ΑΡΝΟΣ βιβλία με στόχο!

Άλγεβρα
Τετράδιο Σπουδής
ΤΕΥΧΟΣ 1

Προετοιμασία για Πανελλήνιες - Πανεπιστήμιο

α' Λυκείου

ΑΡΝΟΣ Online Education

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ
1646-1716 MX

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ & ΑΣΚΗΣΕΩΝ

100% επιτυχία **Μέθοδος ΑΡΝΟΣ**

Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο για Διδασκαλία & Μελέτη

Τετράδιο Σπουδής - Γιατί;

Το Τετράδιο Σπουδής ΑΡΝΟΣ είναι βασισμένο στη Μέθοδο ΑΡΝΟΣ, ένα σύστημα μάθησης με Στόχους – Υλοποίηση – Πιστοποίηση.
Βοηθάει το μαθητή να οικοδομήσει τη σκέψη του βήμα-βήμα, απλά και κατανοητά. Είναι Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο βάσει του οποίου γίνεται η διδασκαλία στο online μάθημα με «φυσικό» τρόπο. Ο δάσκαλος γράφει και υπογραμμίζει παράλληλα με το μαθητή.

Το Τετράδιο Σπουδής αποτελείται από:

- Οπτικοποιημένη Θεωρία με ροή & συνέχεια
- Ασκήσεις για Διδασκαλία και Εξάσκηση
- Συνδυαστικές και Επαναληπτικές Ασκήσεις
- Θέματα Προσομοίωσης Εξετάσεων

Πιστοποίηση Γνώσεων

Σε προγραμματισμένες ημερομηνίες διεξάγονται online ή/και δια ζώσης **Επαναληπτικά Τεστ Αξιολόγησης** στα οποία ο μαθητής πιστοποιεί και επαληθεύει τις γνώσεις του.

Για τους Γονείς

Πώς ο γονέας μπορεί να έχει εικόνα και εποπτεία στην πρόοδο του παιδιού του;
Το Τετράδιο Σπουδής είναι σχεδιασμένο με τέτοιον τρόπο για τη βήμα – βήμα εξάσκηση του μαθητή, μεταβαίνοντας με ασφάλεια από τα πιο απλά στα πιο σύνθετα. Επίσης, είναι ένας φυσικός τρόπος ο Γονέας να ελέγχει την πρόοδο του παιδιού του.

Πώς γίνεται η εποπτεία από το γονέα;

Σε κάθε μάθημα ελέγχει την ορθότητα των λύσεων, την κατανόηση και τη συμμετοχή του παιδιού στα μαθήματα.

Διδασκαλία στον ΑΡΝΟ σημαίνει:

- Απεριόριστη μελέτη με video lessons
- Αυτομάθηση στο App Arnos Learn
- Coaching εξατομικευμένο
- Μοτίβα Μάθησης και Εξάσκησης
- Κάθε Απορία για εμάς είναι Πρόκληση!

Μέθοδος ΑΡΝΟΣ

Η **Μέθοδος ΑΡΝΟΣ** οδηγεί κάθε μαθητή, ανεξαρτήτως γνώσεων ή επιπέδου, να μελετά από το επίπεδο όπου αισθάνεται άνετα, ώστε να διαμορφώσει γερές βάσεις για μάθηση.

Live Διδασκαλία Το online μάθημα γίνεται με φυσικό τρόπο, γιατί συνδυάζει την Τεχνολογία, το Πνεύμα, την Οργάνωση και την Εμπειρία.

Τετράδιο Σπουδής Είναι ο οδηγός για τη διδασκαλία του μαθήματος, την εξάσκηση του μαθητή και την πραγματοποίηση της online διδασκαλίας με Λόγο, Εικόνα και Παρατήρηση.

Καθηγητής Είναι ο σκηνοθέτης της διδακτικής πράξης, ο οποίος δρα σε ένα οργανωμένο εκπαιδευτικό οικοσύστημα με Στόχους, Μαθησιακό Πλάνο και Ευθύνη.

«Μέθοδος ΑΡΝΟΣ... το καταστάλαγμα μιας πορείας 35 ετών με εκπαιδευτικές και εκδοτικές επιτυχίες, με ταξίδια πολιτισμού, συμμετοχή σε Διεθνείς Εκθέσεις και αποτυχίες... μα, κυρίως, η παρακαταθήκη του ζευγολάτη πατέρα - Αρνού.»

Γιάννης Π. Κρόκος

ΑΡΝΟΣ
Online Education

Σολωμού 29, Αθήνα 210 38 22 157 | 210 38 22 495
arnos.gr | info@arnos.gr

Τετράδιο Σπουδής

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΤΕΥΧΟΣ 1)

- Οδηγός για τη Διδασκαλία του Καθηγητή
- Οδηγός για τη Μελέτη του Μαθητή
- Διδασκαλία Online με φυσικό τρόπο
- Τόπος Εποπτείας Προόδου από το Γονέα
- Διδασκαλία με Πιστοποιημένους Καθηγητές ΑΡΝΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2021

ΑΡΝΟΣ
Online Education

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου – Λύσεις Τετραδίου Σπουδής – Τεύχος 1

Συντακτική Ομάδα Κέντρου ΑΡΝΟΣ

Διευθυντής σειράς: Ιωάννης Π. Κρόκος

Συνεργάστηκαν: Παναγιώτα Λέκκα

Βασίλειος Κ. Τσιλιβής

ΑΡΝΟΣ ONLINE EDUCATION

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

Εισαγωγικό Κεφάλαιο

Ε. 1 Το Λεξιλόγιο της Λογικής

Ασκήσεις Κατανόησης

Άσκηση 1

α) $\alpha = 2 \;\Rightarrow\; \alpha^2 - 5\alpha + 3 = -1$:Λάθος

Για α=2 η εξίσωση δεν επαληθεύεται.

β) $\alpha = 2 \;\Leftrightarrow\; \alpha^2 = 4$: Λάθος

Η ισοδυναμία δεν ισχύει, καθώς από το δεύτερο συλλογισμό δεν καταλήγουμε απαραίτητα στον πρώτο, αφού και για $\alpha = -2$ έχουμε το τετράγωνό του ίσο με 4.

γ) $5 > 8$ ή $5 \geq 5$: Σωστό

Έχουμε διάζευξη, άρα αρκεί να ισχύει η μία εκ των δύο συνθηκών. Εδώ ισχύει η δεύτερη.

δ) $5 > 8 \;\kappa\alpha\iota\; 5 \leq 5$: Λάθος

Έχουμε σύζευξη, άρα για να αληθεύει πρέπει να ισχύουν και οι δύο συνθήκες μαζί. Είναι πρώτη είναι μη αληθής, άρα και ολόκληρος ο συλλογισμός.

ε) $\alpha \geq 0 \;\kappa\alpha\iota\; \alpha \leq 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0$:Σωστό

Έχουμε σύζευξη, άρα πρέπει να επαληθεύονται ταυτόχρονα και οι δύο συνθήκες. Η μόνη τιμή που επαληθεύει και τις δύο συνθήκες μαζί είναι α=0.

στ) $\alpha \neq 1 \;\Rightarrow\; \alpha^2 \neq 1$: Λάθος

Για $\alpha = -1$ προκύπτει $\alpha^2 = (-1)^2 = 1$.

ζ) $\alpha^2 \neq 1 \Rightarrow \alpha \neq 1$:Σωστό

Μόνο το τετράγωνο των αριθμών 1 και -1 ισούται με 1. Άρα, αν αληθεύει η πρώτη συνθήκη, τότε σίγουρα αληθεύει και η δεύτερη.

η) $\alpha^2 \neq 25 \Leftrightarrow \alpha \neq 5$ $\kappa\alpha\iota$ $\alpha \neq -5$: Σωστό

θ) $\alpha^2 = 9$ $\kappa\alpha\iota$ $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha = 3$: Σωστό

ι) $\alpha^2 > 1 \Rightarrow \alpha > 1$: Λάθος

Για α = -2, δεν ισχύει.

ια) $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha^2 > 1$: Σωστό

ιβ) $\alpha^2 > 1 \Rightarrow \alpha > 1$ ή $\alpha < -1$: Σωστό

ιγ) $\alpha \geq 0$ ή $\alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha = 0$: Λάθος

Στη διάζευξη δε χρειάζεται να ισχύουν συγχρόνως και οι δύο συνθήκες.

ιδ) $\alpha = 1$ ή $\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 2$: Σωστό

Έχουμε διάζευξη, άρα μπορεί να ισχύει μόνο η δεύτερη συνθήκη.

ιε) $\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$ ή $\alpha = 2$: Σωστό

Έχουμε συνεπαγωγή, άρα η πρώτη συνθήκη είναι σίγουρα αληθής, προκειμένου να είναι και η δεύτερη. Άρα, αφού $\alpha = 2$, δε γίνεται να ισχύει $\alpha = 1$.

Άσκηση 2

α) $x(x-5)=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=5$: <u>Σωστό</u>

Έχουμε γινόμενο ίσο με το 0. Άρα, αρκεί ο ένας παράγοντας από τους δύο να είναι ίσος με το 0.

β) $x^2=16\ \kappa\alpha\iota\ x<0 \Leftrightarrow x=-4$: <u>Σωστό</u>

γ) $x^2=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=5$: <u>Σωστό</u>

δ) $x(x-1)=0\ \kappa\alpha\iota\ (x-3)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$: <u>Σωστό</u>

Έχουμε σύζευξη, άρα πρέπει να ισχύουν συγχρόνως και οι δύο συνθήκες. Η μόνη τιμή που τις επαληθεύει μαζί είναι για $x=1$. Η ισοδυναμία ισχύει σε κάθε περίπτωση.

ε) $x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq 2$: <u>Λάθος</u>

στ) $\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$: <u>Λάθος</u>

Έχουμε ισοδυναμία και θέλουμε το γινόμενο να είναι σε κάθε περίπτωση διάφορο του μηδενός. Άρα, στη δεύτερη συνθήκη χρειαζόμαστε σύζευξη.

Ε.2 Σύνολα

Άσκηση 1

α) $A = \{20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28\}$

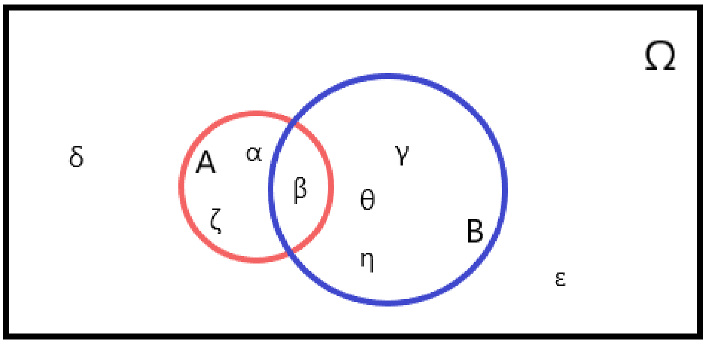
β) $B = \{11, 13, 15, 17, 19\}$

γ) $\Gamma = \{-3, 3\}$

δ) $\Delta = \emptyset$

Άσκηση 2

α)



β)

i) $A \cup B = \{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta, \theta\}$

ii) $A \cap B = \{\beta\}$

iii) $A' = \{\gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \theta\}$

iv) $B' = \{\alpha, \delta, \varepsilon, \zeta\}$

v) $A \setminus B = \{\alpha, \zeta\}$

vi) $B \setminus A = \{\gamma, \eta, \theta\}$

Άσκηση 3

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 18\} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

α) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$

β) $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$

Άσκηση 4

Ξένα σύνολα ονομάζονται εκείνα τα σύνολα που δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο μεταξύ τους. Επομένως, ξένα ζεύγη συνόλων μεταξύ τους είναι τα ζεύγη (α), (δ) και (ε).

Σημείωση:

Οι φυσικοί αριθμοί είναι και ρητοί αριθμοί, καθώς γράφονται ως κλάσμα με αριθμητή τον εαυτό τους και παρονομαστή τη μονάδα. Άρα, το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι υποσύνολο των ρητών αριθμών.

Άσκηση 5

α) i, ii

β) i, ii, v

γ) i, ii, vi, v

δ) iii

Κεφάλαιο 2 : Οι Πραγματικοί Αριθμοί

2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητές τους

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

α) $A = \dfrac{(x^3 y^{-7})^2 : (xy)^{-4}}{(\frac{x}{y})^5} = \dfrac{\dfrac{(\frac{x^3}{y^7})^2}{\frac{1}{x^4y^4}}}{\dfrac{x^5}{y^5}} = \dfrac{\dfrac{x^6x^4y^4}{y^{14}}}{\dfrac{x^5}{y^5}} = \dfrac{x^5}{y^5} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^5$

β) Για $x = 10$ & $y = -5$ προκύπτει $A = \left(\frac{10}{-5}\right)^5 = (-2)^5 = -32$.

Άσκηση 2

$A = [(x^3 : y^{-9}) * (x^2y^{-5})^2]^2 * (x^{-1}y)^8 = \left[\left(\dfrac{x^3}{y^{-9}}\right) * \left(\dfrac{x^4}{y^{10}}\right)\right]^2 * \dfrac{y^8}{x^8} =$

$\left[x^3y^9 * \left(\dfrac{x^4}{y^{10}}\right)\right]^2 * \dfrac{y^8}{x^8} = \dfrac{x^6y^{18}x^8}{y^{20}} * \dfrac{y^8}{x^8} = x^6y^6 = (xy)^6$

Άρα, για $x = 5$ & $y = 0{,}2$ $έχουμε$ $A = (5 * 0{,}2)^6 = 1$

Άσκηση 3

$$A = \frac{(xy)^2 * (\frac{x}{y^2})^{-1}}{y^5} : \left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{\frac{x^2y^2\frac{y^2}{x}}{y^5}}{\frac{x^5}{y^5}} = \frac{xy^4y^5}{x^5y^5} = \frac{y^4}{x^4}$$

Για $x = 5$ $και$ $y = -1{,}48$ έχουμε: $A = (\frac{-1{,}48}{5})^4 = 0{,}0076765635$

Άσκηση 4

$$A = \frac{x^{10}y^{-2} + 2x^5y^3 + y^8}{y^{-2}} = y^2 * \left(\frac{x^{10}}{y^2} + 2x^5y^3 + y^8\right) = x^{10} + 2x^5y^5 + y^{10}$$
$$= (x^5 + y^5)^2$$

Άρα, για $x = 5, y = -4$έχουμε: $A = 2.101^2 = 4.414.201$

Άσκηση 5

α) $51^2 - 49^2 = (51 - 49)^2 = 2^2 = 4$

β) $\frac{5{,}29^2 - 2{,}29^2}{7{,}58} = \frac{(5{,}29 - 2{,}29)(5{,}29 + 2{,}29)}{7{,}58} = \frac{3 * 7{,}58}{7{,}58} = 3$

γ) $999 * 1001 = (1000 - 1) * (1000 + 1) = 1000^2 - 1^2 = 999.999$

δ) $55 * 45 = (50 + 5) * (50 - 5) = 50^2 - 5^2 = 2.475$

Άσκηση 6

α) $(\alpha + 2\beta)^2 - (2\alpha + \beta)^2 = (\alpha + 2\beta + 2\alpha + \beta) * (\alpha + 2\beta - 2\alpha - \beta) =$

$(3\alpha + 3\beta) * (-\alpha + \beta) = 3(\beta + \alpha)(\beta - \alpha)$

β) $(1{,}34 + 4{,}68)^2 - (2{,}68 + 2{,}34)^2 \Rightarrow$

Παρατηρούμε ότι η δοθείσα αριθμητική παράσταση μοιάζει με αυτήν του α΄ ερωτήματος. Κάνοντας τις κατάλληλες πράξεις παρατηρούμε ότι για $\alpha = 1{,}34$, $\beta = 2{,}34$: $3(2{,}34 + 1{,}34)(2{,}34 - 1{,}34) = 11{,}04$.

Σημείωση:

Στις περισσότερες ασκήσεις τα υποερωτήματα είναι αλληλένδετα. Πολλές φορές η λύση μπορεί να φαίνεται περίπλοκη, αλλά, ανατρέχοντας στο προηγούμενο υποερώτημα, μπορούμε να επιλύουμε ευκολότερα και γρηγορότερα.

Άσκηση 7

α) $\frac{(\alpha+3)^3-(\alpha-3)^3}{18}=\frac{(\alpha+3-\alpha+3)[(\alpha+3)^2+(\alpha+3)(\alpha-3)+(\alpha-3)^2]}{18}=\frac{6(\alpha^2+6\alpha+9+\alpha^2-9+\alpha^2-6\alpha+9)}{18}$

$=\frac{3\alpha^2+9}{3}=\alpha^2+3$

Ο αριθμητής του κλάσματος είναι ουσιαστικά διαφορά κύβων, δηλαδή γνωστή ταυτότητα. Παρατηρούμε τους εκθέτες των αριθμητικών παραστάσεων και αναγνωρίζουμε την ταυτότητα.

β) Ομοίως με την προηγούμενη άσκηση, λειτουργούμε με την ίδια ακριβώς λογική, οπότε από α΄ ερώτημα για α = 100 προκύπτει ότι: $100^2+3=100.003$

Άσκηση 8

α) Δύο διαδοχικοί φυσικοί είναι ο α, α+1. Δεν υπάρχει διαδοχικός φυσικός επόμενος.

Οπότε, έχουμε: $(\alpha+1)^2-\alpha^2=(\alpha+1+\alpha)(\alpha+1-\alpha)=2\alpha+1$

$=\alpha+1+\alpha=2\alpha+1$

Πράγματι, η ζητούμενη υπόθεση είναι αληθής.

β) Έστω β ένας τυχαίος φυσικός αριθμός. Ο αριθμός που διαφέρουν κατά 2 θα είναι β, β+2. Οπότε, έχουμε:

$(\beta\pm2)^2-\beta^2=(\beta\pm2+\beta)(\beta\pm2-\beta)=2(2\beta\pm2)=$

- $2(2\beta+2)=4\beta+4$
- $2(2\beta-2)=4\beta-4$

$2(\beta\pm2+\beta)=4\beta\pm4$

Άσκηση 9

α) Έστω ν ένας τυχαίος φυσικός αριθμός. Έχουμε:

$$3^{\nu} + 3^{\nu+1} + 3^{\nu+2} = 3^{\nu}(1 + 3 + 3^2) = 13 * 3^{\nu}$$

Συνεπώς, η αρχική αριθμητική παράσταση διαιρείται με το 13.

β) Ομοίως με το προηγούμενο ερώτημα:

$$2^{\nu} + 2^{\nu+1} + 2^{\nu+2} + 2^{\nu+3} = 2^{\nu}(1 + 2 + 2^2 + 2^3) = 15 * 2^{\nu}$$

Συνεπώς, η αρχική αριθμητική παράσταση διαιρείται με το 5, αφού και το 15 διαιρείται με το 5.

Άσκηση 10

α) $\frac{\alpha^3+4\alpha^2+4\alpha}{\alpha^2+2\alpha} = \frac{\alpha(\alpha^2+4\alpha+4)}{\alpha(\alpha+2)} = \frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+2} = \alpha + 2$

β) $\frac{\alpha^2-5\alpha+6}{\alpha^2-4} = \frac{\alpha^2-2\alpha-3\alpha+6}{(\alpha-2)(\alpha+2)} = \frac{\alpha(\alpha-2)-3(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha+2)} = \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{(\alpha-2)(\alpha+2)} = \frac{\alpha-3}{\alpha+2}$

Άσκηση 11

α) $\frac{\alpha^3-8}{\alpha^4-4\alpha^3+4\alpha^2} * \frac{\alpha^5-4\alpha^3}{\alpha^2+2\alpha+4} = \frac{\alpha^3-2^3}{\alpha^2(\alpha^2-4\alpha+4)} * \frac{\alpha^3(\alpha^2-4)}{\alpha^2+2\alpha+4} = \frac{(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)}{\alpha^2(\alpha-2)^2} * \frac{\alpha^3(\alpha-2)(\alpha+2)}{\alpha^2+2\alpha+4}$

$\alpha(\alpha + 2) = \alpha^2 + 2\alpha$

β) $\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha+1}\right) * \frac{\alpha^4-2\alpha^2+1}{\alpha^4-1} = \frac{\alpha(\alpha+1)-(\alpha-1)}{\alpha^2-1} * \frac{(\alpha^2-1)^2}{(\alpha^2+1)(\alpha^2-1)} = \frac{\alpha^2+\alpha-\alpha+1}{\alpha^2-1} * \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1} = 1$

Άσκηση 12

α) $\frac{(\alpha-1)^{-1}-(\alpha+1)^{-1}}{(\alpha-1)^{-1}(\alpha+1)^{-1}} = \frac{\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{\alpha+1}}{\frac{1}{\alpha-1}*\frac{1}{\alpha+1}} = \frac{\frac{\alpha+1-\alpha+1}{\alpha^2-1}}{\frac{1}{\alpha^2-1}} = 2$

β) $\frac{(\alpha^{-1}-\beta^{-1})^2}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2} : \frac{(\alpha\beta)^{-2}}{\alpha+\beta} = \frac{\frac{(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta})^2}{(\alpha-\beta)^2}}{\frac{1}{\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)}} = \frac{\frac{(\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta})^2}{(\alpha-\beta)^2}}{\frac{1}{\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)}} = \frac{(\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta})^2 * \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)^2} = \alpha + \beta$

Άσκηση 13

$$\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right):\frac{(x^2+y^2)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x^3+y^3)}=$$

$$=\left(\frac{x(x+y)-y(x-y)}{x^2-y^2}\right):\frac{(x^2+y^2)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)}=\frac{\frac{x^2+xy-yx+y^2}{x^2-y^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}=1$$

Άσκηση14

Αφού ισχύει $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha+1}{\beta+1}$ και $\beta\neq 0,-1$ έχουμε:

$\alpha(\beta+1)=\beta(\alpha+1)\ \Leftrightarrow \alpha\beta+\alpha=\beta\alpha+\beta\ \Leftrightarrow \alpha=\beta$

Άσκηση 15

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=0\ \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2=4\alpha\beta\ \Leftrightarrow\ \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=4\alpha\beta\ \Leftrightarrow$

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0\ \Leftrightarrow\ (\alpha-\beta)^2=0\ \Leftrightarrow \alpha-\beta=0\ \Leftrightarrow \alpha=\beta$

Άσκηση 16

Θα εξετάσουμε, αν ισχύει η δοθείσα ισότητα. Έστω ότι ισχύει. Τότε, αναπτύσσοντας έχουμε:

$(\alpha+2\beta)^2-\beta^2=\ \alpha^2+2\alpha\beta\ \Rightarrow\ \alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2-\beta^2=\ \alpha^2+2\alpha\beta\ \Rightarrow$

$3\beta^2+2\alpha\beta=0\ \Rightarrow \beta^2\ =\ -\frac{2\alpha\beta}{3}$

Άτοπο, διότι το τετράγωνο οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός όρος.

Συνεπώς η αρχική υπόθεση δεν ισχύει και επομένως η δοθείσα ισότητα δεν ισχύει για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β.

Για $\alpha=0$ γίνεται $4\beta^2-\beta^2=0. Αν\ \beta\neq 0, δηλαδή\ έστω\ \beta=1, τότε\ δεν\ ισχύει.$

Άσκηση 17

α) Έστω α και β δύο τυχαίοι ακέραιοι αριθμοί. Αφού οι α και β είναι πολλαπλάσια του 3, θα ισχύει $\alpha = 3\kappa \;\kappa\alpha\iota\; \beta = 3\lambda$, όπου κ και λ δύο ακέραιοι αριθμοί. Άρα:

$$\alpha + \beta = 3\kappa + 3\lambda = 3(\kappa + \lambda) \Rightarrow$$

Επομένως, το άθροισμά τους είναι πολλαπλάσιο του 3.

β) Έστω α και β δύο τυχαίοι ακέραιοι αριθμοί. Αφού ο α είναι πολλαπλάσιο του 3, θα ισχύει $\alpha = 3\mu$, όπου μ ένας ακέραιος αριθμός. Άρα: $\alpha + \beta = 3\mu + \beta$

Έστω ότι $\beta | 3\mu + \beta$. Αφού ο β διαιρεί τον εαυτό του και διαιρεί και το $3\mu + \beta$, αναγκαστικά θα διαιρεί και το 3μ, το οποίο είναι άτοπο, διότι ο β δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, άρα πρέπει αναγκαστικά να διαιρεί το μ. Το μ όμως μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ακέραιος, που δεν ισχύει για κάθε περίπτωση, αφού ο β δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Επομένως, η αρχική μας υπόθεση δεν ισχύει και έτσι ο β δε διαιρεί το άθροισμα $\alpha + \beta$.

Άσκηση 18

α) Έστω α ένας τυχαίος ρητός αριθμός και ο β ένας τυχαίος άρρητος. Υποθέτουμε ότι το άθροισμά τους είναι ρητός αριθμός. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να το γράψουμε με τη μορφή κλάσματος. Δηλαδή:

$$\alpha = \frac{\kappa}{\lambda} \;\mu\varepsilon\; \lambda \neq 0 \;\kappa\alpha\iota\; \alpha + \beta = \frac{\mu}{\nu} \;\mu\varepsilon\; \nu \neq 0 \;\Rightarrow \frac{\kappa}{\lambda} + \beta = \frac{\mu}{\nu} \;\Rightarrow\; \beta = \frac{\mu}{\nu} - \frac{\kappa}{\lambda} \;\Rightarrow$$

$$\beta = \frac{\mu\lambda - \kappa\nu}{\nu\lambda} = \frac{\gamma}{\delta} \;\text{όπου } \gamma \text{ και } \delta \text{ ακέραιοι αριθμοί που προκύπτουν με πράξεις}$$

Συνεπώς, ο β παριστάνεται με τη μορφή κλάσματος, το οποίο είναι άτοπο, διότι ο β είναι άρρητος και δεν μπορεί να γραφεί με τη μορφή κλάσματος.

Άρα, η αρχική υπόθεση δεν ισχύει και έτσι το άθροισμα α+β είναι άρρητος.

Αν α + β = γ, με γ άρρητος, τότε β = γ – α είναι ρητός, το οποίο είναι άτοπο.

Άσκηση 19

$$\alpha+\beta=1\ \kappa\alpha\iota\ \alpha\beta=-5 \xRightarrow{\alpha=1-\beta} (1-\beta)\beta=-5 \Rightarrow \beta-\beta^2=-5 \Rightarrow$$

$$\beta^2-\beta-5=0 \Rightarrow$$

Οπότε, σκεφτόμαστε ως ακολούθως:

$$\alpha)\ \alpha^2+\beta^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2(-5)=11$$

$$\beta)\ (\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=1^2-4(-5)=21$$

$$\gamma)\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=1*[(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta]=11-5=6$$

$$\alpha^2+\beta^2=11 \text{ από α' ερώτημα}$$

$$\delta)\ \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{11}{(-5)^2}=\frac{11}{25}=0{,}44$$

Άσκηση 20

<u>1ος Τρόπος:</u>

$$\alpha+\beta+\gamma=-24\quad(1)$$

$$\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4} \Rightarrow 3\alpha=5\beta\ \kappa\alpha\iota\ 4\alpha=5\gamma \Rightarrow \beta=\frac{3}{5}\alpha\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \gamma=\frac{4}{5}\alpha \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\alpha+\frac{3}{5}\alpha+\frac{4}{5}\alpha=-24 \Rightarrow \frac{5\alpha+3\alpha+4\alpha}{5}=-24 \Rightarrow 12\alpha=-120 \Rightarrow \alpha=-10 \Rightarrow$$

Άρα, έχουμε $\beta=-6\ \kappa\alpha\iota\ \gamma=-8$.

<u>2ος Τρόπος:</u>

$$\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\lambda \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\alpha=5\lambda\\ \beta=3\lambda\\ \gamma=4\lambda\end{Bmatrix} \Leftrightarrow 5\lambda+3\lambda+4\lambda=-24 \Leftrightarrow 12\lambda=-24 \Leftrightarrow \lambda=-2$$

Άρα, $\alpha=-10, \beta=-6\ \kappa\alpha\iota\ \gamma=-8$.

Άσκηση 21

1ος Τρόπος:

$$\frac{x}{2y}=\frac{2y}{3z}=\frac{3z}{x}\Rightarrow 3xz=4y^2 \& x^2=6yz \xRightarrow{3z=4\frac{y^2}{x}} x^2=2y*4\frac{y^2}{x}\Rightarrow$$

$$x^3=8y^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{8y^3} \Rightarrow x=2y$$

Επομένως, $z=\frac{4}{3}*\frac{y^2}{x}=\frac{4}{3}*\frac{y^2}{2y}=\frac{2}{3}y \Rightarrow 2y=3z$ και άρα $x=2y=3z$.

2ος Τρόπος:

$$\frac{x}{2y}=\frac{2y}{3z}=\frac{3z}{x}=\lambda \Leftrightarrow x=2y\lambda \;\; \kappa\alpha\iota\; z=\frac{2y}{3\lambda}\Leftrightarrow 3z=\lambda x \Leftrightarrow 3\frac{2y}{3\lambda}=2y\lambda\lambda \Leftrightarrow$$

$$2y=2y\lambda^3 \Leftrightarrow \lambda=1 \Leftrightarrow x=2y=3z.$$

Σημείωση:

Όταν έχουμε τρίτη ρίζα ή γενικότερα οποιαδήποτε ρίζα περιττής τάξης, τότε μόνο μία τιμή μπορεί να είναι το αποτέλεσμα. Δεν ισχύει δηλαδή ότι με την τετραγωνική ρίζα.

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

α) $\alpha^2 + 16 \geq 8\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 16 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 4)^2 \geq 0$

Ισχύει, γιατί το τετράγωνο οποιασδήποτε αριθμητικής παράστασης Πραγματικών αριθμών είναι πάντα μη αρνητικός όρος.

β) $4\alpha\beta \leq (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow 4\alpha\beta \leq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha - \beta)^2 \geq 0$, που ισχύει πάντα.

Άσκηση 2

α) $4\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2\alpha - 1)^2 + \beta^2 \geq 0$, το οποίο ισχύει πάντα, αφού πρόκειται για άθροισμα μη αρνητικών όρων.

β) Η ισότητα ισχύει, όταν κάθε όρος ισούται με το 0. Άρα, για $\alpha = \frac{1}{2}$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta = 0$.

Άσκηση 3

α) $(\alpha + 2)^2 + (\beta - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2 \;\kappa\alpha\iota\; \beta = 3.$

Έχουμε άθροισμα μη αρνητικών όρων ίσο με το μηδέν. Άρα ο κάθε όρος ίσος με το μηδέν.

β) $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 10\beta + 26 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 10\beta + 1 + 25 = 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha - 1)^2 + (\beta + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \;\kappa\alpha\iota\; \beta = -5.$

γ) $2\alpha^2 + 4\beta^4 - 2\alpha - 4\alpha\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 + 4\beta^4 - 2\alpha - 4\alpha\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 2\beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \;\kappa\alpha\iota\; \beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$

Άσκηση 4

$1 < x < 3 \ \kappa\alpha\iota \ 2 < y < 7.$

α) $\{1 < x < 32 < y < 7\} \Rightarrow \{1 < x < 34 < y^2 < 49\} \Rightarrow 5 < x + y^2 < 52$

β) $\{1 < x < 32 < y < 7\} \Rightarrow 2 < xy < 21$

γ) $\{1 < x < 32 < y < 7\} \Rightarrow \{3 < 3x < 9 - 7 < -y < -2\} \Rightarrow -4 < 3x - y < 7$

δ) $\{1 < x < 32 < y < 7\} \Rightarrow \left\{1 < x < 37^{-1} < y^{-1} < 2^{-1}\right\} \Rightarrow \frac{2}{7} < xy^{-1} + y^{-1} < 2$

Άσκηση 5

$-1 < x < 2 \ \kappa\alpha\iota \ -3 < y < 1$

α) $-1 < x < 2 \Rightarrow (-1)^2 > x^2 \, \gamma\iota\alpha - 1 < x < 0. \, \Gamma\iota\alpha \ x \geq 0 \ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon{:}\, 0 \leq x^2 < 4.$

Για αρνητικούς όρους, η φορά της ανίσωσης αλλάζει!

Ομοίως, για $-3 < y < 1 \, \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon{:}\, \gamma\iota\alpha - 3 < y \leq 0 \Rightarrow \ 0 \leq y^2 < 9.$

β) Από α΄ ερώτημα έχουμε $0 \leq x^2 < 4 \ \Rightarrow \ -4 < -x^2 \leq 0$. Άρα, προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο ανισώσεις προκύπτει: $-4 < y^2 - x^2 < 9$.

γ) Για να πολλαπλασιάσουμε ανισώσεις, πρέπει οι όροι να είναι όλοι θετικοί, προκειμένου να μην αλλάζει η φορά. Επομένως, έχουμε:

$0 \leq x < 2 \ \kappa\alpha\iota \, 0 \leq y < 1 \ \Rightarrow 0 \leq xy < 2.$

Για τις αρνητικές τιμές έχουμε: $-1 < x < 0 \ \kappa\alpha\iota - 3 < y < 0 \ \Rightarrow 0 < xy < 3.$

Άρα, και από τις 2 σχέσεις προκύπτει ότι $0 < xy < 2$, που προφανώς ισχύει $-6 < xy < 3$.

δ) $-1 < x < 2 \ \Rightarrow \ -1 < x < 0 \ \kappa\alpha\iota \, 0 \leq x < 2 \ \Rightarrow -1 < x^3 < 0 \ \kappa\alpha\iota \ 0 \leq x^3 < 8$

Το ζητούμενο διάστημα ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις, άρα $-1 < x^3 < 8$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να υψώσουμε επιτόπου τις δύο ανισώσεις, διότι η δύναμη είναι περιττή και διατηρεί τα πρόσημα. Με άρτιες δυνάμεις αυτό δεν ισχύει, για αυτό η φορά της ανίσωσης αλλάζει.

