# ΦΥΕ 14

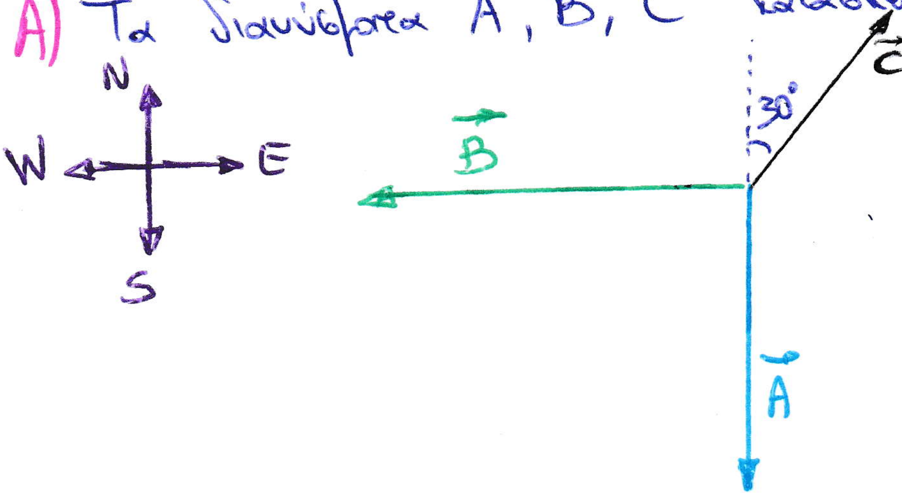
## 1η Εργασία 2021-2022

**Σύνταξη – επιμέλεια:**

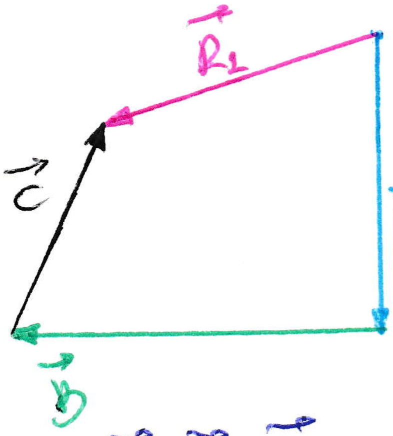
**Παναγιώτης Φ. Μοίρας**

# ΘΕΜΑ 1

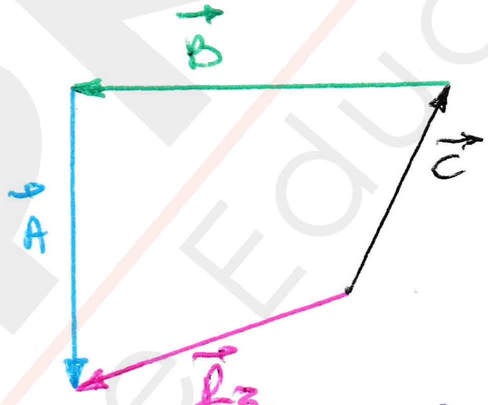
A) Τα διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ κατασκευάζονται ως εξής:



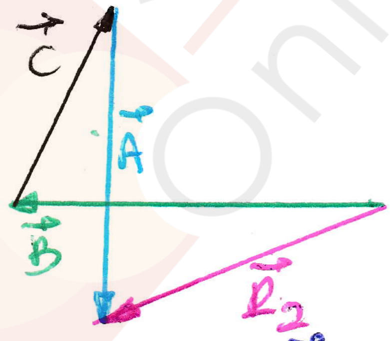

Συνεπώς το διάγραμμα των αθροισμάτων $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3$ είναι:




$\vec{R}_1 = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$




$\vec{R}_3 = \vec{C} + \vec{B} + \vec{A}$




$\vec{R}_2 = \vec{B} + \vec{C} + \vec{A}$

Αν θεωρήσουμε κοινή αρχή για τα τρία αυτά διανυσματικά αθροίσματα παρατηρούμε ότι καταλήγουν στο ίδιο σημείο του επιπέδου.
Πράγματι θεωρώντας το επίπεδο ως xy τα τρία διανύσματα

γράφονται αλγεβρικά ως:

$\vec{A} = 200(-\vec{j})$, $\vec{B} = 250(-\vec{i})$ και $\vec{C} = 150\cos30^\circ\,\vec{i} + 150\sin30^\circ\,\vec{j} \rightarrow$ ($\cos30^\circ = \sqrt{3}/2$, $\sin30^\circ = 1/2$)

$$\rightarrow \vec{C} = 75\sqrt{3}\,\vec{i} + 75\vec{j} = 130\vec{i} + 75\vec{j}$$

Άρα τα αθροίσματα είναι ίσα:

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_2 = \vec{R}_3 = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 200(-\vec{j}) + 250(-\vec{i}) + 130\vec{i} + 75\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{R} = -120\vec{i} - 125\vec{j}.$$

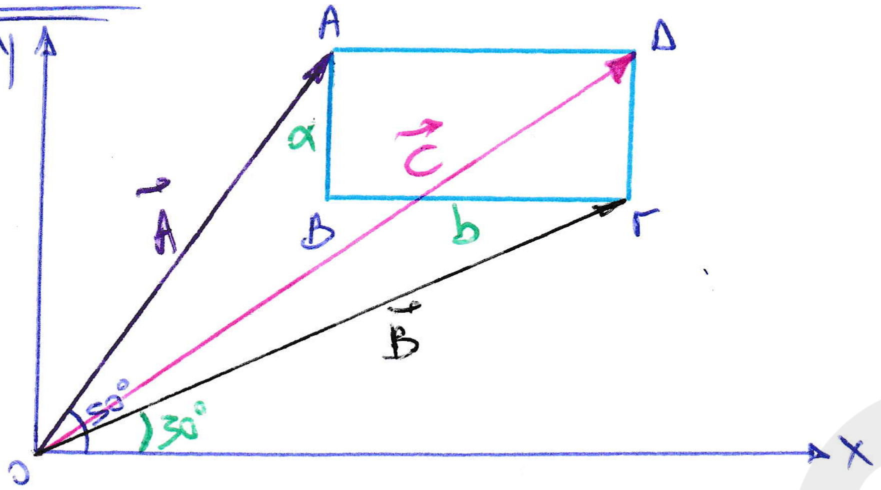
B) Είναι:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(4\vec{i} + 3\vec{j} - 2t\vec{k}) = -2\vec{k}$$

Η παράγωγος αυτή περιγράφει το διάνυσμα της ταχύτητας του αντικειμένου.

