<u>Άσκηση 1</u>

(α) **Λάθος.** Είναι το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθούν ακριβώς δύο από τα Α, Β, Γ.

(β) **Λάθος.** Οι διαφορετικοί τρόποι είναι $2! \cdot 6! \cdot 5! = 172800$, αφού έχουμε 6! τρόπους τοποθέτησης σε σειρά (μετάθεση) των επιβατικών αυτοκινήτων, 5! Τρόπους τοποθέτησης σε σειρά των φορτηγών αυτοκινήτων και 2! Τρόπους τοποθέτησης των σειρών των φορτηγών αυτοκινήτων και των επιβατικών.

(γ) **Σωστό.** Τότε ο συντελεστής συσχέτισης θα είναι:

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{20}{\sqrt{9}\sqrt{25}} = \frac{20}{3 \cdot 5} = \frac{20}{15} = 1{,}33$$

το οποίο δεν μπορεί να ισχύει αφού $-1 \leq \rho \leq 1$ (σελ. 86, Τόμος Α')

(δ) **Λάθος.** Αφού Α, Β ανεξάρτητα ισχύει $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (σελ. 38, Τόμος Α). Τότε θα ίσχυε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{11}{16}$$

και όχι $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$.

(ε) **Λάθος.** Για την τ.μ. Χ η αναμενόμενη τιμή είναι (σελ. 78, Τόμος Α'):

$$E(X) = \sum_x xP(X = x) = 1 \cdot P(X = 1) + (-1) \cdot P(X = -1) = p - (1 - p)$$
$$= 2p - 1$$

Η τ.μ. Υ μπορεί να πάρει την τιμή 1, τόσο αν $X = 1$ όσο και αν $X = -1$. Η αναμενόμενη τιμή του Υ είναι:

$$E(Y) = \sum_y yP(Y = y) = 1 \cdot P(Y = 1) = 1$$

οπότε $E(X) \neq E(Y)$.

(στ) **Λάθος.** Έχουμε ότι:

$$f_{Y/X=2}(y) = \frac{f(2,y)}{f_X(2)}$$

Βρίσκουμε την $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \sum_{y=1}^{2} f(x,y) = f(x,1) + f(x,2) = \frac{x+1}{21} + \frac{x+2}{21} = \frac{2x+3}{21}$$

$$f_X(2) = \frac{2 \cdot 2 + 3}{21} = \frac{7}{21}$$

Άρα:

$$f_{Y/X=2}(y) = \frac{f(2,y)}{f_X(2)} = \frac{\frac{2+y}{21}}{\frac{7}{21}} = \frac{y+2}{7}, \quad y = 1,2$$

(ζ) **Λάθος.** Το πλήθος των δυνατών πινακίδων είναι 26×9×10×10×10=234000, αφού έχουμε 26 δυνατά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, 9 δυνατούς αριθμούς για το 1ο ψηφίο (χωρίς το 0) και για τα 3 τελευταία ψηφία από 10 δυνατούς αριθμούς το καθένα.

(η) **Λάθος.** Αν η F(·) δεν είναι γνησίως αύξουσα η διάμεσος μπορεί να μην είναι μοναδική (βλ. σελ. 89, Τόμος Α').

(θ) **Λάθος.** Ισχύει $P(X < 3) = \int_2^3 \frac{8}{x^3} dx$.

(ι) **Σωστό.** Για να είναι τα A, B ανεξάρτητα πρέπει να ισχύει $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ οπότε:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(A) + 1 - P(A) \cdot 1 \\ &= P(A) - P(A) + 1 = 1 \end{aligned}$$

Άσκηση 2

(α) **Σωστό το (iii).** Το ζητούμενο πλήθος είναι 4×5×6×7×8×1=6720. Αφού το 6ο σφαιρίδιο που εξάγεται θα έχει αναγκαστικά τον αριθμό 5 (ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται με το 5) και για κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται μειώνονται οι επιλογές μας κατά 1.

