

 ΑΡΝΟΣ βιβλία με στόχο!

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Τετράδιο Σπουδής α τεύχος

Προετοιμασία για Πανελλήνιες - Πανεπιστήμιο

γ' Λυκείου



АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛМОГОРОВ
1903-1987 ΜΧ

 **ΑΡΝΟΣ**
Online Education

★ **100%** ★
ΕΠΙΤΥΧΙΑ
Μέθοδος
ΑΡΝΟΣ

Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο για Διδασκαλία & Μελέτη

Τετράδιο Σπουδής - Γιατί;

Το Τετράδιο Σπουδής ΑΡΝΟΣ είναι βασισμένο στη Μέθοδο ΑΡΝΟΣ, ένα σύστημα μάθησης με Στόχους – Υλοποίηση – Πιστοποίηση.

Βοηθάει το μαθητή να οικοδομήσει τη σκέψη του βήμα-βήμα, απλά και κατανοητά. Είναι Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο βάσει του οποίου γίνεται η διδασκαλία στο online μάθημα με «φυσικό» τρόπο. Ο δάσκαλος γράφει και υπογραμμίζει παράλληλα με το μαθητή.

Το Τετράδιο Σπουδής αποτελείται από:

- ★ Οπτικοποιημένη Θεωρία με ροή & συνέχεια
- ★ Ασκήσεις για Διδασκαλία και Εξάσκηση
- ★ Συνδυαστικές και Επαναληπτικές Ασκήσεις
- ★ Θέματα Προσομοίωσης Εξετάσεων

Πιστοποίηση Γνώσεων

Σε προγραμματισμένες ημερομηνίες διεξάγονται online ή/και δια ζώσης **Επαναληπτικά Τεστ Αξιολόγησης** στα οποία ο μαθητής πιστοποιεί και επαληθεύει τις γνώσεις του.

Για τους Γονείς

Πώς ο γονέας μπορεί να έχει εικόνα και εποπτεία στην πρόοδο του παιδιού του;

Το Τετράδιο Σπουδής είναι σχεδιασμένο με τέτοιον τρόπο για τη βήμα – βήμα εξάσκηση του μαθητή, μεταβαίνοντας με ασφάλεια από τα πιο απλά στα πιο σύνθετα. Επίσης, είναι ένας φυσικός τρόπος ο Γονέας να ελέγχει την πρόοδο του παιδιού του.

Πώς γίνεται η εποπτεία από το γονέα;

Σε κάθε μάθημα ελέγχει την ορθότητα των λύσεων, την κατανόηση και τη συμμετοχή του παιδιού στα μαθήματα.

Διδασκαλία στον ΑΡΝΟ σημαίνει:

- ★ Απεριόριστη μελέτη με video lessons
- ★ Αυτομάθηση στο App Arnos Learn
- ★ Coaching εξατομικευμένο
- ★ Μοτίβα Μάθησης και Εξάσκησης
- ★ Κάθε Απορία για εμάς είναι Πρόκληση!

★ Μέθοδος ΑΡΝΟΣ

Η **Μέθοδος ΑΡΝΟΣ** οδηγεί κάθε μαθητή, ανεξαρτήτως γνώσεων ή επιπέδου, να μελετά από το επίπεδο όπου αισθάνεται άνετα, ώστε να διαμορφώσει γερές βάσεις για μάθηση.

Live Διδασκαλία Το online μάθημα γίνεται με φυσικό τρόπο, γιατί συνδυάζει την Τεχνολογία, το Πνεύμα, την Οργάνωση και την Εμπειρία.

Τετράδιο Σπουδής Είναι ο οδηγός για τη διδασκαλία του μαθήματος, την εξάσκηση του μαθητή και την πραγματοποίηση της online διδασκαλίας με Λόγο, Εικόνα και Παρατήρηση.

Καθηγητής Είναι ο σκηνοθέτης της διδακτικής πράξης, ο οποίος δρα σε ένα οργανωμένο εκπαιδευτικό οικοσύστημα με Στόχους, Μαθησιακό Πλάνο και Ευθύνη.