## ΘΕΜΑ 2

A)




α) Τα διανύσματα $\vec{A}$, $\vec{B}$ σε αλγεβρική μορφή είναι:

$$\vec{A} = 10m\,\overset{0,642}{\cancel{\cos 50^\circ}}\,\vec{i} + 10m\,\overset{0,766}{\cancel{\sin 50^\circ}}\,\vec{j} \rightarrow \vec{A} = 6{,}42\vec{i} + 7{,}66\vec{j}\ (m) \quad (1)$$

$$\vec{B} = 12m\,\overset{0,866}{\cancel{\cos 30^\circ}}\,\vec{i} + 12m\,\overset{0,5}{\cancel{\sin 30^\circ}}\,\vec{j} \rightarrow \vec{B} = 10{,}4\vec{i} + 6\vec{j}\ (m) \quad (2)$$

Σύμφωνα με τη διανυσματική άθροιση από το σχήμα ισχύει:

$$\vec{A} + \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{B} \rightarrow \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{B} - \vec{A} \xrightarrow{(1,2)}$$

$$\rightarrow \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = 10{,}4\vec{i} + 6\vec{j} - 6{,}42\vec{i} - 7{,}66\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = 3{,}98\vec{i} - 1{,}66\vec{j} \quad (3)$$

Έστω α, b οι πλευρές του παραλληλογράμμου οπότε:

$$\vec{AB} = -\alpha\vec{j} \quad \text{και} \quad \vec{B\Gamma} = b\vec{i} \quad (4)$$

Συνεπώς η (3) λόγω των (4) δίνει:

$$-\alpha\vec{j} + b\vec{i} = 3{,}98\vec{i} - 1{,}66\vec{j} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1{,}66m \\ b = 3{,}98m \end{cases} \quad (5)$$

Άρα η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι:

$$\Pi = 2\alpha + 2b = 2(\alpha + b) \overset{(5)}{=} 2(1,66 + 3,98)\,m = 2 \cdot 5,64\,m \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\Pi = 11,28\,m}$$

β/ Το διάνυσμα θέσης της πάνω δεξιάς κορυφής Δ είναι:

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{B} + \alpha\vec{j} \overset{(2,5)}{=} 10,4\vec{i} + 6\vec{j} + 1,66\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{C} = 10,4\vec{i} + 7,66\vec{j}}$$

το οποίο έχει μέτρο:

$$|\vec{C}| = \sqrt{10,4^2 + 7,66^2} = \sqrt{108,16 + 58,68} = \sqrt{166,84} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{|\vec{C}| = 12,92\,m}$$

και διεύθυνση με τον άξονα x:

$$\tan\theta = \frac{7,66}{10,4} = 0,736 \rightarrow \theta = \tan^{-1}(0,736) \rightarrow \boxed{\theta = 36,35^\circ}$$

**Β)** **α)** Το διάνυσμα $\vec{A}$ γράφεται σε αλγεβρική μορφή ως:

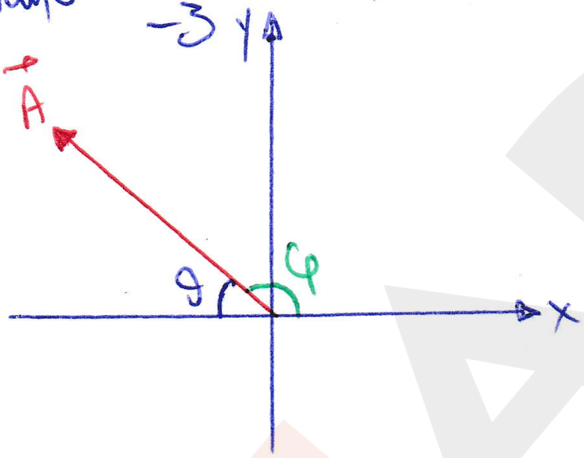
$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} \rightarrow \boxed{\vec{A} = -3\vec{i} + 2\vec{j} \ (m)}$$

**β)** Το μέτρο του διανύσματος $\vec{A}$ είναι:

$$|\vec{A}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \rightarrow \boxed{|\vec{A}| = 3,6\,m}$$

και η διεύθυνση του $\vec{A}$ με τον άξονα x είναι:

$$\tan\theta = \frac{2}{-3} = -0,667 \rightarrow \theta = \tan^{-1}(-0,667) \rightarrow \boxed{\theta = -33,7^\circ}$$




Δηλαδή το $\vec{A}$ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο και σχηματίζει με τη θετική φορά του άξονα x γωνία:

$$\varphi = 180^\circ - \theta = 180^\circ - 33,7^\circ \rightarrow \boxed{\varphi = 146,3^\circ}$$

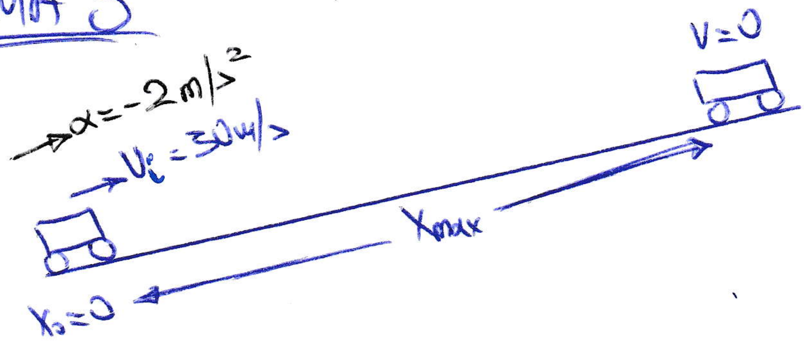
**γ)** Το διανυσματικό άθροισμα του $\vec{A}$ με ένα διάνυσμα $\vec{B}$ για να δίνει αποτέλεσμα $-4\vec{j}$ πρέπει:

$$\vec{A} + \vec{B} = -4\vec{j} \rightarrow -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{B} = -4\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{B} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{j} \rightarrow \boxed{\vec{B} = 3\vec{i} - 6\vec{j}}$$

# ΘΕΜΑ 3

A)




α) Επειδή η επιτάχυνση του αυτοκινήτου είναι σταθερή και αρνητική εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με εξισώσεις κίνησης:

$$v(t)=v_i+\alpha t \rightarrow \boxed{v(t)=30-2t \ (m/s)} \quad (1)$$

και $$x(t)=x_0+v_i t+\frac{1}{2}\alpha t^2=0+30t+\frac{1}{2}(-2)t^2 \rightarrow \boxed{x(t)=30t-t^2 \ (m)} \quad (2)$$