(Σημείωση: Θεωρούμε ότι τα σφαιρίδια εξάγονται χωρίς επανατοποθέτηση).

Το (i) δεν είναι σωστό διότι το πλήθος των αριθμών που σχηματίζονται και δεν περιέχουν το 2 είναι 8×7×6×5×4×3=20160. Για το πρώτο σφαιρίδιο που εξάγουμε, έχουμε 8 δυνατές επιλογές (χωρίς το 2) και έπειτα για τα υπόλοιπα σφαιρίδια οι επιλογές μας μειώνονται κατά 1 κάθε φορά.

Το (ii) δεν είναι σωστό διότι δεν υπάρχει πλήθος των αριθμών που σχηματίζονται και διαιρούνται με το 10, αφού τότε θα έπρεπε να έχουμε σφαιρίδιο με αριθμό 0 που θα έπρεπε να τοποθετηθεί στη θέση του τελευταίου ψηφίου.

Το (iv) δεν είναι σωστό διότι δεν υπάρχουν αριθμοί που έχουν το πρώτο και το τελευταίο ψηφίο 3, αφού το 3 θα πρέπει να έχει επιλεγεί μόνο μία φορά.

(β) **Σωστό το (iii).** Μπορεί και να υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των Χ και Υ.

Το (i) ισχύει διότι $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$

(σελ. 85, Τόμος Α').

Το (ii) ισχύει διότι (σελ. 85, σχέση (3.35), Τόμος Α')

$$Var(3X + 6Y) = 9Var(X) + 36Var(Y) + 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot Cov(X,Y)$$

οπότε $Var(3X + 6Y) = 9Var(X) + 36Var(Y)$ αφού $Cov(X,Y) = 0$ διότι οι X,Y είναι ανεξάρτητες.

Το (iv) ισχύει διότι:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0$$

(γ) **Σωστό το (iv).** Ισχύουν όλα.

Για το (i):

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

οπότε:

$$P(A \cap B') = P(A' \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A) - P(A \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A) = P(B)$$

Το (ii) ισχύει από τη σχέση (2.2) στη σελίδα 25, Α' Τόμος.

Το (iii) ισχύει διότι:

$$P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = P(A \cap B') + P(A' \cap B) = 0 + 0 = 0$$

(δ) **Σωστό το (ii).**

Η πιθανότητα να εμφανιστούν και οι δύο βλάβες συγχρόνως είναι:

$$P(\alpha \cap \beta) = P(\alpha) \cdot P(\beta) = 0{,}12 \cdot 0{,}15 = 0{,}018$$

λόγω και της ανεξαρτησίας.

Η πιθανότητα να μην εμφανιστεί καμιά από τις δύο βλάβες είναι:

$$P[(\alpha \cup \beta)'] = 1 - P(\alpha \cup \beta) = 1 - 0{,}252 = 0{,}748$$

Η πιθανότητα να εμφανιστεί μια τουλάχιστον από τις βλάβες:

$$P(\alpha \cup \beta) = P(\alpha) + P(\beta) - P(\alpha \cap \beta) = 0{,}12 + 0{,}15 - 0{,}018 = 0{,}252$$

Η πιθανότητα να εμφανιστεί βλάβη τύπου β αν είναι γνωστό ότι έχει εμφανιστεί βλάβη τύπου α:

$$P(\beta|\alpha) = \frac{P(\alpha \cap \beta)}{P(\alpha)} = \frac{0{,}018}{0{,}12} = 0{,}15$$

(ε) **Σωστό το (iv).**

Για το (i) ισχύει:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \Longrightarrow 15 = E(X^2) - 3^2 \Longrightarrow E(X^2) = 24$$