Άσκηση 6

$1 < x < 2 \;\; και \; 2 < y < 4 \;\Rightarrow$

- $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \frac{2}{2} < \frac{y}{x} < 4 \;\Rightarrow\; -4 < -\frac{y}{x} < -1$

  Άρα: $\frac{2x-y}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{y}{x} = 2 - \frac{y}{x} \;\Rightarrow -2 < 2 - \frac{y}{x} < 1 \;\Rightarrow -3 < 2 - \frac{y}{x} < 1$

Άσκηση 7

$1 < x < 2 \;\; και \;\; 1 < y < 4$

α) $\Pi = x + x + y + y + y + (x - y) + x = 3x + 3y + x - y = 4x + 2y$

$1 < x < 2 \;\Rightarrow 4 < 4x < 8$

$1 < y < 4 \;\Rightarrow 2 < 2y < 8 \;\Rightarrow$

Άρα: $6 < 4x + 2y < 16 \;\Rightarrow\; 6 < \Pi < 16.$

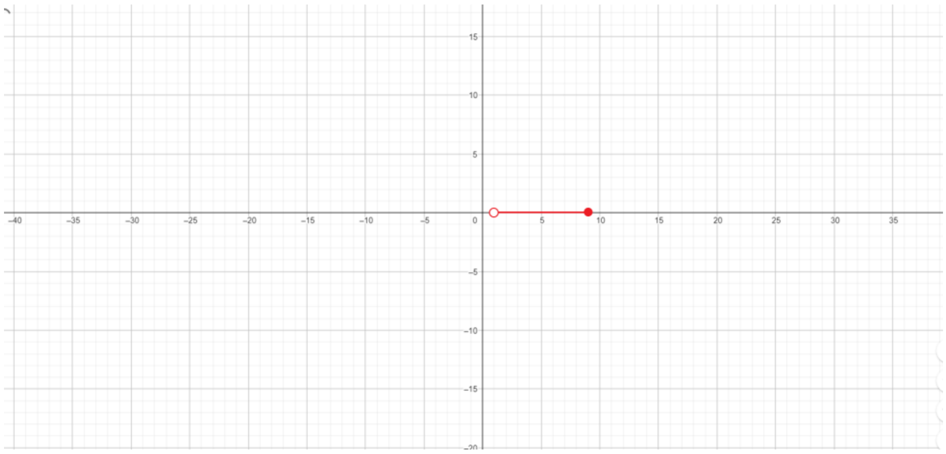
β) $1 < x < 2 \;\Rightarrow 1 < x^2 < 4$

$1 < y < 4 \;\Rightarrow 1 < y^2 < 16$

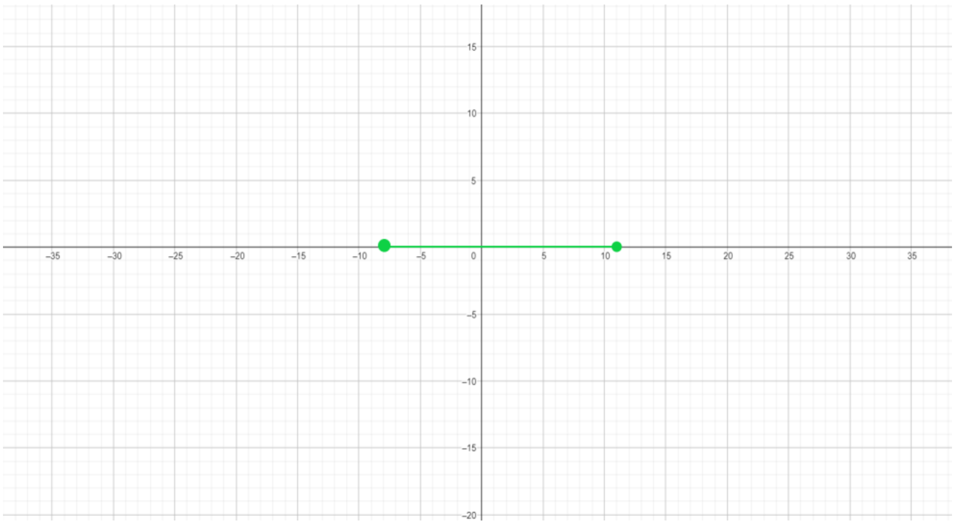
Άρα: $2 < x^2 + y^2 < 20, όπου \; E = x^2 + y^2.$

Άσκηση 8

α) $A = (1, 9]$

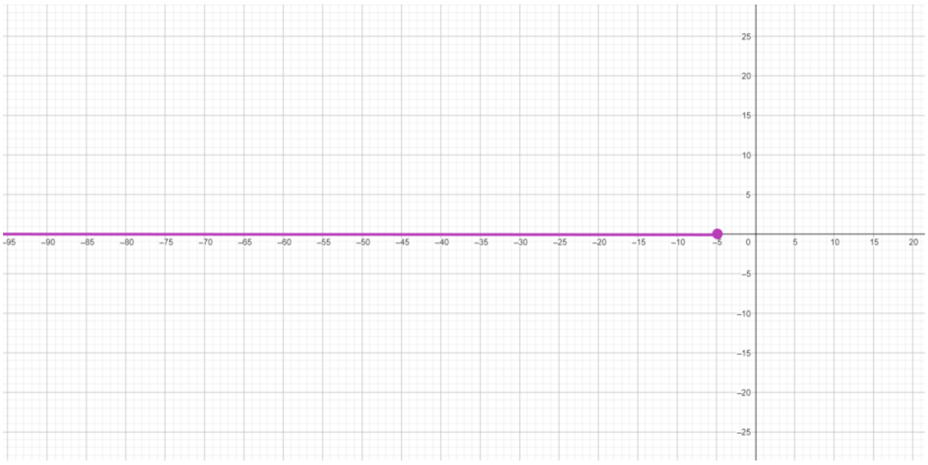


β) $B = [-8, 11]$



γ) $\Gamma = (10, +\infty)$

δ) $\Delta = (-\infty, -5]$



Άσκηση 9

$0 \leq \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2$

$\frac{\alpha^2}{\alpha+1} < \frac{\beta^2}{\beta+1} \Leftrightarrow$

$\alpha^2(\beta+1) < \beta^2(\alpha+1) \Leftrightarrow \alpha^2\beta + \alpha^2 < \beta^2\alpha + \beta^2 \overset{\alpha^2<\beta^2}{\Longleftrightarrow} \alpha^2\beta < \beta^2\alpha \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha\beta < \beta^2 \Leftrightarrow$
$\alpha < \beta$

που ισχύει. Άρα, η αρχική ανίσωση ισχύει πάντα.

Άσκηση 10

$0 \leq \alpha < \beta < 1$

Ομοίως με την προηγούμενη άσκηση:

$$\frac{\beta}{\beta-1} < \frac{\alpha}{\alpha-1} \overset{\alpha,\beta<1}{\Longleftrightarrow} -\frac{\beta}{1-\beta} < -\frac{\alpha}{1-\alpha} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha} < \frac{\beta}{1-\beta} \Leftrightarrow \alpha - \alpha\beta < \beta - \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

το οποίο ισχύει από την υπόθεση. Άρα, η αρχική σχέση ισχύει.

Άσκηση 11

$0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$

Για να ισχύει η δοθείσα σχέση πρέπει, αν την αναπτύξουμε, να καταλήξουμε σε κάτι που ισχύει επίσης.

$$(\alpha-\beta)^2 < \beta^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < 1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \Leftrightarrow 1 - 2\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} < 1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \Leftrightarrow$$

$2\frac{\alpha^2}{\beta^2} < 2\frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} < \frac{\alpha}{\beta}$, το οποίο ισχύει, αφού $\frac{\alpha}{\beta} < 1$.

Άσκηση 12

$0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1 \Rightarrow 0 < \alpha < \beta$

Ομοίως με την προηγούμενη άσκηση, αναπτύσσουμε τη δοθείσα σχέση.

$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha} > 2 \Leftrightarrow 2\alpha < \alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$, που ισχύει.

Άσκηση 13

<u>1ος Τρόπος:</u>

$2 < \alpha \Leftrightarrow \alpha - 2 > 0$ και $\beta < 3 \Leftrightarrow \beta - 3 < 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)(\beta - 3) < 0 \Leftrightarrow$

$\alpha\beta - 2\beta - 3\alpha + 6 < 0 \Leftrightarrow \alpha\beta + 6 < 3\alpha + 2\beta$

<u>2ος Τρόπος (πιο δύσκολος!):</u>

$2 < \alpha < \beta < 3$

- $2\alpha < \alpha^2 < \alpha\beta < 3\alpha$
- $2\beta < \alpha\beta < \beta^2 < 3\beta$
- $4 < 2\alpha < 2\beta < 6$
- $6 < 3\alpha < 3\beta < 9$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι $2\alpha < 2\beta < 3\alpha < 3\beta$.

Συνεπώς, έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} \alpha\beta < 3\alpha \\ 6 < 3\alpha \\ 2\beta < 3\alpha \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha\beta + 2\beta < 3\alpha + 3\beta \\ 6 + 2\beta < 3\alpha + 2\beta \\ 4\beta < 3\alpha + 2\beta \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha\beta + 6 + 4\beta < 2(3\alpha + 2\beta) \\ 4\beta < 3\alpha + 2\beta \end{Bmatrix} \Rightarrow \alpha\beta + 6 < 3\alpha + 2\beta.$$

Άσκηση 14

α) Αφού $\alpha\beta > 0$, συμπεραίνουμε ότι οι α και β είναι ομόσημοι αριθμοί. Άρα:

$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}\geq\frac{2\alpha\beta}{\alpha\beta}\geq 2$, διότι όπως γνωρίζουμε ισχύει πάντα $(\alpha-\beta)^2\geq 0$.

β)$\frac{4\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}\geq\frac{4\alpha\beta}{\alpha\beta}\geq 0$, διότι όπως ξέρουμε ισχύει πάντα $(\alpha-2\beta)^2\geq 0$.

Άσκηση 15

α) $\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+2\beta)^2 \geq 0$, που ισχύει πάντα.

β) $\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+\beta^2\geq 0$,

που ισχύει πάντα ως άθροισμα μη αρνητικών όρων.

γ) $\alpha^2-3\alpha\beta+3\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2-2*\frac{3}{2}\alpha\beta+3\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow \left(\alpha-\frac{3}{2}\beta\right)^2+\frac{3}{4}\beta^2\geq 0$,

που ισχύει πάντα ως άθροισμα μη αρνητικών όρων.

Άσκηση 16

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\geq\frac{(\alpha+\beta)^2}{4} \Leftrightarrow 4*\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\geq 4*\frac{(\alpha+\beta)^2}{4} \Leftrightarrow 2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow$$

$2\alpha^2+2\beta^2\geq\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0$, που ισχύει πάντα.

Άσκηση 17

Αφού $\alpha<\beta$, και x θετικός αριθμός, συμπεραίνουμε ότι $x\neq 0$. Άρα:

.

$$\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha+x}{\beta+x} \Leftrightarrow \alpha(\beta+x)<\beta(\alpha+x) \Leftrightarrow \alpha\beta+\alpha x<\alpha\beta+\beta x \Leftrightarrow \alpha<\beta$$

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

α) $|\sqrt{2}-3| = 3-\sqrt{2}$

β) $|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$

γ) $\left|1-\frac{7}{8}\right| - \left|1-\frac{9}{8}\right| = 1-\frac{7}{8}-\frac{9}{8}+1 = 0$

δ) $|\sqrt{56}-\sqrt{29}| - |\sqrt{29}-\sqrt{56}| = \sqrt{56}-\sqrt{29}+\sqrt{29}-\sqrt{56} = 0$

ε) $|\sqrt{2}+1| - |-8-\sqrt{2}| = \sqrt{2}+1-8-\sqrt{2} = -7$

στ) $\left|\frac{29}{17}-3\right| + \left|-\frac{29}{17}-1\right| = 3-\frac{29}{17}+\frac{29}{17}+1 = 4$

Άσκηση 2

Ισχύει ότι $1 < x < 2$.

α) $|x-1| + |x-2| = x-1+2-x = 1$

β) $|x-5| - |-8-x| = 5-x-8-x = -2x-3$

Άσκηση 3

Ισχύει ότι $x > 5$. Άρα: $|x-5| - |2-x| = x-5-x+2 = -3$

Άσκηση 4

$|2x-3|-|6-4x|+|3-2x|=|2x-3|-2|3-2x|+|3-2x|=$

$|2x-3|-|3-2x|\Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} 2x-3-(2x-3)=2x-3-2x+3=0, \gamma\iota\alpha\ x>\frac{3}{2} \\ 3-2x-(3-2x)=3-2x-3+2x=0, \gamma\iota\alpha\ \ x<\frac{3}{2} \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 5

α) $\frac{x}{|x|}=1, \alpha\nu\ x>0$ ή $\ -1, \alpha\nu\ x<0$

β) $\frac{x}{|x|}+\frac{|y|}{y}=\begin{Bmatrix} 2,\ \ \alpha\nu\ x,y>0 \\ 0, \alpha\nu\ x>0\ \kappa\alpha\iota\ y<0 \\ 0, \alpha\nu\ x<0\ \kappa\alpha\iota\ y>0 \\ -2, \alpha\nu\ x,y<0 \end{Bmatrix}$

Άσκηση 6

$(|x|+x)\left(1-\frac{x}{|x|}\right)=|x|+x-\frac{|x|x}{|x|}-\frac{x^2}{|x|}=$

$\begin{Bmatrix} x+x-x-x=0, \alpha\nu\ x>0 \\ -x+x-x+x=0, \alpha\nu\ x<0 \end{Bmatrix}$

Άσκηση 7

α) Έστω e το δοθέν σφάλμα. Άρα $|e|\ =|m-250|=\begin{Bmatrix} m-250, \alpha\nu\ m>250 \\ 250-m, \alpha\nu\ m<250 \end{Bmatrix}$.

β) Αφού το μέγιστο δοθέν σφάλμα είναι ± 5, συμπεραίνουμε ότι

$245\leq m\leq 255.$

Άσκηση 8

Απόσταση δύο πραγματικών αριθμών ορίζεται η διαφορά των απόλυτων τιμών των αριθμών αυτών, αν οι αριθμοί είναι ομόσημοι ή το άθροισμα των απόλυτων τιμών των αριθμών αυτών, αν οι αριθμοί είναι ετερόσημοι και είναι πάντα θετική. Άρα:

α) $d = 9 - 7 = 2$

β) $d = |-3| + 8 = 11$

γ) $d = |-10| - |-5| = 5$

δ) $d = 21 - 0 = 21$

ε) $d = |-21| - 0 = 21$

στ) $d = 81 - 53 = 28$

Άσκηση 9

α) $\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma = 4,\ \ \kappa\acute{\epsilon}\nu\tau\rho o = 4,\ \ \alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha\ 2$

β) $\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma \approx 7,\ \ \kappa\acute{\epsilon}\nu\tau\rho o \approx 3{,}5,\ \ \alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha \approx 4{,}5$

γ) $\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma \approx 12,\ \ \kappa\acute{\epsilon}\nu\tau\rho o \approx 3,\ \ \alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha \approx 6$

δ) $\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma \approx 6,\ \ \kappa\acute{\epsilon}\nu\tau\rho o \approx -4,\ \ \alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha \approx 3$

Άσκηση 10

α) $|\alpha-\beta| \leq |\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha-\beta|^2 \leq (|\alpha|+|\beta|)^2 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \leq |\alpha|^2$

$+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2 \Leftrightarrow -\alpha\beta \leq |\alpha||\beta|$ που ισχύει $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

β) Έστω $\alpha<\gamma<\beta$, δηλαδή το σημείο γ παρεμβάλλεται μεταξύ των α και β.

$|\alpha-\beta| \leq |\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta| \Leftrightarrow |\alpha-\beta|^2 \leq |\alpha-\gamma|^2+2|\alpha-\gamma||\gamma-\beta|+$

$|\gamma-\beta|^2 \overset{|\alpha-\gamma|=\gamma-\alpha}{\underset{|\gamma-\beta|=\beta-\gamma}{\Longleftrightarrow}} \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \leq \alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2+2(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)+\gamma^2$

$-2\gamma\beta+\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \leq \alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2+2\beta\gamma-2\alpha\beta-2\gamma^2+2\alpha\gamma$

$+\gamma^2-2\gamma\beta+\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2 \leq \alpha^2+\beta^2$, που ισχύει.

γ) $|\alpha+\beta| \leq |\alpha+\gamma|+|\beta-\gamma| \Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2 \leq |\alpha+\gamma|^2+2|\alpha+\gamma||\beta-\gamma|+$

$|\beta-\gamma|^2 \xLeftrightarrow{\gamma<\beta \Rightarrow |\beta-\gamma|=\beta-\gamma} \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \leq \alpha^2+2\alpha\gamma+\gamma^2+2(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)+$

$\gamma^2-2\gamma\beta+\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \leq \alpha^2+2\alpha\gamma+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma-2\alpha\gamma$

$-2\gamma^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2 \leq \alpha^2+\beta^2$, που ισχύει.

Άσκηση 11

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή Ένωση διαστημάτων
$\lvert x-1\rvert < 3$	$d(x, 1) < 3$	$(-2, 4)$
$\lvert x-2\rvert < 5$	$d(x,2) < 5$	$(-3,7)$
$\lvert x+1\rvert \leq 7$	$d(x,-1) \leq 7$	$[-8,6]$
$\lvert x-3\rvert \geq 0$	$d(x, 3)$	$(-\infty,3] \cup [3,+\infty)$
$\lvert x-5\rvert > 1$	$d(x,5) > 1$	$(-\infty,4) \cup (6,+\infty)$
$\lvert x\rvert \geq 8$	$d(x, 0) \geq 8$	$(-\infty,-8] \cup [8,+\infty)$

$\lvert x-7\rvert \le 2$	$d(x,7) \le 2$	$[5, 9]$
$\lvert x\rvert > 3$	$d(x,0) > 3$	$(-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$
$\lvert x-4\rvert \ge 7$	$d(x,4) \ge 7$	$(-\infty,-3] \cup [11,+\infty)$
$\lvert x+5\rvert \ge 1$	$d(x,-5) \ge 1$	$(-\infty,-6] \cup [-4,+\infty)$

Άσκηση 12

α) Έστω $\alpha \ge \beta$. Τότε, $|\alpha-\beta| = \alpha-\beta$, οπότε $\max\{a,\beta\} = \frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2} = \frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}$

$= \frac{2\alpha}{2} = \alpha$, που ισχύει. Αν τώρα $\beta \ge \alpha$, $|\alpha-\beta| = \beta-\alpha$, οπότε αντίστοιχα

$\max\{a,\beta\} = \frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2} = \frac{\alpha+\beta+\beta-\alpha}{2} = \frac{2\beta}{2} = \beta$, που ισχύει πάλι.

β) Ομοίως, για $\alpha \ge \beta$, $\min\{a,\beta\} = \frac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2} = \frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2} = \frac{2\beta}{2} = \beta$, που ισχύει και

αντίστοιχα για $\beta \ge \alpha$, $min\{a,\beta\} = \frac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2} = \frac{\alpha+\beta-\beta+\alpha}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$, που ισχύει.

Άσκηση 13

α) $|\alpha-3| + |2\beta-8| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3 \; \kappa\alpha\iota \; \beta = 4$

β) $|\alpha-3\beta| + |\beta+1| = 0 \Leftrightarrow \beta = -1 \; \kappa\alpha\iota \; \alpha = -3$

γ) $|4\alpha-2| + |\beta+3| = |1-2\alpha| \; \Leftrightarrow \beta = -3 \; \kappa\alpha\iota \; \alpha = \frac{1}{2}$

Άθροισμα μη αρνητικών όρων ίσο με το μηδέν.

Άσκηση 14

α) $\alpha > 1 \Leftrightarrow 1 < \alpha < \alpha^2$

β) Θα συγκρίνουμε τις αποστάσεις τους από το α, δηλαδή τις απόλυτες τιμές των διαφορών τους με το α.

$$\begin{Bmatrix} |\alpha - 1| \\ |\alpha - \alpha^2| \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} |\alpha - 1| \\ |\alpha||\alpha - 1| \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} |\alpha - 1| \\ \alpha|\alpha - 1| \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

Συνεπώς, το 1 βρίσκεται πλησιέστερα στο α από το α^2.

Άσκηση 15

$|x-3| < 2 \ \kappa\alpha\iota \ |y-5| < 1 \Leftrightarrow -2 < x-3 < 2 \ \kappa\alpha\iota -1 < y-5 < 1 \Leftrightarrow$

$1 < x < 5 \ \kappa\alpha\iota \ -4 < y < 6.$ Άρα:

α) $-3 < x + y < 11$

β) $-5 < x - y < 9$

γ) $\begin{Bmatrix} -20 < xy < 0, \ \gamma\iota\alpha\ 1 < x < 5 \ \kappa\alpha\iota \ -4 < y < 0 \\ 0 < xy < 30, \ \gamma\iota\alpha\ 1 < x < 5 \ \kappa\alpha\iota\ 0 < y < 6 \end{Bmatrix}$

δ) $0 < x^2 - 1 < 24$

Άσκηση 16

$|x-10| < 2 \ \kappa\alpha\iota \ |y-5| < 1 \Leftrightarrow -8 < x < 12 \ \kappa\alpha\iota \ 4 < y < 6$

Επειδή το x εκφράζει ένα φυσικό μήκος, είναι σίγουρα θετικός αριθμός. Άρα,

$0 < x < 12 \ \kappa\alpha\iota \ 4 < y < 6.$

α) $\Pi = x + x + y + y + y + (x - y) + x = 4x + 2y \Leftrightarrow 0 < \Pi < 60$

$E = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 16 < E < 180$

β) $\Pi = 2\pi R = 2\pi x \Leftrightarrow 0 < \Pi < 24\pi$

$E = \pi R^2 = \pi x^2 \Leftrightarrow 0 < E < 144\pi$

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

α) $\sqrt{324} = \sqrt{18^2} = |18| = 18$

β) $\sqrt{1600} = \sqrt{40^2} = |40| = 40$

γ) $\sqrt{0{,}64} = \sqrt{0{,}8^2} = |0{,}8| = 0{,}8$

δ) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

ε) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

στ) $\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$

Άσκηση 2

α) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = 2^2 = 4$

β) $\sqrt[4]{5^4 * 16} = \sqrt[4]{5^4} * \sqrt[4]{2^4} = |5| * |2| = 10$

γ) $81^{\frac{6}{4}} = \sqrt[4]{81^6} = \sqrt{81^3} = 729$

δ) $(3^6)^{\frac{2}{3}} = 3^4 = 81$

ε) $\sqrt[5]{7^{10}} = 7^2 = 49$

στ) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{11^{30}}} = \sqrt[5]{11^{10}} = 11^2 = 121$

Άσκηση 3

α) $((-5)^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

β) $\sqrt{\left(\frac{10}{3}-4\right)^2} = \left|\frac{10}{3}-4\right| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

γ) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$

δ) $\sqrt{(\sqrt{8}-\sqrt{11})^2} = |\sqrt{8}-\sqrt{11}| = \sqrt{11} - \sqrt{8}$

ε) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-3| = 3-\sqrt{5}$

στ) $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = \{x+1,\ \gamma\iota\alpha\ x \geq -1\}$ ή $\{1-x,\ \gamma\iota\alpha\ x < -1\}$

ζ) $\sqrt[4]{(-10)^4} = |-10| = 10$

η) $\sqrt[3]{(x-2)^3} = |x-2| = \{x-2,\ \gamma\iota\alpha\ x \geq 2\}$ ή $\{2-x,\ \gamma\iota\alpha\ x < 2\}$

θ) $\sqrt[5]{(x+8)^{10}} = (x+8)^2 = x^2+16x+64$

Προσοχή!

Η υπόριζος ποσότητα πρέπει να είναι πάντα θετική. Αλλιώς, η ρίζα δεν ορίζεται. Για αυτό, όταν βγαίνει η ρίζα, βάζουμε τον αριθμό σε απόλυτη τιμή.

Άσκηση 4

α) $3 > \sqrt{5},\ \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ 3^2 > \sqrt{5}^2 \Rightarrow 9 > 5$

β) $4 > \sqrt{15},\ \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ 4^2 > \sqrt{15}^2 \Rightarrow 16 > 15$

γ) $5 < \sqrt{27},\ \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ 5^2 < \sqrt{27}^2 \Rightarrow 25 < 27$

δ) $3 < \sqrt[3]{30},\ \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ 3^3 < \sqrt[3]{30}^3 \Rightarrow 27 < 30$

Άσκηση 5

α) $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5}, διότι\ \sqrt{3}^6 > \sqrt[3]{5}^6 \Rightarrow 27 > 25$

β) $\sqrt[3]{7} > \sqrt[4]{10}, διότι\ \sqrt[3]{7}^{12} > \sqrt[4]{10}^{12} \Rightarrow 2401 > 1000$

γ) $\sqrt[3]{4} > \sqrt[5]{5}, διότι\ \sqrt[3]{4}^{15} > \sqrt[5]{5}^{15} \Rightarrow 1024 > 125$

δ) $\sqrt[6]{3} > \sqrt[5]{2}, διότι\ \sqrt[6]{3}^{30} > \sqrt[5]{2}^{30} \Rightarrow 243 > 64$

Σημείωση:

Όταν θέλουμε να συγκρίνουμε δύο αριθμούς που είναι γραμμένοι υπό μορφή ρίζας, τότε τους υψώνουμε σε δύναμη που είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των τάξεων των ριζών.

Άσκηση 6

α) $\sqrt{(3-\sqrt{7})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2} = |3-\sqrt{7}| + |2-\sqrt{7}| = 3-\sqrt{7}+\sqrt{7}-2 = 1$

β)
$\sqrt{(\sqrt{11}-4)^2} - \sqrt{(\sqrt{11}-5)^2} = |\sqrt{11}-4| - |\sqrt{11}-5| = 4-\sqrt{11}-(5-\sqrt{11}) = -1$

Άσκηση 7

α) $(\sqrt{7}-\sqrt{2}) * (\sqrt{7}+\sqrt{2}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5$

β)
$(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}) * (\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}) = (\sqrt{x-1})^2 - (\sqrt{x+2})^2 = |x-1| - |x+2| =$

- $\{1-x-(-2-x) = 3, για\ x < -2\ \}$
- $\{1-x-x+2 = 3-2x, για\ -2 \leq x < 1\}$
- $\{x-1-x-2 = -3, για\ x > 1\}$

γ)

$\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-5}\right)*\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-5}\right)=\left(\sqrt{2x-3}\right)^2-\left(\sqrt{x-5}\right)^2=|2x-3|$

$-|x-5|=$

- $\left\{-2x+3-(5-x)=-2x+3-5+x=-(x+2), για x<\frac{2}{3}\right\}$
- $\left\{2x-3-(5-x)=2x-3-5+x=3x-8, για \frac{2}{3}\leq x\leq 5\right\}$
- $\{2x-3-x+5=x+2, για\ x>5\}$

Άσκηση 8

α) $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

β) $\sqrt{48}=\sqrt{3*16}=4\sqrt{3}$

γ) $\sqrt{125}=\sqrt{5*25}=5\sqrt{5}$

δ) $\sqrt{192}=\sqrt{4*48}=8\sqrt{3}$

ε) $\sqrt{112}=\sqrt{7*16}=4\sqrt{7}$

στ) $\sqrt{50}=\sqrt{2*25}=5\sqrt{2}$

ζ) $\sqrt{80}=\sqrt{5*16}=4\sqrt{5}$

η) $\sqrt{176}=\sqrt{11*16}=4\sqrt{11}$

θ) $\sqrt{98}=\sqrt{2*49}=7\sqrt{2}$

Άσκηση 9

α) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)*\left(\sqrt{32}-\sqrt{50}+\sqrt{18}\right)=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)*\left(4\sqrt{2}-5\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)=$

$\sqrt{2}*2\sqrt{2}=4$

β) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)*\left(\sqrt{27}-\sqrt{147}+\sqrt{12}\right)=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)*\left(3\sqrt{3}-7\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)=$

$\sqrt{3}*\left(-2\sqrt{3}\right)=-6$

Άσκηση 10

α) $(2\sqrt{11}+\sqrt{10}) * (2\sqrt{11}-\sqrt{10}) = 44-10 = 34$ (διαφορά τετραγώνων)

β) $(\sqrt{20}-\sqrt{7}) * (\sqrt{125}-\sqrt{45}+\sqrt{7}) = (2\sqrt{5}-\sqrt{7}) * (5\sqrt{5}-3\sqrt{5}+\sqrt{7}) =$

$(2\sqrt{5}-\sqrt{7}) * (2\sqrt{5}+\sqrt{7}) = 20-7 = 13$

γ) $(\sqrt{12}+2) * (\sqrt{108}-\sqrt{48}-2) = (2\sqrt{3}+2) * (6\sqrt{3}-4\sqrt{3}-2) =$

$(2\sqrt{3}+2) * (2\sqrt{3}-2) = 12-4 = 8$

Άσκηση 11

α) $\frac{10\sqrt{48}}{\sqrt{75}} = \frac{10*4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = 8$

β) $\frac{8\sqrt{72}}{\sqrt{32}} = \frac{8*6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 12$

γ) $\frac{\sqrt{60}*\sqrt{125}}{\sqrt{147}} = \frac{2\sqrt{3}*\sqrt{5}*5\sqrt{5}}{7\sqrt{3}} = \frac{50}{7}$

δ) $\frac{\sqrt{18}*\sqrt{176}}{\sqrt{32}*\sqrt{99}} = \frac{3\sqrt{2}*4\sqrt{11}}{4\sqrt{2}*3\sqrt{11}} = 1$

Άσκηση 12

α) $\frac{\sqrt{75}-\sqrt{12}}{\sqrt{192}-\sqrt{147}} = \frac{5\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{8\sqrt{3}-7\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$

β) $\frac{\sqrt{180}+\sqrt{80}}{\sqrt{125}-\sqrt{45}} = \frac{6\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{5\sqrt{5}-3\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 5$

γ) $\sqrt{\frac{25^{16}+5^{23}}{25^{15}+125^{7}}} = \sqrt{\frac{5^{32}+5^{23}}{5^{30}+5^{21}}} = \sqrt{\frac{5^{23}(5^{9}+1)}{5^{21}(5^{9}+1)}} = 5$

Άσκηση 13

α) $\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$

β) $\frac{3}{\sqrt{5}-2} = \frac{3(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}^2-2^2} = \frac{6+3\sqrt{5}}{5-4} = 6 + 3\sqrt{5}$

γ) $\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{11}+\sqrt{10}}{11-10} = \sqrt{11} + \sqrt{10}$

δ) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{3-2} = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$

ε) $\frac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{8}} = \frac{5(\sqrt{6}-\sqrt{8})}{6-8} = -\frac{5}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{8})$

στ) $\frac{\sqrt{6}}{5+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}(5-\sqrt{3})}{5-3} = \frac{5\sqrt{6}-\sqrt{18}}{2}$

Άσκηση 14

α) $\frac{4}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{4(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{12-2} = \frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{5}$

β) $\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{18-20} = -\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2}$

γ) $\frac{1}{\sqrt{50}-\sqrt{32}+\sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}-4\sqrt{2}+\sqrt{2}*\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{5})}{2(1-5)} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{5})}{-8} = -\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}} =$

$-\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$

Άσκηση 15

α) $\sqrt{2} * \sqrt{5-\sqrt{7}} * \sqrt{5+\sqrt{7}} = \sqrt{2(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})} = \sqrt{2(25-7)} = \sqrt{2*18} = 6$

β)

$\sqrt[5]{125} * \sqrt[5]{6+\sqrt{11}} * \sqrt[5]{6-\sqrt{11}} = \sqrt[5]{125(6+\sqrt{11})(6-\sqrt{11})} =$
$\sqrt[5]{125(36-11)} =$
$\sqrt[5]{125*25} = \sqrt[5]{3125} = 5$

γ) $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{11}} * \sqrt{\sqrt{11}-\sqrt{2}} = \sqrt{(11-2)} = 3$

Άσκηση 16

α) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{5*25}}} = \sqrt[3]{\sqrt[6]{125}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$

β) $\sqrt[5]{7\sqrt{\sqrt{7}}} = \sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{7*7^4}} = \sqrt[20]{7^5} = \sqrt[4]{7}$

Άσκηση 17

α) $\sqrt[3]{5^2} * \sqrt[7]{5^4} = 5^{\frac{2}{3}} * 5^{\frac{4}{7}} = 5^{\frac{26}{21}} = \sqrt[21]{5^{26}} = \sqrt[21]{5^{21}} * \sqrt[21]{5^5} = 5\sqrt[21]{5^5}$

β) $\sqrt[15]{7^2} * \sqrt[5]{7} = \sqrt[15]{7^2} * \sqrt[15]{7^3} = \sqrt[15]{7^5} = \sqrt[3]{7}$

γ) $\sqrt{2} * \sqrt[4]{8} * \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{4} * \sqrt[4]{8} * \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{4*8*2} = \sqrt[4]{64} = \sqrt{8}$

δ) $\sqrt{3} * \sqrt[3]{9} * \sqrt[4]{27} = \sqrt[12]{3^6} * \sqrt[3]{3^2} * \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[12]{3^6 * 3^8 * 3^9} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3\sqrt[12]{3^{11}}$

Άσκηση 18

α) $\frac{5\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(5\sqrt{5}+3\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \frac{25+3\sqrt{15}-5\sqrt{15}-9}{2} = 8 - 2\sqrt{15}$

β) Από α' ερώτημα, προκύπτει ότι $\alpha = 5 \; \kappa\alpha\iota \; \beta = 3$.

Άσκηση 19

α) $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \frac{5\sqrt{15}-15+15-3\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15}$

β) Από α' ερώτημα, προκύπτει ότι $\alpha = 3 \; \kappa\alpha\iota \; \beta = 5$.

Άσκηση 20

α) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = \sqrt{6} + 2 + 3 - \sqrt{6} = 5$

β) Από α' ερώτημα, προκύπτει ότι $\alpha = 2 \; \kappa\alpha\iota \; \beta = 3 \left(\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{3+2}{3-2}\right)$.

Άσκηση 21

α) $(2+3\sqrt{5})^2 = 4+12\sqrt{5}+45 = 49+12\sqrt{5}$

$(2-3\sqrt{5})^2 = 4-12\sqrt{5}+45 = 49-12\sqrt{5}$

β) $\xrightarrow{\alpha'\ \varepsilon\rho\acute{\omega}\tau\eta\mu\alpha} \sqrt{49+12\sqrt{5}}-\sqrt{49-12\sqrt{5}} = \sqrt{(2+3\sqrt{5})^2}-\sqrt{(2-3\sqrt{5})^2} =$

$2+3\sqrt{5}-|2-3\sqrt{5}| = 2+3\sqrt{5}-(3\sqrt{5}-2) = 4$

Άσκηση 22

α) $(1+2\sqrt{3})^2 = 1+4\sqrt{3}+12 = 13+4\sqrt{3}$

$(5-\sqrt{3})^2 = 25-10\sqrt{3}+3 = 28-10\sqrt{3}$

β) $\xrightarrow{\alpha'\ \varepsilon\rho\acute{\omega}\tau\eta\mu\alpha} \sqrt{13+4\sqrt{3}}+\sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{(1+2\sqrt{3})^2}+2\sqrt{(5-\sqrt{3})^2} =$

$1+2\sqrt{3}+2(5-\sqrt{3}) = 11$

Άσκηση 23

$$\frac{1}{(1-\sqrt{2})^2}-\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} = \frac{(1+\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})^2}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = \frac{3+2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}}{9-8} = 4\sqrt{2}$$

Άσκηση 24

Αφού ο α είναι ρητός, αυτό σημαίνει ότι γράφεται με το μορφή κλάσματος, δηλαδή:

$\alpha = \frac{\kappa}{\lambda}$, $\mu\varepsilon\ \kappa,\lambda \in \mathbb{Z}$. Άρα:

$$\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha^{-1}}\right)^2 = \alpha-2\sqrt{\alpha*\frac{1}{\alpha}}+\frac{1}{\alpha} = \alpha+\frac{1}{\alpha}-2 = \frac{\kappa}{\lambda}+\frac{\lambda}{\kappa}-2 = \frac{\kappa^2+\lambda^2-2\kappa\lambda}{\kappa\lambda} =$$

$\frac{(\kappa-\lambda)^2}{\kappa\lambda} \Rightarrow$ Είναι ρητός, αφού το κλάσμα ορίζεται.

Άσκηση 25

α) Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα, κάθε πλευρά σε ένα τρίγωνο είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο πλευρών. Συνεπώς, προκύπτει:

$$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2 \overset{\gamma<\alpha+\beta}{\Longleftrightarrow} \alpha^2+\beta^2<\alpha+\beta^2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+\beta^2}<\alpha+\beta$$

β) Υποθέτουμε ότι ισχύει η δοθείσα ανίσωση. Άρα:

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\leq\alpha+\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2\leq(\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2\leq\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2,$$

που ισχύει πάντα, αφού $\alpha,\beta>0$. Η ισότητα ισχύει για $\alpha,\beta=0$.