β) Η μέγιστη απόσταση που θα φτάσει το αυτοκίνητο πριν σταματήσει στιγμιαία είναι:

Για $v=0$ η (1) δίνει: $0=30-2t \rightarrow 2t=30 \rightarrow$
$\rightarrow \boxed{t=15s}$ (ολικός χρόνος κίνησης)

Άρα η (2) δίνει:

$$x_{max}=x(t=15s)=30\cdot 15-15^2=450-225 \rightarrow$$
$$\rightarrow \boxed{x_{max}=225m}$$

B)

α) Επειδή ο αθλητής κατά την κατάδυση πραγματοποιεί ελεύθερη πτώση χωρίς αρχική ταχύτητα ($\upsilon_0 = 0$) από ύψος $h = 23m$ με σταθερή βαρυτική επιτάχυνση $g = 9{,}81 m/s^2$ η εξίσωση κίνησής του είναι:

$$h = \cancel{\upsilon_0}^{\,0} t + \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow h = \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 23m}{9{,}81 m/s^2}} = \sqrt{4{,}689 s^2} \rightarrow \boxed{t = 2{,}16 s}$$

β) Για να ακούσουν οι θεατές στη γέφυρα τον ήχο της βουτιάς θα πρέπει επιπλέον ο ήχος να διανύσει την απόσταση των 23m όταν ο αθλητής θα πέσει στο νερό.

Επειδή η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι σταθερή και ίση με 340 m/s ισχύει:

$$h = \upsilon_{\eta\chi} \cdot t' \rightarrow t' = \frac{h}{\upsilon_{\eta\chi}} = \frac{23\cancel{m}}{340 \cancel{m}/s} \rightarrow t' = 0{,}067 s$$

Άρα ο ολικός χρόνος απ' τη στιγμή της κατάδυσης που οι θεατές θα ακούσουν τον ήχο της βουτιάς είναι:

$$t_{ολ} = t + t' = 2{,}16 s + 0{,}067 s \rightarrow \boxed{t_{ολ} = 2{,}227 s}$$

## ΘΕΜΑ 4.

Από το δοθέν διάγραμμα $v_x - t$ παρατηρείται ότι στο χρονικό διάστημα $0<t<3s$ το κινητό εκτελεί ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{8m/s}{3s} \rightarrow \alpha = 2{,}67\, m/s^2$ και η θέση του μεταβάλλεται χρονικά ως:

$$x = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\frac{m}{s^2}\cdot t^2 \rightarrow x = \frac{4}{3}t^2$$

Δηλαδή για $t=0$ είναι $v_x=0$ και $x=0$, ενώ για $t=3s$ είναι

$$x(t=3s) = \frac{4}{\cancel{3}}\cdot \cancel{3}^2 = 12m$$

Στο χρονικό διάστημα $3s<t<5s$ το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα $v_x = 8m/s$ και η θέση του μεταβάλλεται χρονικά ως: $x = x(t=3s) + v_x(t-3) \rightarrow x = 12 + 8(t-3)$

Δηλαδή για $t=5s$ είναι: $x(t=5s) = 12 + 8\cdot 2 = 28m$

Στο χρονικό διάστημα $5s<t<9s$ το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση $\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(0-8)m/s}{(7-5)s} =$

$= -\frac{8}{2}\, m/s^2 \rightarrow \alpha = -4m/s^2$ μέχρι να σταματήσει $v(t=7s)=0$.

και η θέση του μεταβάλλεται χρονικά ως:

$$x = x(t=5s) + v(t=5s)(t-5) + \frac{1}{2}\alpha(t-5)^2 = 28 + 8\cdot(t-5) + \frac{1}{2}(-4)(t-5)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 28 + 8(t-5) - 2(t-5)^2 \quad (1)$$

Δηλαδή για $t=7s$ είναι: $x(t=7s) = 28 + 8\cdot 2 - 2\cdot 2^2 = 28 + 16 - 8 \rightarrow$