Για το (ii) ισχύει:

$$E(Y) = E(2X^2 + 3) = 2E(X^2) + 3 = 2 \cdot 24 + 3 = 51$$

Για το (iii) ισχύει:

$$Var(2X + 3) = 2^2 Var(X) + Var(3) = 4 \cdot 15 + 0 = 60$$

(στ) **Σωστό το (ii).** Ισχύει:

$$\int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{+\infty} \beta^2 e^{-\beta(x+y)} dydx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_{x=0}^{+\infty} \beta^2 \int_{y=0}^{+\infty} e^{-\beta x} e^{-\beta y} dydx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_{x=0}^{+\infty} \beta^2 e^{-\beta x} \int_{y=0}^{+\infty} e^{-\beta y} dydx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_{x=0}^{+\infty} \beta^2 e^{-\beta x} \left[\frac{-e^{-\beta y}}{\beta}\right]_{y=0}^{+\infty} dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_{x=0}^{+\infty} \beta^2 e^{-\beta x} \frac{1}{\beta} dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\beta \int_{x=0}^{+\infty} e^{-\beta x}\, dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\beta \cdot \frac{1}{\beta} = 1 \Leftrightarrow$$

$$1 = 1$$

Για το παραπάνω αρκεί μόνο β>0 ώστε $\lim_{\beta \to +\infty} e^{-\beta x} = 0$.

(ζ) **Σωστό το (iii).** Έχουμε $P(A \cap B) = 0{,}1 \neq 0$ (βλ. παρακάτω) οπότε τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα (βλ. σελ. 21, Τόμος Α').

Το (i) ισχύει διότι:

$$\mathrm{P}(A' \cap B') = 0{,}40 \Longrightarrow P(A \cup B)' = 0{,}40 \Longrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}40$$

$$\Longrightarrow P(A \cup B) = 0{,}60$$

Για το (ii):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow$$

$$0{,}6 = 0{,}5 + 0{,}2 - P(A \cap B) \Longrightarrow$$

$$P(A \cap B) = 0{,}1$$

αφού

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$$

τα Α και Β είναι ανεξάρτητα.

Για το (iv):

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}50 - 0{,}10 = 0{,}40$$

<u>Άσκηση 3</u>

(α) Βρίσκουμε τα <u>δυνατά ενδεχόμενα</u>:

Από τους 15 καθηγητές επιλέγουμε 3 χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά. Άρα έχουμε συνδυασμό $\binom{15}{3}$.

Για τα <u>ευνοϊκά ενδεχόμενα</u>:

Από τους 8 μαθηματικούς επιλέγουμε 1, από τους 4 φυσικούς 1 και από τους 3 χημικούς 1 χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά. Άρα έχουμε:

$$\binom{8}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}$$

τρόπους σύμφωνα και με την βασική αρχή απαρίθμησης.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{\binom{8}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{15}{3}}=\frac{8\cdot4\cdot3}{\frac{15!}{3!\,12!}}=\frac{96}{455}=0{,}211$$

(β) Τα <u>δυνατά ενδεχόμενα</u> είναι $\binom{15}{3}$

Για τα <u>ευνοϊκά ενδεχόμενα</u>:

Θα έχουμε 1 μαθηματικό και 2 καθηγητές από άλλες ειδικότητες ή 2 μαθηματικούς και 1 καθηγητή από άλλες ειδικότητες ή 3 μαθηματικούς και κανένα καθηγητή από άλλες ειδικότητες (χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής). Αυτοί οι τρόποι είναι:

$$\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{2}+\binom{8}{2}\cdot\binom{7}{1}+\binom{8}{3}\cdot\binom{7}{0}=8\cdot\frac{7!}{2!\,5!}+\frac{8!}{2!\,6!}\cdot7+\frac{8!}{3!\,5!}\cdot1$$
$$=8\cdot21+7\cdot28+56\cdot1=168+196+56=420$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{2}+\binom{8}{2}\cdot\binom{7}{1}+\binom{8}{3}\cdot\binom{7}{0}}{\binom{15}{3}}=\frac{420}{455}=0{,}9231$$

(γ) Τα <u>δυνατά ενδεχόμενα</u> είναι $\binom{15}{3}$.

Για τα <u>ευνοϊκά ενδεχόμενα</u>:

Από τις συνολικά 4+1+2=7 γυναίκες μπορεί να συμμετέχουν στην επιτροπή 2 γυναίκες και 1 άνδρας από τους υπόλοιπους 8. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{7}{2}\binom{8}{1}$ τρόπους.