«Μέθοδος ΑΡΝΟΣ... το καταστάλαγμα μιας πορείας 35 ετών με εκπαιδευτικές και εκδοτικές επιτυχίες, με ταξίδια πολιτισμού, συμμετοχή σε Διεθνείς Εκθέσεις και αποτυχίες... μα, κυρίως, η παρακαταθήκη του ζευγολάτη πατέρα - Αρνού.»

Γιάννης Π. Κρόκος



Τετράδιο Σπουδής

1^ο Τεύχος

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

Γ' Λυκείου

Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο
για Διδασκαλία και Μελέτη

- Οδηγός για τη Διδασκαλία του Καθηγητή
- Οδηγός για τη Μελέτη του Μαθητή
- Διδασκαλία Online με φυσικό τρόπο
- Τόπος Εποπτείας Προόδου από το Γονέα
- Διδασκαλία με Πιστοποιημένους Καθηγητές ΑΡΝΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2021

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ' Λυκείου

1^ο Τετράδιο Σπουδής

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η ολική, μερική ή περιληπτική αναπαραγωγή και μετάδοση έστω και μιας σελίδας του παρόντος βιβλίου κατά παράφραση ή διασκευή με οποιονδήποτε τρόπο (μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό κ.λπ. – Ν. 2121/93, άρθρο 51).

Η απαγόρευση αυτή ισχύει και για τις δημόσιες υπηρεσίες, βιβλιοθήκες, οργανισμούς κ.λπ. (άρθρο 18). Οι παραβάτες διώκονται (άρθρο 13) και τους επιβάλλονται κατάσχεση, αστικές και ποινικές κυρώσεις σύμφωνα με το νόμο (άρθρο 64-66).

Συντακτική Ομάδα Κέντρου ΑΡΝΟΣ

Διευθυντής σειράς: Ιωάννης Π. Κρόκος
Συνεργάστηκαν: Γεώργιος Καραχάλιας
Βασίλειος Κ. Τσιλιβής

ΑΡΝΟΣ ONLINE EDUCATION

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μέρος Α. Στοιχεία Πιθανοτήτων & Στατιστικής

1^ο Κεφάλαιο: Πιθανότητες

1.1. Πειράματα Τύχης, Δειγματικός Χώρος και Ενδεχόμενα.....	4
1.2. Πιθανότητες: Ορισμοί και Εφαρμογές	21
1.3. Πιθανότητες και Πράξεις με Ενδεχόμενα	39
1.4. Συνδυαστική & Πιθανότητες: Διατάξεις – Μεταθέσεις - Συνδυασμοί.....	58

2^ο Κεφάλαιο: Στατιστική

2.1. Πληθυσμός - Δείγμα - Μεταβλητές	73
2.2. Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων	86
2.3. Μέτρα Θέσης και Μεταβλητότητας, Θηκόγραμμα, Συντελεστής Μεταβλητότητας.....	116
2.4. Κανονική Κατανομή και Εφαρμογές	139
2.5. Πίνακες Συνάφειας και Ραβδογράμματα	159
2.6. Σύγκριση Ποσοτικών Χαρακτηριστικών στις κατηγορίες ενός Ποιοτικού Χαρακτηριστικού	184
2.7. Γραμμική Συσχέτιση Ποσοτικών Μεταβλητών και Διαγράμματα Διασποράς.....	209

Κεφάλαιο 1 : Πιθανότητες

1.1. Πείραμα Τύχης, Δειγματικός Χώρος και Ενδεχόμενα

Διδακτικοί στόχοι

- Τι σημαίνει αιτιοκρατικό πείραμα και τι πειράματος τύχης
- Τι ορίζεται ως δειγματικός χώρος και τι ως ενδεχόμενο
- Πώς αναπαριστούμε ένα ενδεχόμενο

Θεωρία και Μεθοδολογία

➤ Αιτιοκρατικό πείραμα

Είναι το πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών, κάτω από τις οποίες εκτελείται, καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα.

Για παράδειγμα, αν έχουμε ένα δοχείο με αποσταγμένο νερό σε θερμοκρασία 32 βαθμούς Κελσίου και το θερμάνουμε μέχρι η θερμοκρασία του να φτάσει τους 100 βαθμούς Κελσίου, τότε τονερό θα βράσει.

