee on(u, f(u))$

Πρόταση 6: $\forall x \forall y \forall z\ (on(x, y) \wedge on(x, z) \Rightarrow y=z)$
Βήμα 1: $\forall x \forall y \forall z\ (\neg(on(x, y) \wedge on(x, z)) \vee y=z)$
Βήμα 2: $\forall x \forall y \forall z\ (\neg on(x, y) \vee \neg on(x, z) \vee y=z)$
Βήμα 7: $\neg on(s, t) \vee \neg on(s, r) \vee t=r$

Πρόταση 7: $\forall x \forall y \forall z\ (on(x, z) \wedge on(y, z) \Rightarrow (x=y \vee z= TABLE))$
Βήμα 1: $\forall x \forall y \forall z\ (\neg(on(x, z) \wedge on(y, z)) \vee (x=y \vee z= TABLE))$
Βήμα 2: $\forall x \forall y \forall z\ (\neg on(x, z) \vee \neg on(y, z) \vee x=y \vee z= TABLE)$
Βήμα 7: $\neg on(p, q) \vee \neg on(m, q) \vee p=m \vee q= TABLE)$

Πρόταση 8: $\forall x\ (clear(x) \Leftrightarrow \neg\exists y\ (on(y, x)))$
Η ισοδυναμία γράφεται ως δυο συνεπαγωγές.
$\forall x\ (clear(x) \Rightarrow \neg\exists y\ (on(y, x))) \wedge (\neg\exists y\ (on(y, x)) \Rightarrow clear(x))$
Βήμα 1: $\forall x\ (\neg clear(x) \vee \neg\exists y\ (on(y, x))) \wedge (\neg(\neg(\exists y\ on(y, x))) \vee clear(x))$
Βήμα 2: $\forall x\ (\neg clear(x) \vee \forall y\ \neg on(y, x)) \wedge (\exists y\ on(y, x) \vee clear(x))$
Βήμα 3: $\forall x\ (\neg clear(x) \vee \forall y\ \neg on(y, x)) \wedge (\ on(g(x), x) \vee clear(x))$
Βήμα 5: $\forall x \forall y\ (\neg clear(x) \vee \neg on(y, x)) \wedge (\ on(g(x), x) \vee clear(x))$
Βήμα 7:
$\neg clear(n1) \vee \neg on(k, n1)$
$on(g(n2), n2) \vee clear(n2)$

Σημείωση: σε κάθε βήμα 7, μετονομάζουμε και τις μεταβλητές ώστε κάθε μεταβλητή να εμφανίζεται μόνο σε μια πρόταση

Άρα συνολικά:
1a. $\neg(\Pi 1 = \Pi 2)$
1b. $\neg(\Pi 1 = \Pi 3)$
1c. $\neg(\Pi 1 = \Pi 4)$
1d. $\neg(\Pi 2 = \Pi 3)$
1e. $\neg(\Pi 2 = \Pi 4)$
1f. $\neg(\Pi 3 = \Pi 4)$
2a. $\neg pie(x) \vee x=\Pi 1 \vee x=\Pi 2 \vee x=\Pi 3 \vee x=\Pi 4$
2b. $\neg(x1=\Pi 1) \vee pie(x1)$
2c. $\neg(x2=\Pi 2) \vee pie(x2)$
2d. $\neg(x3=\Pi 3) \vee pie(x3)$
2e. $\neg(x4=\Pi 4) \vee pie(x4)$
3. $\neg pie(y) \vee \neg(y = TABLE)$
4a. $\neg on(z1, w1) \vee \neg(z1 = w1)$
4b. $\neg on(z2, w2) \vee pie(z2)$
4c. $\neg on(z3, w3) \vee pie(w3) \vee w3= TABLE$
5. $\neg pie(u) \vee on(u, f(u))$
6. $\neg on(s, t) \vee \neg on(s, r) \vee t=r$
7. $\neg on(p, q) \vee \neg on(m, q) \vee p=m \vee q= TABLE)$
8a. $\neg clear(n1) \vee \neg on(k, n1)$
8b. $on(g(n2), n2) \vee clear(n2)$

1.Β. [8 *μονάδες*] Τα αξιώματα της ισότητας για την παραπάνω αναπαράσταση του μικρόκοσμου με τις πίτες φαίνονται παρακάτω, σε ΚΛ και σε Συζευκτική Κανονική Μορφή (ΣΚΜ). Σημειώνεται πως τα αξιώματα ισότητας (12) και (13) αφορούν τα νέα συναρτησιακά σύμβολα που προκύπτουν μέσω Skolemization από την μετατροπή των προτάσεων (1) – (8) σε ΣΚΜ.

Σε ΚΛ:

9. $\forall x(x=x)$
10. $\forall x\forall y\ (x=y \Rightarrow y=x)$
11. $\forall x\forall y\forall z\ (x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z)$

12. $\forall x\forall y\ (x=y \Rightarrow f(x) = f(y))$
13. $\forall x\forall y\ (x=y \Rightarrow g(x) = g(y))$
14. $\forall x\forall y\ (x=y \Rightarrow (pie(x) \Leftrightarrow pie(y)))$
15. $\forall x\forall y\ (x=y \Rightarrow (clear(x) \Leftrightarrow clear(y)))$
16. $\forall x\forall y\ (x_1=y_1 \wedge x_2=y_2 \Rightarrow (on(x_1,x_2) \Leftrightarrow on(y_1,y_2)))$

Σε ΣΚΜ:

9. $\{ x=x \}$
10. $\{ \neg(x=y), y=x \}$
11. $\{ \neg(x=y), \neg(y=z), x=z \}$
12. $\{ \neg(x=y), f(x) = f(y) \}$
13. $\{ \neg(x=y), g(x) = g(y) \}$