Επίσης, από τους 8 συνολικά άνδρες μπορεί να συμμετέχουν στην επιτροπή 2 άνδρες και 1 γυναίκα από τις υπόλοιπες 7. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{7}{1}\binom{8}{2}$ τρόπους.

Άρα οι συνολικοί τρόποι είναι:

$$\binom{7}{2}\cdot\binom{8}{1}+\binom{7}{1}\cdot\binom{8}{2}=21\cdot8+7\cdot28=168+196=364$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{\binom{7}{2}\cdot\binom{8}{1}+\binom{7}{1}\cdot\binom{8}{2}}{\binom{15}{3}}=\frac{364}{455}=0{,}80$$

(δ) (i) <u>Δυνατά ενδεχόμενα</u>: Πλέον οι θέσεις έχουν διαφορετική βαρύτητα, οπότε έχουμε διάταξη 15 ατόμων ανά 3. Δηλαδή:

$$P_{15,3}=\frac{15!}{(15-3)!}=\frac{15!}{12!}=13\cdot 14\cdot 15=2730$$

<u>Ευνοϊκά ενδεχόμενα:</u> Ο πρόεδρος θα έχει ειδικότητα Φυσικού και επειδή μας ενδιαφέρει και η σειρά θα έχουμε $P_{4,1}=\frac{4!}{3!}=4$ διαφορετικούς τρόπους. Από τους 14 καθηγητές (Μαθηματικούς και Φυσικούς) επιλέγονται 2 και μας ενδιαφέρει και η σειρά, οπότε έχουμε $P_{14,2}$ διαφορετικούς τρόπους. Άρα τα ευνοϊκά ενδεχόμενα είναι:

$$P_{4,1}\cdot P_{14,2}=4\cdot\frac{14!}{(14-2)!}=4\cdot\frac{12!\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{12!}=728.$$

Η πιθανότητα είναι:

$$\frac{728}{2730}=0{,}266$$

(ii) <u>Δυνατά ενδεχόμενα</u>: $P_{15,2}=\frac{15!}{(15-2)!}=\frac{15!}{13!}=210$

Το μέλος με ειδικότητα Μαθηματικού μπορεί να επιλεγεί κατά 8 διαφορετικούς τρόπους, ενώ ο/η γραμματέας μπορεί να επιλεγεί (από τους 14 καθηγητές που απομένουν) κατά 14 τρόπους.

Οι δυνατοί τρόποι για την περίπτωση αυτή είναι 1*15*14=210 διότι ο πρόεδρος δεν επιλέγεται από το τμήμα. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$\frac{8\cdot 14}{210}=\frac{112}{210}=0{,}533$$

(iii) <u>Δυνατά ενδεχόμενα</u>: $P_{15,3}=2730$

<u>Ευνοϊκά ενδεχόμενα:</u> Αφού στην επιτροπή πρέπει να συμμετέχει ένας καθηγητής από κάθε ειδικότητα, επιλέγουμε 1 καθηγητή ανά ειδικότητα. Οι 3 καθηγητές οι οποίοι θα συμμετέχουν στην επιτροπή μπορούν να επιλεγούν με 8·4·3=96 τρόπους.

Κατόπιν όμως πρέπει να ανατεθούν στους 3 επιλεγέντες οι 3 ρόλοι της επιτροπής. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι πρώτα ανατίθεται ο ρόλος του προέδρου με 3 δυνατούς τρόπους, κατόπιν (έχοντας αναθέσει το ρόλο του προέδρου) ανατίθεται ο ρόλος του γραμματέα με 2 πλέον τρόπους και, τελικά ο μοναδικός επιλεγέντας καθηγητής άνευ ρόλου αναλαμβάνει μέλος. Ουσιαστικά λοιπόν, είναι σαν να έχουμε διατάξει τους 3 επιλεγέντες, ώστε να τους ανατεθούν οι ρόλοι, με 3! τρόπους.