➤ Πείραμα τύχης

Είναι το πείραμα στο οποίο δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνεται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Για παράδειγμα, ο χρόνος ζωής μιας λάμπας ή το πόσα e-mails δέχεται ένας εργαζόμενος, κατά τη διάρκεια της εργάσιμης ημέρας του.

Με τα πειράματα τύχης ασχολείται η Θεωρία Πιθανοτήτων.

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

Κάποια παραδείγματα πειραμάτων τύχης είναι τα εξής: το στρίψιμο ενός κέρματος, η ρίψη ενός ζαριού, το παιχνίδι «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί» ή το τάβλι.

- **Δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις** ενός πειράματος τύχης είναι όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν στο πείραμα .

Για παράδειγμα, κατά τη ρίψη ενός ζαριού, η εμφάνιση του αριθμού «2» είναι ένα δυνατό αποτέλεσμα.

- **Δειγματικός χώρος** ενός πειράματος τύχης είναι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος και συμβολίζεται με Ω .

Αν $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$.

Πιο απλά, ο δειγματικός χώρος στη ρίψη ενός ζαριού είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ο δειγματικός χώρος στη ρίψη ενός κέρματος είναι $\Omega = \{K, \Gamma\}$, όπου:

$K = \text{«κεφαλή»}$ και $\Gamma = \text{«γράμματα»}$.

- **Ενδεχόμενο** ενός πειράματος τύχης είναι το σύνολο που έχει ως στοιχεία τουλάχιστον ένα αποτέλεσμα του πειράματος.

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

Εφαρμογή 1: Ρίχνουμε ένα ζάρι.

Το σύνολο $A = \{ 4, 5 \}$ ονομάζεται ενδεχόμενο, καθώς περιέχει στοιχεία που είναι αποτελέσματα της ρίψης του ζαριού. Μπορείτε να σκεφτείτε και εσείς και άλλα ενδεχόμενα του πειράματος της ρίψης ζαριού;

Απλό ενδεχόμενο

Είναι το ενδεχόμενο περιέχει μόνο ένα στοιχείο.

Σύνθετο ενδεχόμενο

Είναι το ενδεχόμενο που περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία.

Έτσι, το ενδεχόμενο $B = \{ 1 \}$ λέγεται απλό ενδεχόμενο, ενώ το $A = \{ 4, 5 \}$ λέγεται σύνθετο ενδεχόμενο.

Εφαρμογή 2: Δύο παίκτες παίζουν το παιχνίδι «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί».

Ένα δυνατό αποτέλεσμα είναι το (πέτρα, χαρτί), όπου ο πρώτος παίκτης επιλέγει «πέτρα» και ο δευτέρος «χαρτί».

Τότε ο δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{ (\text{πέτρα}, \text{χαρτί}), (\text{χαρτί}, \text{πέτρα}), (\text{πέτρα}, \text{ψαλίδι}), (\text{ψαλίδι}, \text{πέτρα}), (\text{χαρτί}, \text{ψαλίδι}), (\text{ψαλίδι}, \text{χαρτί}) \}$$

Αν το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι το ω , τότε όλα τα ενδεχόμενα που περιέχουν το ω λέμε ότι πραγματοποιούνται, ενώ τα ενδεχόμενα που δεν περιέχουν το ω λέμε ότι δεν πραγματοποιούνται.

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

Εφαρμογή 3: Ρίχνω ένα ζάρι. Κάποια ενδεχόμενα είναι τα παρακάτω A, B και Γ:

A: «Έρχεται άρτιος αριθμός»,

B: «Έρχεται αριθμός μικρότερος του 5»,

Γ: «Έρχεται 1».

Κάθε ενδεχόμενο αντιστοιχεί σε ένα σύνολο στοιχείων του διανυσματικού χώρου:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Τα παραπάνω ενδεχόμενα γράφονται :

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2, 3, 4\} \text{ και } \Gamma = \{1\}.$$

Αν γίνει μία ρίψη του ζαριού και το αποτέλεσμα είναι 3, τότε λέμε ότι το B πραγματοποιείται γιατί περιέχει το 3, ενώ τα A και Γ δεν πραγματοποιούνται, γιατί δεν περιέχουν το 3.