14.α $\{ \neg(x=y), \neg pie(x), pie(y) \}$
14.β $\{ \neg(x=y), pie(x), \neg pie(y) \}$
15.α $\{ \neg(x=y), \neg clear(x), clear\ (y) \}$
15.β $\{ \neg(x=y), clear(x), \neg clear\ (y) \}$
16.α $\{ \neg(x_1=y_1), \neg(x_2=y_2), \neg on(x_1,x_2), on(y_1,y_2) \}$
16.β $\{ \neg(x_1=y_1), \neg(x_2=y_2), on(x_1,x_2), \neg on(y_1,y_2) \}$

Να αποδείξετε με την μέθοδο της αναγωγής μέσω αντίκρουσης της άρνησης πως από τις προτάσεις (1) – (16), προκύπτει ταυτολογικά η πρόταση on(π4,π1) $\Rightarrow \neg$on(π4,table).

Απάντηση:
Θέλουμε να αποδείξουμε το on(π4,π1) $\Rightarrow \neg$on(π4,table). Θα υποθέσουμε ότι ισχύει η άρνηση αυτής της πρότασης, δηλαδή $\neg${on(π4,π1) $\Rightarrow \neg$on(π4,table)}. Μετατρέπουμε την πρόταση αυτή σε ΣΚΜ.

Πρόταση 17: $\neg${on(π4,π1) $\Rightarrow \neg$on(π4,table)}
Βήμα 1: $\neg${$\neg$on(π4,π1) $\vee \neg$on(π4,table)}
Βήμα 2: on(π4,π1) $\wedge$ on(π4,table)
Βήμα 7:
on(Π4,Π1)
on(Π4,TABLE)
Σημείωση: η εκφώνηση έχει λάθος, τα π είναι σταθερές, θα έπρεπε να είναι με κεφαλαίο. Τα αλλάζω σε Π. Επίσης μετονομάζω όλες τις μεταβλητές των προτάσεων 9 ως και 16, ώστε κάθε μεταβλητή να εμφανίζεται μόνο σε μια πρόταση

Και την προσθέτουμε στην βάση γνώσης.

Άρα η βάση γνώσης τώρα είναι:

1a. ¬(Π1 = Π2) 1b. ¬(Π1 = Π3) 1c. ¬(Π1 = Π4) 1d. ¬(Π2 = Π3) 1e. ¬(Π2 = Π4) 1f. ¬(Π3 = Π4) 2a. ¬pie(x) ∨ x=Π1 ∨ x=Π2 ∨ x=Π3 ∨ x=Π4 2b. ¬(x1=Π1) ∨ pie(x1) 2c. ¬(x2=Π2) ∨ pie(x2) 2d. ¬(x3=Π3) ∨ pie(x3) 2e. ¬(x4=Π4) ∨ pie(x4) 3. ¬pie(y) ∨ ¬(y = TABLE) 4a. ¬on(z1, w1) ∨ ¬(z1 = w1) 4b. ¬on(z2, w2) ∨ pie(z2) 4c. ¬on(z3, w3) ∨ pie(w3) ∨ w3= TABLE 5. ¬pie(u) ∨ on(u, f(u)) 6. ¬on(s, t) ∨ ¬on(s, r) ∨ t=r 7. ¬on(p, q) ∨ ¬on(m, q) ∨ p=m ∨ q= TABLE 8a. ¬clear(n1) ∨ ¬on(k, n1) 8b. on(g(n2), n2) ∨ clear(n2)	9. x9=x9 10. ¬(x10=y10) ∨ y10=x10 11. ¬(x11=y11) ∨ ¬(y11=z11) ∨ x11=z11 12. ¬(x12=y12) ∨ *f12*(x12) = *f12*(y12) 13. ¬(x13=y13) ∨*g13*(x13) = *g13*(y13) 14a. ¬(x14a=y14a) ∨ ¬pie(x14a) ∨ pie(y14a) 14b. ¬(x14b=y14b) ∨ pie(x14b) ∨ ¬pie(y14b) 15a. ¬(x15a=y15a) ∨ ¬clear(x15a) ∨ clear (y15a) 15b. ¬(x15b=y15b∨ clear(x15b) ∨¬clear (y15b) 16a. ¬(x16a1=y16a1) ∨ ¬(x16a2=y16a2) ∨ ¬on(x16a1,x16a2) ∨ on(y16a1,y16a2) 16b. ¬(x16b1=y16b1) ∨ ¬(x16b2=y16b2) ∨ on(x16b1,x16b2) ∨ ¬on(y16b1,y16b2) 17a. on(Π4,Π1) 17b. on(Π4,TABLE)

Σημείωση: η εκφώνηση έχει λάθος, το κόμμα είναι ∨

Η αναγωγή με αντίκρουση της αντίφασης είναι:
17a και 6: ενοποιητής {s\|Π4, t\|Π1} προκύπτει: 18. ¬on(Π4, r) ∨ Π1=r
18 και 17b: ενοποιητής {r\|TABLE} προκύπτει: 19. Π1=TABLE
19 και 3: ενοποιητής {y\|Π1} προκύπτει: 20. ¬pie(Π1)
20 και 2b: ενοποιητής {x1\|Π1} προκύπτει: 21. ¬(Π1=Π1)
21 και 9: ενοποιητής {x9\|Π1} προκύπτει: {} (κενή πρόταση, άρα άτοπο)

Άρα δεν ισχύει το ¬{on(π4,π1) ⇒ ¬on(π4,table)} που υποθέσαμε.
Άρα ισχύει το αντίθετο, δηλαδή το on(π4,π1) ⇒ ¬on(π4,table).