Άσκηση 26

$$A=\sqrt{1+2008\sqrt{1+2009*2011}}=\sqrt{1+2008\sqrt{1+(2010-1)(2010+1)}}=$$

$$\sqrt{1+2008\sqrt{1+2010^2-1^2}}=\sqrt{1+2008*2010}=\sqrt{1+(2009-1)(2009+1)}$$
$$=$$
$$\sqrt{1+2009^2-1^2}=2009$$

Άσκηση 27

$$A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}} \quad \kappa\alpha\iota \quad B=\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}$$

i) $A^2=7-4\sqrt{3}+2\sqrt{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}+7+4\sqrt{3}=14+2\sqrt{49-48}=16$

$A=\sqrt{A^2}=4$

ii) $B^2 = 7 - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{(7 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})} + 7 + 4\sqrt{3} = 14 - 2\sqrt{49 - 48} = 12$

$B = \sqrt{B^2} = 2\sqrt{3}$

iii) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 4 \qquad (1)$

$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \quad (2)$

$\overset{(1)+(2)}{\Longleftrightarrow} \Gamma = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

$\overset{(1)-(2)}{\Longleftrightarrow} \Delta = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$

Κεφάλαιο 3 : Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

α) $2x+1-(x-5)=5(x+2) \Leftrightarrow 2x+1-x+5=5x+10 \Leftrightarrow$

$-4x-4=0 \Leftrightarrow -4x=4 \Leftrightarrow x=-1$

β) $\frac{x-1}{3}-\frac{3x+2}{4}=\frac{4-x}{6}+3 \Leftrightarrow 4(x-1)-3(3x+2)=2(4-x)+36 \Leftrightarrow$

$4x-4-9x-6=8-2x+36 \Leftrightarrow -3x=54 \Leftrightarrow x=18$

γ) $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=\frac{x}{15}+1 \Leftrightarrow 5x+3x=x+15 \Leftrightarrow 7x=15 \Leftrightarrow x=\frac{15}{7}$

δ) $1{,}8-(x+2{,}3)=5{,}6-2x \Leftrightarrow 1{,}8-x-2{,}3=5{,}6-2x \Leftrightarrow$

$-0{,}5-x=5{,}6-2x \Leftrightarrow x=6{,}1$

Άσκηση 2

α) $3x-(x+8)=2(x-5) \Leftrightarrow 3x-x-8=2x-10 \Leftrightarrow 0=-2 \not\Leftrightarrow$ *αδύνατη*

β) $15-9x=3(5-3x) \Leftrightarrow 15-9x=15-9x \Leftrightarrow$ *αόριστη*

γ) $8x+12=4(3-2x) \Leftrightarrow 8x+12=12-8x \Leftrightarrow 16x=0 \Leftrightarrow x=0$

Άσκηση 3

α) $(\lambda-2)x=8 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\frac{8}{\lambda-2}, για\ \lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\} \\ αδύνατη, για\ \lambda=0 \end{Bmatrix}$

β) $(\lambda+1)x=2\lambda \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\frac{2\lambda}{\lambda+1}, για\ \lambda\in\mathbb{R}\backslash\{-1\} \\ αδύνατη, για\ \lambda=-1 \end{Bmatrix}$

γ) $\lambda(\lambda+2)x=4\lambda \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\frac{4\lambda}{\lambda^2+2\lambda}, για\ \lambda\in\mathbb{R}\backslash\{-2,0\} \\ αδύνατη\ για\ \lambda=-2 \\ αόριστη\ για\ \lambda=0 \end{Bmatrix}$

δ) $(\lambda^2-1)x=(\lambda+1)^2 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2-1}=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}, για\ \lambda\in\mathbb{R}\backslash\{1,-1\} \\ αδύνατη, για\ \lambda=1 \\ αόριστη\ για\ \lambda=-1 \end{Bmatrix}$

Άσκηση 4

$$\lambda^2(x-1)=2(2x+1)+3\lambda \Leftrightarrow \lambda^2x-\lambda^2=4x+2+3\lambda \xLeftrightarrow{ίσα\ πολυώνυμα}$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda^2=4 \\ -\lambda^2=2+3\lambda \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \lambda=2\ ή\ \lambda=-2 \\ \lambda^2+2\lambda+\lambda+2=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \lambda=2\ ή\ \lambda=-2 \\ \lambda(\lambda+2)+\lambda+2=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda=2\ ή\ \lambda=-2 \\ (\lambda+2)(\lambda+1)=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \lambda=2\ ή\ \lambda=-2 \\ \lambda=-2\ ή\ \lambda=-1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} Για\ \lambda\in\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}, x=\dfrac{\lambda+1}{\lambda-2}. \\ Για\ \lambda=-2, αόριστη. \\ Για\ \lambda=2, αδύνατη. \\ Για\ \lambda=-1, προκύπτει\ x=0. \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 5

α) $S = u_0 t - \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow u_0 t = S + \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow u_0 = \frac{S}{t} + \frac{1}{2}at$

β) $u = \frac{2\pi(R-r)}{T} \Leftrightarrow R - r = \frac{uT}{2\pi} \Leftrightarrow R = r + \frac{uT}{2\pi}$

Άσκηση 6

α) $(x-1)x^2 - 4(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = -2$

β) $(x+2)x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)x^2 - (x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 1$ ή $x = -1$

γ) $(x-2)^2 - (x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$

δ) $(x^2-4) - x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) - (x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$(x-2)(x+2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$

ε) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+3) - (x+3) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2-1) = 0$

$(x+3)(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = -1$ ή $x = 1$

στ) $(x-1)x^2 - 2x(1-x) + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)x^2 + 2x(x-1) + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

Άσκηση 7

α) $(x-1)(x^2+4)=2x(x-1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x+4)=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)[(x-1)^2+3]=0 \Leftrightarrow x=1$

β) $3x(x+1)=x^2+2x+1 \Leftrightarrow 3x(x+1)=(x+1)^2 \Leftrightarrow (x+1)(x+1-3x)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(-2x+1)=0 \Leftrightarrow \ x=-1$ ή $x=\frac{1}{2}$

γ) $2x^2-8=x^2+4x+4 \Leftrightarrow 2(x-2)(x+2)=(x+2)^2 \Leftrightarrow$

$(x+2)(x+2-2x+4)=0 \Leftrightarrow \ x=-2$ ή $x=-6$

δ) $1-9x^2=9x^2-6x+1 \Leftrightarrow 18x^2-6x=0 \Leftrightarrow 6x(3x-1)=0 \Leftrightarrow$

$x=0$ ή $x=\frac{1}{3}$

Άσκηση 8

α) $\frac{2}{x+1}=\frac{7-x}{x^2-1} \Leftrightarrow 2(x-1)(x+1)=(x+1)(7-x) \Leftrightarrow$

$(x+1)(2x-2-7+x)=0 \Leftrightarrow \ x=-1$ ή $x=-3$

β) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{3}{(x-1)(x-2)} \Leftrightarrow x-2+x-1=3 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$

γ) $\frac{1}{x}+\frac{3x}{x+1}=3 \Leftrightarrow x+1+3x^2=3x(x+1) \Leftrightarrow x+1+3x^2=3x^2+3x \Leftrightarrow$

$2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

δ) $\frac{2}{x-1}-\frac{2x}{x^2-2x+1}=\frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow 2(x-1)(x+1)-2x(x+1)=x-1 \Leftrightarrow$

$2x^2-2-2x^2-2x=x-1 \Leftrightarrow 3x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$

Άσκηση 9

α) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{5}{(x+1)(x+3)} \Leftrightarrow x+3-x-1=5 \Leftrightarrow \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta$

β) $\frac{x}{x-2}-\frac{4}{x}=\frac{4}{x^2-2x} \Leftrightarrow x^2-4x+8=4 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$

γ) $\frac{3x+1}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-1} \Leftrightarrow 3x+1-x+1=2x+2 \Leftrightarrow \alpha\acute{o}\rho\iota\sigma\tau\eta$

δ) $\frac{2}{x}-\frac{x-1}{(x+3)(x-1)}=\frac{7}{x(x+3)} \Leftrightarrow 2(x+3)(x-1)-x(x-1)=7(x-1) \Leftrightarrow$

$2x^2+4x-6-x^2+x=7x-7 \Leftrightarrow \ x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$

ε) $\frac{x^2-1}{x+1}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

στ) $\frac{x^2-2x+1}{x-1}=0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x-1}=0 \Leftrightarrow$ αδύνατη, γιατί, αν απλοποιήσουμε το κλάσμα, προκύπτει $x=1$ και έτσι δεν ορίζεται το αρχικό κλάσμα.

Άσκηση 10

α) $|x|=3 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-3$

β) $|2x+5|=3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x+5=3 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1 \\ \text{ή} \\ 2x+5=-3 \Leftrightarrow 2x=-8 \Leftrightarrow x=-4 \end{array}\right\}$

γ) $|2x+5|=0 \Leftrightarrow 2x+5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$

δ) $|2x+5|=-3 \not\Leftrightarrow \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta$

Άσκηση 11

α) $|x+3| = |2x-5| \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x+3 = 2x-5 \Leftrightarrow x = 8 \\ \text{ή} \\ x+3 = 5-2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \end{Bmatrix}$

β) $|8-2x| = |3x+1| \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 8-2x = 3x+1 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5} \\ \text{ή} \\ 8-2x = -3x-1 \Leftrightarrow x = -9 \end{Bmatrix}$

γ) $|x+5| = 4x-2 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 4x-2 = x+5 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \\ \text{ή} \\ 4x-2 = -x-5 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5} \end{Bmatrix} \xLeftrightarrow{4x-2\geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}} x = \frac{7}{3}$

δ) $|x+5| = 2-4x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x+5 = 2-4x \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5} \\ \text{ή} \\ x+5 = 4x-2 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \end{Bmatrix} \xLeftrightarrow{2-4x\geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}} x = -\frac{3}{5}$

Άσκηση 12

α) $\frac{|x|-4}{2} + \frac{|x|-5}{3} = 3 \Leftrightarrow 3|x| - 12 + 2|x| - 10 = 18 \Leftrightarrow 5|x| = 40 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 8 \\ \text{ή} \\ x = -8 \end{Bmatrix}$

β) $\frac{|2x+1|-4}{2} + \frac{|2x+1|-5}{3} = 3 \Leftrightarrow 3|2x+1| - 12 + 2|2x+1| - 10 = 18 \Leftrightarrow$

$5|2x+1| = 40 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x+1 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \\ \text{ή} \\ 2x+1 = -8 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{2} \end{Bmatrix}$

γ) $\frac{2|x|-1}{5} + \frac{5-3|x|}{2} = -1 \Leftrightarrow 4|x| - 2 + 25 - 15|x| = -10 \Leftrightarrow -11|x| = -33 \Leftrightarrow$

$|x| = 3 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 3 \\ \text{ή} \\ x = -3 \end{Bmatrix}$

δ) $3(|x|+4)-8=|x| \Leftrightarrow 3|x|+12-8=|x| \Leftrightarrow |x|=-2 \not\Leftrightarrow \textit{αδύνατη}$

ε) $|3x-2|+|6x-4|=3 \Leftrightarrow 3|3x-2|=3 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 3x-2=1 \Leftrightarrow x=1 \\ \text{ή} \\ 3x-2=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \end{matrix}\right\}$

στ) $|1-2x|+|10x-5|=3|2x-1|+6 \Leftrightarrow |-1||2x-1|+2|2x-1|=$

$3|2x-1|+6 \Leftrightarrow 0=6 \Rightarrow \textit{αδύνατη}$

Άσκηση 13

α) $\left|\frac{x-1}{x+2}\right|=2 \Leftrightarrow |x-1|=2|x+2| \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x-1=2x+4 \Leftrightarrow x=-5 \\ \text{ή} \\ x-1=-2x-4 \Leftrightarrow x=-1 \end{matrix}\right\}$

β) $|x-3||x+1|=|x-3| \Leftrightarrow |(x-3)(x+1)|=|x-3| \Leftrightarrow$

$|x^2-2x-3|=|x-3| \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2-2x-3=x-3 \\ \text{ή} \\ x^2-2x-3=3-x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2-3x=0 \\ \text{ή} \\ x^2-x=6 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{matrix} x(x-3)=0 \\ \text{ή} \\ (x-3)(x+2)=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \text{ ή } x=3 \\ \text{ή} \\ x=3 \text{ ή } x=-2 \end{matrix}\right\}$

γ) $\frac{|3x+1|}{|1-2x|}=1 \Leftrightarrow |3x+1|=|1-2x| \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 3x+1=1-2x \\ \text{ή} \\ 3x+1=2x-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \\ \text{ή} \\ x=-2 \end{matrix}\right\}$

δ) $|x^2-4|=|x+2| \Leftrightarrow |x-2||x+2|-|x+2|=0 \Leftrightarrow$

$|x+2|(|x-2|-1)=0 \Leftrightarrow |x+2|=0 \text{ ή } |x-2|-1 \Leftrightarrow$

$x=-2 \text{ ή } \left\{\begin{matrix} x-2=1 \\ \text{ή} \\ x-2=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=-2 \\ \text{ή} \\ x=3 \\ \text{ή} \\ x=1 \end{matrix}\right\}$

Άσκηση 14

α) $4a(x-1)+4x^2=(2x-2)^2+a^2 \Leftrightarrow 4ax-4a+4x^2=4x^2-8x+4+a^2$

$\Leftrightarrow (4a+8)x=(a+2)^2 \Leftrightarrow x=\frac{a+2}{4}$ $\mu\varepsilon\ \alpha \in \mathbb{R}$

β) $2\alpha^2x^2+\beta^2(x+1)=(ax+\beta)^2+(\beta-\alpha)^2 \Leftrightarrow$

$2\alpha^2x^2+\beta^2x+\beta^2=a^2x^2+2a\beta x+\beta^2+\beta^2-2a\beta+\alpha^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2x^2-\alpha^2+\beta^2x-\beta^2=2\alpha\beta(x-1) \Leftrightarrow$

$a^2(x^2-1)+\beta^2(x-1)-2a\beta(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$a^2(x-1)(x+1)+\beta^2(x-1)-2a\beta(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)[a^2(x+1)+\beta^2-2a\beta]=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(\alpha^2x+a^2+\beta^2-2a\beta)=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)[\alpha^2x+(a-\beta)^2]=0 \Leftrightarrow$

$x=1$ ή $x=-\frac{(a-\beta)^2}{\alpha^2}$

Άσκηση 15

$$\frac{a(x-a)}{2-a}=2+a-\frac{\beta x}{2-a} \Leftrightarrow a(x-a)=4-a^2-\beta x \Leftrightarrow$$

$$ax-a^2=4-a^2-\beta x \Leftrightarrow (a+\beta)x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{a+\beta} \Leftrightarrow$$

Για να ορίζεται το κλάσμα πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός. Συνεπώς, οι α και β δεν πρέπει να είναι αντίθετοι αριθμοί.

Άσκηση 16

$$\frac{x^2(x-\lambda)}{x^2-2\lambda x+\lambda^2}=\frac{x^2-\lambda^2}{x+\lambda}\Leftrightarrow\frac{x^2(x-\lambda)}{(x-\lambda)^2}=\frac{(x-\lambda)(x+\lambda)}{x+\lambda}\Leftrightarrow\frac{x^2}{x-\lambda}=x-\lambda\Leftrightarrow$$

$$x^2=(x-\lambda)^2\Leftrightarrow x^2=x^2-2\lambda x+\lambda^2\Leftrightarrow 2\lambda x=\lambda^2\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=\dfrac{\lambda}{2}, \gamma\iota\alpha\ \lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\\ \alpha\acute{o}\rho\iota\sigma\tau\eta, \gamma\iota\alpha\ \lambda=0\end{Bmatrix}$$

Άσκηση 17

$$\frac{x^3+1}{x+1}=x^2+2x+1\Leftrightarrow\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=x^2+2x+1\Leftrightarrow$$

$$x^2-x+1=x^2+2x+1\Leftrightarrow x=0$$

Άσκηση 18

$$\big||x+1|-3\big|=7\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}|x+1|-3=7\\ \text{ή}\\ |x+1|-3=-7\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}|x+1|=10\\ \text{ή}\\ |x+1|=-4\end{Bmatrix}\xLeftrightarrow{|x+1|=-4\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta}$$

$$\begin{Bmatrix}x+1=10\\ \text{ή}\\ x+1=-10\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=9\\ \text{ή}\\ x=-11\end{Bmatrix}$$

Άσκηση 19

α) $\sqrt{x^2-6x+9}=|x+2|\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2}=|x+2|\Leftrightarrow|x-3|=|x+2|\Leftrightarrow$

$$\begin{Bmatrix}x-3=x+2\\ \text{ή}\\ x-3=-x-2\end{Bmatrix}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

β) $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{4x^2+4x+1}\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{(2x+1)^2}\Leftrightarrow$

$$|x-1|=|2x+1|\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x-1=2x+1\\ \text{ή}\\ x-1=-2x-1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=-2\\ \text{ή}\\ x=0\end{Bmatrix}$$

γ) $\sqrt{9x^2-6x+1}=x+5 \Leftrightarrow \sqrt{(3x-1)^2}=x+5 \Leftrightarrow |3x-1|=x+5 \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{matrix} 3x-1=x+5 \Leftrightarrow x=3 \\ \text{ή} \\ 3x-1=-x-5 \Leftrightarrow x=-1 \end{matrix}\right\} \xLeftrightarrow{x+5>0 \Rightarrow x>-5} x=3 \text{ ή } x=-1$$

Άσκηση 20

Έστω α ένας τυχαίος ακέραιος και κατ΄ επέκταση α+1 και α+2 τρεις διαδοχικοί ακέραιοι. Οπότε:

$$\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)=\frac{\alpha+(\alpha+1)+(\alpha+2)}{3} \Leftrightarrow \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)=\frac{3\alpha+3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)=\alpha+1 \Leftrightarrow (\alpha+1)(\alpha^2+2\alpha-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha+1=0 \text{ ή } \alpha^2+2\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=-1 \text{ ή } \alpha^2+2\alpha+1-1-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha=-1 \text{ ή } (\alpha+1)^2-2=0 \Leftrightarrow \alpha=-1 \text{ ή } \left\{\begin{matrix} \alpha+1=\sqrt{2} \\ \text{ή} \\ \alpha+1=-\sqrt{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha=-1, \text{γιατί}$$

οι αριθμοί $-1+\sqrt{2}$ *και* $-1-\sqrt{2}$ δεν είναι ακέραιοι. Άρα, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι -1, 0 και 1.

Άσκηση 21

α) Το E_3 ισούται με το άθροισμα των εμβαδών ενός τριγώνου και ενός ορθογωνίου.

$E_1=3x$ και $E_2=\frac{6(10-x)}{2}$. Άρα, έχουμε:

$$E_3=60-E_1-E_2=60-3x-\frac{6(10-x)}{2}=60-3x-(30-3x)=$$

$60-3x-30+3x=30$, ανεξάρτητο του x. Συνεπώς, το E_3 δεν εξαρτάται από τη θέση του Μ στην πλευρά ΔΓ.

β) $E_1 = E_2 \Leftrightarrow 3x = \frac{6(10-x)}{2} \Leftrightarrow 6x = 60 - 6x \Leftrightarrow 12x = 60 \Leftrightarrow x = 5$

Συνεπώς, το σημείο Μ βρίσκεται κατά μία μονάδα αριστερά του μέσου της πλευράς ΔΓ.

Άσκηση 22

Έστω x η ποσότητα HCl που πρέπει να προσθέσουμε στο διάλυμα. Αφού το διάλυμα των 400 ml έχει περιεκτικότητα 5%, συμπεραίνουμε ότι το υπάρχον HCl είναι ίσο με $5\%(400) = 20ml$.

Εμείς επιθυμούμε ένα διάλυμα περιεκτικότητας 20%, άρα $20\%(400) = 80ml$. Επομένως, $x = 80 - 20 = 60ml\ HCl$.

Άσκηση 23

Έστω x ο αριθμός των μικρών και y ο αριθμός των μεγάλων καναπέδων που προμηθεύτηκε το κατάστημα των επίπλων. Προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} x + y = 50 \\ 300x + 550y = 20.000 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x + y = 50 \\ 3x + 5{,}5y = 200 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -3x - 3y = -150 \\ 3x + 5{,}5y = 200 \end{Bmatrix} \overset{+}{\Leftrightarrow}$$

$y = 20 \Leftrightarrow x = 30$

Άσκηση 24

Η μεταβολή της μετατόπισης ενός σώματος που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ισούται με το γινόμενο της ταχύτητας επί το χρόνο στον οποίο πραγματοποιείται η μεταβολή. Έστω x το πρώτο όχημα και y το δεύτερο. Άρα, προκύπτει:

$$\Delta_x = u_x \Delta t \;\kappa\alpha\iota\; \Delta_y = u_y \Delta t \Rightarrow \Delta_x + \Delta_y = 400 \Leftrightarrow u_x \Delta t + u_y \Delta t = 400 \Leftrightarrow$$

$$20\Delta t + 30\Delta t = 400 \Leftrightarrow 50\Delta t = 400 \Leftrightarrow \Delta t = 8s.$$

Άσκηση 25

$(x+\lambda)^2 = 2\lambda(\lambda-\mu)+(x+\mu)^2 \Leftrightarrow (x+\lambda)^2-(x+\mu)^2 = 2\lambda(\lambda-\mu) \Leftrightarrow$

$(x+\lambda-x-\mu)(x+\lambda+x+\mu) = 2\lambda(\lambda-\mu) \Leftrightarrow (\lambda-\mu)(2x+\lambda+\mu) = 2\lambda(\lambda-\mu)$

$\Leftrightarrow (\lambda-\mu)(\,2x+\lambda+\mu-2\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda-\mu = 0$ ή $2x-\lambda+\mu = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda = \mu$ ή $x = \frac{\lambda-\mu}{2}$. Άρα η αρχική εξίσωση δεν είναι ποτέ αδύνατη.

Άσκηση 26

$\lambda^2(x-1) = 2(2x+\lambda)$ είναι ταυτότητα, δηλαδή ισχύει για κάθε x. Άρα:

$$\lambda^2 x-\lambda^2 = 4x+2\lambda \overset{ίσα\ πολυώνυμα}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \lambda^2 = 4 \\ και \\ -\lambda^2 = 2\lambda \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2 \\ και \\ \lambda(\lambda+2) = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2 \\ και \\ \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = -2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \lambda^2(x-1)+\lambda(5x-1) = -2(1+3x) \overset{\lambda=-2}{\Longleftrightarrow}$$

$4x-4-10x+2 = -2-6x \Leftrightarrow -2-6x = -2-6x$, που είναι όντως ταυτότητα.

3.2 Η Εξίσωση $x^ν = α$

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

α) $x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$

β) $x^7 = 128 \Leftrightarrow x = \sqrt[7]{128} = 2$

γ) $x^5 = 1024 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{1024} = 4$

δ) $x^9 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^9 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[9]{1} = 1$

Άσκηση 2

α) $x^3 = -27 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|-27|} = -3$

β) $x^5 + 32 = 0 \Leftrightarrow x^5 = -32 \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{|-32|} = -2$

γ) $x^7 + 128 = 0 \Leftrightarrow x^7 = -128 \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{|-128|} = -2$

δ) $x^{11} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^{11} = -1 \Leftrightarrow x = -\sqrt[11]{|-1|} = -1$

Άσκηση 3

α) $x^2 = 81 \Leftrightarrow x = \sqrt{81}$ ή $x = -\sqrt{81} \Leftrightarrow x = 9$ ή $x = -9$

β) $x^4 - 81 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 81 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{81}$ ή $x = -\sqrt[4]{81} \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -3$

γ) $x^6 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^6 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{64}$ ή $x = -\sqrt[6]{64} \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$

δ) $x^8 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^8 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[8]{1}$ ή $x = -\sqrt[8]{1} \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

Άσκηση 4

α) $x^2 = -81 \;\not\Leftrightarrow\; αδύνατη$

β) $x^4 + 81 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^4 = -81 \;\not\Leftrightarrow\; αδύνατη$

γ) $x^4 = 0 \;\Leftrightarrow x = 0$

δ) $x^{12} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[12]{1}$ ή $x = -\sqrt[12]{1} \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

Άσκηση 5

α) $x^5 + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^5 = -2 \;\Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{|-2|}$

β) $x^8 + 11 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^8 = -11 \;\not\Leftrightarrow\; αδύνατη$

γ) $x^4 - 625 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^4 = 625 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[4]{625}$ ή $x = -\sqrt[4]{625} \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$

δ) $x^7 - 3 = 0 \;\Leftrightarrow x^7 = 3 \;\Leftrightarrow x = \sqrt[7]{3}$

Άσκηση 6

α) $x^4 + x^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3(x+1) = 0 \;\Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 0$

β) $x^{10} = 256x^2 \;\Leftrightarrow) \,x^{10} - 256x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2(x^8 - 256) = 0$

$x = 0$ ή $x = \sqrt[8]{256} = 2$ ή $x = -\sqrt[8]{256} = -2$

γ) $x^9 + 10x^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3(x^6 + 10) = 0 \;\Leftrightarrow x = 0 \;\; και \;\; x^6 + 10 \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

δ) $x^5 - x^3 = 8x^2 - 8 \;\Leftrightarrow\; x^3(x^2-1) = 8(x^2-1) \Leftrightarrow\; (x^2-1)(x^3-8) = 0$

$x = 1$ ή $x = -1$ ή $x = \sqrt[3]{8} = 2$

ε) $10x^3 - 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 = \frac{8}{10} \;\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{10}} = \frac{2}{\sqrt[3]{10}}$

στ) $5x^5 - 7x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(5x^3 - 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \sqrt[3]{\frac{7}{5}}$

ζ) $1 - 27x^3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

η) $8x^3 + 64x^6 = 0 \Leftrightarrow 8x^3(1 + 8x^3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -\sqrt[3]{\left|-\frac{1}{8}\right|} = -\frac{1}{2}$

Προσοχή!

Σε εξίσωση που εμφανίζεται ο άγνωστος x και στα δύο μέλη με την ίδια μορφή(είτε μόνος του είτε σε κάποια αριθμητική παράσταση όπως στο (δ)) **δεν** τον διαγράφουμε αφενός, γιατί δε γνωρίζουμε εκ των προτέρων, αν ο όρος μηδενίζεται, οπότε το κλάσμα που θα προκύψει από τη διαίρεση δε θα ορίζεται και αφετέρου, διότι έτσι χάνουμε λύσεις!

Άσκηση 7

α) $(x-1)^3 + 10 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^3 = -8 \Leftrightarrow x - 1 = -\sqrt[3]{|-8|} = -2 \Leftrightarrow x = -1$

β) $(x+2)^4 = 81 \Leftrightarrow x + 2 = \sqrt[4]{81}$ ή $-\sqrt[4]{81} \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -5$

γ) $|x-1|^3 = 125 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x - 1 = \sqrt[3]{125} \Leftrightarrow x = 6, \alpha\nu\ x \geq 1 \\ 1 - x = \sqrt[3]{125} \Leftrightarrow x = -4, \alpha\nu\ x < 1 \end{Bmatrix}$

δ) $(\sqrt{x} + 1)^6 = 64 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = \sqrt[6]{64}$ ή $-\sqrt[6]{64} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1$ ή $\sqrt{x} = -3 \Leftrightarrow x = 1$

Άσκηση 8

$(x^5 - 3x^3 - 1 + 2x)^8 + 7 = 0 \Leftrightarrow (x^5 - 3x^3 - 1 + 2x)^8 = -7 \not\Leftrightarrow \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta$

Η εξίσωση είναι αδύνατη, διότι η αριθμητική παράσταση είναι υψωμένη σε άρτια δύναμη, άρα δεν πρόκειται ποτέ να επιστρέψει αρνητική τιμή $\forall x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 9

Ο όγκος ενός κύβου υπολογίζεται ως η Τρίτη δύναμη της ακμής του. Άρα, αν α η ακμή του δοθέντος κύβου, προκύπτει:

$\alpha^3 = 216 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{216} \Leftrightarrow \alpha = 6$

3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

α) $x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 4*7 = 36 > 0 \Rightarrow$ 2 ρίζες πραγματικές και

άνισες $\Rightarrow x_1 = \frac{8+\sqrt{36}}{2} = \frac{14}{2} = 7$ και $x_2 = \frac{8-\sqrt{36}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

β) $2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4*2 = 1 > 0 \Rightarrow$ 2 ρίζες πραγματικές και

άνισες $\Rightarrow x_1 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2*2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ και $x_2 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2*2} = \frac{-4}{4} = -1$

γ) $3x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4*3*(-2) = 25 > 0 \Rightarrow$ 2 ρίζες πραγματικές

και άνισες $\Rightarrow x_1 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2*3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ και $x_2 = \frac{-1-\sqrt{25}}{6} = \frac{-6}{6} = -1$

δ) $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4*1 = 0 \Rightarrow$ 1 ρίζα διπλή $\Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1$

ε) $x^2 - 5x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 4*7 = -3 < 0 \Rightarrow$ αδύνατη

στ) $2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow \Delta = 144 - 4*2*18 = 0 \Rightarrow$ 1 ρίζα διπλή $\Rightarrow$

$$x = \frac{-12}{2*2} = \frac{-12}{4} = -3$$

Άσκηση 2

α) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 - 4 * (-9) = 36 > 0 \Rightarrow$ 2 ρίζες πραγματικές

και άνισες $\Rightarrow x_1 = \frac{0+\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3$ και $x_2 = \frac{0-\sqrt{36}}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

β) $x^2 - 0{,}64 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 - 4 * (-0{,}64) = 2{,}56 > 0 \Rightarrow$ 2 ρίζες πραγματικές

και άνισες $\Rightarrow x_1 = \frac{0+\sqrt{2{,}56}}{2} = \frac{1{,}6}{2} = 0{,}8$ και $x_2 = \frac{0-\sqrt{2{,}56}}{2} = \frac{-1{,}6}{2} = -0{,}8$

γ) $x^2 + 10x = 0 \Rightarrow \Delta = 100 - 4 * 0 = 100 > 0 \Rightarrow$ 2 ρίζες πραγματικές

και άνισες $\Rightarrow x_1 = \frac{-10+\sqrt{100}}{2} = \frac{0}{2} = 0$ και $x_2 = \frac{-10-\sqrt{100}}{2} = \frac{-20}{2} = -10$

δ) $5x^2 + 125 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 - 4 * 5 * 125 = -2500 < 0 \Rightarrow$ αδύνατη

Άσκηση 3

α) $x(x+1) - 5 = 3x^2 + 7 \Leftrightarrow x^2 + x - 5 = 3x^2 + 7 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 12 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 1 - 4 * 2 * 12 = -95 < 0 \Rightarrow$ αδύνατη

β) $x(1-2x) = (x+2)(x-2) \Leftrightarrow x - 2x^2 = x^2 - 4 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 4 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 1 - 4 * 3 * (-4) = 49 > 0 \Rightarrow$ 2 ρίζες πραγματικές και άνισες $\Rightarrow$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{49}}{2*3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ και $x_2 = \frac{1-\sqrt{49}}{2*3} = \frac{-6}{6} = -1$

γ) $x(x-4) = x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 4x = x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 25 - 4 * 6 = 1 > 0 \Rightarrow$ 2 ρίζες πραγματικές και άνισες $\Rightarrow$

$x_1 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = \frac{6}{2} = 3$ και $x_2 = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

δ) $x(x+2) = 2(x-1) + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 2x - 2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ αδύνατη

Άσκηση 4

α) $4x^2-(4a+8)x+2a+3=0 \Rightarrow \Delta=(4a+8)^2-4*4*(2a+3)=$

$16a^2+64a+64-32a-48=16a^2+32a+16=(4a+4)^2 \geq 0\, \forall a \in \mathbb{R}$

Άρα, θα έχει σε κάθε περίπτωση τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

β) $\beta x^2+\alpha x+\alpha-\beta=0 \Rightarrow \Delta=\alpha^2-4*\beta*(\alpha-\beta)=\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2=$

$(\alpha-2\beta)^2 \geq 0\, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Άρα, θα έχει σε κάθε περίπτωση τουλάχιστον μία

Πραγματική ρίζα.

Άσκηση 5

$\lambda x^2+2\lambda x-\lambda+1=0, \mu\varepsilon\ \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \Delta=4\lambda^2-4*\lambda*(-\lambda+1)=4\lambda^2+4\lambda^2-4\lambda$

$=8\lambda^2-4\lambda=4\lambda(2\lambda-1) \xLeftrightarrow{\Delta=0\ \kappa\alpha\iota\ \lambda\neq 0} \lambda=\frac{1}{2}$

Άσκηση 6

$x^2+\lambda x+\lambda^2=0 \Rightarrow \Delta=\lambda^2-4\lambda^2=-3\lambda^2$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\ \rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\varsigma\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \acute{\alpha}\nu\iota\sigma\varepsilon\varsigma\ \gamma\iota\alpha\ \lambda<0 \\ 1\ \rho\acute{\iota}\zeta\alpha\ \delta\iota\pi\lambda\acute{\eta}\ \gamma\iota\alpha\ \lambda=0 \\ \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta\ \gamma\iota\alpha\ \lambda>0 \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 7

α) $(x-2)(x-5)=0 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0$

β) $(x+1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

γ) $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$

δ) $(x-1+2\sqrt{2})(x-1-2\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow x^2-2x-7=0$

Άσκηση 8

α) $\alpha+\beta=8 \ \kappa\alpha\iota \ \alpha\beta=12 \xRightarrow{\alpha=8-\beta} (8-\beta)\beta=12 \Rightarrow 8\beta-\beta^2=12 \Rightarrow$

$\beta^2-8\beta+12=0 \Rightarrow \Delta=64-4*12=16>0 \Rightarrow$

$\beta_1=\frac{8+\sqrt{16}}{2}=\frac{12}{2}=6 \ \kappa\alpha\iota \ \beta_2=\frac{8-\sqrt{16}}{2*3}=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow$

$\Gamma\iota\alpha \ \beta=6, \alpha=2 \ \kappa\alpha\iota \ \gamma\iota\alpha \ \beta=2, \alpha=6.$

β) $\gamma+\delta=5 \ \kappa\alpha\iota \ \gamma\delta=3 \xRightarrow{\gamma=5-\delta} (5-\delta)\delta=3 \Rightarrow 5\delta-\delta^2=3 \Rightarrow$

$\delta^2-5\delta+3=0 \Rightarrow \Delta=25-4*3=13>0 \Rightarrow$

$\delta_1=\frac{5+\sqrt{13}}{2} \ \kappa\alpha\iota \ \delta_2=\frac{5-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \Gamma\iota\alpha \ \delta=\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \gamma=\frac{5-\sqrt{13}}{2} \ \kappa\alpha\iota \ \gamma\iota\alpha \ \delta=\frac{5-\sqrt{13}}{2},$

$\gamma=\frac{5+\sqrt{13}}{2}.$

γ) $\kappa+\lambda=3 \ \kappa\alpha\iota \ \kappa\lambda=-2 \xRightarrow{\kappa=3-\lambda} (3-\lambda)\lambda=-2 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda-2=0 \Rightarrow$

$\Delta=9-4*(-2)=17>0 \Rightarrow \ \lambda_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \ \kappa\alpha\iota \ \lambda_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$

$\Gamma\iota\alpha \ \lambda=\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \kappa=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \ \kappa\alpha\iota \ \gamma\iota\alpha \ \lambda=\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \kappa=\frac{3+\sqrt{17}}{2}.$

δ) $\mu+\nu=3 \ \kappa\alpha\iota \ \mu\nu=5 \xRightarrow{\mu=3-\nu} (3-\nu)\nu=5 \Rightarrow \nu^2-3\nu+5=0 \Rightarrow$

$\Delta=9-4*5=-11<0 \Rightarrow \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta$

Επομένως, δεν υπάρχουν οι ζητούμενοι αριθμοί.

Άσκηση 9

$$2x + 2y = 24\, και\, xy = 28 \Rightarrow x + y = 12\, και\, xy = 28 \xRightarrow{x=12-y} (12 - y)y = 28 \Rightarrow$$

$$y^2 - 12y + 28 = 0 \Rightarrow \Delta = 144 - 4 * 28 = 32 > 0 \Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{12 + \sqrt{32}}{2} = \frac{12 + 4\sqrt{2}}{2} = 6 + 2\sqrt{2}\;\; και\;\; y_2 = \frac{12 - \sqrt{32}}{2} = \frac{12 - 4\sqrt{2}}{2} = 6 - 2\sqrt{2}\;\; \Rightarrow$$

$$Για\; y = 6 + 2\sqrt{2}, x = 6 - 2\sqrt{2}\; και\; για\; y = 6 - 2\sqrt{2}, x = 6 + 2\sqrt{2}.$$

Άσκηση 10

α) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{2} + \sqrt{3}\;\; και$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \sqrt{6} \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2}\;\; και\;\; x_2 = \sqrt{3}$$

Σημείωση:

Οι ρίζες ενός τριωνύμου είναι δύο αριθμοί των οποίων το άθροισμα ισούται με το συντελεστή του πρωτοβάθμιου όρου και το γινόμενο ισούται με τον σταθερό όρο(τύποι Vieta). Άρα, μπορούμε να τις βρούμε και κατευθείαν. Εναλλακτικά, εφαρμόζουμε τη γνωστή διαδικασία της διακρίνουσας.

$$\alpha)\; x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0 \Rightarrow \Delta = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 - 4\sqrt{6} = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}\;\; και$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

β) $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{18})x+6=0 \Leftrightarrow S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{2}+\sqrt{18}\ \kappa\alpha\iota$

$P=x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=6 \Leftrightarrow x_1=\sqrt{2}\ \kappa\alpha\iota\ x_2=\sqrt{18}$

γ) $x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{5})x+\sqrt{10}=0 \Leftrightarrow S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\sqrt{2}-\sqrt{5}\ \kappa\alpha\iota$

$P=x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\sqrt{10} \Leftrightarrow x_1=-\sqrt{2}\ \kappa\alpha\iota\ x_2=-\sqrt{5}$

δ) $x^2-\frac{3}{5}x+\frac{2}{25}=0 \Leftrightarrow S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3}{5}\ \kappa\alpha\iota$

$P=x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{2}{25} \Leftrightarrow x_1=\frac{1}{5}\ \kappa\alpha\iota\ x_2=\frac{2}{5}$

Άσκηση 11

α) $x^2-10x+1=0 \Rightarrow \Delta=100-4=96>0 \Rightarrow$

$x_1=\frac{10+\sqrt{96}}{2}=\frac{10+4\sqrt{6}}{2}=5+2\sqrt{6}\ \kappa\alpha\iota\ x_2=\frac{10-\sqrt{96}}{2}=\frac{10-4\sqrt{6}}{2}=5-2\sqrt{6}$

$(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})=25-24=1 \Rightarrow$ Οι ρίζες είναι αντίστροφοι αριθμοί.

β) $3x^2+4x+1=0 \Rightarrow \Delta=16-4*3*1=4>0 \Rightarrow$

$x_1=\frac{-4+\sqrt{4}}{2*3}=\frac{-4+2}{6}=-\frac{1}{3}\ \kappa\alpha\iota\ x_2=\frac{-4-\sqrt{4}}{2*3}=\frac{-4-2}{6}=-1 \Rightarrow$ Προφανώς δεν είναι αντίστροφοι αριθμοί.

γ) $5x^2-48x+5=0 \Rightarrow \Delta=2304-4*5*5=2204>0 \Rightarrow$

$x_1=\frac{48+\sqrt{2204}}{2*5}=\frac{48+2\sqrt{551}}{10}=\frac{24+\sqrt{551}}{5}\ \kappa\alpha\iota\ x_2=\frac{48-\sqrt{2204}}{2*5}=\frac{48-2\sqrt{551}}{10}=\frac{24-\sqrt{551}}{5}$

$\left(\frac{24+\sqrt{551}}{5}\right)\left(\frac{24-\sqrt{551}}{5}\right)=\frac{576-551}{25}=1 \Rightarrow$ Οι ρίζες είναι αντίστροφοι αριθμοί.