Το 3 είναι ένα ευνοϊκό αποτέλεσμα για το B.

Άλλα ευνοϊκά αποτελέσματα για το B είναι τα 1, 2 και 4.

Αντίστοιχα, ευνοϊκά αποτελέσματα για το A είναι τα 2, 4 και 6, ενώ για το Γ είναι μόνο το 1.

Ένα ενδεχόμενο λέμε ότι **πραγματοποιείται ή συμβαίνει**, όταν το αποτέλεσμα του πειράματος σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο του ενδεχομένου.

Σημείωση :

Βέβαιο ενδεχόμενο

Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο πραγματοποιείται πάντοτε. Γι' αυτό, λέμε ότι το Ω είναι βέβαιο ενδεχόμενο.

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

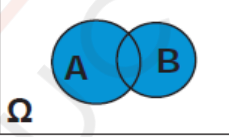
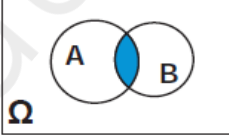

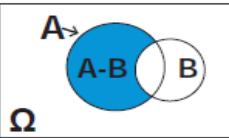
Αδύνατο ενδεχόμενο

Δεχόμαστε, ακόμα, ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο \emptyset , το οποίο δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το \emptyset είναι το αδύνατο ενδεχόμενο.

Το **πλήθος των στοιχείων** ενός ενδεχομένου A θα το συμβολίζουμε με $N(A)$.

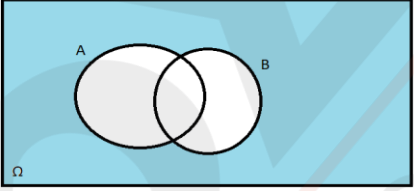
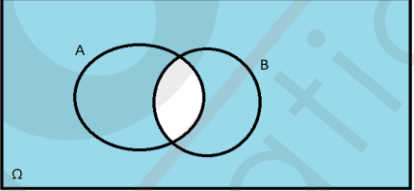
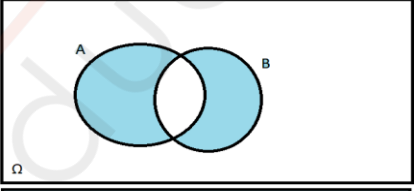
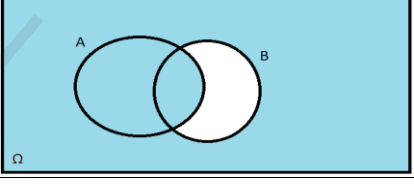
Επομένως, αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $A = \{2, 4, 6\}$ έχουμε $N(A) = 3$, $N(\Omega) = 6$ και $N(\emptyset) = 0$.

Συνοπτικά οι τρόποι αποτύπωσης των ενδεχομένων

Ενδεχόμενο	Πως διαβάζεται	Πότε πραγματοποιείται	Διάγραμμα Venn
$A \cup B$	«Α ένωση Β» Ή «Α ή Β»	Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α και Β	
$A \cap B$	«Α τομή Β» Ή «Α και Β»	Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β	
A'	«όχι Α» Ή «συμπληρωματικό του Α» ή «αντίθετο του Α»	Δεν πραγματοποιείται το Α	
$A - B$	«Διαφορά του Β από το Α»	Πραγματοποιείται το Α και δεν πραγματοποιείται το Β Ή πραγματοποιείται μόνο το Α	

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

Ας δούμε και μερικές ακόμα περιπτώσεις ενδεχομένων:

Ενδεχόμενο	Πότε πραγματοποιείται	Διάγραμμα Venn
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	Τουλάχιστον ένα από τα A και B δεν πραγματοποιείται Ή Πραγματοποιείται ένα το πολύ από τα A και B Ή Δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B	
$(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B)' \cup (B \cap A') = (A \cup B) - (A \cap B)$	Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B	
$A \cup B' = (B - A)'$	Πραγματοποιείται το A ή δεν πραγματοποιείται το B	

