ΕΛΛΗΝΙΚΟ
ΑΝΟΙΚΤΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

ΜΣΜ 50/70 : Βασικές Θεωρίες και μέθοδοι στα Μαθηματικά

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Οι παρακάτω τρεις ασκήσεις είναι από το βιβλίο «Real Analysis» του N.L. Carothers:

Θέμα 1. α) σελ. 39 : άσκηση 14,

β) σελ. 39 άσκηση 15

Θέμα 2. σελ. 42 άσκηση 23

Θέμα 3. σελ. 67 άσκηση 32

Θέμα 4. Έστω ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}$. Αν η $\boldsymbol{f}$ είναι συνεχής σε κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$, να βρεθεί η συνάρτηση f.

Θέμα 5. Σε κάθε πραγματικό αριθμό x αντιστοιχίζουμε ένα σύνολο $\Phi(x)\subset\mathbb{R}\setminus\{x\}$.

Ένα σύνολο $S\subset\mathbb{R}$ θα λέγεται ανεξάρτητο αν $S\cap\Phi(S)=\emptyset$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ανεξάρτητο σύνολο $S\subset\mathbb{R}$ το οποίο είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

Θέμα 6. Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$ και συνάρτηση $p: X\mapsto[0,\infty)$

με τις ιδιότητες

(i) $p(x)=0\Leftrightarrow x=0$
(ii) $p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$ για κάθε $x\in X$ και $\lambda\in\mathbb{K}$.

Να αποδείξετε ότι η p είναι νόρμα αν και μόνο αν το σύνολο $B_X=\{x\in X\mid p(x)\le 1\}$ είναι κυρτό.

Θέμα 7. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $P=\{(x_n)_{(n\in\mathbb{N})}\in \mathrm{l}_2 \,/\, |x_n|<1\ \ \forall n\in\mathbb{N}\}$

είναι ανοικτό σύνολο στον l_2.

Θέμα 8.(α) Έστω (M,d) μετρικός χώρος και $A\subseteq M$ με την ιδιότητα: υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x,y\in A$ με $x\neq y$, να ισχύει $d(x,y)\ge\delta$. Είναι το A κλειστό στον M;

(β) Έστω $A,B\subseteq\mathbb{R}$, με την συνήθη μετρική, με A πυκνό και B πεπερασμένο. Να δειχθεί ότι το $A\setminus B$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 9. (α) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική. Αν A, B πυκνά και B ανοικτό, να δειχθεί ότι $A \bigcap B$ πυκνό στο $\mathbb{R}$.

(β) Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$, με την συνήθη μετρική, τέτοιο ώστε κάθε $x \in A$ είναι μεμονωμένο σημείο του A, αλλά το $\mathbb{R} \backslash \{A$ δεν είναι ανοικτό;

ΘΕΜΑ 10. Έστω $f: (M, \rho) \to (N, \sigma)$ συνάρτηση με την ιδιότητα ότι απεικονίζει βασικές ακολουθίες του μετρικού χώρου (M, ρ) σε βασικές ακολουθίες του μετρικού χώρου (N, σ). Είναι η f συνεχής;