δ) $3x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 * 3 * 3 = -32 < 0 \Rightarrow$ Δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 12

$x^2 + 2x = a^2 + 2a \Rightarrow x^2 + 2x - a^2 - 2a = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 * (-a^2 - 2a) =$

$4 + 4a^2 + 8a = (2a + 2)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$$\Gamma\iota\alpha\ \alpha \neq -1, x_1 = \frac{-2 + \sqrt{(2a+2)^2}}{2} = -1 + |a + 1|\ \kappa\alpha\iota\,, x_1 = \frac{-2 - \sqrt{(2a+2)^2}}{2} = -1 - |a + 1|.$$

$$\Gamma\iota\alpha\ \alpha = -1, x = \frac{-2}{2} = -1.$$

Άσκηση 13

α) $x^2 - 10|x| + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2 - 10x + 24 = 0 \\ x^2 + 10x + 24 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \Delta = 100 - 96 = 4 > 0 \\ \Delta = 100 - 96 = 4 > 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{Bmatrix} x_1 = \frac{10+2}{2} = 6\ \kappa\alpha\iota\ x_2 = \frac{10-2}{2} = 4 \\ x_3 = \frac{-10+2}{2} = -4\ \kappa\alpha\iota\ x_4 = \frac{-10-2}{2} = -6 \end{Bmatrix}$$

β) $x^2 - 5|x| - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2 - 5x - 14 = 0 \\ x^2 + 5x - 14 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \Delta = 25 + 56 = 81 > 0 \\ \Delta = 25 + 56 = 81 > 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{Bmatrix} x_1 = \frac{5+9}{2} = 7\ \kappa\alpha\iota\ x_2 = \frac{5-9}{2} = -2 \\ x_3 = \frac{-5+9}{2} = 2\ \kappa\alpha\iota\ x_4 = \frac{-5-9}{2} = -7 \end{Bmatrix}$$

γ) $x^2 + 4|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2 + 4x + 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \\ \Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{Bmatrix} x_1 = \frac{-4+2}{2} = -1\ \kappa\alpha\iota\ x_2 = \frac{-4-2}{2} = -3 \\ x_3 = \frac{4+2}{2} = 3\ \kappa\alpha\iota\ x_4 = \frac{4-2}{2} = 1 \end{Bmatrix}$$

δ) $x^2+5|x|=0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2+5x=0 \\ x^2-5x=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varDelta=25>0 \\ \varDelta=25>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{Bmatrix} x_1=\frac{-5+5}{2}=0 \; \kappa\alpha\iota \; x_2=\frac{-5-5}{2}=-5 \\ x_3=\frac{5+5}{2}=5 \; \kappa\alpha\iota \; x_4=\frac{5-5}{2}=0 \end{Bmatrix}$

Άσκηση 14

α) $(x-2)^2-5(x-2)+6=0 \overset{x-2=y}{\Longleftrightarrow} y^2-5y+6=0 \Rightarrow \varDelta=25-24=1$

$y_1=\frac{5+1}{2}=3 \; \kappa\alpha\iota \; y_2=\frac{5-1}{2}=2 \overset{x-2=y}{\Longleftrightarrow} x_1=2+y_1=5 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2=2+y_2=4$

β) $(x^2+1)^2+7(x^2+1)-8=0 \overset{x^2+1=y}{\Longleftrightarrow} y^2+7y-8=0 \Rightarrow \varDelta=49-32=17$

$y_1=\frac{-7+\sqrt{17}}{2} \; \kappa\alpha\iota \; y_2=\frac{-7-\sqrt{17}}{2} \overset{x^2+1=y}{\Longleftrightarrow} x_1=\sqrt{y_1-1}=\sqrt{\frac{-7+\sqrt{17}}{2}-1}=\sqrt{\frac{-9+\sqrt{17}}{2}}$

$\kappa\alpha\iota \;\; x_2=\sqrt{y_2-1}=\sqrt{\frac{-7-\sqrt{17}}{2}-1}=\sqrt{\frac{-9-\sqrt{17}}{2}} \nLeftrightarrow$ Άτοπο, διότι οι υπόριζες ποσότητες που προκύπτουν είναι αρνητικές. Άρα, η αρχική εξίσωση δεν έχει λύση.

γ) $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-5\left(\frac{x^2+1}{x}\right)+6=0 \overset{\frac{x^2+1}{x}=y}{\Longleftrightarrow} y^2-5y+6=0 \Rightarrow \varDelta=25-24=1$

$y_1=\frac{5+1}{2}=3 \; \kappa\alpha\iota \; y_2=\frac{5-1}{2}=2 \overset{\frac{x^2+1}{x}=y}{\Longleftrightarrow}$ Προκύπτει ότι: $x_{1,2}{}^2-x_{1,2}y_{1,2}+1=0.$

$\begin{Bmatrix} x_1{}^2-3x_1+1=0 \\ x_2{}^2-2x_2+1=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varDelta=9-4=5>0 \\ \varDelta=4-4=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_{1,1}=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \; \kappa\alpha\iota \; x_{1,2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x_2=\frac{2}{2}=1 \; \delta\iota\pi\lambda\acute{\eta} \; \rho\acute{\iota}\zeta\alpha \end{Bmatrix}$

δ) $(x+3)^2-|x+3|-6=0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (x+3)^2-(x+3)-6=0 \\ (x+3)^2-(-x-3)-6=0 \end{Bmatrix} \xLeftrightarrow{x+3=y}$

$\begin{Bmatrix} y^2-y-6=0 \\ y^2+y-6=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \Delta=1+24=25>0 \\ \Delta=1+24=25<0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{Bmatrix} y_1=\frac{1+5}{2}=3 \;\kappa\alpha\iota\; y_2=\frac{1-5}{2}=-2 \\ y_3=\frac{-1+5}{2}=2 \;\kappa\alpha\iota\; y_4=\frac{-1-5}{2}=-3 \end{Bmatrix} \xLeftrightarrow{x+3=y} \begin{Bmatrix} x_{1,1}=y_1-3=0 \\ x_{1,2}=y_2-3=-5 \\ x_{2,1}=y_3-3=-1 \\ x_{2,2}=y_4-3=-6 \end{Bmatrix}$

Άσκηση 15

α) $\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow 2x(x-1)-x(x+1)=1 \Leftrightarrow 2x^2-2x-x^2-x=1 \Leftrightarrow$

$x^2-3x-1=0 \Rightarrow \Delta=9+4=13>0 \Rightarrow x_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \;\kappa\alpha\iota\; x_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$

β) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}=1 \Leftrightarrow x+1+2x=x^2+x \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Rightarrow$

$\Delta=4+4=8>0 \Rightarrow x_1=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2} \;\kappa\alpha\iota\; x_2=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

γ) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{x}=\frac{x^2}{x(x-2)} \Leftrightarrow x^2-(x-2)^2=x^2 \Leftrightarrow x=2$, *αδύνατη*, διότι για $x=2$ δεν ορίζονται οι αρχικοί παρονομαστές. Άρα, η εξίσωση δεν έχει λύση.

δ) $\frac{x^2}{x^2-x}=\frac{5}{x}+\frac{8-x}{x-1} \Leftrightarrow x^2=5x-5+8x-x^2 \Leftrightarrow 2x^2-13x+5=0 \Rightarrow$

$\Delta=169-40=129>0 \Rightarrow x_1=\frac{13+\sqrt{129}}{4} \;\kappa\alpha\iota\; x_2=\frac{13-\sqrt{129}}{4}$

Άσκηση 16

α) $x^4-5x^2+4=0 \overset{x^2=y}{\Longleftrightarrow} y^2-5y+4=0 \Rightarrow \ \Delta=25-16=9>0 \Rightarrow$

$$y_1=\frac{5+3}{2}=4 \ \kappa\alpha\iota \ y_2=\frac{5-3}{2}=1 \overset{x^2=y}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1}=\pm 2 \\ x_{3,4}=\pm\sqrt{y_2}=\pm 1 \end{Bmatrix}$$

β) $x^4-x^2-12=0 \overset{x^2=y}{\Longleftrightarrow} y^2-y-12=0 \Rightarrow \ \Delta=1+48=49>0 \Rightarrow$

$$y_1=\frac{1+7}{2}=4 \ \kappa\alpha\iota \ y_2=\frac{1-7}{2}=-3 \overset{x^2=y}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1}=\pm 2 \\ x^2\neq -3, \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta \end{Bmatrix}$$

γ) $2x^4+5x^2+3=0 \overset{x^2=y}{\Longleftrightarrow} 2y^2+5y+3=0 \Rightarrow \ \Delta=25-24=1>0 \Rightarrow$

$$y_1=\frac{-5+1}{2}=-2 \ \kappa\alpha\iota \ y_2=\frac{-5-1}{2}=-3 \overset{x^2=y}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} x^2\neq -2, \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta \\ x^2\neq -3, \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta \end{Bmatrix}$$

Άρα, η δοθείσα εξίσωση δεν έχει καμία λύση.

δ) $x^6+26x^3-27=0 \overset{x^3=y}{\Longleftrightarrow} y^2+26y-27=0 \Rightarrow \ \Delta=676+108=784>0 \Rightarrow$

$$y_1=\frac{-26+28}{2}=1 \ \kappa\alpha\iota \ y_2=\frac{-26-28}{2}=-27 \overset{x^3=y}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} x_1=\sqrt[3]{1}=1 \\ x_2=\sqrt[3]{|-27|}=-3 \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 17

$a^4x^2-2a^3x+a^2-1=0, \qquad a\neq 0$

α) $\Delta=4a^6-4a^4(a^2-1)=4a^6-4a^6+4a^4=4a^4$

β) $x_1=\frac{2a^3+2a^2}{2a^4}=\frac{a+1}{a^2} \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x_2=\frac{2a^3-2a^2}{2a^4}=\frac{a-1}{a^2}$

Άσκηση 18

$x^2-(6+\sqrt{2})x+5+5\sqrt{2}=0$

α) $\Delta=(6+\sqrt{2})^2-4(5+5\sqrt{2})=36+12\sqrt{2}+2-20-20\sqrt{2}=(4-\sqrt{2})^2$

β) $x_1=\frac{6+\sqrt{2}+4-\sqrt{2}}{2}=5\ \ \kappa\alpha\iota\ \ x_2=\frac{6+\sqrt{2}-4+\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$

Άσκηση 19

$\lambda x^2+(1-\lambda)x+\lambda+1=0\Rightarrow\Delta=(1-\lambda)^2-4\lambda(\lambda+1)=$

$\lambda^2-2\lambda+1-4\lambda^2-4\lambda=-3\lambda^2-6\lambda+1=0\Rightarrow 3\lambda^2+6\lambda-1=0\Rightarrow$

$\Delta=36-4(-1)3=36+12=48>0$

$$\lambda_1=\frac{-6+4\sqrt{3}}{6}=-1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \lambda_2=\frac{-6-4\sqrt{3}}{6}=-1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Άσκηση 20

Έστω ρ μία ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. Αφού είναι ρίζα, σημαίνει ότι επαληθεύει την εξίσωση, δηλαδή $\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0$.

$\alpha x^2-\beta x+\gamma=0\overset{x=-\rho}{\Longleftrightarrow}\alpha(-\rho)^2-\beta(-\rho)+\gamma=0\Leftrightarrow\ \alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0$, που ισχύει. Άρα, ο $-\rho$ είναι πράγματι ρίζα της $\alpha x^2-\beta x+\gamma=0$.

Άσκηση 21

α) $x-\frac{1}{\lambda}=\frac{\lambda-1}{\lambda x}\Leftrightarrow\frac{\lambda x-1}{\lambda}=\frac{\lambda-1}{\lambda x}\Leftrightarrow(\lambda x)^2-\lambda x=\lambda^2-\lambda\Leftrightarrow\lambda^2x^2-\lambda x-\lambda^2+\lambda=0$

$$\lambda^2(x^2-1)-\lambda(x-1)=0\Leftrightarrow(x-1)(\lambda^2x+\lambda^2-\lambda)=0\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=1\\ \text{ή}\\ x=\frac{1-\lambda}{\lambda}\end{Bmatrix}$$

β) Για να έχει μοναδική λύση πρέπει οι δύο λύσεις να ταυτίζονται. Άρα, πρέπει:

$$\frac{1-\lambda}{\lambda}=1\Leftrightarrow1-\lambda=\lambda\Leftrightarrow2\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$$

Άσκηση 22

α) $x-\frac{1}{a}=a-\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{ax-1}{a}=\frac{ax-1}{x}\Leftrightarrow ax^2-x=a^2x-a\Leftrightarrow$

$$ax^2-(a^2+1)x+a=0\Rightarrow\Delta=(a^2+1)^2-4a^2=$$

$$(a^2+1+2a)(a^2+1-2a)=(a+1)^2(a-1)^2\geq0\Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{a^2+1\pm\sqrt{(a+1)^2(a-1)^2}}{2a}=\frac{a^2+1\pm|a+1||a-1|}{2a}\Leftrightarrow$$

$$x_{1,2}=\begin{Bmatrix}\frac{a^2+1\pm(-1-a)(1-a)}{2a}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x_1=\frac{a^2+1-1+a^2}{2a}=a\\ x_2=\frac{a^2+1+1-a^2}{2a}=\frac{1}{a}\end{Bmatrix},\text{για } a<-1\\ \frac{a^2+1\pm(a+1)(1-a)}{2a}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x_1=\frac{a^2+1+1-a^2}{2a}=\frac{1}{a}\\ x_2=\frac{a^2+1-1+a^2}{2a}=a\end{Bmatrix},\text{για } -1<a<1\\ \frac{a^2+1\pm(a+1)(a-1)}{2a}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x_1=\frac{a^2+1+a^2-1}{2a}=a\\ x_2=\frac{a^2+1-a^2+1}{2a}=\frac{1}{a}\end{Bmatrix},\text{για } a>1\end{Bmatrix}$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση έχουμε δύο λύσεις, τις $x_1=a\ \ και\ \ x_2=\frac{1}{a}$.

β) $\frac{a}{x}-\frac{x}{a}=\frac{a}{\beta}-\frac{\beta}{a} \Leftrightarrow \frac{a^2-x^2}{ax}=\frac{a^2-\beta^2}{a\beta} \overset{a\neq 0}{\Longleftrightarrow} \alpha^2\beta-\beta x^2=a^2x-\beta^2x \Leftrightarrow$

$\beta x^2+(a^2-\beta^2)x-\alpha^2\beta=0 \Rightarrow \Delta=(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2+4\alpha^2\beta^2=$

$(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+4\alpha^2\beta^2=a^4+2a^2\beta^2+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2$

$\Leftrightarrow x_1=\frac{-a^2+\beta^2+\alpha^2+\beta^2}{2\beta}=\beta \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2=\frac{-a^2+\beta^2-\alpha^2-\beta^2}{2\beta}=-\frac{a^2}{\beta}$

Άσκηση 23

$$\frac{a+x^2}{x}=\frac{a+\beta^2}{\beta} \Leftrightarrow \alpha\beta+\beta x^2=\alpha x+\beta^2x \Leftrightarrow \beta x^2-(\alpha+\beta^2)x+\alpha\beta=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=(\alpha+\beta^2)^2-4\beta\alpha\beta=\alpha^2+2\alpha\beta^2+\beta^4-4\alpha\beta^2=(\alpha-\beta^2)^2\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x_1=\dfrac{\alpha+\beta^2+\beta^2-\alpha}{2}=\beta^2 \;\kappa\alpha\iota\; x_2=\dfrac{\alpha+\beta^2-\beta^2+\alpha}{2}=\alpha, \gamma\iota\alpha\;\alpha<\beta^2 \\ x_3=\dfrac{\alpha+\beta^2+\alpha-\beta^2}{2}=\alpha \;\kappa\alpha\iota\; x_4=\dfrac{\alpha+\beta^2-\alpha+\beta^2}{2}=\beta^2, \gamma\iota\alpha\;\alpha>\beta^2 \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 24

Η εξίσωση $x^2-(8+\lambda)x+8=0$ έχει δύο ρίζες· έστω οι ρ_1 $\kappa\alpha\iota$ ρ_2, όπου ισχύει $\rho_1=2\rho_2$.

Άρα, προκύπτει:

$\rho_1{}^2-(8+\lambda)\rho_1+8=0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \rho_2{}^2-(8+\lambda)\rho_2+8=0 \overset{\rho_1=2\rho_2}{\Longleftrightarrow}$

$4\rho_2{}^2-2(8+\lambda)\rho_2+8=0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \rho_2{}^2-(8+\lambda)\rho_2+8=0 \Leftrightarrow$

$2\rho_2{}^2-(8+\lambda)\rho_2+4=0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \rho_2{}^2-(8+\lambda)\rho_2+8=0 \Leftrightarrow$

$2\rho_2{}^2-(8+\lambda)\rho_2+4=0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; -\rho_2{}^2+(8+\lambda)\rho_2-8=0 \overset{+}{\Leftrightarrow}$

$\rho_2{}^2=4 \Leftrightarrow \rho_2=\pm 2 \Leftrightarrow \rho_1=\pm 4$

$Για\ \rho_2 = 2\ και\ \rho_1 = 4\ προκύπτει\ \lambda = -2.$

$Για\ \rho_2 = -2\ και\ \rho_1 = -4\ προκύπτει\ \lambda = -14,\ αλλά\ δεν\ επαληθεύεται\ η\ αρχική$

Εξίσωση, άρα απορρίπτονται.

Επομένως, προκύπτει $\rho_2 = 2\ και\ \rho_1 = 4\ και\ \lambda = -2.$

Άσκηση 25

α) $x^2 - \alpha|x| + 2 = 0 \overset{1\ ρίζα}{\Longleftrightarrow} 1 - \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$

β) $x^2 - 3|x| + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \Delta = 9 - 8 = 1 > 0 \\ \Delta = 9 - 8 = 1 > 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{Bmatrix} x_1 = \frac{3+1}{2} = 2\ και\ x_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \\ x_3 = \frac{-3+1}{2} = -1\ και\ x_4 = \frac{-3-1}{2} = -2 \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 26

Έστω x ο αριθμός των μεγάλων φιαλών και y ο αριθμός των μικρών.

Έστω τώρα α η χωρητικότητα των μεγάλων φιαλών και β αυτή των μικρών.

Προκύπτουν από τα δεδομένα οι εξής εξισώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \alpha x = 300 \\ \beta y = 300 \\ x + 40 = y \\ \alpha = \beta + 2 \end{Bmatrix} \overset{x=\frac{300}{\alpha},\ y=\frac{300}{\beta}}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} \frac{300}{\alpha} + 40 = \frac{300}{\beta} \\ \alpha = \beta + 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 300\beta + 40\alpha\beta = 300\alpha \\ \alpha = \beta + 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} 15\beta - 15\alpha = -2\alpha\beta \\ \alpha = \beta + 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow 15\beta - 15(\beta + 2) = -2(\beta + 2)\beta \Leftrightarrow$$

$$15\beta - 15\beta - 30 = -2\beta^2 - 4\beta \Leftrightarrow \beta^2 + 2\beta - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 4 + 60 = 64 \Rightarrow \beta_1 = \frac{-2+8}{2} = 3\ και\ \beta_2 = \frac{-2-8}{2} = -5$$

Άρα $\alpha = \beta + 2 = 3 + 2 = 5$.

Προφανώς η λύση β_2 απορρίπτεται, καθώς δεν υπάρχει αρνητική χωρητικότητα.

Επομένως, $x = \frac{300}{5} = 60 \;\kappa\alpha\iota\; y = \frac{300}{3} = 100$.

Συνοψίζοντας, έχουμε είτε 60 μεγάλες φιάλες χωρητικότητας 5 λίτρων είτε 100 μικρές φιάλες χωρητικότητας 3 λίτρων.

Άσκηση 27

Για τη λύση της άσκησης θα πραγματευτούμε τη γωνία $\hat{B}$. Από βασική τριγωνομετρική ταυτότητα γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$(\eta\mu\hat{B})^2 + (\sigma\upsilon\nu\hat{B})^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + x^2 = (x+2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + x^2 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x-8) = 0 \Leftrightarrow x = 8 \;\kappa\alpha\iota\; x = 0 \;\alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota.$$

Άσκηση 28

$$(\varGamma AM) = (MB\varDelta) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}2x(8-x) \Leftrightarrow x^2 = 16x - 2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 16x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(3x-16) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = 0, \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota \\ x = \frac{16}{3} \end{matrix}\right\}.$$

Δηλαδή, το σημείο Μ βρίσκεται κατά $\frac{4}{3}$ δεξιά του μέσου της πλευράς ΑΒ.

Άσκηση 29

$2x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 40 = 41 > 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1+\sqrt{41}}{2}\ \kappa\alpha\iota\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{41}}{2}$

α) $x_1 + x_2 = \frac{1+\sqrt{41}}{2} + \frac{1-\sqrt{41}}{2} = 1$

β) $x_1 x_2 = \left(\frac{1+\sqrt{41}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{41}}{2}\right) = \frac{1-41}{4} = -10$

γ) $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} = \frac{6}{1+\sqrt{41}} + \frac{6}{1-\sqrt{41}} = \frac{6-6\sqrt{41}+6+6\sqrt{41}}{-40} = -\frac{3}{10}$

δ) $2{x_1}^2 x_2 + 2x_1{x_2}^2 = 2\frac{(1+\sqrt{41})^2}{4}\frac{1-\sqrt{41}}{2} + 2\frac{1+\sqrt{41}}{2}\frac{(1-\sqrt{41})^2}{4} = \frac{42}{2} - 41 = -20$

Άσκηση 30

$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 4 = 8 > 0 \Rightarrow$

$x_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}\ \kappa\alpha\iota\ x_2 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$

α) ${x_1}^2 + {x_2}^2 = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(1-\sqrt{2}\right)^2 = 6$

β) $(x_1 - x_2)^2 = \left(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right)^2 = 8$

γ) $|x_1 - x_2| = \left|1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right| = 2\sqrt{2}$

Άσκηση 31

$x^2 + 4x + \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(\lambda+2) = 16 - 4\lambda - 8 = 8 - 4\lambda$

α) $\Delta = 0 \Leftrightarrow 8 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

β) Από τύπους Vieta πρέπει $x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda + 2$. Για να είναι ετερόσημες οι ρίζες πρέπει $\lambda + 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -2$.

γ) Από τύπους Vieta πρέπει $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -4 \; \kappa\alpha\iota \; x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda + 2$. Για να είναι αρνητικές οι ρίζες πρέπει $\lambda + 2 > 0 \; \kappa\alpha\iota \; x_1 + x_2 < 0 \Leftrightarrow \lambda > -2$.

δ) Από τύπους Vieta πρέπει $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -4 \; \kappa\alpha\iota \; x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda + 2$. Για να είναι θετικές οι ρίζες πρέπει $\lambda + 2 > 0 \; \kappa\alpha\iota \; x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$ γιατί $x_1 + x_2 = -4$, άρα το άθροισμά τους δεν είναι ποτέ θετικό.

ε) Για να είναι αντίστροφες, πρέπει $x_1 x_2 = \lambda + 2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1$.

Κεφάλαιο 4 : Ανισώσεις

4.1 Ανισώσεις 1^{ου} Βαθμού

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

α) $5x+20>0 \Leftrightarrow 5x>-20 \Leftrightarrow x>-4$

β) $-3x-9>0 \Leftrightarrow -3x>9 \Leftrightarrow x<-3$

γ) $8x\le 1 \Leftrightarrow x\le \frac{1}{8}$

δ) $-4x\ge 5 \Leftrightarrow x\le -\frac{5}{4}$

Άσκηση 2

α) $3(x-2)+2x\ge 4(1-x) \Leftrightarrow 3x-6+2x\ge 4-4x \Leftrightarrow 9x\ge 10 \Leftrightarrow x\ge \frac{10}{9}$

β) $-5(x+1)\ge 3(x+7) \Leftrightarrow -5x-5\ge 3x+21 \Leftrightarrow 8x\le -26 \Leftrightarrow x\le -\frac{13}{4}$

γ) $5-(x-1)<4x+7 \Leftrightarrow 5-x+1<4x+7 \Leftrightarrow 5x>-1 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{5}$

δ) $2(3-2x)>3(1+2x) \Leftrightarrow 6-4x>3+6x \Leftrightarrow 10x<3 \Leftrightarrow x<\frac{3}{10}$

Άσκηση 3

α) $3(x+1)\ge 3x-2 \Leftrightarrow 3x+3\ge 3x-2 \Leftrightarrow 5\ge 0$, το οποίο ισχύει πάντα. Άρα, η ανισότητα επαληθεύεται για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό.

β) $5(1-2x)<1-10x \Leftrightarrow 5-10x<1-10x \Leftrightarrow 5<1 \nLeftrightarrow$ αδύνατη, δεν την επαληθεύει κανένας πραγματικός αριθμός.

γ) $1-3x \geq 3(1-x)-2 \Leftrightarrow 1-3x \geq 3-3x-2 \Leftrightarrow 1 \geq 1 \Leftrightarrow$ Η ανισότητα ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό, αφού για οποιοδήποτε x ισχύει η ισότητα.

δ) $6-2x > 2(3-x) \Leftrightarrow 6-2x > 6-2x \not\Leftrightarrow$ Η ανίσωση είναι αδύνατη. Θα ίσχυε εάν ήταν ανισότητα, επειδή θα επαληθευόταν το κομμάτι της ισότητας.

Άσκηση 4

α) $\frac{x-2}{3}+\frac{x+1}{4} \geq \frac{2x-1}{6} \Leftrightarrow 4x-8+3x+3 \geq 4x-2 \Leftrightarrow 3x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 1$

β) $\frac{x}{3}-\frac{x}{5}<\frac{x}{15} \Leftrightarrow 5x-3x<x \Leftrightarrow x<0$

γ) $\frac{1+2x}{3}-\frac{1-2x}{7} \geq 1 \Leftrightarrow 7+14x-3+6x \geq 21 \Leftrightarrow 20x \geq 17 \Leftrightarrow x \geq \frac{17}{20}$

δ) $\frac{2x-3}{3}+\frac{x}{4} \leq \frac{5x+1}{8}+6x \Leftrightarrow 16x-24+6x \leq 15x+3+144x \Leftrightarrow 137x \geq 27 \Leftrightarrow$

$x \geq \frac{27}{137}$

Άσκηση 5

$2x-1 \leq 8-7x \Leftrightarrow 9x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 1$

$1-x<x+5 \Leftrightarrow 2x>-4 \Leftrightarrow x>-2$

Συνεπώς, οι κοινές λύσεις επαληθεύουν συγχρόνως και την ανισότητα και την ανίσωση.

Άρα, $-2<x \leq 1$ ή $x \in (-2, 1]$.

Άσκηση 6

$$\frac{x-1}{2}+3 \leq x \Leftrightarrow x-1+6 \leq 2x \Leftrightarrow x \geq 5$$

$$\frac{1-2x}{7} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3-6x \leq 7 \Leftrightarrow 6x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$$

Συνεπώς, οι κοινές λύσεις επαληθεύουν συγχρόνως και τις δύο ανισότητες.

Άρα, $x \geq 5$ ή $x \in [5,+\infty)$.

Άσκηση 7

$$\frac{1+x}{3} \leq 2+x \Leftrightarrow 1+x \leq 6+3x \Leftrightarrow 2x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2}$$

$$\frac{1-x}{2} > -\frac{1+2x}{5} \Leftrightarrow 5-5x > -2-4x \Leftrightarrow x < 7$$

Μας ενδιαφέρουν οι ακέραιες κοινές τους λύσεις.

Συνεπώς, επειδή $-\frac{5}{2} \leq x < 7$, προκύπτει $x \in \{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$.

Άσκηση 8

α) $|x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5$

β) $|x-1| < 5 \Leftrightarrow -5 < x-1 < 5 \Leftrightarrow -4 < x < 6$

γ) $|3x-7| < 5 \Leftrightarrow -5 < 3x-7 < 5 \Leftrightarrow 2 < 3x < 12 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x < 4$

Άσκηση 9

α) $|x| > 5 \Leftrightarrow x > 5$ ή $x < -5$

β) $|x-1| > 5 \Leftrightarrow x-1 > 5$ ή $x-1 < -5 \Leftrightarrow x > 6$ ή $x < -4$

γ) $|3x-7| > 5 \Leftrightarrow 3x-7 > 5$ ή $3x-7 < -5 \Leftrightarrow 3x > 12$ ή $3x < 2 \Leftrightarrow$

$x > 4$ ή $x < \frac{2}{3}$

Άσκηση 10

α) $|x+2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x+2 \leq 3 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 1$

β) $|3x+2| \geq 4 \Leftrightarrow 3x+2 \geq 4$ ή $3x+2 \leq -4 \Leftrightarrow 3x \geq 2$ ή $3x \leq -6 \Leftrightarrow$

$x \geq \frac{2}{3}$ ή $x \leq -2$

γ) $|-x+3| < 8 \Leftrightarrow -8 < -x+3 < 8 \Leftrightarrow -11 < -x < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 11$

δ) $|1-2x| > 11 \Leftrightarrow 1-2x > 11$ ή $1-2x < -11 \Leftrightarrow -2x > 10$ ή $-2x < -10$

$\Leftrightarrow x < -5$ ή $x > 5$

Άσκηση 11

α) $|2x-1| \geq 0 \Leftrightarrow$ Η απόλυτη τιμή εξ΄ ορισμού είναι πάντα μεγαλύτερη του μηδενός. Άρα η ανίσωση ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$. Θα εξετάσουμε πού ισχύει η ισότητα.

$|2x-1| = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

β) $|2x-1| > 0 \Leftrightarrow$ *Η ανίσωση ισχύει* $\forall x \in \mathbb{R}$.

γ) $|1-7x| < -3 \not\Leftrightarrow$ *αδύνατη*

δ) $|6-2x| \leq 0 \Leftrightarrow$ Η ανίσωση είναι αδύνατη. Θα ελέγξουμε που ισχύει η ισότητα.

$|6-2x| = 0 \Leftrightarrow 6-2x=0 \Leftrightarrow x=3$

Άσκηση 12

α) $|x| = x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha\acute{o}\rho\iota\sigma\tau\eta, \gamma\iota\alpha\ x > 0 \\ \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta, \gamma\iota\alpha\ x < 0 \end{Bmatrix}$

β) $|x-5| = x-5 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha\acute{o}\rho\iota\sigma\tau\eta, \gamma\iota\alpha\ x > 5 \\ \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta, \gamma\iota\alpha\ x < 5 \end{Bmatrix}$

γ) $|1-7x| = 7x-1 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha\acute{o}\rho\iota\sigma\tau\eta, \gamma\iota\alpha\ x > \frac{1}{7} \\ \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta, \gamma\iota\alpha\ x < \frac{1}{7} \end{Bmatrix}$

Άσκηση 13

α) $\frac{|x|+1}{3} + \frac{2-|x|}{5} > \frac{|x|}{15} + 1 \Leftrightarrow 5|x| + 5 + 6 - 3|x| > |x| + 15 \Leftrightarrow |x| > 4 \Leftrightarrow$

$x > 4$ ή $x < -4$

β) $|2x-1| + 5 > \frac{|2-4x|+1}{3} \Leftrightarrow 3|2x-1| + 15 > |-2(2x-1)| + 1 \Leftrightarrow$

$3|2x-1| + 15 > 2|2x-1| + 1 \Leftrightarrow |2x-1| > -14 \Leftrightarrow \alpha\acute{o}\rho\iota\sigma\tau\eta$

Άσκηση 14

α) $\sqrt{x^2-2x+1} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} \geq 3 \Leftrightarrow |x-1| \geq 3 \Leftrightarrow$

$x-1 \geq 3$ ή $x-1 \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 4$ ή $x \leq -2$

β) $\sqrt{9x^2+12x+4} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{(3x+2)^2} \leq 4 \Leftrightarrow |3x+2| \leq 4 \Leftrightarrow$

$-4 \leq 3x+3 \leq 4 \Leftrightarrow -7 \leq 3x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$

Άσκηση 15

α) $\left\{\begin{matrix} x \in [-2,8] \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8 \\ |x-x_0| \leq \rho \Leftrightarrow -\rho \leq x - x_0 \leq \rho \Leftrightarrow -\rho + x_0 \leq x \leq x_0 + \rho \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{matrix} -\rho + x_0 = -2 \\ \rho + x_0 = 8 \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Leftrightarrow} 2x_0 = 6 \Leftrightarrow x_0 = 3 \Leftrightarrow \rho = 5$

Άρα, η αρχική ανίσωση είναι η $|x-3| \leq 5$.

β) $\left\{\begin{matrix} x \in (-\infty,-3) \cup (1,+\infty) \Leftrightarrow x < -3 \text{ ή } x > 1 \\ |x-x_0| > \rho \Leftrightarrow x - x_0 > \rho \text{ ή } x - x_0 < -\rho \Leftrightarrow x > x_0 + \rho \text{ ή } x < x_0 - \rho \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{matrix} x_0 - \rho = -3 \\ x_0 + \rho = 1 \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Leftrightarrow} 2x_0 = -2 \Leftrightarrow x_0 = -1 \Leftrightarrow \rho = 2$

Άρα, η αρχική ανίσωση είναι η $|x+1| > 2$.

Άσκηση 16

$31 < u < 43 \Leftrightarrow 31 < 10 + 3t < 43 \Leftrightarrow 21 < 3t < 33 \Leftrightarrow 7 < t < 11 \Leftrightarrow$

Δηλαδή, το ζητούμενο διάστημα είναι μεταξύ των 7 και 11 δευτερολέπτων.

Άσκηση 17

α) $1 \leq 3x - 2 \leq 5 \Leftrightarrow 3 \leq 3x \leq 7 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{7}{3}$

β) $-2 \leq 3 - 5x < 7 \Leftrightarrow -5 \leq -5x < 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{5} < x \leq 1$

γ) $-5 < 2x + 3 \leq -1 \Leftrightarrow -8 < 2x \leq -4 \Leftrightarrow -4 < x \leq -2$

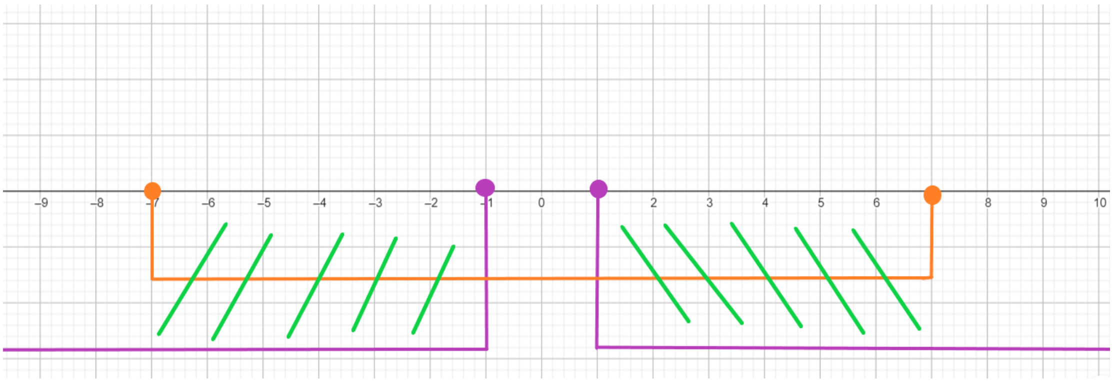
δ) $8 \leq x + 7 \leq 5 \not\Leftrightarrow$ αδύνατη, γιατί προφανώς δεν ισχύει $8 \leq 5$.

Άσκηση 18

α) $1 \leq |x| \leq 7 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; |x| \leq 7 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x \geq 1 \;\text{ ή }\; x \leq -1 \\ \kappa\alpha\iota \\ -7 \leq x \leq 7 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

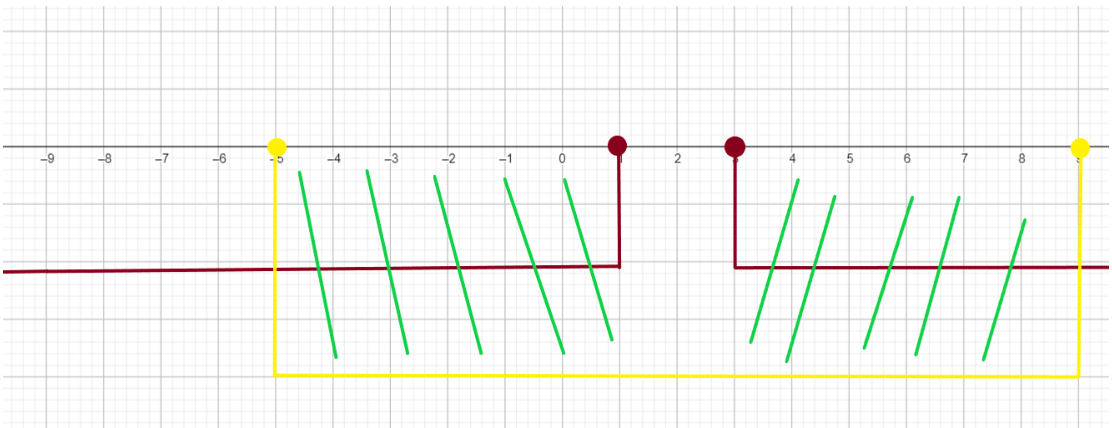
$x \in [-7,-1] \cup [1,7]$

Τις κοινές λύσεις μπορούμε να τις παραστήσουμε και σχηματικά. Θα είναι τα κοινά κομμάτια των λύσεων της κάθε ανίσωσης, δηλαδή τα τμήματα που περιγράφουν οι πράσινες γραμμές.