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

Αξιοποιώντας το παραπάνω παράδειγμα, όπου $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$ και $\Gamma=\{1\}$, τότε γίνεται αντιληπτό ότι:

$$A \cap B = \{2, 4\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}, A' = \{1, 3, 5\}, A - B = \{6\}.$$

Με απλά λόγια:

- $A \cap B$ = τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων
- $A \cup B$ = κοινά και μη κοινά στοιχεία των δύο συνόλων
- A' = τα υπόλοιπα στοιχεία που υπολείπονται από το A , για να φτιάξει το διανυσματικό χώρο Ω .
- $A - B$ = αφαιρώ από τα στοιχεία του A **μόνο** τα κοινά στοιχεία που έχει με το B .

Έτσι, το $A - B$ γράφεται και ως $A \cap B'$.

Παρατηρώντας τα σύνολα, βλέπουμε ότι το σύνολο A και το σύνολο Γ δεν έχουν κοινά στοιχεία.

Ασυμβίβαστα ή ξένα ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ασυμβίβαστα** ή **ξένα**, όταν $A \cap B = \emptyset$, δηλαδή όταν δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο.

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1 :

Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.

i) Να γραφτεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος.

ii) Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

A_1 : “Ο αριθμός των Κ υπερβαίνει τον αριθμό των Γ”

A_2 : “Ο αριθμός των Κ είναι ακριβώς 2”

A_3 : “Ο αριθμός των Κ είναι τουλάχιστον 2”

A_4 : “Ίδια όψη και στις τρεις ρίψεις”

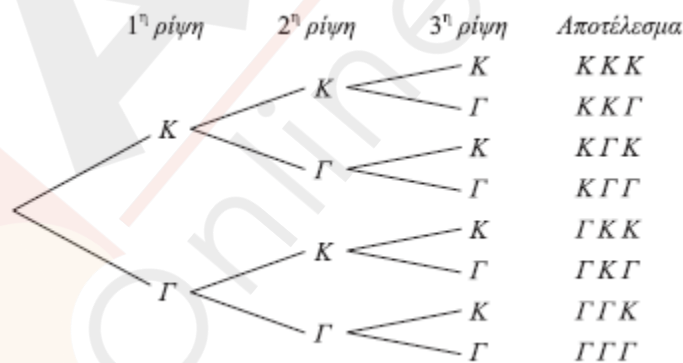
A_5 : “Στην πρώτη ρίψη φέρνουμε Κ”

iii) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα: A_3' , $A_5 \cap A_2$, $A_5 \cup A_4$.

Λύση :

i) Έστω Κ η περίπτωση να έρθει κεφαλή και Γ να έρθει γράμματα.

Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο, θα χρησιμοποιήσουμε ένα δεντροδιάγραμμα:



Άρα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από διατεταγμένες τριάδες με στοιχεία το Κ και το Γ .

Άρα, $\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$.

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

ii)

$$A_1 = \{KKK, KKΓ, ΚΓΚ, \}$$

$$A_2 = \{KKΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ \}$$

$$A_3 = \{KKK, KKΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ \}. \text{ Δηλαδή, } A_3 = A_1$$

$$A_4 = \{KKK, ΓΓΓ \}.$$

$$A_5 = \{KKK, ΚΓΓ, ΚΓΚ, ΚΚΓ \}$$

iii) Το A_3' περιέχει εκείνα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου που δεν περιέχει το A_3 , περιέχει δηλαδή τα στοιχεία στα οποία ο αριθμός των Κ είναι μικρότερος από 2.

$$\text{Επομένως, } A_3' = \{ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ \}.$$

Το ενδεχόμενο $A_5 \cap A_2$ περιέχει τα κοινά στοιχεία των A_5 και A_2 , δηλαδή τα στοιχεία με δύο ακριβώς Κ, εκ των οποίων το ένα στην πρώτη θέση.

$$\text{Επομένως, } A_5 \cap A_2 = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ \}.$$

Το ενδεχόμενο $A_5 \cup A_4$ περιέχει τα στοιχεία που στην πρώτη θέση έχουν Κ ή τα στοιχεία που έχουν ίδιες και τις τρεις ενδείξεις.

$$\text{Επομένως, } A_5 \cup A_4 = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΚΓ, ΚΚΚ, ΓΓΓ \}.$$

Άσκηση 2 :

Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος με δειγματικό χώρο Ω.