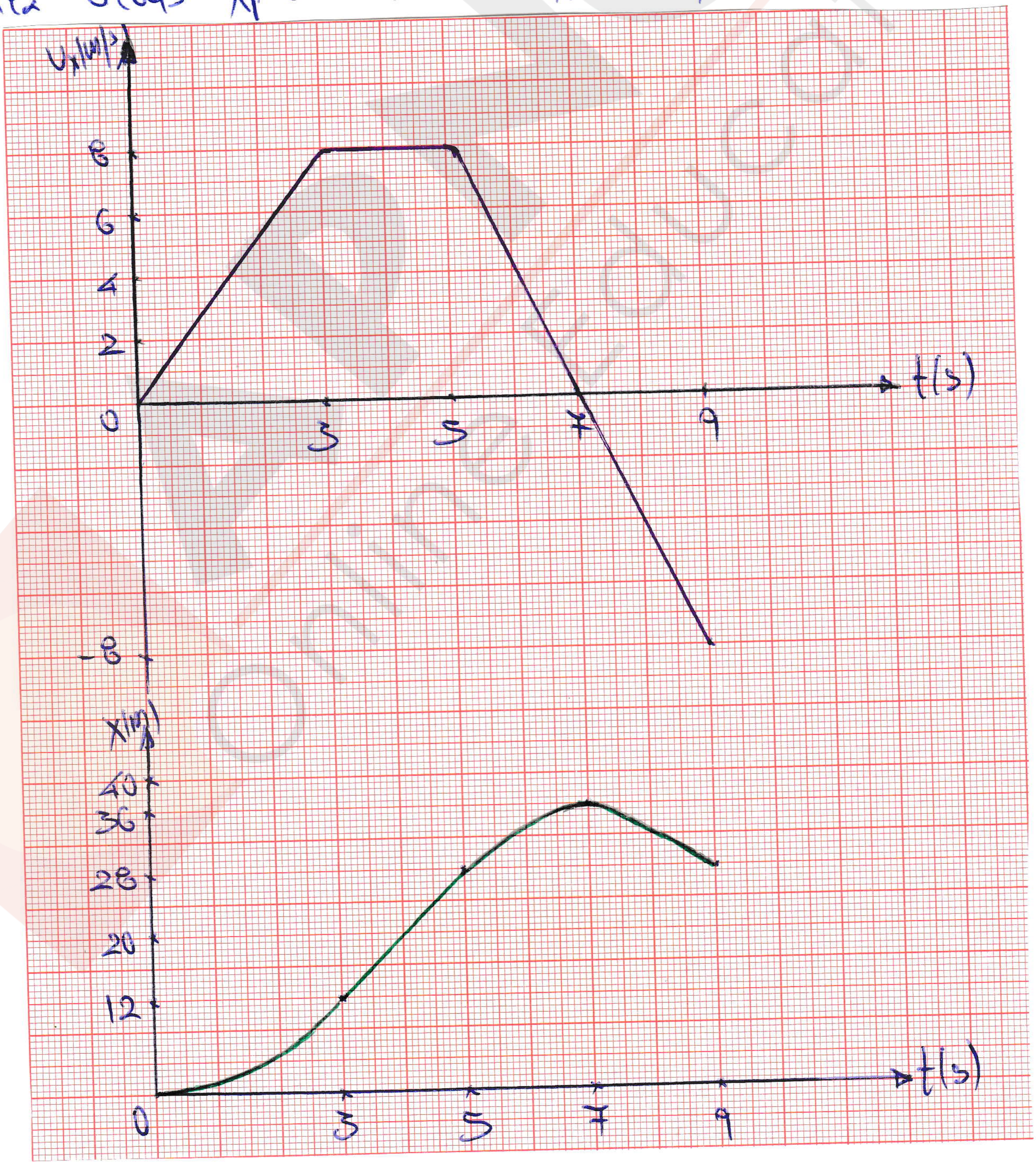
$\rightarrow x(t=7s)=36m$

ενώ για $t=9s$ είναι: $x(t=9s)=28+8\cdot4-2\cdot4^2=28+32-32\rightarrow$

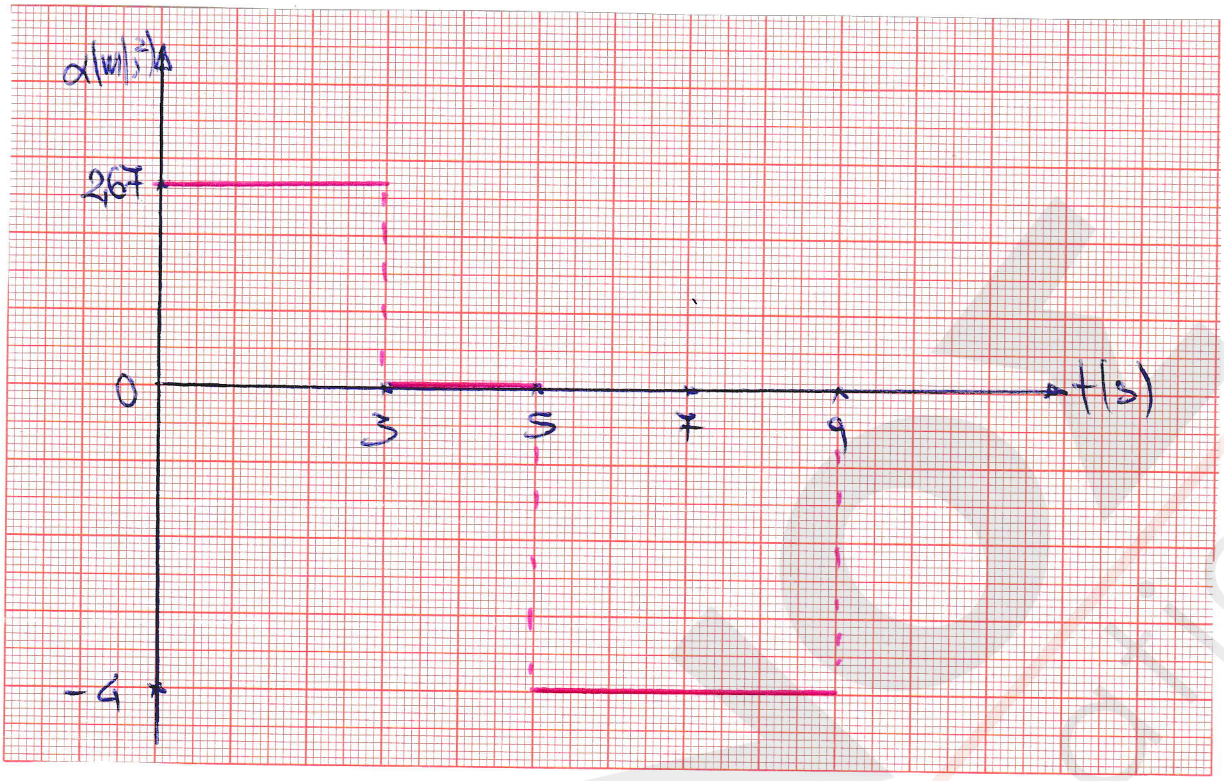
$\rightarrow x(t=9s)=28m.$

Παρατηρείται ότι για $5s<t<7s$ το σώμα κινείται επιβραδυνόμενο ομαλά μέχρι να σταματήσει στιγμιαία τη χρονική στιγμή $t=7s$ και στη συνέχεια θα κινηθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση. Τα γραφήματα θέσης - χρόνου και επιτάχυνσης χρόνου φαίνονται ακολούθως:

α)



β)




γ) Η επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t=6s είναι $\boxed{\alpha=-4m/s^2}$

δ) Σύμφωνα με την (Κ) για t=6s η θέση του σώματος είναι:

$x(t=6s)=28+8(6-5)-2(6-5)^2=28+8-2 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{x(t=6s)=34m}$

ε) Η τελική θέση του ποδηλάτου τη χρονική στιγμή t=9s όπως έχει υπολογιστεί είναι: $\boxed{x(t=9s)=28m}$

στ) Η κλίση κάθε σημείου του γραφήματος $u_x-t$ παριστάνει την επιτάχυνση του κινητού στο σημείο αυτό. Τις χρονικές στιγμές t=3s και t=5s το γράφημα αλλάζει κλίση κάνοντας καμπύλη κι όχι γωνίες για μια ομαλή (κι όχι απότομη) μετάβαση της επιτάχυνσης σε μηδενική τιμή στο διάστημα 3s<t<5s.