β) $1 \leq |x-2| \leq 7 \Leftrightarrow |x-2| \geq 1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; |x-2| \leq 7 \Leftrightarrow$

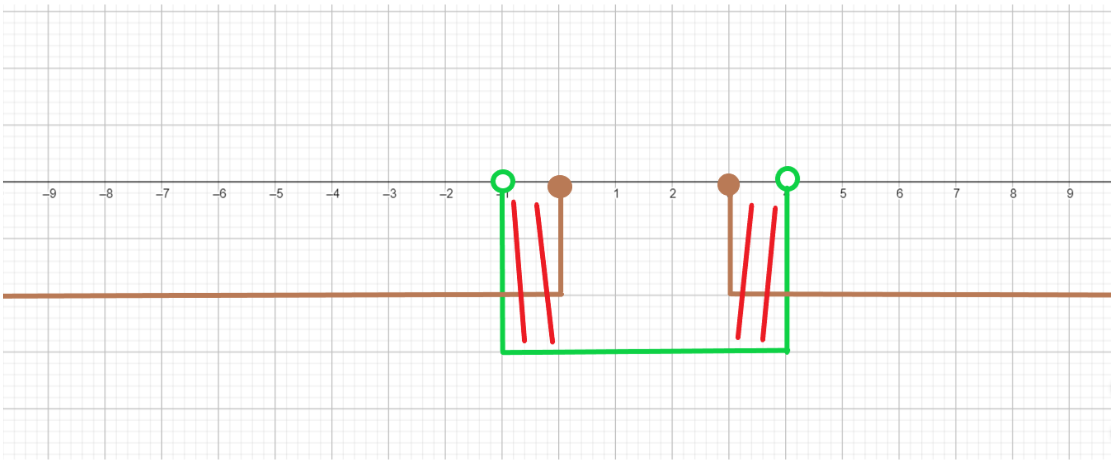
$\left\{\begin{matrix} x-2 \geq 1 \;\text{ ή }\; x-2 \leq -1 \Leftrightarrow x \geq 3 \;\text{ ή }\; x \leq 1 \\ -7 \leq x-2 \leq 7 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 9 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x \in [-5,1] \cup [3,9]$



γ) $3 \le |2x-3| < 5 \Leftrightarrow |2x-3| \ge 3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; |2x-3| < 5 \Leftrightarrow$

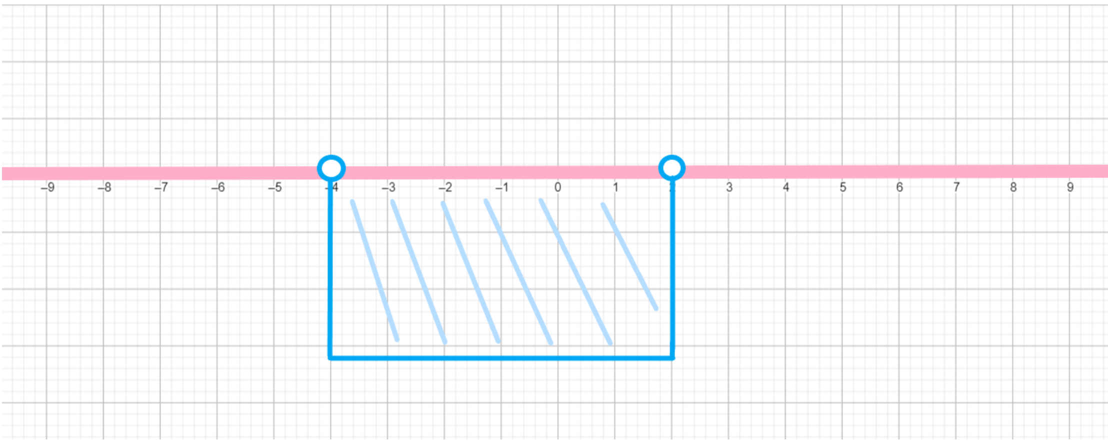
$$\begin{cases} 2x-3 \ge 3 \text{ ή } 2x-3 \le -3 \Leftrightarrow 2x \ge 6 \text{ ή } 2x \le 0 \Leftrightarrow x \ge 3 \text{ ή } x \le 0 \\ -5 < 2x-3 < 5 \Leftrightarrow -2 < 2x < 8 \Leftrightarrow -1 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x \in (-1, 0] \cup [3, 4)$



δ) $-2 \le |x+1| < 3 \Leftrightarrow |x+1| \ge -2$ ή $|x+1| < 3 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha\acute{o}\rho\iota\sigma\tau\eta, \iota\sigma\chi\acute{u}\varepsilon\iota\; \forall x \in \mathbb{R} \\ -3 < x+1 < 3 \Leftrightarrow -4 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4, 2)$$



Άσκηση 19

α) $7-2x<x+4<9-x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 7-2x<x+4 \\ και \\ x+4<9-x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3x>3 \\ και \\ 2x<5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x>1 \\ και \\ x<\frac{5}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$1<x<\frac{5}{2}$ ή $x \in \left(1,\frac{5}{2}\right)$

β) $1-2x<2x-1 \leq 3x+5 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1-2x<2x-1 \\ και \\ 2x-1 \leq 3x+5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 4x>2 \\ και \\ x \geq -6 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{Bmatrix} x>2 \\ και \\ x \geq -6 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x>2$ ή $x \in (2,+\infty)$

Άσκηση 20

α) $|x+2| \leq |x-7| \Leftrightarrow |x+2|^2 \leq |x-7|^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 \leq (x-7)^2 \Leftrightarrow$

$x^2+4x+4 \leq x^2-14x+49 \Leftrightarrow 18x \leq 45 \Leftrightarrow x \leq \frac{45}{18} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$

β) Από γεωμετρικής οπτικής, αναζητούμε εκείνο το σημείο x του οποίου η απόσταση από το -2 θα είναι μικρότερη ή ίση με την απόστασή του από το 7. Αυτό θα συμβαίνει για εκείνα τα σημεία που βρίσκονται αριστερά από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος με αρχή το -2 και πέρας το 7.

Η απόσταση των δύο σημείων ισούται με 9, οπότε το μέσο θα βρίσκεται στο 2,5, διότι $-2+4{,}5=2{,}5=7-4{,}5$. Οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι όσα βρίσκονται πάνω στον πραγματικό άξονα αριστερά του $x=2{,}5$.

Άσκηση 21

α) $A = |x+2| + |x-5| \Rightarrow$

Η $|x+2|$ εκφράζει την απόσταση του τυχαίου πραγματικού αριθμού από το σημείο -2 και αντίστοιχα η $|x-5|$ εκφράζει την απόσταση του τυχαίου πραγματικού αριθμού από το σημείο 5. Συνολικά, η παράσταση εκφράζει την απόσταση του Α από το μηδέν.

β) Αναζητούμε εκείνο το σημείο x του οποίου η απόσταση από το -2 αθροιστικά με την απόστασή του από το 5 θα ισούται με την απόσταση του Α από το 0, δηλαδή με 7.

Συγχρόνως, παρατηρούμε ότι το -2 απέχει 7 από το 5, οπότε συμπεραίνουμε ότι το x μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο/πραγματικός αριθμός πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το -2 και πέρας το 5.

Δηλαδή, προκύπτει $|x+2| + |x-5| = 7 \Leftrightarrow -2 \le x \le 5$.

γ) i) $x < -2 \Leftrightarrow |x+2| + |x-5| = -x-2-x+5 = -2x+3$

ii) $-2 \le x \le 7 \Leftrightarrow |x+2| + |x-5| = x+2+\begin{Bmatrix} x-5, αν\ x \ge 5 \\ 5-x, αν\ x \le 5 \end{Bmatrix} =$

$$\begin{Bmatrix} x+2+x-5 = 2x-3, με\ 5 \le x \le 7 \\ x+2+5-x = 7, με\ -2 \le x \le 5 \end{Bmatrix}$$

iii) $x > 7 \Leftrightarrow |x+2| + |x-5| = x+2+x-5 = 2x-3$

$$|x+2| + |x-5| = 7 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -x-2-x+5 = 7, για\ x < -2 \\ x+2-x+5 = 7, για\ -2 \le x \le 5 \\ x+2+x-5 = 7, για\ x > 5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2, για\ x \le -2 \\ αόριστη, για\ -2 \le x \le 5 \\ 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5, για\ x \ge 5 \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 22

$\lambda(x-2) \leq 3(\mu - x) \Leftrightarrow \lambda x - 2\lambda \leq 3\mu - 3x \Leftrightarrow (\lambda+3)x \leq 2\lambda + 3\mu \Leftrightarrow$

Για να ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό, πρέπει να είναι της μορφής

$0x \leq 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \lambda+3=0 \\ \kappa\alpha\iota \\ 2\lambda+3\mu=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \lambda = -3 \; \kappa\alpha\iota \; \mu = 2.$

Άσκηση 23

α) $A = |x^2+4| + \big||x|+5\big| - |x^2+6x+9| - |-x^2| \Leftrightarrow$

$A = x^2+4+|x|+5-(x+3)^2-x^2 = |x|+9-x^2-6x-9 \Leftrightarrow$

$A = -x^2-6x+|x|$

β) $A = 0 \Leftrightarrow -x^2-6x+|x| = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} -x^2-6x+x=0, \gamma\iota\alpha\; x>0 \\ -x^2-6x-x=0, \gamma\iota\alpha\; x<0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{matrix} x(x+5)=0, \gamma\iota\alpha\; x>0 \\ x(x+7)=0, \gamma\iota\alpha\; x<0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \text{ ή } x=-5, \gamma\iota\alpha\; x>0 \\ x=0 \text{ ή } x=-7, \gamma\iota\alpha\; x<0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-7$

γ) $A \leq 35-x^2 \Leftrightarrow -x^2-6x+|x| \leq 35-x^2 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} -6x+x \leq 35, \gamma\iota\alpha\; x>0 \\ -6x-x \leq 35, \gamma\iota\alpha\; x<0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{matrix} -5x \leq 35, \gamma\iota\alpha\; x>0 \\ -7x \leq 35, \gamma\iota\alpha\; x<0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta \\ x \leq -5, \gamma\iota\alpha\; x<0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x \leq -5.$

4.2 Ανισώσεις 2ου Βαθμού

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

α) $x^2 + 9x + 20 \Rightarrow \Delta = 81 - 80 = 1 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-9 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = -4 \ \kappa\alpha\iota \ x_2 = -5$

Άρα, το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5).$

β) $2x^2 + 5x - 1 \Rightarrow \Delta = 25 + 8 = 33 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4} \Rightarrow$

$x_1 = -4 \ \kappa\alpha\iota \ x_2 = -5 \Rightarrow$ Άρα, το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$2x^2 + 5x - 1 = 2\left(x - \frac{-5+\sqrt{33}}{4}\right)\left(x - \frac{-5-\sqrt{33}}{4}\right).$

γ) $4x^2 + 20x + 25 \Rightarrow \Delta = 400 - 400 = 0 \Rightarrow x = \frac{-20}{2*4} = -\frac{5}{2}$ *διπλή ρίζα*

Επομένως, προκύπτει: $4x^2 + 20x + 25 = 4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$

δ) $2x^2 - 10x + 13 \Rightarrow \Delta = 100 - 104 = -4 < 0 \Rightarrow$

Εφόσον η διακρίνουσα είναι αρνητική, το δοθέν τριώνυμο δεν έχει ρίζες και συνεπώς δεν παραγοντοποιείται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων πολυωνύμων.

Άσκηση 2

α) $x^2 - 5x + 6 \Rightarrow \Delta = 25 - 24 = 1 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \;\; και \;\; x_2 = 2$

$2x^2 - 5x + 2 \Rightarrow \Delta = 25 - 16 = 9 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = 2 \;\; και \;\; x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$

Επομένως, προκύπτει:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{(x-3)(x-2)}{2(x-2)(x-\frac{1}{2})} = \frac{x-3}{2x-1}$$

β) $-x^2 - 2x + 3 \Rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{-2} \Rightarrow x_1 = -3 \;\; και \;\; x_2 = 1$

$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \rightarrow είναι\; γνωστή\; ταυτότητα\; τετράγωνο\; αθροίσματος$

Επομένως, προκύπτει:

$$\frac{-x^2 - 2x + 3}{3x^2 + 6x + 9} = \frac{-(x+3)(x-1)}{(x+3)^2} = \frac{1-x}{x+3}.$$

γ) $12x^2 - 11x + 2 \Rightarrow \Delta = 121 - 96 = 25 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{11 \pm 5}{24} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3} \;\; και \;\; x_2 = \frac{1}{4}$

$3x^2 - 2x = x(3x - 2)$

Επομένως, προκύπτει:

$$\frac{12x^2 - 11x + 2}{3x^2 - 2x} = \frac{12(x-\frac{2}{3})(x-\frac{1}{4})}{x(3x-2)} = \frac{3*4(x-\frac{2}{3})(x-\frac{1}{4})}{x(3x-2)} =$$

$$\frac{(3x-2)(4x-1)}{x(3x-2)} = \frac{4x-1}{x}$$

δ) $2x^2 + 3x - 2 \Rightarrow \Delta = 9 + 16 = 25 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \;\; και \;\; x_2 = -2$

$4x^2 - 1 = (2x-1)(2x+1) \rightarrow είναι\; γνωστή\; ταυτότητα\; διαφορά\; τετραγώνων$

Επομένως, προκύπτει:

$$\frac{2x^2 + 3x - 2}{4x^2 - 1} = \frac{2(x-\frac{1}{2})(x+2)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{(2x-1)(x+2)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{x+2}{2x+1}$$

Άσκηση 3

α) $x^2 - 4x + 3 \Rightarrow \Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = 1$

Καθώς η διακρίνουσα είναι θετική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha = 1 > 0$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του τριωνύμου θα είναι θετικό στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του, αρνητικό στο μεταξύ τους διάστημα και για τις δύο άνισες ρίζες του μηδενίζεται. Δηλαδή:

$$\begin{Bmatrix} x^2 - 4x + 3 > 0, \gamma\iota\alpha \; x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \\ x^2 - 4x + 3 < 0, \gamma\iota\alpha \; x \in (1, 3) \\ x^2 - 4x + 3 = 0, \gamma\iota\alpha \; x = 1 \; \kappa\alpha\iota \; x = 3 \end{Bmatrix}$$

β) $4x^2 + 5x - 6 \Rightarrow \Delta = 25 + 96 = 21 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm 11}{8} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{4} \; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = -2$

Καθώς η διακρίνουσα είναι θετική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha = 4 > 0$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του τριωνύμου θα είναι θετικό στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του, αρνητικό στο μεταξύ τους διάστημα και για τις δύο άνισες ρίζες τού μηδενίζεται. Δηλαδή:

$$\begin{Bmatrix} 4x^2 + 5x - 6 > 0, \gamma\iota\alpha \; x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right) \\ 4x^2 + 5x - 6 < 0, \gamma\iota\alpha \; x \in \left(-2, \frac{3}{4}\right) \\ 4x^2 + 5x - 6 = 0, \gamma\iota\alpha \; x = -2 \; \kappa\alpha\iota \; x = \frac{3}{4} \end{Bmatrix}$$

γ) $4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow \Delta = 144 - 144 = 0 \Rightarrow x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Καθώς η διακρίνουσα είναι ίση με το μηδέν και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha = 4 > 0$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του τριωνύμου θα είναι παντού θετικό, εκτός από τη ρίζα που το μηδενίζει.

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}: \begin{Bmatrix} 4x^2 - 12x + 9 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{3}{2}\} \\ 4x^2 - 12x + 9 = 0, \gamma\iota\alpha \; x = \frac{3}{2} \end{Bmatrix}$$

δ) $9x^2-2x+1 \Rightarrow \Delta = 4-36=-32<0 \Rightarrow$

Καθώς η διακρίνουσα είναι αρνητική, το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και συνεπώς δεν αλλάζει ποτέ το πρόσημό του. Καθώς ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha=9>0$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του τριωνύμου θα είναι πάντα θετικό, δηλαδή $9x^2-2x+1>0 \forall x \in \mathbb{R}$.

ε) $x^2-5x \Rightarrow \Delta = 25>0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm 5}{2} \Rightarrow x_1=5 \; \kappa\alpha\iota \;\; x_2=0$

Καθώς η διακρίνουσα είναι θετική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha=1>0$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του τριωνύμου θα είναι θετικό στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του, αρνητικό στο μεταξύ τους διάστημα και για τις δύο άνισες ρίζες τού μηδενίζεται. Δηλαδή:

$$\left\{\begin{matrix} x^2-5x>0, \gamma\iota\alpha \; x \in (-\infty,0) \cup (5,+\infty) \\ x^2-5x<0, \gamma\iota\alpha \; x \in (0,5) \\ x^2-5x=0, \gamma\iota\alpha \; x=0 \; \kappa\alpha\iota \; x=5 \end{matrix}\right\}$$

στ) $x^2-9 \Rightarrow \Delta = 36>0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{\pm 6}{2} \Rightarrow x_1=3 \; \kappa\alpha\iota \;\; x_2=-3$

Καθώς η διακρίνουσα είναι θετική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha=1>0$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του τριωνύμου θα είναι θετικό στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του, αρνητικό στο μεταξύ τους διάστημα και για τις δύο άνισες ρίζες τού μηδενίζεται.

Δηλαδή:

$$\left\{\begin{matrix} x^2-9>0, \gamma\iota\alpha \; x \in (-\infty,-3) \cup (3,+\infty) \\ x^2-9<0, \gamma\iota\alpha \; x \in (-3,3) \\ x^2-9=0, \gamma\iota\alpha \; x=-3 \; \kappa\alpha\iota \; x=3 \end{matrix}\right\}$$

Άσκηση 4

α) $-x^2+3x-2 \Rightarrow \Delta = 9-8=1>0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm1}{-2} \Rightarrow x_1=1 \; \kappa\alpha\iota \; x_2=2$

Καθώς η διακρίνουσα είναι θετική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha=-1<0$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του τριωνύμου θα είναι αρνητικό στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του, θετικό στο μεταξύ τους διάστημα και για τις δύο άνισες ρίζες τού μηδενίζεται. Δηλαδή:

$$\begin{Bmatrix} -x^2+3x-2<0, \gamma\iota\alpha\; x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty) \\ -x^2+3x-2>0, \gamma\iota\alpha\; x\in(1,2) \\ -x^2+3x-2=0, \gamma\iota\alpha\; x=1 \;\kappa\alpha\iota\; x=2 \end{Bmatrix}$$

β) $-2x^2+x+1 \Rightarrow \Delta = 1+8=9>0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm3}{-4} \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2} \; \kappa\alpha\iota \; x_2=1$

Καθώς η διακρίνουσα είναι θετική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha=-1<0$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του τριωνύμου θα είναι αρνητικό στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του, θετικό στο μεταξύ τους διάστημα και για τις δύο άνισες ρίζες του μηδενίζεται. Δηλαδή:

$$\begin{Bmatrix} -2x^2+x+1<0, \gamma\iota\alpha\; x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty) \\ -2x^2+x+1>0, \gamma\iota\alpha\; x\in\left(-\frac{1}{2},1\right) \\ -2x^2+x+1=0, \gamma\iota\alpha\; x=-\frac{1}{2} \;\kappa\alpha\iota\; x=1 \end{Bmatrix}$$

γ) $-16x^2+8x-1 \Rightarrow \Delta = 64-64=0 \Rightarrow x=\frac{-8}{-32}=\frac{1}{4}$

Καθώς η διακρίνουσα είναι ίση με το μηδέν και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha=-16<0$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του τριωνύμου θα είναι παντού αρνητικό, εκτός από τη ρίζα που το μηδενίζει.

Δηλαδή: $\begin{Bmatrix} -16x^2+8x-1<0 \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{4}\} \\ -16x^2+8x-1=0, \gamma\iota\alpha\; x=\frac{1}{4} \end{Bmatrix}$

δ) $-5x^2+3x-1 \Rightarrow \Delta = 9-20=-11<0 \Rightarrow$

Καθώς η διακρίνουσα είναι αρνητική, το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και συνεπώς δεν αλλάζει ποτέ το πρόσημό του. Καθώς ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha = -5 < 0$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του τριωνύμου θα είναι πάντα αρνητικό, δηλαδή:

$$-5x^2+3x-1<0 \forall x \in \mathbb{R}.$$

ε) $-3x^2+2x \Rightarrow \Delta = 4>0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm2}{-6} \Rightarrow x_1=0 \; \kappa\alpha\iota \; x_2=\frac{2}{3}$

Καθώς η διακρίνουσα είναι θετική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha=-3<0$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του τριωνύμου θα είναι αρνητικό στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του, θετικό στο μεταξύ τους διάστημα και για τις δύο άνισες ρίζες τού μηδενίζεται. Δηλαδή:

$$\left\{\begin{matrix} -3x^2+2x<0, \gamma\iota\alpha\; x \in (-\infty,0) \cup \left(\frac{2}{3},+\infty\right) \\ -3x^2+2x>0, \gamma\iota\alpha\; x \in \left(0,\frac{2}{3}\right) \\ -3x^2+2x=0, \gamma\iota\alpha\; x=0 \; \kappa\alpha\iota\; x=\frac{2}{3} \end{matrix}\right\}$$

στ) $-x^2+25 \Rightarrow \Delta=100>0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{\pm10}{-2} \Rightarrow x_1=-5 \; \kappa\alpha\iota \; x_2=5$

Καθώς η διακρίνουσα είναι θετική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha=-1<0$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του τριωνύμου θα είναι αρνητικό στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του, θετικό στο μεταξύ τους διάστημα και για τις δύο άνισες ρίζες τού μηδενίζεται. Δηλαδή:

$$\left\{\begin{matrix} -x^2+25<0, \gamma\iota\alpha\; x \in (-\infty,-5) \cup (5,+\infty) \\ -x^2+25>0, \gamma\iota\alpha\; x \in (-5,5) \\ -x^2+25=0, \gamma\iota\alpha\; x=-5 \; \kappa\alpha\iota\; x=5 \end{matrix}\right\}$$

Άσκηση 5

α) $x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 24 = 1 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = 2$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και μεγιστοβάθμιο όρο $\alpha = 1 > 0$.

Συνεπώς, το τριώνυμο θα είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός μεταξύ των δύο ριζών του, δηλαδή:

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2, 3].$$

β) $2x^2 - 9x + 4 > 0 \Rightarrow \Delta = 81 - 32 = 49 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \dfrac{9 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 8 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = 1$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και μεγιστοβάθμιο όρο $\alpha = 2 > 0$.

Συνεπώς, το τριώνυμο θα είναι μεγαλύτερο του μηδενός στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του, δηλαδή:

$$2x^2 - 9x + 4 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (8, +\infty).$$

γ) $-x^2 - 2x + 3 > 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4}{-2} \Rightarrow x_1 = -3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = 1$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και μεγιστοβάθμιο όρο $\alpha = -1 < 0$.

Συνεπώς, το τριώνυμο θα είναι μεγαλύτερο του μηδενός στο διάστημα μεταξύ των δύο ριζών του, δηλαδή:

$$-x^2 - 2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1).$$

δ) $-3x^2-14x+5\leq 0 \Rightarrow \varDelta = 196+60=256>0 \Rightarrow$

$x_{1,2}=\dfrac{14\pm 16}{-6}\Rightarrow x_1=-5 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2=\dfrac{1}{3}$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και μεγιστοβάθμιο όρο $\alpha=-3<0$.

Συνεπώς, το τριώνυμο θα είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του, δηλαδή:

$$-3x^2-14x+5\leq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-5)]\cup[\tfrac{1}{3},+\infty).$$

Άσκηση 6

α) $x^2\geq 6x \Leftrightarrow x^2-6x\geq 0 \Rightarrow \varDelta=36>0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm 6}{2}\Rightarrow x_1=6 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2=0$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $\alpha=1>0$. Συνεπώς, το τριώνυμο θα είναι μεγαλύτερο του μηδενός στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του και ίσο με το μηδέν για τις δύο άνισες ρίζες του, δηλαδή:

$$\begin{Bmatrix} x^2-6x>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(6,+\infty) \\ x^2-6x=0, \gamma\iota\alpha\; x=0 \;\kappa\alpha\iota\; x=6 \end{Bmatrix}.$$

β) $x^2>9 \Leftrightarrow x^2-9>0 \Rightarrow \varDelta=36>0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{\pm 6}{2}\Rightarrow x_1=3 \;\kappa\alpha\iota\; x_2=-3$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα είναι συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha=1>0$. Συνεπώς, το τριώνυμο θα είναι θετικό στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του, δηλαδή:

$$x^2-9>0, \gamma\iota\alpha\; x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty).$$

γ) $3x^2 < 2x \Leftrightarrow 3x^2 - 2x < 0 \Rightarrow \Delta = 4 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2\pm2}{-6} \Rightarrow x_1 = 0 \, και \;\, x_2 = \frac{2}{3}$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου. Συνεπώς, θα είναι αρνητικό στο διάστημα μεταξύ των δύο ριζών του, δηλαδή:

$$3x^2 - 2x < 0, για\ x \in \left(0, \frac{2}{3}\right).$$

δ) $x^2 + 4 \leq 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \Delta = 25 - 16 = 9 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 4 \, και \;\, x_2 = 1$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $\alpha = 1 > 0$.

Συνεπώς, το τριώνυμο είναι μικρότερο του μηδενός στο διάστημα μεταξύ των δύο ριζών του και ίσο με το μηδέν για τις δύο ρίζες του.

Δηλαδή:

$$\begin{Bmatrix} x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 4) \\ x^2 - 5x + 4 = 0, για\ x = 1 \ και\ x = 4 \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 7

α) $x^2 - 6x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow \Delta = 36 - 36 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} = 3(διπλή\ ρίζα)$

Εφόσον το τριώνυμο έχει μηδενική διακρίνουσα και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $\alpha = 1 > 0$, συμπεραίνουμε ότι θα είναι παντού θετικό εκτός από τη ρίζα του στην οποία μηδενίζεται. Άρα, το τριώνυμο είναι δεν είναι ποτέ αρνητικό. Οπότε η ανισότητα ισχύει μόνο για τη ρίζα του.

β) $x^2 + 1 > 2x \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0$

Το τριώνυμο συνιστά τη γνωστή ταυτότητα τετράγωνο αθροίσματος, οπότε είναι μη αρνητικός όρος. Συνεπώς, είναι θετικό για οποιαδήποτε τιμή του x, εκτός από τη ρίζα του, δηλαδή: $x^2 + 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$.

γ) $1 - 4x^2 \geq 5 - 4x \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow$

Εφόσον η διακρίνουσα είναι αρνητική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου $\alpha = 1 > 0$, συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο είναι πάντα θετικό για κάθε τιμή του x. Συνεπώς, $x^2 - x + 1 \leq 0$ αδύνατη.

δ) $3x^2 - 6x \geq 6x - 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \; \kappa\alpha\iota \; x_2 = 1$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $\alpha = 1 > 0$. Συνεπώς, το τριώνυμο θα είναι μεγαλύτερο του μηδενός στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του και ίσο με το μηδέν για τις δύο άνισες ρίζες του, δηλαδή:

$$\begin{Bmatrix} x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \\ x^2 - 4x + 3 = 0, \gamma\iota\alpha \; x = 1 \; \kappa\alpha\iota \; x = 3 \end{Bmatrix}.$$

Άσκηση 8

α) $3x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta = 4 - 12 = -8 < 0 \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $\alpha = 3 > 0$. Συνεπώς, το τριώνυμο θα είναι πάντα μεγαλύτερο του μηδενός και η ισότητα δεν ισχύει ποτέ, αφού το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.

β) $-2x^2 + 5x - 4 > 0 \Leftrightarrow \Delta = 25 - 32 = -7 < 0 \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $\alpha = -2 < 0$. Συνεπώς, το τριώνυμο θα είναι πάντα μικρότερο του μηδενός, οπότε η ανίσωση $-2x^2 + 5x - 4 > 0$ είναι αδύνατη.

γ) $x(x+1) < 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x < 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 < 0 \Leftrightarrow$

$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $\alpha = 1 > 0$. Συνεπώς, το τριώνυμο θα είναι πάντα μεγαλύτερο του μηδενός και συνεπώς η ανίσωση $x^2 - x + 2 < 0$ είναι αδύνατη.

δ) $(1-x)(1+x) \leq x + 2 \Leftrightarrow 1 - x^2 \leq x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $\alpha = 1 > 0$. Συνεπώς, το τριώνυμο θα είναι πάντα μεγαλύτερο του μηδενός και συνεπώς η ανίσωση ισχύει πάντα. Η ισότητα δεν επαληθεύεται ποτέ, αφού το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 9

α) $\frac{1}{7}x^2 - \frac{2x}{14} - \frac{2}{7} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \; και \;\; x_2 = -1 \Rightarrow$

Καθώς η διακρίνουσα είναι θετική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha = 1 > 0$, συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο θα είναι θετικό στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του και στις ρίζες του θα μηδενίζεται. Άρα:

$$\begin{Bmatrix} x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \\ x^2 - x - 2 = 0, για \; x = -1 \; και \; x = 2 \end{Bmatrix}$$

β) $-5x^2 + 20x - 15 < 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 < 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} \Rightarrow x_1 = 1 \; και \;\; x_2 = 3 \Rightarrow$

Καθώς η διακρίνουσα είναι θετική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha = -1 < 0$, συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο θα είναι αρνητικό στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του.

Επομένως:

$$-x^2 + 4x - 3 < 0 \Leftrightarrow \; x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty).$$

Άσκηση 10

$$5+4x<x^2+8\leq 6x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 5+4x<x^2+8 \\ 5+4x\leq 6x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2-4x+3>0 \\ 2x\geq 5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \varDelta=16-12=4>0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{4\pm 2}{2} \Rightarrow x_1=3\ \kappa\alpha\iota\ \ x_2=1 \\ x\geq \dfrac{5}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty) \\ x\geq \dfrac{5}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x\in(3,+\infty).$$

Άσκηση 11

$$-x^2+8x-7\geq 0 \Rightarrow \varDelta=64-28=36>0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm 6}{-2} \Rightarrow x_1=1\ \kappa\alpha\iota\ \ x_2=7$$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου

$\alpha=-1<0.$

Συνεπώς, το τριώνυμο θα είναι μεγαλύτερο του μηδενός στο διάστημα μεταξύ των δύο ριζών του και ίσο με το μηδέν για τις δύο άνισες ρίζες του, δηλαδή:

$$\begin{Bmatrix} -x^2+8x-7\geq 0 \Leftrightarrow x\in(1,7) \\ -x^2+8x-7=0, \gamma\iota\alpha\ x=1\ \kappa\alpha\iota\ x=7 \end{Bmatrix}.$$

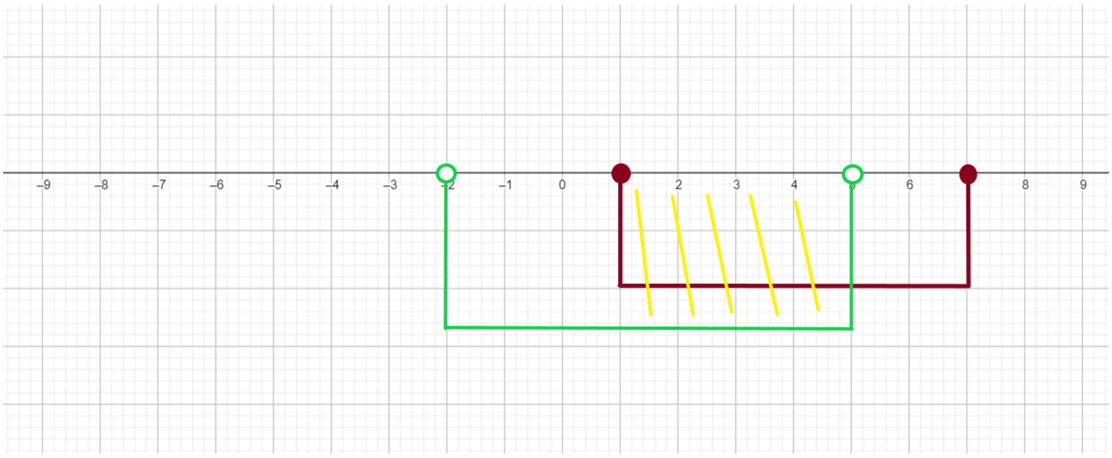
$$x^2-3x-10<0 \Rightarrow \varDelta=9+40=49>0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm 7}{2} \Rightarrow x_1=5\ \kappa\alpha\iota\ \ x_2=-2$$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου

$\alpha=1>0.$

Συνεπώς, θα είναι μικρότερο του μηδενός στο διάστημα μεταξύ των δύο ριζών του, δηλαδή $x^2-3x-10<0 \Leftrightarrow x\in(-2,5).$

Συνολικά, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για τα κοινά τους x, δηλαδή για $x\in[1,5).$



Άσκηση 12

$x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow \Delta = 36 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{\pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = -3$

Καθώς η διακρίνουσα είναι θετική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha = 1 > 0$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του τριωνύμου θα είναι θετικό στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του και για τις δύο άνισες ρίζες τού μηδενίζεται.

Δηλαδή: $\begin{Bmatrix} x^2 - 9 > 0, \gamma\iota\alpha \; x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \\ x^2 - 9 = 0, \gamma\iota\alpha \; x = -3 \; \kappa\alpha\iota \; x = 3 \end{Bmatrix}$

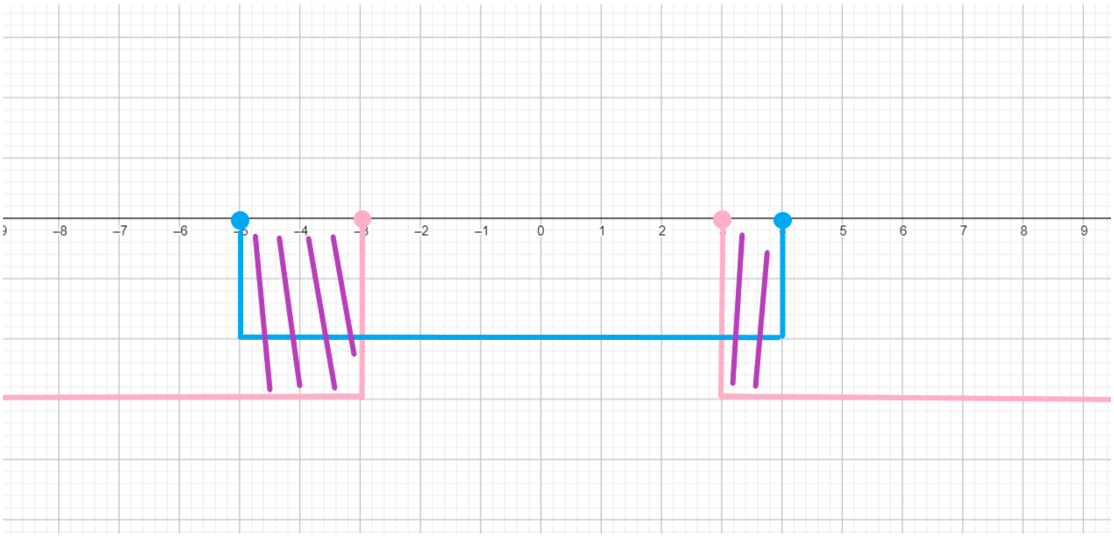
$x^2 - x - 20 \leq 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 80 = 81 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = 4 \; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = -5$

Καθώς η διακρίνουσα είναι θετική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha = 1 > 0$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του τριωνύμου θα είναι αρνητικό στο διάστημα μεταξύ των δύο ριζών του και για τις δύο άνισες ρίζες τού μηδενίζεται.

Δηλαδή: $\begin{Bmatrix} x^2 - x - 20 < 0, \gamma\iota\alpha \; x \in (-5, 4) \\ x^2 - x - 20 = 0, \gamma\iota\alpha \; x = -5 \; \kappa\alpha\iota \; x = 4 \end{Bmatrix}$

Οι δύο ανισότητες συναληθεύουν για τα κοινά τους x, δηλαδή για:

$x \in [-5, -3] \cup [3, 4]$.