Αφού η ανάθεση των ρόλων πραγματοποιείται ανεξάρτητα από το ποιοι 3 καθηγητές επιλέγονται για να συμμετάσχουν στην επιτροπή, η επιτροπή μπορεί να δημιουργηθεί με 96·3!=576 τρόπους.

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{96 \cdot 3!}{P_{15,3}} = \frac{576}{2730} = 0{,}2110$$

Άσκηση 4

(α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α={να βρεθεί περιοχή με ξερή τρύπα}

Β={να βρεθεί περιοχή με μέτρια κοιτάσματα}

Γ={να βρεθεί περιοχή με μεγάλα κοιτάσματα}

Θ={θετικό αποτέλεσμα στο σεισμικό τεστ}

Τότε:

$$P(A) = 0{,}65,\ P(B) = 0{,}30,\ P(\Gamma) = 0{,}05$$

$$P(\Theta|\Gamma) = 0{,}80,\ \ P(\Theta|B) = 0{,}60,\ \ P(\Theta|A) = 0{,}20$$

(α) Ζητούμε την πιθανότητα $P(\Theta)$ την οποία υπολογίζουμε από το θεώρημα ολικής πιθανότητας (σελ. 41, Τόμος Α'):

$$P(\Theta) = P(\Theta|A)P(A) + P(\Theta|B)P(B) + P(\Theta|\Gamma)P(\Gamma)$$

$$= 0{,}20 \cdot 0{,}65 + 0{,}60 \cdot 0{,}30 + 0{,}80 \cdot 0{,}05 = 0{,}13 + 0{,}18 + 0{,}04 = 0{,}35$$

(β) Ζητούμε την πιθανότητα $P(\Theta \cap B)$ την οποία υπολογίζουμε με τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας (σελ. 35, Τόμος Α'):

$$P(\Theta \cap B) = P(\Theta|B)P(B) = 0{,}60 \cdot 0{,}30 = 0{,}18$$

(γ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι από τον κανόνα Bayes (σελ. 43, Τόμος Α'):

$$P(A|\Theta) = \frac{P(\Theta|A)P(A)}{P(\Theta)} = \frac{0{,}20 \cdot 0{,}65}{0{,}35} = \frac{0{,}13}{0{,}35} = 0{,}3714$$

(δ) Η πιθανότητα το αποτέλεσμα του σεισμικού τεστ είναι αρνητικό είναι:

$$P(\Theta') = 1 - P(\Theta) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$$

Βρίσκουμε την πιθανότητα $P(\Theta' \cap \Gamma)$:

$$P(\Theta' \cap \Gamma) = P(\Theta'|\Gamma)P(\Gamma) = \big(1 - P(\Theta|\Gamma)\big) \cdot P(\Gamma)$$

$$= (1 - 0{,}80) \cdot 0{,}05 = 0{,}01$$

Αφού $P(\Theta' \cap \Gamma) \neq P(\Theta') \cdot P(\Gamma) = 0{,}65 \cdot 0{,}05 = 0{,}0325$ τα γεγονότα δεν είναι ανεξάρτητα (σελ. 36, Τόμος Α').

(ε) Η πιθανότητα να έχει γίνει σε περιοχή με μέτρια ή μεγάλη ποσότητα πετρελαίου δεδομένου ότι ένα σεισμικό τεστ έχει θετικό αποτέλεσμα είναι:

$$P(B \cup \Gamma|\Theta) = P(B|\Theta) + P(\Gamma|\Theta) - P(B \cap \Gamma|\Theta)$$

όπου από τον κανόνα Bayes:

$$P(B|\Theta) = \frac{P(\Theta|B)P(B)}{P(\Theta)} = \frac{0{,}60 \cdot 0{,}30}{0{,}35} = 0{,}5143$$

$$P(\Gamma|\Theta) = \frac{P(\Theta|\Gamma)P(\Gamma)}{P(\Theta)} = \frac{0{,}80 \cdot 0{,}05}{0{,}35} = 0{,}1143$$

$$P(B \cap \Gamma|\Theta) = 0$$

Άρα:

$$P(B \cup \Gamma|\Theta) = P(B|\Theta) + P(\Gamma|\Theta) - P(B \cap \Gamma|\Theta) = 0{,}5143 + 0{,}1143 - 0 = 0{,}6286$$