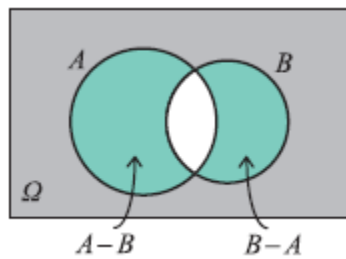
Να παρασταθούν με **διαγράμματα Venn** και να εκφραστούν με τη βοήθεια συνόλων τα ενδεχόμενα που ορίζονται με τις ακόλουθες εκφράσεις:

i) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα Α και Β.

ii) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β.

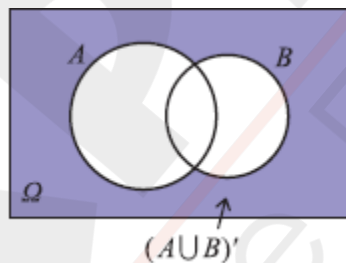
Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

Λύση :



i) Επειδή θέλουμε να πραγματοποιείται μόνο το A ή μόνο το B, γραμμοσκιάζουμε τις επιφάνειες των A και B με εξαίρεση την τομή τους, δηλαδή την κοινή επιφάνειά τους.

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή πραγματοποιείται ένα μόνο από τα $A - B$ και $B - A$. Άρα, το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A - B) \cup (B - A)$ ή αλλιώς το $(A \cap B)' \cup (A' \cap B)$.



ii)

Επειδή θέλουμε να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A και B, γραμμοσκιάζουμε την επιφάνεια του Ω που είναι εκτός της ένωσης των A και B. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι το ζητούμενο σύνολο είναι συμπληρωματικό του $A \cup B$, δηλαδή το $(A \cup B)'$.

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 :

Έστω $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα σύνολα

$A = \{x \in \Omega : x > 2\}$ και $B = \{x \in \Omega : x \text{ είναι περιττός αριθμός}\}$.

Να προσδιοριστούν τα ενδεχόμενα:

- a) Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B
- b) Πραγματοποιείται μόνο το A ή μόνο το B
- c) Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A και B
- d) Δεν πραγματοποιείται το B και πραγματοποιείται το A
- e) Δεν πραγματοποιείται το A και πραγματοποιείται το B
- f) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B
- g) Πραγματοποιείται ένα πολύ από τα A και B
- h) Πραγματοποιείται το A ή δεν πραγματοποιείται το B

Άσκηση 2 :

Επιλέγω τυχαία μια οικογένεια με 2 παιδιά και κατατάσσω τα παιδιά ως προς τη σειρά γέννησης και το φύλο.

- a) Να κάνετε το δενδροδιάγραμμα και να γραφτεί ο δειγματικός χώρος.
- b) Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα:

$A = \text{“Τουλάχιστον 1 είναι αγόρια”}$

$B = \text{“Το 2ο παιδί είναι κορίτσι”}$

$\Gamma = \text{“Το πολύ ένα είναι αγόρι”}$

Να βρείτε τα ενδεχόμενα : $A \cup B, A \cup \Gamma, B \cap \Gamma$.

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

Άσκηση 3 :

Στην τάξη της Γ' Λυκείου κάποιοι μαθητές παίζουν τένις και κάποιοι παίζουν μπάσκετ.

Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Να γράψετε το ενδεχόμενο, ο μαθητής που επιλέχθηκε:

- i. Να παίζει τένις ή μπάσκετ
- ii. Να παίζει τένις αλλά να μην παίζει μπάσκετ
- iii. Να παίζει και τα δύο αθλήματα
- iv. Να παίζει ένα το πολύ από τα δύο αθλήματα
- v. Να παίζει μπάσκετ ή να μην παίζει τένις

Άσκηση 4 :

- i. Τι ονομάζουμε αιτιοκρατικό και τι πείραμα τύχης
- ii. Προσδιορίστε το δειγματικό χώρο των φύλλων ενός χρώματος της τράπουλας
- iii. Πότε ένα ενδεχόμενο ονομάζεται απλό και πότε σύνθετο
- iv. Πότε ένα ενδεχόμενο ονομάζεται βέβαιο και πότε αδύνατο
- v. Πότε δύο ενδεχόμενα ονομάζονται ξένα μεταξύ τους