Άσκηση 13

α) $|x-1| \leq |x-5| \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq (x-5)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow$

$8x \leq 24 \Leftrightarrow x \leq 3$

β) $|2x+1| \leq |1-3x| \Leftrightarrow (2x+1)^2 \leq (1-3x)^2 \Leftrightarrow$

$4x^2 + 4x + 1 \leq 1 - 6x + 9x^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 10x \geq 0 \Rightarrow \Delta = 100 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm 10}{10} \Rightarrow x_1 = 2 \;\kappa\alpha\iota\; x_2 = 0 \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $\alpha = 5 > 0$. Επομένως, θα είναι θετικό στα διαστήματα εκτός των ριζών του και θα μηδενίζεται στις ρίζες του. Συνολικά: $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

γ) $|x+1| > |1-2x| \Leftrightarrow (x+1)^2 > (1-2x)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 + 2x + 1 > 1 - 4x + 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x < 0 \Rightarrow \Delta = 36 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm 6}{6} \Rightarrow x_1 = 2 \;\kappa\alpha\iota\; x_2 = 0 \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $\alpha = 3 > 0$. Επομένως, θα είναι αρνητικό στο διάστημα μεταξύ των ριζών του.

Επομένως: $x \in (0, 2)$.

Άσκηση 14

α) $\alpha^2 - 5\alpha\beta + 6\beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta - 3\alpha\beta + 6\beta^2 = \alpha(\alpha - 2\beta) - 3\beta(\alpha - 2\beta) =$

$(\alpha - 2\beta)(\alpha - 3\beta)$

Κόλπο!!!

Αναζητούμε δύο αριθμούς που το γινόμενό τους δίνει το 6 και το άθροισμά τους το -5. Σε περίπτωση που δυσκολευόμαστε, θεωρούμε την αριθμητική παράσταση ως τριώνυμο $x^2 - 5x + 6 = 0$ και υπολογίζουμε τις ρίζες του. Κατόπιν, παραγοντοποιούμε.

β) $\alpha^2 - \alpha\beta - 2\beta^2 = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2 - \beta^2 = -\beta(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) =$

$(\alpha + \beta)(\alpha - 2\beta)$

Σχόλιο:

Όποτε μας ζητείται παραγοντοποίηση, έχουμε στο νου μας τις βασικές ταυτότητες. Συνήθως εφαρμόζεται μία εξ΄ αυτών!

γ) $2\alpha^2 - 3\alpha\beta - 2\beta^2 = 2\alpha^2 - 4\alpha\beta + \alpha\beta - 2\beta^2 = 2\alpha(\alpha - 2\beta) + \beta(\alpha - 2\beta) =$

$(\alpha - 2\beta)(2\alpha + \beta)$

δ) $2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \alpha - \beta = 2\alpha(\alpha - \beta) + \alpha - \beta = (\alpha - \beta)(2\alpha + 1)$

Άσκηση 15

α) $\frac{2\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha^2+\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}=\frac{\alpha(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}=\frac{(\alpha-\beta)(2\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}=\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}$

β) $\frac{10\alpha^2-11\alpha\beta+6\beta^2}{2\alpha^2-5\alpha\beta+3\beta^2}=\frac{10\alpha^2-5\alpha\beta-6\alpha\beta+6\beta^2}{2\alpha^2-2\alpha\beta-3\alpha\beta+3\beta^2}=\frac{5\alpha(\alpha-\beta)-6\beta(\alpha-\beta)}{2\alpha(\alpha-\beta)-3\beta(\alpha-\beta)}=\frac{(\alpha-\beta)(5\alpha-6\beta)}{(\alpha-\beta)(2\alpha-3\beta)}=$

$\frac{5\alpha-6\beta}{2\alpha-3\beta}$

Άσκηση 16

α) $3x^2-(3\alpha+\beta)x+\alpha\beta=3x^2-3\alpha x-\beta x+\alpha\beta=3x(x-\alpha)-\beta(x-\alpha)=$

$(x-\alpha)(3x-\beta)$

β) $10x^2-(5\alpha-2\beta)x-\alpha\beta=10x^2-5\alpha x+2\beta x-\alpha\beta=$

$5x(2x-\alpha)+\beta(2x-\alpha)=(2x-\alpha)(5x+\beta)$

Άσκηση 17

$$\frac{x^2+\alpha x+\beta x+\alpha\beta}{x^2-\alpha x-2\alpha^2}=\frac{x(x+\alpha)+\beta(x+\alpha)}{x^2-\alpha x-\alpha^2-\alpha^2}=\frac{(x+\alpha)(x+\beta)}{(x-\alpha)(x+\alpha)-\alpha(x+\alpha)}=$$

$$\frac{(x+\alpha)(x+\beta)}{(x+\alpha)(x-2\alpha)}=\frac{x+\beta}{x-2\alpha}$$

Άσκηση 18

α) $\lambda x^2-3\lambda x+\lambda-5=0\Rightarrow$ Προκειμένου να είναι η δοθείσα εξίσωση δευτέρου βαθμού, πρέπει ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου, στην προκειμένη περίπτωση δευτεροβάθμιου, διάφορος του μηδενός. Συνεπώς, είναι δευτέρου βαθμού για $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. (1)

β) i) Για να έχει δύο ρίζες άνισες, πρέπει η διακρίνουσα να είναι μεγαλύτερη του

μηδενός. Επομένως: $\Delta = 9\lambda^2 - 4\lambda(\lambda - 5) = 9\lambda^2 - 4\lambda^2 + 20\lambda = 5\lambda^2 + 20\lambda$

$\Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \Delta' = 400 > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-20 \pm 20}{10} \Rightarrow \lambda_1 = 0 \; \kappa\alpha\iota \; \lambda_2 = -4 \Rightarrow$

Για να έχει η αρχική εξίσωση δύο ρίζες άνισες, πρέπει $\Delta > 0$.

Αυτό ισχύει για τα λ που ανήκουν στα διαστήματα εκτός των ριζών της Δ.
Δηλαδή:

$$\lambda \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty).$$

ii) Για να έχει μοναδική ρίζα(διπλή), πρέπει η διακρίνουσα να είναι ίση με το

μηδέν. Επομένως: $\Delta = 0 \Rightarrow 5\lambda^2 + 20\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = -4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \lambda = -4$.

iii) Για να είναι αδύνατη, πρέπει η $\Delta < 0$. Αυτό ισχύει για τα λ που ανήκουν

στο διάστημα μεταξύ των ριζών της. Δηλαδή: $\lambda \in (-4, 0)$.

Άσκηση 19

α) $\lambda x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda - 1 \Rightarrow$ Για να είναι η εξίσωση δευτέρου βαθμού πρέπει

ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου να είναι διάφορος του μηδενός.

Συνεπώς, $\lambda \neq 0$.

β) i) $\Delta = (\lambda + 1)^2 - 4\lambda(\lambda - 1) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda = -3\lambda^2 + 6\lambda + 1$

Για να έχει το αρχικό τριώνυμο ρίζες πρέπει η διακρίνουσά του να είναι

θετική ή μηδέν, δηλαδή $-3\lambda^2 + 6\lambda + 1 \geq 0 \Rightarrow$

$\Delta' = 36 + 12 = 48 > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{3}}{-6} \Rightarrow \lambda_1 = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \; \kappa\alpha\iota \; \lambda_2 = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου

$\alpha = -3 < 0$.

Επομένως, θα είναι θετικό στο διάστημα μεταξύ των ριζών του και ίσο με το μηδέν στις ρίζες του. Άρα:

$$-3\lambda^2 + 6\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left[1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}, 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right].$$

ii) Για να είναι η αρχική ανίσωση αδύνατη πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι αρνητική. Αυτό θα συμβαίνει στα διαστήματα εκτός των ριζών του, δηλαδή: $\lambda \in \left(-\infty, 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) \cup \left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}, +\infty\right)$.

Άσκηση 20

$2x^2 - 3\lambda x + \lambda > 0 \Rightarrow$Θέλουμε το τριώνυμο να είναι μεγαλύτερο του μηδενός για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x. Επομένως, πρέπει η διακρίνουσα να είναι αρνητική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου θετικός, που ισχύει, αφού $\alpha = 2 > 0$. Άρα $\Delta = 9\lambda^2 - 8\lambda < 0 \Rightarrow \Delta' = 64 > 0 \Rightarrow$

$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm 8}{18} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{8}{9}$ $\kappa\alpha\iota$ $\lambda_2 = 0 \Rightarrow$ Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $\alpha' = 9 > 0$.

Συνεπώς, θα έχει αρνητικό πρόσημο στο διάστημα μεταξύ των ριζών του, δηλαδή $\lambda \in \left(0, \frac{8}{9}\right)$.

Δηλαδή, η δοθείσα ανίσωση αληθεύει για $\lambda \in \left(0, \frac{8}{9}\right)$.

Άσκηση 21

$-x^2 + 2x + 2 - \lambda \leq 0 \Rightarrow$ Θέλουμε το τριώνυμο να είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x. Επομένως, πρέπει η διακρίνουσα να είναι αρνητική ή ίση του μηδενός και το $\alpha = -1 < 0$ που είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου, να είναι αρνητικό, το οποίο ισχύει. Άρα:

$\varDelta = 4 - 4(-1)(2-\lambda) = 4 + 8 - 4\lambda = 12 - 4\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 3.$

Άσκηση 22

$\lambda x^2 - 5x + \lambda > 0 \Rightarrow$ Θέλουμε το τριώνυμο να είναι θετικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x. Επομένως, πρέπει η διακρίνουσα να είναι αρνητική και το λ που είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου, να είναι θετικό. Άρα:

$\varDelta = 25 - 4\lambda^2 < 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 > 25 \Leftrightarrow \lambda > \sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2} \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda > \frac{5}{2}.$

Άσκηση 23

$(\lambda - 3)x^2 + \lambda x + \lambda \leq 0 \Rightarrow$ Θέλουμε το τριώνυμο να είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x. Επομένως, πρέπει η διακρίνουσα να είναι αρνητική ή ίση του μηδενός και το $\lambda - 3$ που είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου, να είναι αρνητικό. Άρα:

- $\lambda - 3 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 3 \quad (1)$

- $\varDelta = \lambda^2 - 4\lambda(\lambda - 3) = \lambda^2 - 4\lambda^2 + 12\lambda = -3\lambda^3 + 12\lambda = -3\lambda(\lambda - 4) \leq 0$

  $\lambda(\lambda - 4) \geq 0 \quad (2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ Συνεπώς, $\lambda - 4 < 0$, άρα, για να ισχύει η σχέση (2), πρέπει $\lambda \leq 0$.

Άσκηση 24

α) $\alpha^2 - 6\alpha\beta + 10\beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha * 3\beta + 9\beta^2 + \beta^2 = (\alpha - 3\beta)^2 + \beta^2 \geq 0$

Άρα, $\alpha^2 - 6\alpha\beta + 10\beta^2 \geq 0 \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ως άθροισμα μη αρνητικών όρων.

β) $2\alpha^2 + 5\alpha\beta + 4\beta^2 \Rightarrow$

Κόλπο!!!

Ασκήσεις αυτού του τύπου συνήθως τις χειριζόμαστε με τη χρήση των γνωστών ταυτοτήτων ή με την παραγοντοποίηση. Υπάρχουν ωστόσο περιπτώσεις όπως η συγκεκριμένη στην οποία δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποιο εμφανές αποτέλεσμα με τη χρήση αυτών των μεθόδων. Οπότε, πράττουμε διαφορετικά. **Θεωρούμε τη δοθείσα αριθμητική παράσταση ως τριώνυμο, όπου την πρώτη φορά θεωρούμε ως άγνωστη μεταβλητή το α και ως γνωστό το β και ύστερα ακριβώς το ανάποδο, δηλαδή ως άγνωστη μεταβλητή το β και γνωστή το α και υπολογίζουμε τη διακρίνουσα και για τις δύο περιπτώσεις.**

- 1η περίπτωση: $\Delta = 25\beta^2 - 4 * 2 * 4\beta^2 = -7\beta^2 < 0 \forall \beta \in \mathbb{R}$
- 2η περίπτωση: $\Delta = 25\alpha^2 - 4 * 4 * 2\alpha^2 = -7\alpha^2 < 0 \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Σε κάθε περίπτωση η διακρίνουσα είναι αρνητική, συνεπώς επειδή οι μεγιστοβάθμιοι όροι είναι θετικοί, τα τριώνυμα είναι πάντα θετικά και για $\alpha = \beta = 0$ το τριώνυμο μηδενίζεται.

Άρα:

$$2\alpha^2 + 5\alpha\beta + 4\beta^2 \geq 0 \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 25

α) $2\alpha^2 - 3\alpha\beta + 2\beta^2 > 0 \Rightarrow$

Ομοίως με την προηγούμενη άσκηση, εφαρμόζουμε την ίδια ακριβώς λογική. Θεωρούμε πρώτα ως άγνωστη μεταβλητή το α και έπειτα το β και υπολογίζουμε τις διακρίνουσες.

- 1η περίπτωση: $\Delta = 9\beta^2 - 4 * 2 * 2\beta^2 = -7\beta^2 < 0 \forall \beta \in \mathbb{R}$
- 2η περίπτωση: : $\Delta = 9\alpha^2 - 4 * 2 * 2\alpha^2 = -7\alpha^2 < 0 \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Και στις δύο περιπτώσεις η διακρίνουσα είναι αρνητική, άρα το τριώνυμο, δεδομένου ότι $\alpha, \beta \neq 0$ είναι πάντα θετικό.

β) $\frac{2\alpha}{\beta} + \frac{2\beta}{\alpha} - 3 = 2\alpha^2 - 3\alpha\beta + 2\beta^2 > 0$ από α' ερώτημα.

Άσκηση 26

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}2x(8-x) > \frac{15}{2} \Leftrightarrow x^2 + 16x - 2x^2 > 15 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 15 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 256 - 60 = 196 > 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{16 \pm 14}{2} \Rightarrow x_1 = 15 \;\kappa\alpha\iota\; x_2 = 1 \Leftrightarrow$$

Καθώς η διακρίνουσα είναι θετική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $\alpha = 1 > 0$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του τριωνύμου θα είναι αρνητικό στο διάστημα μεταξύ των δύο ριζών του, δηλαδή το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος είναι μεγαλύτερο από $\frac{15}{2}$τ.μ. για $x \in (1, 15)$.

Άσκηση 27

$E = (x+1)(x+2) > 12 \Leftrightarrow x^2+3x+2 > 12 \Leftrightarrow x^2+3x-10 > 0 \Leftrightarrow$

$\Delta = 9+40 = 49 > 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \;\; και \;\; x_2 = -5 \Leftrightarrow$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και μεγιστοβάθμιο όρο $\alpha = 2 > 0$.

Συνεπώς, το τριώνυμο θα είναι μεγαλύτερο του μηδενός στα διαστήματα εκτός των δύο ριζών του, δηλαδή $x^2+3x-10 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-5) \cup (2,+\infty)$.

Επειδή όμως οι πλευρές ενός ορθογωνίου έχουν θετικό μήκος, συμπεραίνουμε ότι $x \in (2,+\infty)$.

Άσκηση 28

Και για τον αριθμητή και για τον παρονομαστή θεωρούμε το x ως άγνωστη μεταβλητή. Επομένως: $\frac{(x+y)^2-3(x+y)+2}{x^2-x(y+1)+2y(1-y)} \Rightarrow$

- $(x+y)^2-3(x+y)+2 = x^2+2xy+y^2-3x-3y+2 =$
  $x^2+(2y-3)x+y^2-3y+2 \Rightarrow$
  $\Delta = (2y-3)^2-4(y^2-3y+2) = 1 > 0 \Rightarrow$
  $x_{1,2} = \dfrac{3-2y \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2-y \;\; και \;\; x_2 = 1-y$

- $x^2-x(y+1)+2y(1-y) \Rightarrow \Delta = (y+1)^2-4*2y(1-y) =$
  $y^2+2y+1-8y+8y^2 = 9y^2-6y+1 = (3y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow$

  $$\left\{\begin{matrix} x_{1,2} = \dfrac{y+1 \pm (3y-1)}{2}, για\ |3y-1| = 3y-1 \\ x_{1,2} = \dfrac{y+1 \pm (1-3y)}{2}, για\ |3y-1| = 1-3y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

  $\left\{\begin{matrix} x_1 = 2y\ και\ x_2 = 1-y \\ x_1 = 1-y\ και\ x_2 = 2y \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Συνολικά προκύπτει:

$$\frac{(x+y)^2-3(x+y)+2}{x^2-x(y+1)+2y(1-y)} = \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{(x-2y)(x+y-1)} = \frac{x+y-2}{x-2y}$$

4.3 Ανισώσεις Γινόμενο και Ανισώσεις Πηλίκο

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

α) $A(x) = (x-2)(x^2+5x+6)(x^2+x+3) \Rightarrow$

- $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
- $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 24 = 1 \Rightarrow x_1 = -2 \; \kappa\alpha\iota \; x_2 = -3$
- $x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 12 = -11 < 0$

Το πρόσημο του γινομένου εξαρτάται από το πρόσημο κάθε παράγοντα.

Το τριώνυμο $x^2 + x + 3$ είναι πάντα θετικό, οπότε το πρόσημο του γινομένου

θα καθοριστεί από τους άλλους δύο παράγοντες.

- Αν
  $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, +\infty) \; \kappa\alpha\iota \; x < 2, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \; x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 2) \Rightarrow$
  $x - 2 < 0 \; \kappa\alpha\iota \; x^2 + 5x + 6 > 0 \Rightarrow$

  $A(x) = (x-2)(x^2+5x+6)(x^2+x+3) < 0$
- Αν $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, +\infty) \; \kappa\alpha\iota \; x > 2, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \; x \in (2, +\infty) \Rightarrow$

  $x - 2 > 0 \; \kappa\alpha\iota \; x^2 + 5x + 6 > 0 \Rightarrow$

  $A(x) = (x-2)(x^2+5x+6)(x^2+x+3) > 0$
- Αν $x \in (-3, -2) \; \kappa\alpha\iota \; x < 2, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \; \gamma\iota\alpha \; x \in (-3, -2) \Rightarrow$

  $x - 2 < 0 \; \kappa\alpha\iota \; x^2 + 5x + 6 < 0 \Rightarrow$

  $A(x) = (x-2)(x^2+5x+6)(x^2+x+3) > 0$
- Αν $x \in (-3, -2) \; \kappa\alpha\iota \; x > 2 \; \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \; \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta.$
- Για οποιαδήποτε από τις υπάρχουσες ρίζες το $A(x) = 0$.

β) $B(x) = (3x-1)(x^2-2x-3)(x^2+1) \Rightarrow$

- $3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$
- $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow x_1 = 3\ \kappa\alpha\iota\ x_2 = -1$
- $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \pi\acute{\alpha}\nu\tau\alpha\ \theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{o}\ \omega\varsigma\ \acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \mu\eta\ \alpha\rho\nu\eta\tau\iota\kappa\acute{\omega}\nu\ \acute{o}\rho\omega\nu$

Το πρόσημο του γινομένου εξαρτάται από το πρόσημο κάθε παράγοντα.

Το τριώνυμο x^2+1 είναι πάντα θετικό, οπότε το πρόσημο του γινομένου

θα καθοριστεί από τους άλλους δύο παράγοντες.

- Αν $x \in (-\infty,-1) \cup (3,+\infty)\ \kappa\alpha\iota\ x < \frac{1}{3}, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ x \in (-\infty,-1)$

  $\Rightarrow 3x - 1 < 0\ \kappa\alpha\iota\ x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow$

  $B(x) = (3x-1)(x^2-2x-3)(x^2+1) < 0$

- Αν $x \in (-\infty,-1) \cup (3,+\infty)\ \kappa\alpha\iota\ x > \frac{1}{3}, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ x \in (3,+\infty) \Rightarrow$

  $3x - 1 > 0\ \kappa\alpha\iota\ x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow$

  $B(x) = (3x-1)(x^2-2x-3)(x^2+1) > 0$

- Αν $x \in (-1,3)\ \kappa\alpha\iota\ x < \frac{1}{3}, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ \gamma\iota\alpha\ x \in \left(-1,\frac{1}{3}\right) \Rightarrow$

  $3x - 1 < 0\ \kappa\alpha\iota\ x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow$

  $B(x) = (3x-1)(x^2-2x-3)(x^2+1) > 0$

- Αν $x \in (-1,3)\ \kappa\alpha\iota\ x > \frac{1}{3}, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ \gamma\iota\alpha\ x \in \left(\frac{1}{3},3\right) \Rightarrow$

  $3x - 1 > 0\ \kappa\alpha\iota\ x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow$

  $B(x) = (3x-1)(x^2-2x-3)(x^2+1) < 0$

- Για οποιαδήποτε από τις υπάρχουσες ρίζες το $B(x) = 0$.

γ) $\Gamma(x) = (4-2x)(5-x^2-4x) \Rightarrow$

- $4-2x=0 \Rightarrow x=2$

- $-x^2-4x+5=0 \Rightarrow \Delta = 16+20=1 \Rightarrow x_1=-2 \; \kappa\alpha\iota \; x_2=-3$

  Συνεπώς, προκύπτουν οι εξής περιπτώσεις:

- Αν
  $x \in (-\infty,-3) \cup (-2,+\infty) \; \kappa\alpha\iota \; x < 2, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \; x \in (-\infty,-3) \cup (-2,2) \Rightarrow$
  $4-2x > 0 \; \kappa\alpha\iota \; x^2+5x+6 > 0 \Rightarrow$

  $\Gamma(x) = (4-2x)(-x^2-4x+5) > 0$

- Αν $x \in (-\infty,-3) \cup (-2,+\infty) \; \kappa\alpha\iota \; x > 2, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \; x \in (2,+\infty) \Rightarrow$

  $4-2x < 0 \; \kappa\alpha\iota \; -x^2-4x+5 > 0 \Rightarrow$

  $\Gamma(x) = (4-2x)(-x^2-4x+5) < 0$

- Αν $x \in (-3,-2) \; \kappa\alpha\iota \; x < 2, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \; \gamma\iota\alpha \; x \in (-3,-2) \Rightarrow$

  $4-2x > 0 \; \kappa\alpha\iota \; -x^2-4x+6 < 0 \Rightarrow$

  $\Gamma(x) = (4-2x)(-x^2-4x+5) < 0$

- Αν $x \in (-3,-2) \; \kappa\alpha\iota \; x > 2 \; \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \; \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta.$

- Για οποιαδήποτε από τις υπάρχουσες ρίζες το $\Gamma(x) = 0$.

δ) $\Delta(x)=(x^2-4)(x^2-6x+8)=(x-2)(x+2)(x^2-6x+8) \Rightarrow$

- $x-2=0 \Rightarrow x=2$
- $x+2=0 \Rightarrow x=-2$
- $x^2-6x+8=0 \Rightarrow \Delta=36-32=4 \Rightarrow x_1=4 \;\kappa\alpha\iota\; x_2=2$

Συνεπώς, προκύπτουν οι εξής περιπτώσεις:

- Αν $x \in (-\infty,2) \cup (4,+\infty) \;\kappa\alpha\iota\; x<-2, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\; x \in (-\infty,-2) \Rightarrow$

  $x-2<0 \;\kappa\alpha\iota\; x+2<0 \;\kappa\alpha\iota\; x^2-6x+8>0 \Rightarrow$

  $\Delta(x)=(x-2)(x+2)(x^2-6x+8)>0$

- Αν $x \in (-\infty,2) \cup (4,+\infty) \;\kappa\alpha\iota\; -2<x<2, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\; x \in (-2,2) \Rightarrow$

  $x-2<0 \;\kappa\alpha\iota\; x+2>0 \;\kappa\alpha\iota\; x^2-6x+8>0 \Rightarrow$

  $\Delta(x)=(x-2)(x+2)(x^2-6x+8)<0$

- Αν $x \in (-\infty,2) \cup (4,+\infty) \;\kappa\alpha\iota\; x>2, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\; x \in (4,+\infty) \Rightarrow$

  $x-2>0 \;\kappa\alpha\iota\; x+2>0 \;\kappa\alpha\iota\; x^2-6x+8>0 \Rightarrow$

  $\Delta(x)=(x-2)(x+2)(x^2-6x+8)>0$

- Αν $x \in (2,4) \;\kappa\alpha\iota\; x<-2,\; \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\; \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta.$
- Αν $x \in (2,4) \;\kappa\alpha\iota\; -2<x<2, \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\; \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta.$
- Αν $x \in (2,4) \;\kappa\alpha\iota\; x>2, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\; x \in (2,4) \Rightarrow$

  $x-2>0 \;\kappa\alpha\iota\; x+2>0 \;\kappa\alpha\iota\; x^2-6x+8<0 \Rightarrow$

  $\Delta(x)=(x-2)(x+2)(x^2-6x+8)<0$

- Για οποιαδήποτε από τις υπάρχουσες ρίζες το $\Delta(x)=0$.

Άσκηση 2

α) $(x^2-4x+4)(x^2+3x+2)\geq 0 \Rightarrow$

- $x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2(\delta\iota\pi\lambda\acute{\eta}\ \rho\acute{\iota}\zeta\alpha)$
- $x^2+3x+2=0 \Rightarrow \Delta=9-8=1>0 \Rightarrow x_1=-1\ \kappa\alpha\iota\ x_2=-2$

Από θεωρία γνωρίζουμε ότι ο πρώτος παράγοντας είναι ταυτότητα τετράγωνο διαφοράς και είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός, ενώ ο δεύτερος παράγοντας έχει θετικό πρόσημο στο διάστημα μεταξύ των δύο ριζών του και μηδενίζεται στις ρίζες του. Άρα:

$(x^2-4x+4)(x^2+3x+2)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-1,-2]$.

β) $(x-1)(x^2-8x+7)<0 \Rightarrow$

- $x-1=0 \Rightarrow x=1$
- $x^2-8x+7=0 \Rightarrow \Delta=64-28=36>0 \Rightarrow x_1=7\ \kappa\alpha\iota\ x_2=1$

Για να έχει το δοθέν γινόμενο αρνητικό πρόσημο πρέπει οι δύο παράγοντες να είναι ετερόσημοι. Συνεπώς:

- Αν $x-1<0, \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\ x^2-8x+7>0 \Leftrightarrow$
  $x<1\ \kappa\alpha\iota\ x\in(-\infty,1)\cup(7,+\infty) \Leftrightarrow$
  $(x-1)(x^2-8x+7)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)$
- Αν $x-1>0, \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\ x^2-8x+7<0 \Leftrightarrow$
  $x>1\ \kappa\alpha\iota\ x\in(1,7) \Leftrightarrow\ (x-1)(x^2-8x+7)<0 \Leftrightarrow x\in(1,7)$

Άρα, συνολικά: $(x-1)(x^2-8x+7)<0 \Leftrightarrow\ x\in(-\infty,1)\cup(1,7)$.

γ) $(6+x-x^2)(x^2-5x+6)>0 \Rightarrow$

- $6+x-x^2=0 \Rightarrow \ \varDelta=1+24=25>0 \Rightarrow x_1=-2 \ και \ x_2=3$
- $x^2-5x+6=0 \Rightarrow \varDelta=25-24=1>0 \Rightarrow x_1=3 \ και \ x_2=2$

Για να έχει το δοθέν γινόμενο θετικό πρόσημο πρέπει οι δύο παράγοντες

να είναι ομόσημοι. Συνεπώς:

- Αν $6+x-x^2>0, τότε \ πρέπει \ x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow$

  $x \in (-2,3) \ \ και \ \ x \in (-\infty,2) \cup (3,+\infty)$

  $(6+x-x^2)(x^2-5x+6)>0 \Leftrightarrow \ x \in (-2,2)$

- Αν $6+x-x^2<0, τότε \ πρέπει \ x^2-5x+6<0 \Leftrightarrow$

  $x \in (-\infty,-2) \cup (3,+\infty) \ \ και \ \ x \in (2,3) \not\Rightarrow αδύνατη$

Άρα, συνολικά: $(6+x-x^2)(x^2-5x+6)>0 \Leftrightarrow x \in (-2,2)$.

δ) $(x-2)(2x^2-3x+1)(-x^2+4x-3) \leq 0 \Rightarrow$

- $x-2=0 \Rightarrow x=2$
- $2x^2-3x+1=0 \Rightarrow \ \varDelta=9-8=1>0 \Rightarrow x_1=1 \ και \ x_2=\frac{1}{2}$
- $-x^2+4x-3=0 \Rightarrow \varDelta=16-12=4 \Rightarrow x_1=1 \ και \ x_2=3$

Συνεπώς, προκύπτουν οι εξής περιπτώσεις:

- Αν $x-2<0, τότε \ πρέπει \ 2x^2-3x+1>0 \ και -x^2+4x-3>0$

  $\Leftrightarrow x<2 \ και \ x \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right) \cup (1,+\infty) \ και \ \ x \in (1,3).$

  Συνεπώς, $(x-2)(2x^2-3x+1)(-x^2+4x-3) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1,2].$

Ή

Αν $x-2<0, \text{τότε πρέπει } 2x^2-3x+1<0 \text{ και } -x^2+4x-3<0$

$\Leftrightarrow x<2 \text{ και } x \in \left(\frac{1}{2},1\right) \text{ και } x \in (-\infty,1)\cup(3,+\infty)$.

Συνεπώς, $(x-2)(2x^2-3x+1)(-x^2+4x-3) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$.

- Αν $x-2>0, \text{τότε πρέπει } 2x^2-3x+1>0 \text{ και } -x^2+4x-3<0$

$\Leftrightarrow x>2 \text{ και } x \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty) \text{ και } x \in (-\infty,1)\cup(3,+\infty)$.

Συνεπώς, $(x-2)(2x^2-3x+1)(-x^2+4x-3) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [3,+\infty)$.

Ή

Αν $x-2>0, \text{τότε πρέπει } 2x^2-3x+1<0 \text{ και } -x^2+4x-3>0$

$\Leftrightarrow x>2 \text{ και } x \in \left(\frac{1}{2},1\right) \text{ και } x \in (1,3)$.

Συνεπώς, $(x-2)(2x^2-3x+1)(-x^2+4x-3) \leq 0 \not\Leftrightarrow \text{αδύνατη}$.

Άρα, συνολικά: $(x-2)(2x^2-3x+1)(-x^2+4x-3) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$x \in \left[\frac{1}{2},1\right] \cup [3,+\infty).$$

Άσκηση 3

α) $\frac{x-3}{x+2}>0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)>0 \Leftrightarrow \text{Ρίζες } x=3, x=-2.$

- Αν $x<-2 \Rightarrow x-3<0 \text{ και } x+2<0.$
- Αν $-2<x<3 \Rightarrow x-3<0 \text{ και } x+2>0.$
- Αν $x>3 \Rightarrow x-3>0 \text{ και } x+2>0.$

Άρα, ισχύει $\frac{x-3}{x+2}>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2)\cup(3,+\infty).$

β) $\frac{3x+1}{2x-4} < 0 \Leftrightarrow (3x+1)(2x-4) < 0 \Leftrightarrow Ρίζες\ x = -\frac{1}{3}, x = 2.$

- Αν $x < -\frac{1}{3} \Rightarrow 3x + 1 < 0\ και\ 2x - 4 < 0.$
- Αν $-\frac{1}{3} < x < 2 \Rightarrow 3x + 1 > 0\ και\ 2x - 4 < 0.$
- Αν $x > 2 \Rightarrow 3x + 1 > 0\ και\ 2x - 4 > 0.$

Άρα, ισχύει $\frac{3x+1}{2x-4} < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}, 2\right).$

γ) $\frac{1-x}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow (1-x)(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow Ρίζες\ x = 1, x = -3.$

- Αν $x < -3 \Rightarrow x + 3 < 0\ και\ 1 - x > 0.$
- Αν $-3 < x < 1 \Rightarrow x + 3 > 0\ και\ 1 - x > 0.$
- Αν $x > 1 \Rightarrow x + 3 > 0\ και\ x - 1 < 0.$

Άρα, ισχύει $\frac{1-x}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [3, 1].$

δ) $\frac{6-3x}{1-2x} \leq 0 \Leftrightarrow (6-3x)(1-2x) \leq 0 \Leftrightarrow Ρίζες\ x = \frac{1}{2}, x = 2.$

- Αν $x < \frac{1}{2} \Rightarrow 6 - 3x > 0\ και\ 1 - 2x > 0.$
- Αν $\frac{1}{2} < x < 2 \Rightarrow 6 - 3x > 0\ και\ 1 - 2x < 0.$
- Αν $x > 2 \Rightarrow 6 - 3x < 0\ και\ 1 - 2x < 0.$

Άρα, ισχύει $\frac{6-3x}{1-2x} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{1}{2}, 2].$

Άσκηση 4

α) $\frac{x^2-5x+6}{x+4} \leq 0 \overset{x\neq -4}{\Longleftrightarrow} (x^2-5x+6)(x+4) \leq 0 \Rightarrow$

- $x^2-5x+6=0 \Rightarrow \Delta = 25-24=1>0 \Rightarrow x_1=3 \;\kappa\alpha\iota\; x_2=2$
- $x+4=0 \Rightarrow x=-4$

Για να έχει το γινόμενο αρνητικό πρόσημο ή ίσο του μηδενός πρέπει οι δύο παράγοντες να είναι ετερόσημοι, ενώ ο πρώτος μπορεί και να μηδενίζεται.

- Αν $x+4<0$, $\tau\acute{o}\tau\varepsilon\; \pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\; x^2-5x+6 \geq 0 \Rightarrow$
  $x<-4 \;\kappa\alpha\iota\; x \in (-\infty, 2] \cup [3,+\infty) \Rightarrow$
  Συνολικά: $\frac{x^2-5x+6}{x+4} \leq 0 \overset{x\neq -4}{\Longleftrightarrow} (x^2-5x+6)(x+4) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4)$.
- Αν $x+4>0$, $\tau\acute{o}\tau\varepsilon\; \pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\; x^2-5x+6 \leq 0 \Rightarrow$
  $x>-4 \;\kappa\alpha\iota\; x \in [2,3] \Rightarrow$
  Συνολικά: $\frac{x^2-5x+6}{x+4} \leq 0 \overset{x\neq -4}{\Longleftrightarrow} (x^2-5x+6)(x+4) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2,3]$.

Επομένως, ισχύει: $\frac{x^2-5x+6}{x+4} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-4) \cup [2,3]$.

β) $\frac{x^2-9x+14}{x^2-3x+2} \geq 0 \overset{x^2-3x+2\neq 0}{\Longleftrightarrow} (x^2-9x+14)(x^2-3x+2) \geq 0 \Rightarrow$

- $x^2-9x+14=0 \Rightarrow \Delta = 81-56=25>0 \Rightarrow x_1=7 \;\kappa\alpha\iota\; x_2=2$
- $x^2-3x+2=0 \Rightarrow \Delta = 9-8=1>0 \Rightarrow x_1=2 \;\kappa\alpha\iota\; x_2=1$

Για να έχει το γινόμενο θετικό πρόσημο ή ίσο του μηδενός πρέπει οι δύο παράγοντες να είναι ομόσημοι, ενώ ο πρώτος μπορεί και να μηδενίζεται.

- Αν $x^2-9x+14\geq 0\,,τότε\ πρέπει\ x^2-3x+2>0 \Rightarrow$

  $x\in(-\infty,2]\cup[7,+\infty)\ και\ x\in(-\infty,\ 1)\cup(2,+\infty)\Rightarrow$

  Συνολικά: $\frac{x^2-9x+14}{x^2-3x+2}\geq 0 \xLeftrightarrow{x^2-3x+2\neq 0} (x^2-9x+14)(x^2-3x+2)\geq 0 \Leftrightarrow$

  $x\in(-\infty,1)\cup[7,+\infty)$.

- Αν $x^2-9x+14\leq 0\,,τότε\ πρέπει\ x^2-3x+2<0 \Rightarrow$

  $x\in[2,7]\ \ και\ \ x\in(1,2)\Rightarrow$

  Συνολικά: $\frac{x^2-9x+14}{x^2-3x+2}\geq 0 \xLeftrightarrow{x^2-3x+2\neq 0} (x^2-9x+14)(x^2-3x+2)\geq 0 \not\Rightarrow$

  Αδύνατη για αυτήν τη συνθήκη.

Επομένως, ισχύει: $\frac{x^2-9x+14}{x^2-3x+2}\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup[7,+\infty)$.

γ) $\frac{x^2-9}{x^2+x-6}>0 \xLeftrightarrow{x^2+x-6\neq 0} (x^2-9)(x^2+x-6)>0 \Rightarrow$

- $x^2-9=0\Rightarrow x_1=3\ και\ x_2=-3$
- $x^2+x-6=0\Rightarrow \varDelta=1+24=25>0\Rightarrow x_1=2\ και\ x_2=-3$

Για να έχει το γινόμενο θετικό πρόσημο πρέπει οι δύο παράγοντες να είναι ομόσημοι.

- Αν $x^2-9>0\,,τότε\ πρέπει\ x^2+x-6>0\Rightarrow$

  $x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\ και\ x\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)\Rightarrow$

  Συνολικά: $\frac{x^2-9}{x^2+x-6}>0 \xLeftrightarrow{x^2+x-6\neq 0} (x^2-9)(x^2+x-6)>0\Leftrightarrow$

  $x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

- Αν $x^2-9<0$, *τότε πρέπει* $x^2+x-6<0 \Rightarrow$

  $x \in (-3,3)$ *και* $x \in (-3,2) \Rightarrow$

  Συνολικά: $\frac{x^2-9}{x^2+x-6}>0 \xLeftrightarrow{x^2+x-6\neq 0} (x^2-9)(x^2+x-6)>0 \Rightarrow x \in (-3,2)$.