Άσκηση 5

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x), 0 \le x \le 1 \\ \quad 0, \quad αλλού \end{cases}$$

(α) Από τόμο Α, σελίδα 59.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Longrightarrow \int_0^1 c(1-x)dx = 1 \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 (c - cx)dx = 1 \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 cdx - c\int_0^1 xdx = 1 \Longrightarrow$$

$$c \cdot [x]_0^1 - c \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 \Longrightarrow$$

$$c \cdot 1 - c \cdot \frac{1}{2} = 1 \Longrightarrow$$

$$c = 2$$

(β) Η μέση τιμή είναι:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2(1-x)dx$$

$$= \int_0^1 2xdx - \int_0^1 2x^2dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Υπολογίζουμε την $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2(1-x)dx$$

$$= \int_0^1 2x^2dx - \int_0^1 2x^3dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1}{6}$$

Η διασπορά της X είναι:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

(γ) Για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x)$:

- Για $x < 0$ έχουμε $F(x) = 0$
- Για $0 \leq x \leq 1$ έχουμε (βλέπε τόμος Α' σελίδα 64)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_0^x 2(1-u)du = \int_0^x (2-2u)du = 2x - 2\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^x$$

$$= 2x - x^2$$

- Για $x > 1$ έχουμε $F(x) = 1$

Τελικά:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ x < 0 \\ 2x - x^2, & \alpha\nu\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \alpha\nu\ x > 1 \end{cases}$$

(δ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X > 0{,}25) = 1 - P(X \leq 0{,}25) = 1 - F(0{,}25) = 1 - [2 \cdot 0{,}25 - (0{,}25)^2]$$
$$= 1 - 0{,}4375 = 0{,}5625$$

(ε) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X < 0{,}75 | X > 0{,}5) = \frac{P(0{,}5 < X < 0{,}75)}{P(X > 0{,}5)}$$

όπου

$$P(0{,}5 < X < 0{,}75) = \int_{0.5}^{0.75} 2(1-x)dx = 2(0{,}75 - 0{,}5) - 2\int_{0.5}^{0.75} xdx$$

$$= 2 \cdot 0{,}25 - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0.5}^{0.75} = 2 \cdot 0{,}25 - [(0.75)^2 - (0.5)^2] = 0{,}5 - 0{,}3125 = 0{,}1875$$

και

$$P(X > 0{,}5) = \int_{0.5}^{1} 2(1-x)dx = 2(1 - 0{,}5) - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0.5}^{1} = 1 - (1 - 0{,}25) = 0{,}25$$

Άρα:

$$P(X < 0{,}75 | X > 0{,}5) = \frac{P(0{,}5 < X < 0{,}75)}{P(X > 0{,}5)} = \frac{0{,}1875}{0{,}25} = 0{,}75$$

(στ) Λύνουμε την ανίσωση $6X^2 - 5X + 1 > 0$. Έχουμε:

$$6X^2 - 5X + 1 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1$. Οι λύσεις είναι:

$$X_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12}$$

Οπότε:

$$x = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ή

$$x = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Ο πίνακας προσήμων είναι:

X	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$6X^2-5X+1$	$+$	$-$	$+$	

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι:

$$X<\frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad X>\frac{1}{2}$$

Άρα:

$$P(6X^2>5X-1)=P(6X^2-5X+1>0)=P\left(X<\frac{1}{3}\right)+P\left(X>\frac{1}{2}\right)$$
$$=P\left(X<\frac{1}{3}\right)+\left[1-P\left(X\le\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$=F\left(\frac{1}{3}\right)+\left[1-F\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left(2\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)+\left[1-\left(2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{4}=\frac{29}{36}$$
$$=0{,}805$$