Άσκηση 5 :

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα:

- i) Ρίχνουμε ένα ζάρι. A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και B είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.
- ii) Επιλέγουμε ένα άτομο. A είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και B το ενδεχόμενο να είναι καθολικός.
- iii) Επιλέγουμε μια γυναίκα. A είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και B το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια.
- iv) Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο. A είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητό του να είναι ευρωπαϊκό και B το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό.

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

Άσκηση 6 :

Αποδώστε σε διάγραμμα Venn , τα εξής σύνολα:

- a) $A \cap B$
- b) $A \cup B$
- c) $A \cup \emptyset$
- d) $A \cap \emptyset$
- e) $A \cap B'$
- f) $A' \cup B$
- g) $A \cap \Omega$

Άσκηση 7 :

Εάν A, B, Γ τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να διατυπώσετε λεκτικά τα παρακάτω ενδεχόμενα:

- a) $A \cup B$
- b) $A \cap B$
- c) $A \cap B'$
- d) $A' \cup B$
- e) A'
- f) $(A \cup B)'$
- g) $(A-B) \cup (B-A)$

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

Άσκηση 8 :

Έστω Ω δ.χ. ενός πειράματος τύχης, A, B δύο ενδεχόμενα και $\omega \in \Omega$. Να κάνετε την αντιστοίχιση.

Στήλη A	Στήλη B
A. Πραγματοποιείται μόνο το B	1. $\omega \in (B-A)$
B. Πραγματοποιείται το A και το B	2. $\omega \in (A \cup B)'$
Γ. Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	3. $\omega \in A'$
Δ. Πραγματοποιείται ένα μόνο από τα A και B	4. $\omega \in (A \cap B)$
Ε. Πραγματοποιείται το A ή το B	5. $\omega \in (A \cup B)$
	6. $\omega \in (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

Άσκηση 9 :

Στο σύλλογο καθηγητών ενός Γυμνασίου κάποιοι καθηγητές είναι μαθηματικοί.

Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή. Να παραστήσετε σε διάγραμμα Venn και να γράψετε το ενδεχόμενο ο καθηγητής που επιλέχθηκε να είναι:

- a) Άνδρας και μαθηματικός
- b) Γυναίκα ή μαθηματικός
- c) Άνδρας και όχι μαθηματικός
- d) Γυναίκα και μαθηματικός

Άσκηση 10 :

Μια μηχανή παράγει ένα συγκεκριμένο είδος κινητού. Ελέγχουμε τα κινητά και τα διακρίνουμε σε K , αν είναι καλά και σε E , αν είναι ελαττωματικά.

Ο έλεγχος σταματάει όταν βρεθούν 2 ελαττωματικά ή 3 καλά.

A) Με χρήση του δενδροδιαγράμματος να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος

B) Να βρείτε τα ενδεχόμενα A και B, όπου:

A : «Έχουμε ένα, το πολύ ελαττωματικό»

B : «Έχουμε δύο, τουλάχιστον καλά»

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

Ασκήσεις για Μελέτη

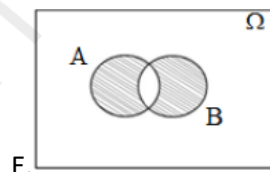
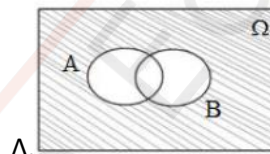
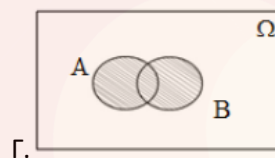
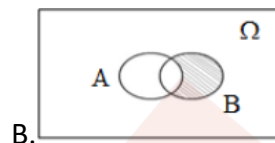
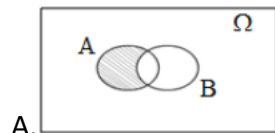
Άσκηση 1 :

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

- i. Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων σε ένα πείραμα τύχης λέγεται (.....) (.....) του πειράματος τύχης.
- ii. Ένα ενδεχόμενο λέγεται (...) όταν έχει περισσότερα από ένα στοιχεία.
- iii. Ο δειγματικός χώρος Ω λέγεται (...) ενδεχόμενο.
- iv. Το κενό σύνολο λέγεται (...) ενδεχόμενο.
- v. Αν η τομή δύο συνόλων ισούται με το κενό σύνολο, τότε τα ενδεχόμενα λέγονται (...).