## ΘΕΜΑ 5

α) Ο βράχος εκτελεί πλάγια βολή με αρχική ταχύτητα $u_0 = 25m/s$ υπό γωνία βολής $\varphi = 35^\circ$ και οι εξισώσεις κίνησής του είναι:

$$u_x = u_0 \cos\varphi \quad (1) \qquad u_y = u_0 \sin\varphi - gt \quad (2)$$

$$x = u_0 \cos\varphi \, t \quad (3) \qquad y = u_0 \sin\varphi \, t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (4)$$

Όταν ο βράχος χτυπά την πλευρά του ηφαιστείου σε υψόμετρο 20m χαμηλότερα απ' το σημείο εκτόξευσής του είναι $y = -20m$, αφού έχουμε θεωρήσει ως αρχή των αξόνων το σημείο εκτόξευσης. Επομένως η (4) δίνει το χρόνο κίνησης του βράχου ως:

$$-20 = 25 \cdot \overset{0,573}{\sin 35^\circ} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 t^2 \rightarrow -20 = 14,3t - 4,9t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4,9t^2 - 14,3t - 20 = 0$$

Δηλαδή: $t = \dfrac{14,3 \pm \sqrt{14,3^2 - 4 \cdot 4,9 \cdot (-20)}}{2 \cdot 4,9} = \dfrac{14,3 \pm \sqrt{596,49}}{9,8} = \dfrac{14,3 \pm 24,42}{9,8} \rightarrow$

$$\rightarrow t = \frac{38,72}{9,8} \rightarrow \boxed{t = 3,95s}$$

$$t = \frac{-10,12}{9,8} \rightarrow t = -1,03s < 0 \text{ απορρίπτεται.}$$

β) Οι συνιστώσες της ταχύτητας του βράχου κατά την πρόσκρουση δηλαδή για $t = 3,95s$ σύμφωνα με τις (1), (2) είναι:

$$v_x = 25 \cdot \cos\overset{0{,}82}{\cancel{35^\circ}} \rightarrow v_x = 20{,}5\ m/s$$

και $v_y = 25 \sin\overset{0{,}573}{\cancel{35^\circ}} - 9{,}8 \cdot 3{,}95 = 14{,}3 - 38{,}71 \rightarrow$

$$\rightarrow v_y = -24{,}4\ m/s.$$

Άρα το μέτρο της ταχύτητας του βράχου στο σημείο πρόσκρουσης είναι:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{20{,}5^2 + (-24{,}4)^2} = \sqrt{420{,}25 + 595{,}36} =$$

$$= \sqrt{1015{,}61} \rightarrow \boxed{v = 31{,}87\ m/s}$$

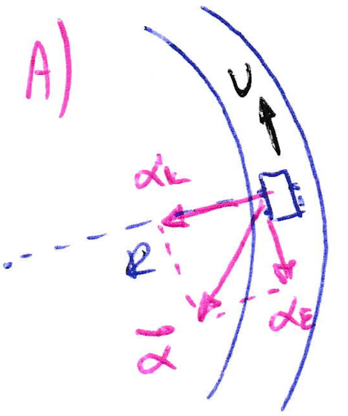
και η κατεύθυνσή της με τον άξονα x είναι:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-24{,}4}{20{,}5} \rightarrow \tan\theta = -1{,}19 \rightarrow \theta = \tan^{-1}(-1{,}19) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\theta = -50^\circ}$$

# ΘΕΜΑ 6

A)




Καθώς το αυτοκίνητο εισέρχεται στην κυκλική στροφή κι ο οδηγός πατάει το φρένο, η επιτάχυνση θα έχει την κατεύθυνση του σχήματος έτσι ώστε η επιτρόχιος επιτάχυνση να είναι αντίθετη της ταχύτητας και να περιγράφει την μείωση του μέτρου της ταχύτητας.

Επειδή η ταχύτητα του αυτοκινήτου μειώνεται με ρυθμό $9\,km/h = \dfrac{9\cdot 1000m}{3600s} = 2{,}5\,m/s$ κάθε δευτερόλεπτο η επιτρόχιος επιτάχυνση είναι:

$$\alpha_\varepsilon = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{-2{,}5\,m/s}{1\,s} \rightarrow \alpha_\varepsilon = -2{,}5\,m/s^2 = \text{σταθερή} \quad (1)$$

Επίσης όταν η ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι $\upsilon = 60\,\dfrac{km}{h} = \dfrac{60\cdot 1000m}{3600s} = 16{,}67\,m/s$ η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι:

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(16{,}67\,m/s)^2}{150\,m} = \frac{277{,}78}{150}\,m/s^2 \rightarrow \alpha_\kappa = 1{,}85\,m/s^2 \quad (2)$$

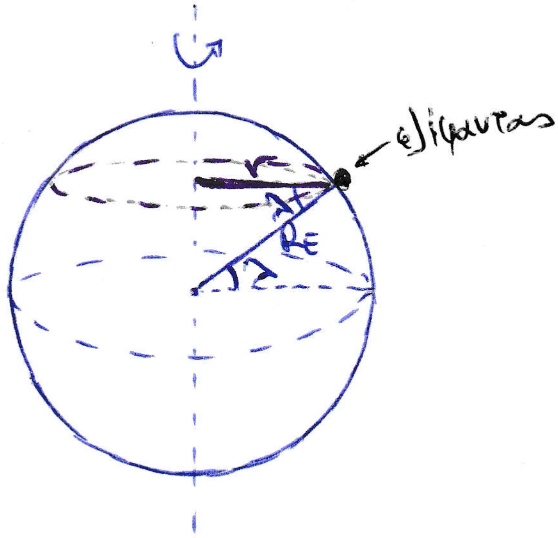
Άρα το μέτρο της ολικής επιτάχυνσης τότε είναι:

$$\alpha = \sqrt{\alpha_\varepsilon^2 + \alpha_\kappa^2} = \sqrt{(-2{,}5)^2 + 1{,}85^2} = \sqrt{6{,}25 + 3{,}42} = \sqrt{9{,}67} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha = 3{,}11\,m/s^2}$$

B)






α) Ο ελέφαντας που βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης σε γεωγραφικό πλάτος λ, λόγω της περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας $r = R_E \cos\lambda$ (1) με ταχύτητα:

$v = \omega r$ , όπου $\omega = \frac{2\pi}{T}$ οπότε: $v = \frac{2\pi r}{T}$ (2)

με $T$ την περίοδο περιστροφής της Γης.