__Άσκηση 6__

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & 0<x<\infty,\ 0<y<\infty \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) **Η περιθώρια σ.π.π. της Χ είναι:**

$$f(x)=\int_0^{+\infty} xe^{-x(y+1)}dy=x\left[e^{-x}\int_0^{+\infty}e^{-xy}\,dy\right]$$
$$=xe^{-x}\cdot\left[\frac{1}{-x}e^{-xy}\right]_0^{+\infty}$$
$$=-e^{-x}(0-1)=e^{-x},\quad x>0$$

Η περιθώρια σ.π.π. της Υ είναι:

$$f(y)=\int_0^{+\infty} xe^{-x(y+1)}dx=\left[-\frac{xe^{-(y+1)x}}{y+1}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}-\frac{e^{(-y-1)x}}{y+1}dx$$

Λύνουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int-\frac{e^{(-y-1)x}}{y+1}dx$$

Θέτουμε

$$u = (-y-1)x$$

οπότε:

$$\frac{du}{dx} = -y-1 \Rightarrow dx = \frac{1}{-y-1}du$$

Άρα:

$$\frac{1}{(y+1)^2}\int e^u du = \frac{1}{(y+1)^2}e^u = \frac{e^{-(y-1)x}}{(y+1)^2}$$

Το τελικό ολοκλήρωμα είναι:

$$f(y) = \left[\frac{-xe^{-(y+1)x}}{y+1}\right]_0^{+\infty} - \left[\frac{e^{(-y-1)x}}{(y+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(y+1)^2}$$

με $y+1>0 \Rightarrow y>-1$.

(β) Για να είναι οι Χ,Υ ανεξάρτητες θα πρέπει να ισχύει:

$$f(x)\cdot f(y) = f(x,y)$$

Έχουμε:

$$f(x)\cdot f(y) = e^{-x}\cdot\frac{1}{(y+1)^2} \neq xe^{-x(y+1)} = f(x,y)$$

οπότε οι Χ,Υ δεν είναι ανεξάρτητες.

(γ) Η μέση τιμή της Χ είναι:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-x}\,dx$$
$$= [-xe^{-x}]_0^{+\infty} - [e^{-x}]_0^{+\infty} = 0-(0-1) = 1$$

(δ) Η δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ. X όταν Y=2 είναι:

$$f_{X/Y=2} = \frac{f(x,2)}{f_Y(2)} = \frac{xe^{-3x}}{\frac{1}{(2+1)^2}} = \frac{xe^{-3x}}{\frac{1}{9}} = 9xe^{-3x},\quad 0<x<\infty$$

(ε) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P\left(X>\frac{2}{3}\middle|Y=2\right) = \int_{2/3}^{+\infty} 9xe^{-3x}dx = 9\int_{2/3}^{+\infty} xe^{-3x}dx$$

Λύνουμε το ολοκλήρωμα $\int xe^{-3x}dx$

$$\int xe^{-3x}dx = \frac{-xe^{-3x}}{3} - \int -\frac{e^{-3x}}{3}dx = \frac{-xe^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9} + c$$
$$= -\frac{(3x+1)e^{-3x}}{9} + c$$

Άρα:

$$9\int_{2/3}^{+\infty} xe^{-3x}dx = 9\left[-\frac{(3x+1)e^{-3x}}{9}\right]_{2/3}^{+\infty} = \left(3\cdot\frac{2}{3}+1\right)\cdot e^{-3\cdot\frac{2}{3}} = 3e^{-2} = 0{,}406$$

(στ) Ζητείται δ τέτοιο ώστε $P(X \le \delta)$.

Έχουμε $0{,}5 = P(X \le \delta) = F_X(\delta)$ όπου

$$F_X(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}, \quad x > 0$$

Άρα:

$$1 - e^{-\delta} = 0{,}5 \Leftrightarrow e^{-\delta} = 0{,}5 \Leftrightarrow -\delta = \ln(0{,}5) \Leftrightarrow \delta = 0{,}6931$$