Άσκηση 2 :

Διατυπώστε με τη μαθηματική μορφή τα σύνολα των παρακάτω διαγραμμάτων Venn:



Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

Άσκηση 3 :

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Να αναγράψετε τα εξής ενδεχόμενα:

- Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A .
- Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο B .
- Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα ενδεχόμενα A και B .
- Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B .

Άσκηση 4 :

Σε μια πόλη κάποιοι κάτοικοι δεν έχουν αυτοκίνητο, κάποιοι δεν έχουν μηχανάκι και κάποιοι έχουν μόνο αυτοκίνητο. Επιλέγουμε τυχαία ένα κάτοικο. Να γράψετε τα ενδεχόμενα:

- Να έχει αυτοκίνητο και μηχανάκι.
- Να έχει αυτοκίνητο ή μηχανάκι.
- Να μην έχει ούτε αυτοκίνητο ούτε μηχανάκι.
- Να έχει μόνο μηχανάκι.
- Να έχει ή αυτοκίνητο ή μηχανάκι.

Άσκηση 5 :

Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα και στοιχεία του είναι οι θετικοί διαιρέτες του 48. Το ενδεχόμενο A του δειγματικού χώρου Ω αποτελείται από στοιχεία που διαιρούνται με το 4, ενώ το ενδεχόμενο B του $\delta.χ.$ Ω αποτελείται από στοιχεία μεγαλύτερα του 6, που διαιρούνται ταυτόχρονα από τους αριθμούς 2 και 3.

Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους το $\delta.χ.$ Ω καθώς επίσης και τα ενδεχόμενα A και B .

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

Άσκηση 6 :

Έστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω . Να γράψετε το ενδεχόμενο A ως ένωση τριών ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων.

Άσκηση 7 :

Δύο παίκτες θα παίξουν σκάκι και συμφωνούν νικητής να είναι εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Αν α είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης ένα παιχνίδι και β είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ένα παιχνίδι, να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!



Αξίες για μια ζωή!

- ✓ Εξυπνάδα
- ✓ Κριτική Σκέψη
- ✓ Αυτοπεποίθηση



Βρες τον Καθηγητή σου! στο arnos.gr

Ο Καθηγητής - Δάσκαλος arnos.gr:

- ★ **Διδάσκει** μεθοδικά και οργανωμένα με το Τετράδιο Σπουδής.
- ★ **Καθοδηγεί** το Μαθητή να μαθαίνει βήμα - βήμα.
- ★ Οδηγεί στην **Αυτομάθηση**.
- ★ **Υλοποιεί** τους στόχους του μαθήματος.
- ★ **Πιστοποιεί** με διαγωνίσματα την πρόοδο του Μαθητή.

Γιατί επιλέγω Τετράδιο Σπουδής;

- ★ Είναι απαραίτητο διδακτικό εργαλείο βασισμένο στους στόχους του μαθήματος και τον τρόπο Υλοποίησής του.
- ★ Σε αυτό βρίσκεται το υλικό Διδασκαλίας για τον Καθηγητή και Μελέτης για το Μαθητή.
- ★ Το Τετράδιο Σπουδής σε συνδυασμό με το course οδηγούν το **Μαθητή** στην **Αυτομάθηση**.
- ★ Είναι το Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο πραγματοποίησης της **online διδασκαλίας με φυσικό τρόπο**.
- ★ Με αυτό **ενημερώνονται** άμεσα **οι γονείς** και **ελέγχουν την πρόοδο** του παιδιού τους.

Τετράδια Σπουδής για:

Λύκειο

Μαθηματικά



Αρχαία



Γλωσσα



Χημεία



16-18
ετών