Επομένως, ισχύει: $\frac{x^2-9}{x^2+x-6}>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-3) \cup (-3,2) \cup (3,+\infty)$.

δ) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6} \le 0 \xLeftrightarrow{x^2-5x+6\neq 0} (x^2-6x+9)(x^2-5x+6) \le 0 \Rightarrow$

- $x^2-6x+9=0 \Rightarrow (x-3)^2=0 \Rightarrow x=3$(*διπλή ρίζα*)
- $x^2-5x+6=0 \Rightarrow \Delta=25-24=1>0 \Rightarrow x_1=3$ *και* $x_2=2$

Για να έχει το γινόμενο αρνητικό πρόσημο πρέπει οι δύο παράγοντες να είναι ετερόσημοι, ενώ ο πρώτος παράγοντας μπορεί να είναι και να μηδενίζεται.

- Αν $x^2-6x+9 \ge 0$, *τότε πρέπει* $x^2-5x+6<0 \Rightarrow$

  $x \in \mathbb{R}$ *και* $x \in (2,3) \Rightarrow$

  Συνολικά: $\Leftrightarrow \frac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6} \le 0 \xLeftrightarrow{x^2-5x+6\neq 0} (x^2-6x+9)(x^2-5x+6) \le 0 \Rightarrow$

  $x \in (2,3)$.

- Αν $x^2-6x+9 \le 0$, *τότε πρέπει* $x^2-5x+6>0 \Rightarrow$

  $x=3$ *και* $x \in (-\infty,2) \cup (3,+\infty) \Rightarrow$

  Συνολικά: $\Rightarrow \frac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6} \le 0 \xLeftrightarrow{x^2-5x+6\neq 0} (x^2-6x+9)(x^2-5x+6) \le 0 \not\Rightarrow$

  Αδύνατη! Επομένως, ισχύει: $\frac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6}<0 \Leftrightarrow x \in (2,3)$.

Η ισότητα δεν επαληθεύεται ποτέ!

Άσκηση 5

α) $\frac{x-3}{x+2} > 1 \overset{x\neq -2}{\Longleftrightarrow} x-3 > x+2 \nRightarrow \text{αδύνατη}$

β) $\frac{3x-1}{2x+4} < 2 \overset{x\neq -2}{\Longleftrightarrow} 3x-1 < 4x+8 \Leftrightarrow x > -9 \;\; \text{και}\; x \neq -2$

γ) $\frac{x+1}{x+5} \geq -2 \overset{x\neq -5}{\Longleftrightarrow} x+1 \geq -2x-10 \Leftrightarrow 3x \geq -11 \Leftrightarrow x \geq -\frac{11}{3}$

δ) $\frac{1-3x}{5-2x} \leq -1 \overset{x\neq \frac{5}{2}}{\Longleftrightarrow} 1-3x \leq 2x-5 \Leftrightarrow 5x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq \frac{6}{5} \;\; \text{και} \;\; x \neq \frac{5}{2}$

Άσκηση 6

α) $\frac{x^2-2x-1}{x-2} < 2 \overset{x\neq 2}{\Longleftrightarrow} x^2-2x-1 < 2x-4 \Leftrightarrow x^2-4x+3 < 0 \Rightarrow$

$\Delta = 16-12 = 4 > 0 \Rightarrow x_1 = 3 \;\; \text{και} \;\; x_2 = 1 \Rightarrow$

Από γνωστή θεωρία συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο θα έχει αρνητικό πρόσημο στο διάστημα μεταξύ των ριζών του. Δηλαδή:

$$\frac{x^2-2x-1}{x-2} < 2 \overset{x\neq 2}{\Longleftrightarrow} x \in [1,2) \cup (2,3].$$

β) $\frac{x^2-3}{x-1} \geq 1 \overset{x\neq 1}{\Longleftrightarrow} x^2-3 \geq x-1 \Leftrightarrow x^2-x-2 \geq 0 \Rightarrow \Delta = 1+8 = 9 > 0 \Rightarrow$

$x_1 = 2 \;\; \text{και} \;\; x_2 = -1 \Rightarrow$ Από γνωστή θεωρία, το τριώνυμο θα έχει θετικό πρόσημο στα διαστήματα εκτός των ριζών του και θα μηδενίζεται σε αυτές.

Άρα: $\frac{x^2-3}{x-1} \geq 1 \overset{x\neq 1}{\Longleftrightarrow} x \in (-\infty,-1] \cup [2,+\infty)$.

γ) $\frac{x-2}{x^2-4} \geq \frac{1}{4} \overset{x\neq\pm2}{\Longleftrightarrow} 4x-8 \geq x^2-4 \Leftrightarrow x^2-4x+4 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \leq 0 \Rightarrow$

Είναι τέλειο τετράγωνο που είναι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό μη αρνητικός όρος. Επομένως, η ανισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση της ισότητας. Άρα, $x=2$, το οποίο είναι άτοπο, διότι για $x=2$ δεν ορίζεται το αρχικό δοθέν κλάσμα. Άρα, είναι αδύνατη η αρχική δοθείσα ανισότητα.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!!!</u>

Δεν απλοποιούμε το κλάσμα, γιατί χάνουμε τιμή/ρίζα και οδηγούμαστε σε λάθος συμπεράσματα. Αν είχαμε απλοποιήσει το αρχικό κλάσμα, θα είχαμε $\frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{4}$ και θα καταλήγαμε στη λύση $x \leq 2$, που δεν είναι σωστή.

δ) $\frac{2x-11}{x^2-4x+3} \geq -1 \overset{x\neq1,3}{\Longleftrightarrow} 2x-11 \geq -x^2+4x-3 \Leftrightarrow -x^2+2x+8 \leq 0 \Rightarrow$

$\Delta = 4+32 = 36 > 0 \Rightarrow x_1 = -2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x_2 = 4 \Rightarrow$

Από γνωστή θεωρία προκύπτει ότι το τριώνυμο έχει αρνητικό πρόσημο στα διαστήματα εκτός των ριζών του και μηδενίζεται στις ρίζες του. Άρα:

$\frac{2x-11}{x^2-4x+3} \geq -1 \overset{x\neq1,3}{\Longleftrightarrow} x \in (-\infty - 2] \cup [4, +\infty)$.

Άσκηση 7

α) $\frac{2x}{3x-2} \geq \frac{1}{x-1} \overset{x\neq\frac{2}{3},1}{\Longleftrightarrow} 2x(x-1) \geq 3x-2 \Leftrightarrow 2x^2-2x \geq 3x-2 \Leftrightarrow$

$2x^2-5x+2 \geq 0 \Rightarrow \Delta = 25-16 = 9 > 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$

Από γνωστή θεωρία το τριώνυμο θα έχει θετικό πρόσημο στα διαστήματα εκτός των ριζών του και θα μηδενίζεται στις ρίζες του. Επομένως:

$\frac{2x}{3x-2} \geq \frac{1}{x-1} \overset{x\neq\frac{2}{3},1}{\Longleftrightarrow} x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2.+\infty).$

β) $\frac{x}{2x-1} \leq \frac{1}{2-x} \overset{x\neq\frac{1}{2},2}{\Longleftrightarrow} x(2-x) \leq 2x-1 \Leftrightarrow 2x-x^2 \leq 2x-1 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow$

$|x| \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$ ή $x \leq -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty).$

Άσκηση 8

α) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > 1 \overset{x\neq-1}{\Longleftrightarrow} |x-1| > |x+1| \Leftrightarrow (|x-1|)^2 > (|x+1|)^2 \Leftrightarrow$

$x^2-2x+1 > x^2+2x+1 \Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0$ με $x \neq -1$

β) $\left|\frac{x-3}{1-3x}\right| < 2 \overset{x\neq\frac{1}{3}}{\Longleftrightarrow} |x-3| < 2|1-3x| \Leftrightarrow (|x-3|)^2 < (2|1-3x|)^2 \Leftrightarrow$

$x^2-6x+9 < 4(1-6x+9x^2) \Leftrightarrow x^2-6x+9 < 36x^2-24x+4 \Leftrightarrow$

$35x^2-18x-5 > 0 \Leftrightarrow \Delta = 324+700 = 1024 > 0 \Leftrightarrow$

$x_{1,2} = \frac{18\pm32}{70} \Leftrightarrow x_1 = \frac{50}{70} = \frac{5}{7}$ $\;\textit{και}\;$ $x_2 = -\frac{14}{70} = -\frac{1}{5}$

Άρα, το τριώνυμο θα έχει θετικό πρόσημο στα διαστήματα εκτός των ριζών

του. Επομένως, $\left|\frac{x-3}{1-3x}\right| < 2 \Leftrightarrow 35x^2 - 18x - 5 > 0 \Leftrightarrow$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{7}, +\infty\right).$$

Άσκηση 9

$$\varepsilon\varphi\hat{\theta} < 3 \Leftrightarrow \frac{x+9}{x+1} < 3 \Leftrightarrow x+9 < 3x+3 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3.$$

Άσκηση 10

$$-4 < \frac{3x|x| - 4x}{x^2+1} < 4 \Leftrightarrow \frac{3x|x| - 4x}{x^2+1} < 4 \Leftrightarrow 3x|x| - 4x < 4x^2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} 3x^2 - 4x < 4x^2 + 4\,, & \alpha\nu\ x > 0 \\ -3x^2 - 4x < 4x^2 + 4\,, & \alpha\nu\ x < 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2 + 4x + 4 > 0, & x > 0 \\ 7x^2 + 4x + 4 > 0, & x < 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} (x+2)^2 > 0, & x > 0 \\ 6x^2 + (x+2)^2 > 0, & x < 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

Και στις δύο περιπτώσεις οι ανισώσεις αληθεύουν, αφού η πρώτη μηδενίζει στο $x = -2$, το οποίο δε συμφωνεί με τη συνθήκη $x > 0$ και στη δεύτερη για οποιαδήποτε τιμή θα έχουμε κάτι θετικό, ως άθροισμα μη αρνητικών όρων. Άρα, η αρχική διπλή ανίσωση ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό.

Άσκηση 11

$(\lambda-1)x^2-2\lambda x+\lambda+1=0\ \ \mu\varepsilon\ \lambda\neq 1$

α) $\Delta=4\lambda^2-4(\lambda-1)(\lambda+1)=4\lambda^2-4(\lambda^2-1)=4\lambda^2-4\lambda^2+4=4>0\Rightarrow$

Αφού το δοθέν τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα, θα έχει τότε για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) $x_{1,2}=\frac{2\lambda\pm4}{2\lambda-2}\Leftrightarrow x_1=\frac{2\lambda+4}{2\lambda-2}=\frac{\lambda+2}{\lambda-1}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ x_2=\frac{2\lambda-4}{2\lambda-2}=\frac{\lambda-2}{\lambda-1}$

$x_1{}^2x_2+x_1x_2{}^2\geq 0\Leftrightarrow\left(\frac{\lambda+2}{\lambda-1}\right)^2\left(\frac{\lambda-2}{\lambda-1}\right)+\left(\frac{\lambda+2}{\lambda-1}\right)\left(\frac{\lambda-2}{\lambda-1}\right)^2\geq 0\Leftrightarrow$

$\frac{(\lambda+2)^2(\lambda-2)+(\lambda+2)(\lambda-2)^2}{(\lambda-1)^2}\geq 0\Leftrightarrow(\lambda+2)^2(\lambda-2)+(\lambda+2)(\lambda-2)^2\geq 0\Leftrightarrow$

$(\lambda^2+4\lambda+4)(\lambda-2)+(\lambda+2)(\lambda^2-4\lambda+4)\geq 0\Leftrightarrow$

$\lambda^3+4\lambda^2+4\lambda-2\lambda^2-8\lambda-8+\lambda^3+2\lambda^2-4\lambda^2-8\lambda++4\lambda+8\geq 0\Leftrightarrow$

$2\lambda^3-8\lambda\geq 0\Leftrightarrow\lambda^3-4\lambda\geq 0\Leftrightarrow\lambda(\lambda^2-4)\geq 0\Leftrightarrow\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)\geq 0\Leftrightarrow$

Ρίζες: $\lambda=-2,0,2.\Rightarrow$

- Αν $\lambda<-2\Rightarrow\lambda<0\ \kappa\alpha\iota\ \lambda-2<0\ \kappa\alpha\iota\ \lambda+2<0\Rightarrow\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)<0.$
- Αν $-2<\lambda<0\Rightarrow\lambda<0\ \kappa\alpha\iota\ \lambda-2<0\ \kappa\alpha\iota\ \lambda+2>0\Rightarrow$
  $\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)>0.$
- Αν $0<\lambda<2\Rightarrow\lambda>0\ \kappa\alpha\iota\ \lambda-2<0\ \kappa\alpha\iota\ \lambda+2>0\Rightarrow$
  $\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)>0.$
- Αν $\lambda>2\Rightarrow\lambda>0\ \kappa\alpha\iota\ \lambda-2>0\ \kappa\alpha\iota\ \lambda+2>0\Rightarrow\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)>0.$

Άρα, ισχύει: $x_1{}^2x_2+x_1x_2{}^2\geq 0\Leftrightarrow\ \lambda(\lambda-2)(\lambda+2)\geq 0\Leftrightarrow\lambda\in[-2,+\infty).$

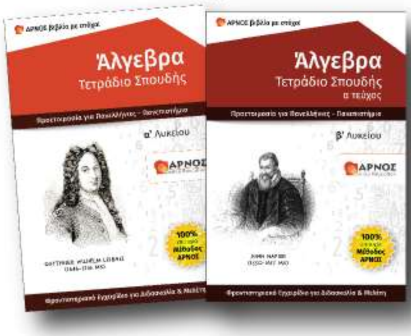
Γιατί επιλέγω Τετράδιο Σπουδής;

- Είναι απαραίτητο διδακτικό εργαλείο βασισμένο στους στόχους του μαθήματος και τον τρόπο Υλοποίησής του.
- Σε αυτό βρίσκεται το υλικό Διδασκαλίας για τον Καθηγητή και Μελέτης για το Μαθητή.
- Το Τετράδιο Σπουδής σε συνδυασμό με το course οδηγούν το **Μαθητή** στην **Αυτομάθηση**.
- Είναι το Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο πραγματοποίησης της **online διδασκαλίας με φυσικό τρόπο**.
- Με αυτό **ενημερώνονται** άμεσα **οι γονείς** και **ελέγχουν την πρόοδο** του παιδιού τους.

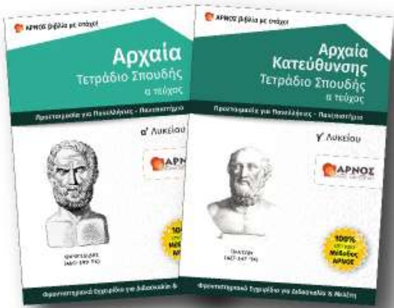
Τετράδια Σπουδής για:

Λύκειο

Μαθηματικά



Αρχαία



Γλωσσα

Χημεία

16-18 ετών

ΑΡΝΟΣ βιβλία με στόχο!

Άλγεβρα
Τετράδιο Σπουδής
ΤΕΥΧΟΣ 2

Προετοιμασία για Πανελλήνιες - Πανεπιστήμιο

α' Λυκείου

ΑΡΝΟΣ Online Education

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ
1646-1716 MX

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ & ΑΣΚΗΣΕΩΝ

100%
επιτυχία
Μέθοδος ΑΡΝΟΣ

Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο για Διδασκαλία & Μελέτη

Τετράδιο Σπουδής - Γιατί;

Το Τετράδιο Σπουδής ΑΡΝΟΣ είναι βασισμένο στη Μέθοδο ΑΡΝΟΣ, ένα σύστημα μάθησης με Στόχους – Υλοποίηση – Πιστοποίηση.
Βοηθάει το μαθητή να οικοδομήσει τη σκέψη του βήμα-βήμα, απλά και κατανοητά. Είναι Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο βάσει του οποίου γίνεται η διδασκαλία στο online μάθημα με «φυσικό» τρόπο. Ο δάσκαλος γράφει και υπογραμμίζει παράλληλα με το μαθητή.

Το Τετράδιο Σπουδής αποτελείται από:

- Οπτικοποιημένη Θεωρία με ροή & συνέχεια
- Ασκήσεις για Διδασκαλία και Εξάσκηση
- Συνδυαστικές και Επαναληπτικές Ασκήσεις
- Θέματα Προσομοίωσης Εξετάσεων

Πιστοποίηση Γνώσεων

Σε προγραμματισμένες ημερομηνίες διεξάγονται online ή/και δια ζώσης **Επαναληπτικά Τεστ Αξιολόγησης** στα οποία ο μαθητής πιστοποιεί και επαληθεύει τις γνώσεις του.

Για τους Γονείς

Πώς ο γονέας μπορεί να έχει εικόνα και εποπτεία στην πρόοδο του παιδιού του;
Το Τετράδιο Σπουδής είναι σχεδιασμένο με τέτοιον τρόπο για τη βήμα – βήμα εξάσκηση του μαθητή, μεταβαίνοντας με ασφάλεια από τα πιο απλά στα πιο σύνθετα. Επίσης, είναι ένας φυσικός τρόπος ο Γονέας να ελέγχει την πρόοδο του παιδιού του.

Πώς γίνεται η εποπτεία από το γονέα;

Σε κάθε μάθημα ελέγχει την ορθότητα των λύσεων, την κατανόηση και τη συμμετοχή του παιδιού στα μαθήματα.

Διδασκαλία στον ΑΡΝΟ σημαίνει:

- Απεριόριστη μελέτη με video lessons
- Αυτομάθηση στο App Arnos Learn
- Coaching εξατομικευμένο
- Μοτίβα Μάθησης και Εξάσκησης
- Κάθε Απορία για εμάς είναι Πρόκληση!

Μέθοδος ΑΡΝΟΣ

Η **Μέθοδος ΑΡΝΟΣ** οδηγεί κάθε μαθητή, ανεξαρτήτως γνώσεων ή επιπέδου, να μελετά από το επίπεδο όπου αισθάνεται άνετα, ώστε να διαμορφώσει γερές βάσεις για μάθηση.

Live Διδασκαλία Το online μάθημα γίνεται με φυσικό τρόπο, γιατί συνδυάζει την Τεχνολογία, το Πνεύμα, την Οργάνωση και την Εμπειρία.

Τετράδιο Σπουδής Είναι ο οδηγός για τη διδασκαλία του μαθήματος, την εξάσκηση του μαθητή και την πραγματοποίηση της online διδασκαλίας με Λόγο, Εικόνα και Παρατήρηση.

Καθηγητής Είναι ο σκηνοθέτης της διδακτικής πράξης, ο οποίος δρα σε ένα οργανωμένο εκπαιδευτικό οικοσύστημα με Στόχους, Μαθησιακό Πλάνο και Ευθύνη.

«Μέθοδος ΑΡΝΟΣ... το καταστάλαγμα μιας πορείας 35 ετών με εκπαιδευτικές και εκδοτικές επιτυχίες, με ταξίδια πολιτισμού, συμμετοχή σε Διεθνείς Εκθέσεις και αποτυχίες... μα, κυρίως, η παρακαταθήκη του ζευγολάτη πατέρα - Αρνού.»

Γιάννης Π. Κρόκος

ΑΡΝΟΣ Online Education

Σολωμού 29, Αθήνα | 210 38 22 157 | 210 38 22 495

arnos.gr | info@arnos.gr

Τετράδιο Σπουδής

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΤΕΥΧΟΣ 2)

- Οδηγός για τη Διδασκαλία του Καθηγητή
- Οδηγός για τη Μελέτη του Μαθητή
- Διδασκαλία Online με φυσικό τρόπο
- Τόπος Εποπτείας Προόδου από το Γονέα
- Διδασκαλία με Πιστοποιημένους Καθηγητές ΑΡΝΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2021

ΑΡΝΟΣ Online Education

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου – Λύσεις Τετραδίου Σπουδής – Τεύχος 2

Συντακτική Ομάδα Κέντρου ΑΡΝΟΣ

Διευθυντής σειράς: Ιωάννης Π. Κρόκος

Συνεργάστηκαν: Παναγιώτα Λέκκα

Βασίλειος Κ. Τσιλιβής

ΑΡΝΟΣ ONLINE EDUCATION

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

Κεφάλαιο 5 : Πρόοδοι

5.1 Ακολουθίες

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

Ο εκάστοτε όρος που αναζητούμε σε μια ακολουθία, προκύπτει, εάν στη θέση του ν αντικαταστήσουμε τον αριθμό του όρου.

α) $\alpha_\nu = 3\nu - 1 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 5 \\ \alpha_3 = 8 \\ \alpha_4 = 11 \\ \alpha_5 = 14 \end{Bmatrix}$

β) $\alpha_\nu = \nu^2 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 4 \\ \alpha_3 = 9 \\ \alpha_4 = 16 \\ \alpha_5 = 25 \end{Bmatrix}$

γ) $\alpha_\nu = \nu^2 - \nu \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 1 - 1 = 0 \\ \alpha_2 = 4 - 2 = 2 \\ \alpha_3 = 9 - 3 = 6 \\ \alpha_4 = 16 - 4 = 12 \\ \alpha_5 = 25 - 5 = 20 \end{Bmatrix}$

δ) $\alpha_\nu = 2^\nu \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 4 \\ \alpha_3 = 8 \\ \alpha_4 = 16 \\ \alpha_5 = 32 \end{Bmatrix}$

ε) $\alpha_\nu = 3^{\nu-1} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 3^0 = 1 \\ \alpha_2 = 3^1 = 3 \\ \alpha_3 = 3^2 = 9 \\ \alpha_4 = 3^3 = 27 \\ \alpha_5 = 3^4 = 81 \end{Bmatrix}$

στ) $\alpha_\nu = \frac{\nu-1}{\nu+1} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = \frac{0}{2} = 0 \\ \alpha_2 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3} \\ \alpha_3 = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2} \\ \alpha_4 = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5} \\ \alpha_5 = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3} \end{Bmatrix}$

ζ) $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \alpha_3 = \frac{1}{3} \\ \alpha_4 = \frac{1}{4} \\ \alpha_5 = \frac{1}{5} \end{Bmatrix}$

η) $\alpha_\nu = (-1)^\nu \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = -1 \\ \alpha_4 = 1 \\ \alpha_5 = -1 \end{Bmatrix}$

θ) $\alpha_\nu = 1-(-1)^\nu \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 1-(-1) = 2 \\ \alpha_2 = 1-1 = 0 \\ \alpha_3 = 1-(-1) = 2 \\ \alpha_4 = 1-1 = 0 \\ \alpha_5 = 1-(-1) = 2 \end{Bmatrix}$

Άσκηση 2

Προκειμένου να υπολογίσουμε τον 13ο όρο των ακολουθιών, απλώς θα αντικαταστήσουμε όπου ν με το 13.

α) $\alpha_\nu = \frac{2\nu-1}{\nu+1} \overset{\nu=13}{\Longleftrightarrow} \alpha_{13} = \frac{26-1}{13+1} = \frac{25}{14}$

β) $\alpha_\nu = \frac{\nu^2-1}{2\nu-5} \overset{\nu=13}{\Longleftrightarrow} \alpha_{13} = \frac{169-1}{26-5} = \frac{168}{21} = 8$

γ) $\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu+1}{3^\nu} \overset{\nu=13}{\Longleftrightarrow} \alpha_{13} = \frac{-1+1}{3^{13}} = 0$

Άσκηση 3

α) $\alpha_{\nu+1} = {\alpha_\nu}^2 + 1 \overset{\alpha_1=1}{\Longleftrightarrow} \Leftrightarrow$, δηλαδή υψώνουμε τον προηγούμενο όρο κάθε φορά στο τετράγωνο.

β) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu(\alpha_\nu - 1) = {\alpha_\nu}^2 - \alpha_\nu \overset{\alpha_1=2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 2 \\ \alpha_4 = 2 \\ \alpha_5 = 2 \end{matrix}\right\}$, δηλαδή έχουμε μια «σταθερή ακολουθία».

γ) $\alpha_{\nu+1} = \nu\alpha_\nu \overset{\alpha_1=1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = \alpha_{1+1} = 1\alpha_1 = 1 \\ \alpha_3 = \alpha_{2+1} = 2\alpha_2 = 2 \\ \alpha_4 = \alpha_{3+1} = 3\alpha_3 = 6 \\ \alpha_5 = \alpha_{4+1} = 4\alpha_4 = 24 \end{matrix}\right\}$

δ) $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu \overset{\substack{\alpha_1=1 \\ \alpha_2=2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_1 = 2 - 1 = 1 \\ \alpha_4 = \alpha_3 - \alpha_2 = 1 - 2 = -1 \\ \alpha_5 = \alpha_4 - \alpha_3 = -1 - 1 = -2 \end{matrix}\right\}$

Άσκηση 4

α) $\alpha_{\nu+1} = 3\alpha_\nu \overset{\alpha_1=2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 3\alpha_1 = 6 \\ \alpha_3 = 3\alpha_2 = 18 \\ \alpha_4 = 3\alpha_3 = 54 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha_4 = 54$

β) $\alpha_{\nu+1} = 2 - \alpha_\nu \overset{\alpha_1=-1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 2 - \alpha_1 = 3 \\ \alpha_3 = 2 - \alpha_2 = -1 \\ \alpha_4 = 2 - \alpha_3 = 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha_4 = 3$

γ) $\alpha_{\nu+1} = {\alpha_\nu}^2 - 1 \overset{\alpha_1=2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 4 - 1 = 3 \\ \alpha_3 = 9 - 1 = 8 \\ \alpha_4 = 64 - 1 = 63 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha_4 = 63$

Άσκηση 5

α) $\alpha_\nu = \nu + 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 1 + 1 = 2 \\ \alpha_2 = 2 + 1 = 3 \\ \alpha_3 = 3 + 1 = 4 \\ \alpha_4 = 4 + 1 = 5 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 1 + 1 = 2 \\ \alpha_2 = \alpha_{1+1} = 2 + 1 = \alpha_1 + 1 \\ \alpha_3 = \alpha_{2+1} = 3 + 1 = \alpha_2 + 1 \\ \alpha_4 = \alpha_{3+1} = 4 + 1 = \alpha_3 + 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

Επομένως, ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 1 \; \mu\varepsilon \; \alpha_1 = 2.$$

β) $\alpha_\nu = 2\nu + 5 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 2 + 5 = 7 \\ \alpha_2 = 4 + 5 = 9 \\ \alpha_3 = 6 + 5 = 11 \\ \alpha_4 = 8 + 5 = 13 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2 \; \mu\varepsilon \; \alpha_1 = 7.$

Προκύπτει απευθείας, αφού όλοι οι όροι διαφέρουν κατά 2 και συγχρόνως η ακολουθία είναι αύξουσα.

γ) $\alpha_\nu = 2^\nu \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 2^1 = 2 \\ \alpha_2 = 2^2 = 4 \\ \alpha_3 = 2^3 = 8 \\ \alpha_4 = 2^4 = 16 \\ \alpha_5 = 2^5 = 32 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 4 = 2\alpha_1 \\ \alpha_3 = 8 = 2\alpha_2 \\ \alpha_4 = 16 = 2\alpha_3 \\ \alpha_5 = 32 = 2\alpha_4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu \; \mu\varepsilon \; \alpha_\nu = 2.$

$$\delta)\ \alpha_\nu = 2^\nu + 3 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 2^1 + 3 = 5 \\ \alpha_2 = 2^2 + 3 = 7 \\ \alpha_3 = 2^3 + 3 = 11 \\ \alpha_4 = 2^4 + 3 = 19 \\ \alpha_5 = 2^5 + 3 = 35 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = 7 = \alpha_1 + 2 = \alpha_1 + 2^1 \\ \alpha_3 = 11 = \alpha_2 + 4 = \alpha_2 + 2^2 \\ \alpha_4 = 19 = \alpha_3 + 8 = \alpha_3 + 2^3 \\ \alpha_5 = 35 = \alpha_4 + 16 = \alpha_4 + 2^4 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2^\nu, \mu\varepsilon\ \alpha_1 = 5.$$

Άσκηση 6

$$\alpha)\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2\ \mu\varepsilon\ \alpha_1 = 3 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = \alpha_{1+1} = \alpha_1 + 2 = 3 + 2 = 5 \\ \alpha_3 = \alpha_{2+1} = \alpha_2 + 2 = 5 + 2 = 7 \\ \alpha_4 = \alpha_{3+1} = \alpha_3 + 2 = 7 + 2 = 9 \\ \alpha_5 = \alpha_{4+1} = \alpha_4 + 2 = 9 + 2 = 11 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = \alpha_{1+1} = 5 = 3 + 2 = 3 + 2 * 1 = 3 + 2 * (2-1) \\ \alpha_3 = \alpha_{2+1} = 7 = 3 + 4 = 3 + 2 * 2 = 3 + 2 * (3-1) \\ \alpha_4 = \alpha_{3+1} = 9 = 3 + 6 = 3 + 2 * 3 = 3 + 2 * (4-1) \\ \alpha_5 = \alpha_{4+1} = 11 = 3 + 8 = 3 + 2 * 4 = 3 + 2 * (5-1) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_\nu = 3 + 2(\nu - 1).$$

$$\beta)\ \alpha_{\nu+1} = 3\alpha_\nu\ \mu\varepsilon\ \alpha_1 = 1 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = \alpha_{1+1} = 3\alpha_1 = 3 \\ \alpha_3 = \alpha_{2+1} = 3\alpha_2 = 9 \\ \alpha_4 = \alpha_{3+1} = 3\alpha_3 = 27 \\ \alpha_5 = \alpha_{4+1} = 3\alpha_4 = 81 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 1 = 3^{1-1} \\ \alpha_2 = 3 = 3^{2-1} \\ \alpha_3 = 9 = 3^{3-1} \\ \alpha_4 = 27 = 3^{4-1} \\ \alpha_5 = 81 = 3^{5-1} \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 3^{\nu-1}.$$

$$\gamma)\ \alpha_{\nu+1} = \frac{2}{\alpha_\nu}\ \mu\varepsilon\ \alpha_1 = 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = \alpha_{1+1} = \frac{2}{\alpha_1} = 2 \\ \alpha_3 = \alpha_{2+1} = \frac{2}{\alpha_2} = 1 \\ \alpha_4 = \alpha_{3+1} = \frac{2}{\alpha_3} = 2 \\ \alpha_5 = \alpha_{4+1} = \frac{2}{\alpha_4} = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_\nu = \left\{\begin{matrix} -(-1)^\nu\ , \acute{o}\pi o\upsilon\ \nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma\ \varphi\upsilon\sigma\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma \\ 1 + (-1)^\nu, \acute{o}\pi o\upsilon\ \nu\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\ \varphi\upsilon\sigma\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma \end{matrix}\right\}$$

$$\delta)\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + (-1)^\nu\ \mu\varepsilon\ \alpha_1 = 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = \alpha_{1+1} = \alpha_1 + (-1)^1 = 0 \\ \alpha_3 = \alpha_{2+1} = \alpha_2 + (-1)^2 = 1 \\ \alpha_4 = \alpha_{3+1} = \alpha_3 + (-1)^3 = 0 \\ \alpha_5 = \alpha_{4+1} = \alpha_4 + (-1)^4 = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_\nu = \left\{\begin{matrix} -(-1)^\nu\ , \acute{o}\pi o\upsilon\ \nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma\ \varphi\upsilon\sigma\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma \\ 1 - (-1)^\nu, \acute{o}\pi o\upsilon\ \nu\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\ \varphi\upsilon\sigma\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma \end{matrix}\right\}$$

Σημείωση:

Υπάρχουν ακολουθίες των οποίων οι όροι εναλλάσσονται και διαφέρουν μεταξύ τους κατά ένα.

Η ακολουθία σε αυτές τις περιπτώσεις είναι «κλαδωτή», δηλαδή αποτελείται από δύο τύπους. Ο ένας αφορά τους περιττούς αριθμούς και ο άλλος τους άρτιους.

Άσκηση 7

$\alpha_\nu = 2\nu^2 - 3\nu \Rightarrow 2\nu^2 - 3\nu = 20 \Rightarrow 2\nu^2 - 3\nu - 20 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 160 = 169$

$$\Rightarrow \nu_1 = \frac{3+\sqrt{169}}{4} = \frac{3+13}{4} = 4 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \nu_2 = \frac{3-\sqrt{169}}{4} = \frac{3-13}{4} = -\frac{5}{2} \Rightarrow$$

Η λύση ν_2 προφανώς απορρίπτεται, καθώς η ακολουθία ορίζεται για $\nu \in \mathbb{N}$.

Άρα, ο 4^{ος} όρος της ισούται με 20.

Άσκηση 8

α) $\alpha_\nu = 2\nu - 1 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 3 \\ \alpha_3 = 5 \\ \alpha_4 = 7 \\ \alpha_5 = 9 \end{Bmatrix}$

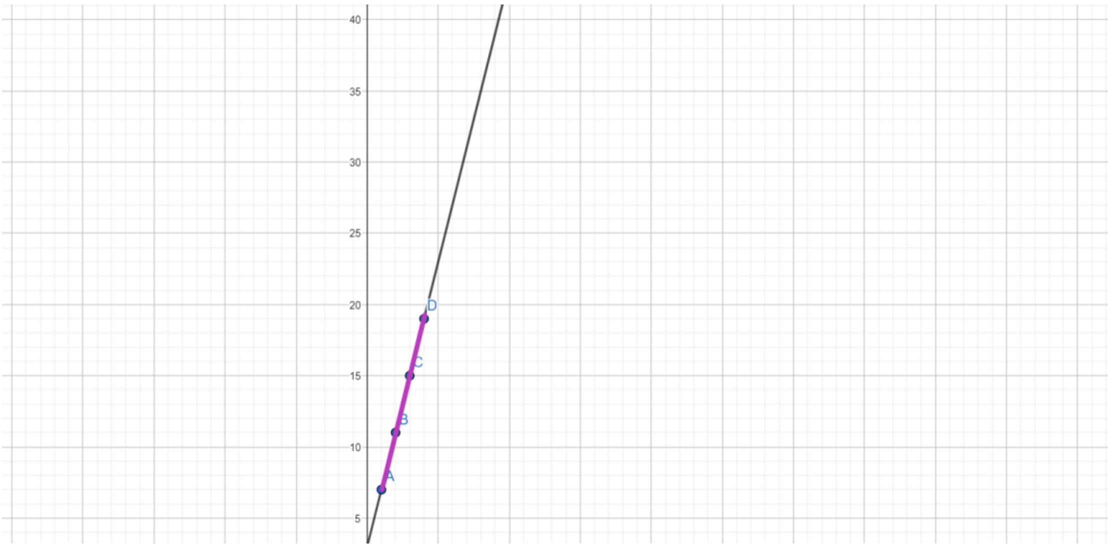
β) $\alpha_\nu = \nu^2 + 2\nu \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 1 + 2 = 3 \\ \alpha_2 = 4 + 4 = 8 \\ \alpha_3 = 9 + 6 = 15 \\ \alpha_4 = 16 + 8 = 24 \\ \alpha_5 = 25 + 10 = 35 \end{Bmatrix}$

γ) $\alpha_\nu = \frac{\nu}{\nu+1} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \\ \alpha_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} \\ \alpha_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5} \\ \alpha_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6} \end{Bmatrix}$

Άσκηση 9

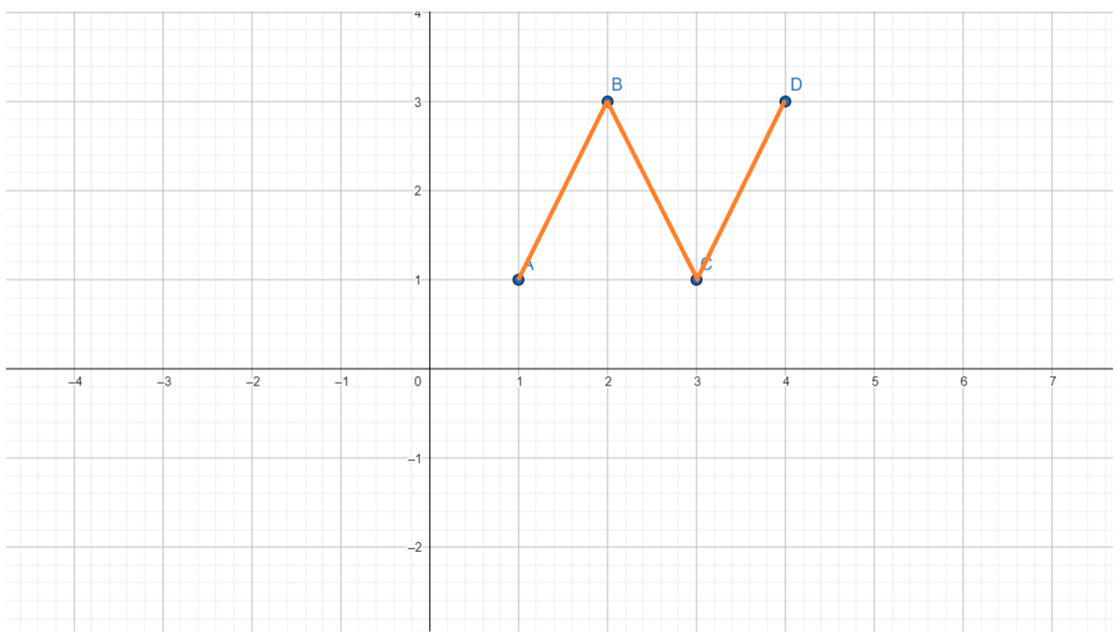
α) $\alpha_\nu = 4\nu + 3 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 4 + 3 = 7 \\ \alpha_2 = 8 + 3 = 11 \\ \alpha_3 = 12 + 3 = 15 \\ \alpha_4 = 16 + 3 = 19 \end{Bmatrix}$

Το κομμάτι που παριστάνει τα παραπάνω σημεία είναι το μωβ ευθύγραμμο τμήμα.