Άρα η κεντρομόλος επιτάχυνση του ελέφαντα είναι:

$$\alpha_\kappa = \frac{v^2}{r} \overset{(2)}{=} \frac{4\pi^2 r^{\cancel{2}}}{T^2 \cancel{r}} \xrightarrow{(1)} \boxed{\alpha_\kappa = \frac{4\pi^2 R_E \cos\lambda}{T^2}} \quad (3)$$

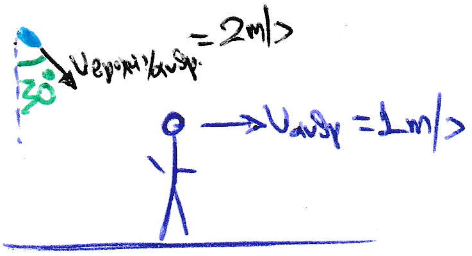
β) Για $\lambda = 40^\circ$, $R_E = 6378km = 6378 \cdot 10^3 m$ και $T = 24h = 24 \cdot 3600s = 86400s$ η (3) γίνει:

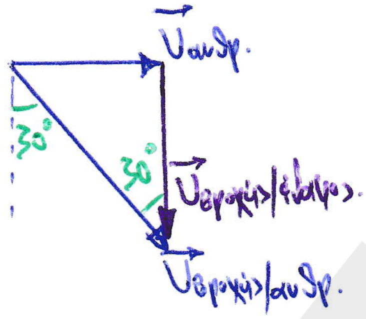
$$\alpha_\kappa = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 6378 \cdot 10^3 m \, \cancelto{0{,}766}{\cos 40^\circ}}{(86400s)^2} = \frac{192678{,}2 \cdot 10^3}{74{,}65 \cdot 10^8} m/s^2 =$$

$$= 2581 \cdot 10^{-5} m/s^2 \longrightarrow \alpha_\kappa = 0{,}02581 \, m/s^2$$

Δηλαδή: $\frac{\alpha_\kappa}{g} = \frac{0{,}02581 m/s^2}{9{,}8 m/s^2} = 0{,}0026 \longrightarrow \boxed{\alpha_\kappa = 0{,}0026g = 0{,}26\% g}$

γ)




Σύμφωνα με τη διανυσματική άθροιση των ταχυτήτων αυτών ισχύει:

$$\vec{υ}_{βροχής/ανθρ.} = \vec{υ}_{ανθρ.} + \vec{υ}_{βροχής/έδαφος}$$

οπότε για τα μέτρα τους ισχύει:

$$υ^2_{βροχής/ανθρ.} = υ^2_{ανθρ.} + υ^2_{βροχής/έδαφος} \rightarrow 2^2 = 1^2 + υ^2_{βροχής/έδαφος} \rightarrow$$

$$\rightarrow υ^2_{βροχής/έδαφος} = 3\, m^2/s^2 \rightarrow \boxed{υ_{βροχής/έδαφος} = \sqrt{3}\, m/s}$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να την προσδιορίσουμε τριγωνομετρικά καθώς απ' το σχήμα προκύπτει:

$$\cos 30° = \frac{υ_{βροχής/έδαφος}}{υ_{βροχής/ανθρ.}} \rightarrow υ_{βροχής/έδαφος} = υ_{βροχής/ανθρ.} \cdot \cos 30° =$$

$$= 2\frac{m}{s} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{υ_{βροχής/έδαφος} = \sqrt{3}\, m/s}$$

## ΘΕΜΑ 7.



Το μέτρο της ολικής δύναμης που ασκούν τα δυο ρυμουλκά στη φορτηγίδα είναι: $F_{app} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(2{,}7\cdot10^5 N)^2 + (3{,}6\cdot10^5 N)^2} =$

$= \sqrt{7{,}29 + 12{,}96}\cdot10^5 N = \sqrt{20{,}25}\cdot10^5 N \rightarrow$

$\rightarrow F_{app} = 4{,}5\cdot10^5 N$ !!!

και η κατεύθυνσή της είναι:

$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{3{,}6\cdot\cancel{10^5 N}}{2{,}7\cdot\cancel{10^5 N}} = 1{,}33 \rightarrow \theta = \tan^{-1}(1{,}33) \rightarrow \theta = 53{,}1^\circ$

Δηλαδή η ολική εφαρμοζόμενη δύναμη έχει την κατεύθυνση της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$.

Αν $F_D$ είναι η δύναμη έλξης του νερού στη φορτηγίδα που αντιστέκεται στην κίνησή της θα πρέπει να είναι αντίθετη της ολικής εφαρμοζόμενης δύναμης $F_{app}$ και ο $2^{ος}$ νόμος Newton δίνει:

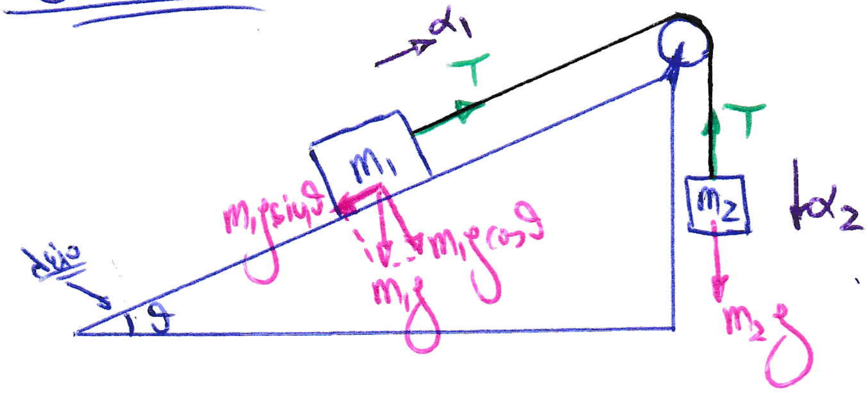
$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \rightarrow F_{app} - F_D = m\alpha \rightarrow F_D = F_{app} - m\alpha$ !!!

$= 4{,}5\cdot10^5 N - 5\cdot10^6 kg\cdot7{,}5\cdot10^{-2} m/s^2 =$

$= 4{,}5\cdot10^5 N - 3{,}75\cdot10^5 N \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{F_D = 0{,}75\cdot10^5 N = 7{,}5\cdot10^4 N}$

# ΘΕΜΑ 8




α) Θεωρούμε ότι τα σώματα $m_1, m_2$ κινούνται με επιταχύνσεις $\alpha_1, \alpha_2$ με τη φορά του σχήματος.

Επειδή το νήμα που συνδέει τα σώματα είναι μη εκτατό τα δυο σώματα σε ίσους χρόνους διανύουν ίσα διαστήματα οπότε έχουν κοινή ταχύτητα και επιτάχυνση. Δηλαδή:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \qquad (1)$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα φαίνονται στο σχήμα οπότε ο $2^{ος}$ νόμος του Newton για κάθε σώμα ξεχωριστά δίνει:

$$m_1: \ \Sigma\vec{F}_x = m_1\vec{\alpha}_1 \xrightarrow{(1)} T - m_1 g\,\sin\theta = m_1\alpha \qquad (2)$$

$$m_2: \ \Sigma\vec{F}_y = m_2\vec{\alpha}_2 \xrightarrow{(1)} m_2 g - T = m_2\alpha \qquad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει:

$$\cancel{T} - m_1 g\,\sin\theta + m_2 g - \cancel{T} = m_1\alpha + m_2\alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow m_2 g - m_1 g\,\sin\theta = (m_1+m_2)\alpha \rightarrow \alpha = \frac{(m_2 - m_1\sin\theta)g}{m_1+m_2} \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές $m_1 = 3{,}7\,kg$, $m_2 = 2{,}3\,kg$, $\theta = 30^\circ$ και $g = 9{,}8\,m/s^2$ η (4) δίνει:

$$\alpha = \frac{(2{,}3 - 3{,}7 \cdot \cancel{\sin 30^\circ}^{\,0{,}5}) \cdot 9{,}8}{3{,}7 + 2{,}3}\,m/s^2 = \frac{4{,}41}{6}\,m/s^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha = 0{,}735\,m/s^2}$$

β) Επειδή η τιμή της επιτάχυνσης των σωμάτων προέκυψε θετική σημαίνει ότι η φορά κίνησης των σωμάτων που επιλέχθηκε είναι η ορθή.
Συνεπώς η κατεύθυνση της επιτάχυνσης του $m_2$ είναι προς τα κάτω.

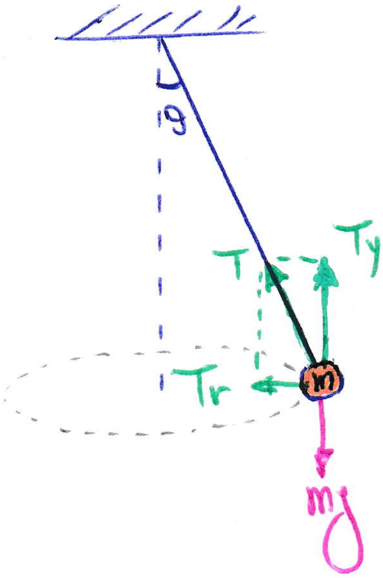
γ) Λύνοντας την (3) ως προς T προκύπτει:

$$T = m_2 g - m_2 \alpha \rightarrow T = m_2(g - \alpha) = 2{,}3\,kg\,(9{,}8 - 0{,}735)\frac{m}{s^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{T = 20{,}85\,N}$$

# ΘΕΜΑ 9

A)




α) Η τάση του σύρματος αναλύεται στην οριζόντια $T_r = T\sin\theta$ και την κατακόρυφη $T_y = T\cos\theta$ συνιστώσα της.

Λόγω ισορροπίας στον άξονα y ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow T_y = mg = 80kg \cdot 9{,}8m/s^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{T_y = 784N}$$

Αλλά: $T_y = T\cos\theta \rightarrow T = \dfrac{T_y}{\cos\theta} = \dfrac{784N}{\cos 5^\circ} \rightarrow T = 787{,}15N$

$\cos 5^\circ \rightarrow 0{,}996$

Συνεπώς: $T_r = T\sin\theta = 787{,}15N \cdot \sin 5^\circ \rightarrow \boxed{T_r = 68{,}48N}$

$\sin 5^\circ \rightarrow 0{,}087$

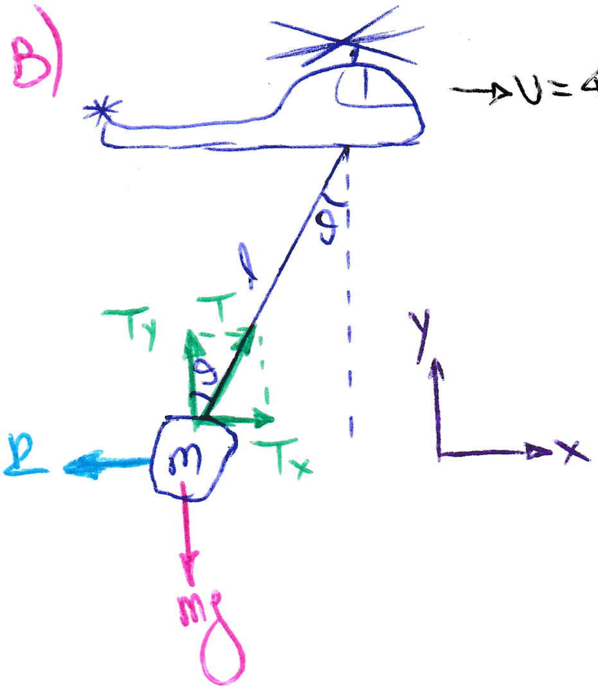
β) Η οριζόντια συνιστώσα της τάσης παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης της κυκλικής κίνησης που εκτελεί η μάζα.

Δηλαδή ισχύει:

$$F_k = m\alpha_k \rightarrow T_r = m\alpha_k \rightarrow \alpha_k = \frac{T_r}{m} = \frac{68{,}48N}{80kg} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha_k = 0{,}856m/s^2}$$

Β)




$\rightarrow \upsilon = 40\, m/s =$ σταθερή.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο καλάθι είναι το βάρος του $mg$, η τάση του καλωδίου $T$ που αναλύεται στις δύο κάθετες συνιστώσες $T_x = T\sin\theta$ και $T_y = T\cos\theta$ και η αντίσταση του αέρα $R$, που θεωρείται οριζόντια.

Επειδή το ελικόπτερο, άρα και το καλάθι κινείται με σταθερή ταχύτητα η επιτάχυνσή του είναι μηδενική προκύπτει:

$$\underline{\underline{x}}: \ \Sigma F_x = m\cancelto{0}{\alpha} \rightarrow T_x - R = 0 \rightarrow T\sin\theta = R \quad (1)$$

$$\underline{\underline{y}}: \ \Sigma F_y = 0 \rightarrow T_y - mg = 0 \rightarrow T\cos\theta = mg \quad (2)$$

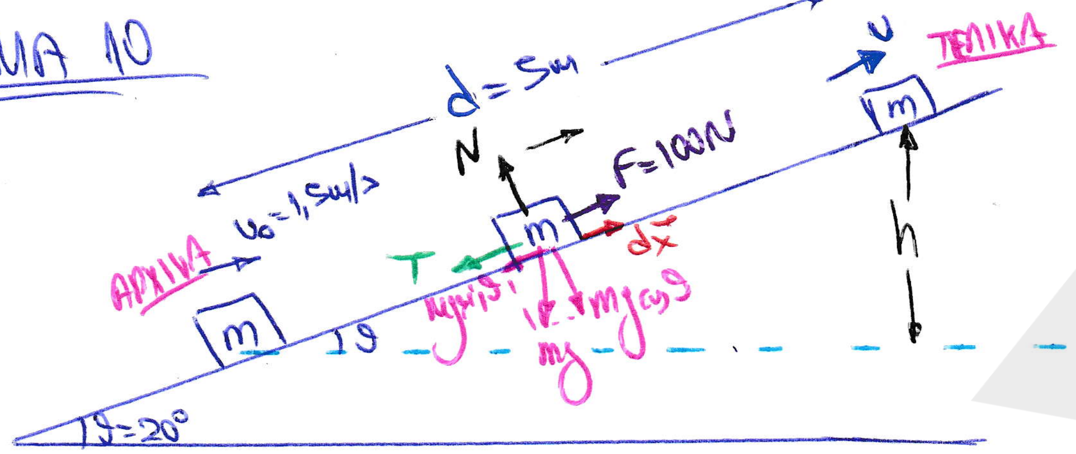
Διαιρώντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει:

$$\frac{\cancel{T}\sin\theta}{\cancel{T}\cos\theta} = \frac{R}{mg} \rightarrow R = mg\tan\theta = 620kg \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2}\cancelto{0{,}84}{\tan 40^\circ} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{R = 5103{,}84N}$$

# ΘΕΜΑ 10

A)




α) Επειδή το βάρος είναι διατηρητική δύναμη το έργο του είναι:

$$W_{mg} = U_{ΑΡΧ} - U_{ΤΕΛ} = 0 - mgh = -mgh$$

Αλλά: $\sin\theta = \frac{h}{d} \rightarrow h = d\sin\theta$

$$\left.\begin{matrix} W_{mg} = -mgh \\ h = d\sin\theta \end{matrix}\right\} \rightarrow W_{mg} = -mgd\sin\theta =$$

$$= -10kg \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot 5m \, \underbrace{\sin 20^\circ}_{0{,}342} \rightarrow \boxed{W_{mg} = -167{,}58\,J} \quad (1)$$

β) Το έργο της τριβής είναι:

$$W_T = \int_0^d \vec{T} \cdot d\vec{x} = \int_0^d T\,dx \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} = -\int_0^d T\,dx \quad (2)$$

Αλλά: $T = \mu N$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = mg\cos\theta$

$$\left.\begin{matrix} T = \mu N \\ N = mg\cos\theta \end{matrix}\right\} \rightarrow T = \mu mg\cos\theta \quad (3)$$

Οπότε: $(2) \xrightarrow{(3)} W_T = -\mu mg\cos\theta \int_0^d dx = -\mu mg\cos\theta\, d =$

$$= -0{,}4 \cdot 10kg \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot \underbrace{\cos 20^\circ}_{0{,}94} \cdot 5m \rightarrow \boxed{W_T = -184{,}24\,J} \quad (4)$$

γ) Το έργο που παράγει η σταθερή δύναμη $F=100N$ είναι:

$$W_F = \int_0^d \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_0^d F\,dx\,\cancel{\cos 0}^{\,1} = F\int_0^d dx = F\cdot d = 100N\cdot 5m \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{W_F = 500J} \quad (5)$$

δ) Σύμφωνα με το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας προκύπτει:

$$\Sigma W = \Delta K \rightarrow W_{mg} + W_T + W_F + \cancel{W_N}^{\,0} = \Delta K \xrightarrow{(1),(4),(5)}$$

$$\rightarrow \Delta K = -167{,}58J - 184{,}24J + 500J \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta K = 148{,}18J}$$

ε) Η ταχύτητα του κιβωτίου όταν έχει διατρέξει τα 5m είναι:

$$\Delta K = K_{τελ} - K_{αρχ} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2\Delta K}{m} = \upsilon^2 - \upsilon_0^2 \rightarrow \upsilon^2 = \upsilon_0^2 + \frac{2\Delta K}{m} \rightarrow \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + \frac{2\Delta K}{m}} =$$

$$= \sqrt{1{,}5^2 + \frac{2\cdot 148{,}18}{10}} = \sqrt{2{,}25 + 29{,}636} = \sqrt{31{,}886} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\upsilon = 5{,}65\, m/s}$$

B)

α) Η ταχύτητα του σώματος είναι:

$$u = \frac{dx}{dt} \rightarrow u_{(t)} = 1 + 6t^2 \ (m/s) \qquad (1)$$

Συνεπώς η κινητική του ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2} m u_{(t)}^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{2} \cdot 4(1+6t^2)^2 \rightarrow \boxed{K_{(t)} = 2(1+6t^2)^2 \ (J)} \qquad (2)$$

β) Η επιτάχυνση του σώματος είναι:

$$\alpha = \frac{du}{dt} \xrightarrow{(1)} \boxed{\alpha_{(t)} = 12t \ (m/s^2)}$$

Σύμφωνα με το 2° νόμο Newton η δύναμη που δρα σ' αυτό είναι:

$$F = m\alpha = 4 \cdot 12t \rightarrow \boxed{F_{(t)} = 48t \ (N)} \qquad (3)$$

γ) Η ισχύς που παρέχεται στο σώμα σε χρόνο t είναι:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\,dx}{dt} = Fu \overset{(1),(3)}{=} 48t(1+6t^2) \rightarrow \boxed{P_{(t)} = 48t + 288t^3 \ (W)} \qquad (4)$$

δ) Είναι: $P = \frac{dW}{dt} \xrightarrow{(4)} 48t + 288t^3 = \frac{dW}{dt} \rightarrow$

$$\rightarrow \int_0^W dW = \int_0^2 (48t + 288t^3)\,dt \rightarrow$$

$$\rightarrow W = 48\frac{t^2}{2} + 288\frac{t^4}{4}\Big|_0^2 = 24 \cdot 2^2 + 72 \cdot 2^4 = 96 + 1152 \rightarrow$$

$\rightarrow \boxed{W = 1248\,J.}$

2ος τρόπος:

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας είναι:

$$W = \Delta K = K_{(t=2s)} - K_{(t=0)} \overset{(2)}{=} 2(1+6\cdot 2^2)^2 - 2(1+6\cdot 0^2) =$$

$$= 2\cdot 25^2 - 2 = 1250 - 2 \rightarrow \boxed{W = 1248\,J}$$