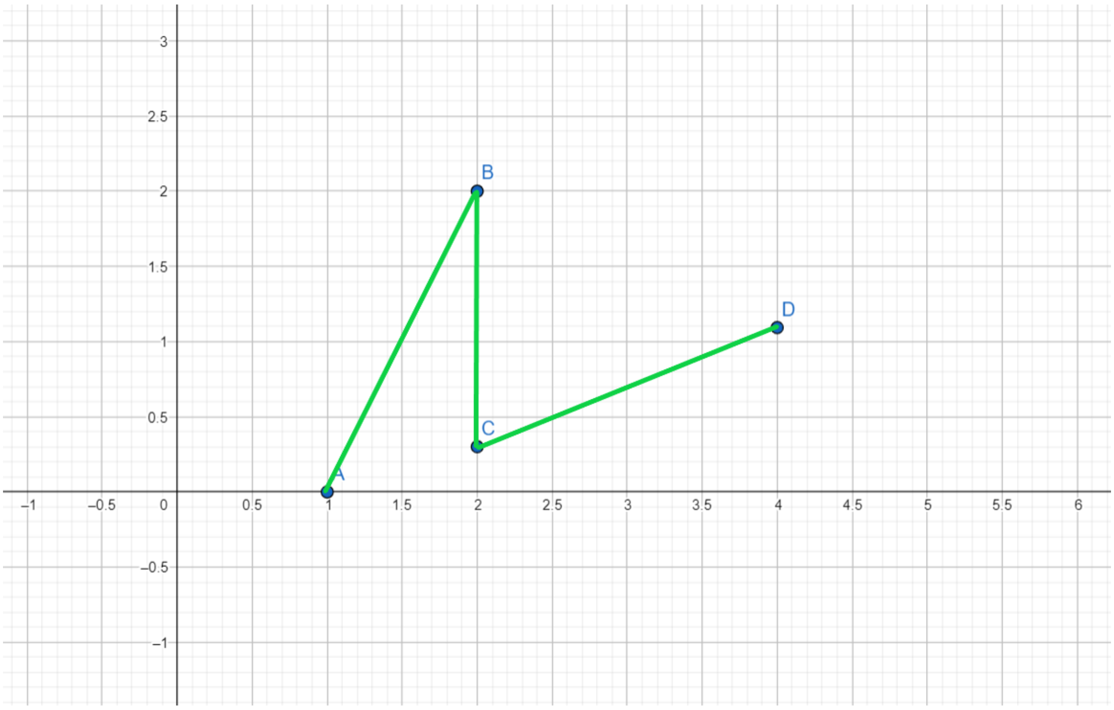
β) $\alpha_\nu = 2 + (-1)^\nu \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 2 - 1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 + 1 = 3 \\ \alpha_3 = 2 - 1 = 1 \\ \alpha_4 = 2 + 1 = 3 \end{Bmatrix}$

Το κομμάτι που ενώνει τα παραπάνω σημεία παριστάνεται με την τεθλασμένη γραμμή.



$$γ)\ α_{ν+1} = \frac{2}{3α_ν+1}\ με\ α_1 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} α_1 = 0 \\ α_2 = \frac{2}{3α_1+1} = 2 \\ α_3 = \frac{2}{3α_2+1} = \frac{2}{6+1} = \frac{2}{7} \\ α_4 = \frac{2}{3α_3+1} = \frac{2}{\frac{6}{7}+1} = \frac{14}{13} \end{array}\right\}$$

Τα ζητούμενα σημεία παριστάνονται μέσω της τεθλασμένης γραμμής.



Άσκηση 10

$$α)\ α_ν = 2ν - 3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} α_1 = 2 - 3 = -1 \\ α_2 = 4 - 3 = 1 \\ α_3 = 6 - 3 = 3 \\ α_4 = 8 - 3 = 5 \\ α_5 = 10 - 3 = 7 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} α_1 = -1 \\ α_2 = 1 = -1 + 2 = α_1 + 2 \\ α_3 = 3 = 1 + 2 = α_2 + 2 \\ α_4 = 5 = 3 + 2 = α_3 + 2 \\ α_5 = 7 = 5 + 2 = α_4 + 2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow α_{ν+1} = α_ν + 2\ με\ α_1 = -1.$$

β) $\beta_\nu = 5 * 3^\nu \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \beta_1 = 5 * 3^1 = 15 \\ \beta_2 = 5 * 3^2 = 45 \\ \beta_3 = 5 * 3^3 = 135 \\ \beta_4 = 5 * 3^4 = 405 \\ \beta_5 = 5 * 3^5 = 1215 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \beta_1 = 15 \\ \beta_2 = 45 = 3 * 15 = 3\beta_1 \\ \beta_3 = 135 = 3 * 45 = 3\beta_2 \\ \beta_4 = 405 = 3 * 135 = 3\beta_3 \\ \beta_5 = 1215 = 3 * 405 = 3\beta_4 \end{Bmatrix}$

$\Leftrightarrow \beta_{\nu+1} = 3\beta_\nu \; \mu\varepsilon \; \beta_1 = 15.$

γ) $\gamma_\nu = 1 + 2^\nu \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \gamma_1 = 1 + 2^1 = 3 \\ \gamma_2 = 1 + 2^2 = 5 \\ \gamma_3 = 1 + 2^3 = 9 \\ \gamma_4 = 1 * 2^4 = 17 \\ \gamma_5 = 1 + 2^5 = 33 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \gamma_1 = 3 \\ \gamma_2 = 5 = \gamma_1 + 2 = \gamma_1 + 2^1 \\ \gamma_3 = 9 = \gamma_2 + 4 = \gamma_2 + 2^2 \\ \gamma_4 = 17 = \gamma_3 + 8 = \gamma_3 + 2^3 \\ \gamma_5 = 33 = \gamma_4 + 16 = \gamma_4 + 2^4 \end{Bmatrix}$

$\Leftrightarrow \gamma_{\nu+1} = \gamma_\nu + 2^\nu \; \mu\varepsilon \; \gamma_1 = 3.$

Άσκηση 11

α) $\alpha_{\nu+1} = 1 + \alpha_\nu \; \mu\varepsilon \; \alpha_1 = -1 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1 + \alpha_1 = 0 \\ \alpha_3 = 1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_4 = 1 + \alpha_3 = 2 \\ \alpha_5 = 1 + \alpha_4 = 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = -1 = 1 - 2 \\ \alpha_2 = 0 = 2 - 2 \\ \alpha_3 = 1 = 3 - 2 \\ \alpha_4 = 2 = 4 - 2 \\ \alpha_5 = 3 = 5 - 2 \end{Bmatrix}$

$\Leftrightarrow \alpha_\nu = \nu - 2.$

Παρατηρούμε ότι οι δείκτες των όρων της ακολουθίας διαφέρον από τον όρο κατά 2, οπότε και πονηρευόμαστε.

β) $\beta_{\nu+1} = 3\beta_\nu \ \mu\varepsilon\ \beta_1 = 15 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \beta_1 = 15 \\ \beta_2 = 3\beta_1 = 3*15 = 45 \\ \beta_3 = 3\beta_2 = 3*45 = 135 \\ \alpha_4 = 3\beta_3 = 3*135 = 405 \\ \alpha_5 = 3\beta_4 = 3*405 = 1215 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{Bmatrix} \beta_1 = 15 = 5*3^1 \\ \beta_2 = 45 = 5*9 = 5*3^2 \\ \beta_3 = 135 = 5*27 = 5*3^3 \\ \beta_4 = 405 = 5*81 = 5*3^4 \\ \beta_5 = 1215 = 5*243 = 5*3^5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \beta_\nu = 5*3^\nu$

γ) $\gamma_{\nu+1} = \gamma_\nu + 2^\nu \ \mu\varepsilon\ \gamma_1 = 3 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \gamma_1 = 3 \\ \gamma_2 = \gamma_1 + 2^1 = 5 \\ \gamma_3 = \gamma_2 + 2^2 = 9 \\ \gamma_4 = \gamma_3 + 2^3 = 17 \\ \gamma_5 = \gamma_4 + 2^4 = 33 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{Bmatrix} \gamma_1 = 3 = 1+2 = 1+2^1 \\ \gamma_2 = 5 = 1+4 = 1+2^2 \\ \gamma_3 = 9 = 1+8 = 1+2^3 \\ \gamma_4 = 17 = 1+16 = 1*2^4 \\ \gamma_5 = 33 = 1+32 = 1+2^5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \gamma_\nu = 1+2^\nu$

Άσκηση 12

α) $\alpha_{\nu+1} = \frac{2}{\alpha_\nu} \overset{\alpha_1=1}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 1 \\ \alpha_4 = 2 \\ \alpha_5 = 1 \end{Bmatrix}$

β)

$\alpha_{\nu+1} = {\alpha_\nu}^2 + 1 \overset{\alpha_1=-1}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1+1 = 2 \\ \alpha_3 = 4+1 = 5 \\ \alpha_4 = 25+1 = 26 \\ \alpha_5 = 677 \end{Bmatrix}$

Άσκηση 13

α) $\alpha_{\nu+1} = 1 - 2\alpha_\nu \; \mu\varepsilon \; \alpha_1 = -2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = 1 - 2\alpha_1 = 5 \\ \alpha_3 = 1 - 2\alpha_2 = -9 \\ \alpha_4 = 1 - 2\alpha_3 = 19 \\ \alpha_5 = 1 - 2\alpha_4 = -37 \\ \alpha_6 = 1 - 2\alpha_5 = 75 \end{matrix} \right\}$

β) $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu \; \mu\varepsilon \; \alpha_1 = 3 \; \kappa\alpha\iota \; \alpha_2 = -1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_1 = -4 \\ \alpha_4 = \alpha_3 - \alpha_2 = -3 \\ \alpha_5 = \alpha_4 - \alpha_3 = 1 \\ \alpha_6 = \alpha_5 - \alpha_4 = 4 \end{matrix} \right\}$

Άσκηση 14

α) $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu \overset{\alpha_1=1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2\alpha_1 = 2 \\ \alpha_3 = 2\alpha_2 = 4 \\ \alpha_4 = 2\alpha_3 = 8 \\ \alpha_5 = 2\alpha_4 = 16 \\ \alpha_6 = 2\alpha_5 = 32 \end{matrix} \right\}$

Παρατηρούμε ότι οι όροι της ακολουθίας είναι οι δυνάμεις του 2, εκτός από τον πρώτο όρο. Υποπτευόμαστε ότι κάποια δύναμη θα είναι μηδέν, προκειμένου να μας επιστρέφει όρο ίσο με 1.

Επειδή σε μια ακολουθία αντιστοιχίζουμε τους φυσικούς σε πραγματικούς αριθμούς, δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ν με το 0, άρα προκύπτει:

$$\alpha_\nu = 2^{\nu-1} \; \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

β) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 1 \overset{\alpha_1=4}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = \alpha_1 + 1 = 5 \\ \alpha_3 = \alpha_2 + 1 = 6 \\ \alpha_4 = \alpha_3 + 1 = 7 \\ \alpha_5 = \alpha_4 + 1 = 8 \\ \alpha_6 = \alpha_5 + 1 = 9 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 3 + \nu.$

Άσκηση 15

$\alpha_\nu = 5\nu - 3 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 5*1-3 = 2 \\ \alpha_2 = 5*2-3 = 7 \\ \alpha_3 = 5*3-3 = 12 \\ \alpha_4 = 5*4-3 = 17 \\ \alpha_5 = 5*5-3 = 22 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 7 = 2+5 = \alpha_1 + 5 \\ \alpha_3 = 12 = 7+5 = \alpha_2 + 5 \\ \alpha_4 = 17 = 12+5 = \alpha_3 + 5 \\ \alpha_5 = 22 = 17+5 = \alpha_4 + 5 \end{matrix}\right\}$

$\Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 5 \ \mu\varepsilon \ \alpha_1 = 2.$

Άσκηση 16

$\alpha_\nu = 4\nu - 5 \Rightarrow$ Προκειμένου να είναι οι συγκεκριμένοι αριθμοί όροι της ακολουθίας πρέπει να επαληθεύουν τον τύπο της για κάποιο $\nu \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

- $-8 = 4\nu - 5 \Leftrightarrow 4\nu = -3 \Leftrightarrow \nu = -\frac{3}{4} \not\Leftrightarrow \acute{\alpha}\tau o\pi o$
- $23 = 4\nu - 5 \Leftrightarrow 4\nu = 18 \Leftrightarrow \nu = \frac{9}{2} \not\Leftrightarrow \acute{\alpha}\tau o\pi o$
- $56 = 4\nu - 5 \Leftrightarrow 4\nu = 61 \Leftrightarrow \nu = \frac{61}{4} \not\Leftrightarrow \acute{\alpha}\tau o\pi o$

Συνεπώς, κανένας από τους παραπάνω αριθμούς δεν είναι όρος της ακολουθίας.

Άσκηση 17

α) $$\alpha_\nu = \frac{3^{\nu+1}-2^{\nu+1}}{3^\nu-2^\nu} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = \frac{3^2-2^2}{3-2} = 5 \\ \alpha_2 = \frac{3^3-2^3}{3^2-2^3} = \frac{27-8}{9-4} = \frac{19}{5} \\ \alpha_3 = \frac{3^4-2^4}{3^3-2^3} = \frac{81-16}{27-8} = \frac{65}{19} \\ \alpha_4 = \frac{3^5-2^5}{3^4-2^4} = \frac{243-32}{81-16} = \frac{211}{65} \\ \alpha_5 = \frac{3^6-2^6}{3^5-2^5} = \frac{729-64}{243-32} = \frac{665}{211} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = \frac{19}{5} = 19\frac{1}{\alpha_1} \\ \alpha_3 = \frac{65}{19} = 13\frac{1}{\alpha_2} \\ \alpha_4 = \frac{211}{65} \end{Bmatrix}$$

β) $$\alpha_\nu = 2^{2^\nu} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 2^2 = 4 \\ \alpha_2 = 2^4 = 16 \\ \alpha_3 = 2^6 = 64 \\ \alpha_4 = 2^8 = 256 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = 16 = 4 * 4 = 4\alpha_1 \\ \alpha_3 = 64 = 4 * 16 = 4\alpha_2 \\ \alpha_4 = 256 = 4 * 64 = 4\alpha_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$\alpha_{\nu+1} = 4\alpha_\nu \ \mu\varepsilon \ \alpha_1 = 4.$

γ) $$\alpha_\nu = \nu \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 3 \\ \alpha_4 = 4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 = 1 + 1 = 1 + \alpha_1 \\ \alpha_3 = 3 = 1 + 2 = 1 + \alpha_2 \\ \alpha_4 = 4 = 1 + 3 = 1 + \alpha_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$\alpha_{\nu+1} = 1 + \alpha_\nu \ \mu\varepsilon \ \alpha_1 = 4.$

$$\delta)\ \alpha_\nu = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1+\frac{1}{2} \\ \alpha_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \\ \alpha_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \\ \alpha_5 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = \alpha_{1+1} = 1+\dfrac{1}{2} = \alpha_1 + \dfrac{1}{1+1} \\ \alpha_3 = \alpha_{2+1} = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3} = \alpha_2 + \dfrac{1}{2+1} \\ \alpha_4 = \alpha_{3+1} = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4} = \alpha_3 + \dfrac{1}{3+1} \\ \alpha_5 = \alpha_{4+1} = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5} = \alpha_4 + \dfrac{1}{4+1} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \frac{1}{\nu+1}$$

5.2 Αριθμητική Πρόοδος

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

α) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \xLeftrightarrow[\omega=\alpha_2-\alpha_1=3-1=2]{\alpha_1=1} \alpha_\nu = 1 + 2(\nu - 1) = 2\nu - 1$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \xLeftrightarrow[\omega=\alpha_2-\alpha_1=-1-1=-2]{\alpha_1=1} \alpha_\nu = 1 - 2(\nu - 1) = -2\nu + 3$

γ) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \xLeftrightarrow[\omega=\alpha_2-\alpha_1=13-8=5]{\alpha_1=8} \alpha_\nu = 8 + 5(\nu - 1) = 5\nu + 3$

δ) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \xLeftrightarrow[\omega=\alpha_2-\alpha_1=-7+3=-4]{\alpha_1=-3} \alpha_\nu = -3 - 4(\nu - 1) = -4\nu + 1$

ε) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \xLeftrightarrow[\omega=\alpha_2-\alpha_1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}]{\alpha_1=1} \alpha_\nu = 1 + \frac{1}{2}(\nu - 1) = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$

στ) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \xLeftrightarrow[\omega=\alpha_2-\alpha_1=7-8=-1]{\alpha_1=8} \alpha_\nu = 8 - (\nu - 1) = -\nu + 9$

Παρατήρηση:

Κάθε αριθμητική πρόοδος όπως και κάθε εκφράζει μια σειρά όρων που έχουν μια συγκεκριμένη δομή και κατά συνέπεια η δομή αυτή εκφράζει κάτι. Για παράδειγμα, στο παράδειγμα (γ) η αριθμητική πρόοδος περιλαμβάνει όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του 5 αυξημένους κατά 3 και στο παράδειγμα (δ) όλους τους αρνητικούς ακεραίους που είναι πολλαπλάσια του 4 αυξημένους κατά 1.

Άσκηση 2

α) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \xLeftrightarrow[]{\substack{\alpha_1=1\\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=5-1=4}} \alpha_\nu = 1+4(\nu-1) = 4\nu-3 \xLeftrightarrow{\nu=7} \alpha_7 = 25$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \xLeftrightarrow[]{\substack{\alpha_1=-5\\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=1+5=6}} \alpha_\nu = -5+6(\nu-1) = 6\nu-11$

$\xLeftrightarrow{\nu=15} \alpha_{15} = 79$

γ) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \xLeftrightarrow[]{\substack{\alpha_1=1\\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=3-1=2}} \alpha_\nu = 1+2(\nu-1) = 2\nu-1 \xLeftrightarrow{\nu=42} \alpha_{42} = 83$

δ) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \xLeftrightarrow[]{\substack{\alpha_1=21\\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=13-21=-8}} \alpha_\nu = 21-8(\nu-1) = -8\nu+29$

$\xLeftrightarrow{\nu=10} \alpha_{10} = -51$

ε) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \xLeftrightarrow[]{\substack{\alpha_1=-1\\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=-2+1=-1}} \alpha_\nu = -1-(\nu-1) = -\nu$

$\xLeftrightarrow{\nu=100} \alpha_{100} = -100$

στ) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \xLeftrightarrow[]{\substack{\alpha_1=1\\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}}} \alpha_\nu = 1+\frac{1}{4}(\nu-1) = \frac{1}{4}\nu+\frac{3}{4} \xLeftrightarrow{\nu=20} \alpha_{20} = \frac{23}{4}$

Άσκηση 3

α) $\begin{Bmatrix} \alpha_3 = 11 \\ \alpha_7 = 23 \end{Bmatrix} \Rightarrow$ Ο α_7 βρίσκεται δεξιά του α_3 κατά 4 όρους, συνεπώς προκύπτει:

$\alpha_7 - \alpha_3 = 4\omega \Leftrightarrow 23-11 = 4\omega \Leftrightarrow \omega = 3 \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$

$\xLeftrightarrow{\alpha_1=\alpha_3-2\omega=11-6=5} \alpha_\nu = 5+3(\nu-1) = 3\nu+2$

β) $\begin{Bmatrix} \alpha_4 = 1 \\ \alpha_8 = -15 \end{Bmatrix} \Rightarrow$ Ο α_8 βρίσκεται δεξιά του α_4 κατά 4 όρους, συνεπώς

προκύπτει:

$$\alpha_8 - \alpha_4 = 4\omega \Leftrightarrow -15 - 1 = 4\omega \Leftrightarrow \omega = -4 \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

$$\xLeftrightarrow{\alpha_1 = \alpha_4 - 3\omega = 1 + 12 = 13} \alpha_\nu = 13 - 4(\nu - 1) = -4\nu + 17$$

γ) $\begin{Bmatrix} \alpha_5 = 12 \\ \alpha_9 = 32 \end{Bmatrix} \Rightarrow$ Ο α_9 βρίσκεται δεξιά του α_5 κατά 4 όρους, συνεπώς προκύπτει:

$$\alpha_9 - \alpha_5 = 4\omega \Leftrightarrow 32 - 12 = 4\omega \Leftrightarrow \omega = 5 \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

$$\xLeftrightarrow{\alpha_1 = \alpha_5 - 4\omega = 12 - 20 = -8} \alpha_\nu = -8 + 5(\nu - 1) = 5\nu - 13$$

Άσκηση 4

α) $\begin{Bmatrix} \alpha_3 = 27 \\ \alpha_{12} = 117 \end{Bmatrix} \Rightarrow$ Ο α_{12} βρίσκεται δεξιά του α_3 κατά 9 όρους, συνεπώς

προκύπτει:

$$\alpha_{12} - \alpha_3 = 9\omega \Leftrightarrow 117 - 27 = 9\omega \Leftrightarrow \omega = 10 \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

$$\xLeftrightarrow{\alpha_1 = \alpha_3 - 2\omega = 27 - 20 = 7} \alpha_\nu = 7 + 10(\nu - 1) = 10\nu - 3 \xLeftrightarrow{\nu = 30} \alpha_{30} = 297$$

β) $\begin{Bmatrix} \alpha_6 = 10 \\ \alpha_{15} = -35 \end{Bmatrix} \Rightarrow$ Ο α_{15} βρίσκεται δεξιά του α_6 κατά 9 όρους, συνεπώς

προκύπτει:

$$\alpha_{15} - \alpha_6 = 9\omega \Leftrightarrow -35 - 10 = 4\omega \Leftrightarrow \omega = -9 \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

$$\xLeftrightarrow{\alpha_1 = \alpha_6 - 5\omega = 10 + 45 = 55} \alpha_\nu = 55 - 9(\nu - 1) = -9\nu + 64 \xLeftrightarrow{\nu = 37} \alpha_{37} = 269$$

Άσκηση 5

α) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 3 + 7(\nu - 1) = 7\nu - 4 \Rightarrow 7\nu - 4 = 101 \Rightarrow$

$7\nu = 105 \Rightarrow \nu = 15$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 5 - 2(\nu - 1) = -2\nu + 7 \Rightarrow -2\nu + 7 = -35 \Rightarrow$

$-2\nu = -42 \Rightarrow \nu = 24$

γ) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 9 + (15 - 9)(\nu - 1) = 6\nu + 3 \Rightarrow 6\nu + 3 = 111 \Rightarrow$

$6\nu = 108 \Rightarrow \nu = 18$

Άσκηση 6

Έστω α ο αριθμητικός μέσος σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

α) $\alpha = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$

β) $\alpha = \frac{5+15}{2} = \frac{20}{2} = 10$

γ) $\alpha = \frac{4+11}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$

δ) $\alpha = \frac{28+76}{2} = \frac{104}{2} = 52$

ε) $\alpha = \frac{-5+3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

στ) $\alpha = \frac{-16-4}{2} = \frac{-20}{2} = -10$

Άσκηση 7

α) $5 + 2x = \frac{3x+1+7}{2} \Leftrightarrow 4x + 10 = 3x + 8 \Leftrightarrow x = -2$

β) $5 = \frac{4x+2+x^2+3}{2} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = 10 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow$

$$\Delta = 16 + 20 = 36 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \ \kappa\alpha\iota \ x_2 = -5$$

Άσκηση 8

Έστω α και β οι αριθμοί αυτοί και γ ο αριθμητικός μέσος τους. Προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} \beta - \alpha = 5 \\ \gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -\alpha + \beta = 5 \\ \alpha + \beta = 2\gamma = 14 \end{Bmatrix} \overset{+}{\Leftrightarrow} 2\beta = 19 \Leftrightarrow \beta = \frac{19}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{9}{2}$$

Άσκηση 9

Έστω α ο ζητούμενος αριθμός. Προκύπτει:

$$\frac{\alpha + \alpha^2}{2} = 6 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 1 + 48 = 49 > 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow \alpha_1 = 3 \ \kappa\alpha\iota \ \alpha_2 = -4$$

Άσκηση 10

Έστω α και β οι αριθμοί αυτοί. Προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\alpha}{\beta} = 3 \\ \dfrac{\alpha+\beta}{2} = 8 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 3\beta \\ \alpha + \beta = 16 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 3\beta \\ 4\beta = 16 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \beta = 4 \\ \alpha = 12 \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 11

Για να είναι οι αριθμοί διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου θα πρέπει να διαφέρουν κατά την ίδια ποσότητα ανά δύο.

Δηλαδή:

$$\left\{\begin{matrix} x^2+4-x-5=\omega \\ 7x-x^2-4=\omega \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x^2-x-1=-x^2+7x-4 \Leftrightarrow 2x^2-8x+3=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=64-24=40>0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{8\pm 2\sqrt{10}}{4} \Leftrightarrow x_1=2+\frac{\sqrt{10}}{2} \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x_2=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Οι αριθμοί επομένως είναι οι:

$$\left\{\begin{matrix} 7+\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{21}{2}+2\sqrt{10}, 14+\frac{7\sqrt{10}}{2} \\ 7-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{21}{2}-2\sqrt{10}, 14-\frac{7\sqrt{10}}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι:

$$\omega=\frac{21}{2}+2\sqrt{10}-7-\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{7}{2}+\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

Άσκηση 12

Επειδή δε γνωρίζουμε τον όρο α_ν, θα χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο τύπο.

α) $S_\nu=\frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega] \xLeftrightarrow[\nu=50]{\substack{\alpha_1=1 \\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=2-1=1}} S_{50}=\frac{50}{2}[2+49]=1.275$

β) $S_\nu=\frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega] \xLeftrightarrow[\nu=50]{\substack{\alpha_1=1 \\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=3-1=2}} S_{50}=\frac{50}{2}[2+98]=2.500$

γ) $S_\nu=\frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega] \xLeftrightarrow[\nu=50]{\substack{\alpha_1=10 \\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=11-10=1}} S_{50}=\frac{50}{2}[20+49]=1.725$

δ) $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] \xLeftrightarrow[\nu=50]{\substack{\alpha_1=21 \\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=14-21=-7}} S_{50} = \frac{50}{2}[42 - 343] = -7.525$

ε) $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] \xLeftrightarrow[\nu=50]{\substack{\alpha_1=-8 \\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=-11+8=-3}} S_{50} = \frac{50}{2}[-16 - 147] = -4.075$

στ) $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] \xLeftrightarrow[\nu=50]{\substack{\alpha_1=-10 \\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=-6+10=4}} S_{50} = \frac{50}{2}[-20 + 196] = 4.400$

Άσκηση 13

α) $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] \xLeftrightarrow[\nu=100]{\substack{\alpha_1=5 \\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=1-5=-4}} S_{100} = \frac{100}{2}[10 - 396] = -19.300$

β) $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] \xLeftrightarrow[\nu=100]{\substack{\alpha_1=1 \\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}}} S_{100} = \frac{100}{2}\left[2 + \frac{99}{2}\right] = 2.575$

γ) $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] \xLeftrightarrow[\nu=100]{\substack{\alpha_1=3 \\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=\frac{5}{2}-3=-\frac{1}{2}}} S_{100} = \frac{100}{2}\left[6 - \frac{99}{2}\right] = -2.175$

Άσκηση 14

$$\alpha_\nu - \alpha_1 = (\nu-1)\omega \Leftrightarrow \nu = 1 + \frac{\alpha_\nu - \alpha_1}{\omega}$$

α) $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xLeftrightarrow[\nu=100]{\substack{\alpha_1=1 \\ \alpha_{100}=100}} S_{100} = \frac{100}{2}(1 + 100) = 5.050$

β) $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xLeftrightarrow[\nu=22]{\substack{\alpha_1=8 \\ \alpha_{22}=71}} S_{22} = \frac{22}{2}(8 + 71) = 869$

γ) $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \overset{\substack{\alpha_1=15 \\ \alpha_{20}=-23 \\ \nu=22}}{\Longleftrightarrow} S_{20} = \frac{20}{2}(15 - 23) = -80$

δ) $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \overset{\substack{\alpha_1=-9 \\ \alpha_{19}=-99 \\ \nu=19}}{\Longleftrightarrow} S_{19} = \frac{19}{2}(-9 - 99) = -1.026$

Άσκηση 15

α) $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] \Leftrightarrow 529 = \frac{\nu}{2}[2 + 2(\nu-1)] \Leftrightarrow 1.058 = 2\nu^2 \Leftrightarrow$

$\nu^2 = 529 \overset{\nu>0}{\Longleftrightarrow} \nu = 23$

β) $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] \Leftrightarrow 0 = \frac{\nu}{2}[54 - 3(\nu-1)] \Leftrightarrow 0 = -3\nu^2 + 57\nu \Leftrightarrow$

$-3\nu(\nu - 19) = 0 \overset{\nu>0}{\Longleftrightarrow} \nu = 19$

Άσκηση 16

α) Παρατηρούμε ότι σε κάθε σειρά του μεγάλου τριγώνου τα μικρά τρίγωνα αυξάνονται ανά δύο από την κορυφή προς τη βάση τού. Άρα, έχουμε μία αριθμητική πρόοδο. Οπότε, αφού έχει 4 σειρές:

$S_4 = \frac{4}{2}(a_1 + a_4) = 2(1+7) = 16$

β) $S_4 = \frac{4}{2}(a_1 + a_4) = 2(1+81) = 164$

Άσκηση 17

Για να είναι η ακολουθία αριθμητική πρόοδος, αρκεί για δύο διαδοχικούς όρους η διαφορά τους να είναι σταθερή και ανεξάρτητη του ν.

α)
$\alpha_\nu = 2 + 3\nu \Rightarrow \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2 + 3(\nu + 1) - (2 + 3\nu) = 2 + 3\nu + 3 - 2 - 3\nu = 3, \textit{σταθερό και ανεξάρτητο του } \nu$. Συνεπώς, η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 3 \textit{ και } \alpha_1 = 5$.

β) $\alpha_\nu = 8 - 5\nu \Rightarrow \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 8 - 5(\nu + 1) - (8 - 5\nu) = 8 - 5\nu - 5 - 8 + 5\nu = -5, \textit{σταθερό και ανεξάρτητο του } \nu$. Συνεπώς, η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = -5 \textit{ και } \alpha_1 = 3$.

γ) $\alpha_\nu = 7(\nu + 1) - 4 \Rightarrow \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 7(\nu + 2) - 4 - [7(\nu + 1) - 4] = 7\nu + 14 - 4 - 7\nu - 7 + 4 = 7, \textit{σταθερό και ανεξάρτητο του } \nu$. Συνεπώς, η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 7 \textit{ και } \alpha_1 = 10$.

Άσκηση 18

$$\alpha_\nu - \alpha_1 = (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow \nu = 1 + \frac{\alpha_\nu - \alpha_1}{\omega}$$

α) $$\left\{\begin{matrix} \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 1 + 1(500 - 1) = 500 \\ ή \\ \alpha_\nu = \nu \xRightarrow{\nu=500} \alpha_{500} = 500 \end{matrix}\right\}$$

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xLeftrightarrow[]{\substack{\alpha_1=1 \\ \alpha_{500}=500 \\ \nu=500}} S_{500} = \frac{500}{2}(1 + 500) = 125.250$$

β) $\left\{\begin{array}{c} \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1 + 2(500-1) = 999 \\ \text{ή} \\ \alpha_\nu = 2\nu - 1 \xRightarrow{\nu=500} \alpha_{500} = 999 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xLeftrightarrow[]{\substack{\alpha_1=1 \\ \alpha_{500}=999 \\ \nu=500}} S_{500} = \frac{500}{2}(1+999) = 250.000$$

γ) $\left\{\begin{array}{c} \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 2 + 2(500-1) = 1000 \\ \text{ή} \\ \alpha_\nu = 2\nu \xRightarrow{\nu=500} \alpha_{500} = 1000 \end{array}\right\}$

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xLeftrightarrow[]{\substack{\alpha_1=2 \\ \alpha_{500}=1000 \\ \nu=500}} S_{500} = \frac{500}{2}(2+1000) = 250.500$$

δ) $\left\{\begin{array}{c} \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 3 + 3(500-1) = 1500 \\ \text{ή} \\ \alpha_\nu = 3\nu \xRightarrow{\nu=500} \alpha_{500} = 1500 \end{array}\right\}$

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xLeftrightarrow[]{\substack{\alpha_1=1 \\ \alpha_{500}=1500 \\ \nu=500}} S_{500} = \frac{500}{2}(3+1500) = 375.750$$

Σημείωση:

- Οι φυσικοί αριθμοί συνιστούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = 1$.
- Οι περιττοί αριθμοί συνιστούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = 2$.
- Οι άρτιοι αριθμοί συνιστούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = 2$.
- Οι φυσικοί αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 3 συνιστούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = 3$. Αντίστοιχα, για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό ν η διαφορά θα είναι $\omega = \nu$.

Άσκηση 19

α) Μεταξύ του 14 και του 100, το πρώτο πολλαπλάσιο του 3 είναι το 15 και το τελευταίο το 99. Επομένως:

$$\alpha_\nu = 3\nu \Rightarrow \alpha_\nu = 99 \Rightarrow 3\nu = 99 \Rightarrow \nu = 33 \Rightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xLeftrightarrow[]{\substack{\alpha_1=15\\ \alpha_{33}=99\\ \nu=33}}$$

$$S_{33} = \frac{33}{2}(15 + 99) = 1.881$$

β) Μεταξύ του 50 και του 200, το πρώτο πολλαπλάσιο του 7 είναι το 56 και το τελευταίο το 196. Επομένως:

$$\alpha_\nu = 7\nu \Rightarrow \alpha_\nu = 196 \Rightarrow 7\nu = 196 \Rightarrow \nu = 28 \Rightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xLeftrightarrow[]{\substack{\alpha_1=56\\ \alpha_{28}=196\\ \nu=28}}$$

$$S_{28} = \frac{28}{2}(56 + 196) = 3.528$$

Άσκηση 20

α) $\alpha_\nu = 5 + 3\nu \Rightarrow \alpha_{50} = 5 + 3 * 50 \Rightarrow \alpha_{50} = 155 \Rightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xLeftrightarrow[]{\substack{\alpha_1=8\\ \alpha_{50}=155\\ \nu=50}}$

$$S_{50} = \frac{50}{2}(8 + 155) = 4.075$$

β) $\alpha_\nu = 8 - 5\nu \Rightarrow \alpha_{100} = 8 - 5 * 100 = -492 \Rightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xLeftrightarrow[]{\substack{\alpha_1=3\\ \alpha_{100}=-492\\ \nu=100}}$

$$S_{100} = \frac{100}{2}(3 - 492) = -24.450$$

Άσκηση 21

Μεταξύ του 1 και του 300, το πρώτο πολλαπλάσιο του 3 είναι το 3 και το τελευταίο το 300. Επομένως:

$$\alpha_\nu = 3\nu \Rightarrow \alpha_\nu = 300 \Rightarrow 3\nu = 300 \Rightarrow \nu = 100 \Rightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xLeftrightarrow[\nu=100]{\alpha_1=3,\ \alpha_{33}=300}$$

$$S_{100} = \frac{100}{2}(3 + 300) = 15.150$$

Μεταξύ του 1 και του 300, το πρώτο πολλαπλάσιο του 7 είναι το 7 και το τελευταίο το 294. Επομένως:

$$\alpha_\nu = 7\nu \Rightarrow \alpha_\nu = 294 \Rightarrow 7\nu = 294 \Rightarrow \nu = 42 \Rightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xLeftrightarrow[\nu=42]{\alpha_1=7,\ \alpha_{42}=294}$$

$$S_{42} = \frac{42}{2}(7 + 294) = 6.321$$

Αφού έχουμε υπολογίσει τα αθροίσματα των πολλαπλασίων του 3 και του 7, θα υπολογίσουμε το άθροισμα όλων των αριθμών από το 1 μέχρι το 300 και το ζητούμενο άθροισμα θα προκύψει από την αφαίρεση των παραπάνω δύο αθροισμάτων από το συνολικό.

$$\alpha_\nu = \nu \Rightarrow \alpha_\nu = 300 \Rightarrow \nu = 300 \Rightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xLeftrightarrow[\nu=300]{\alpha_1=1,\ \alpha_{300}=300}$$

$$S_{300} = \frac{300}{2}(1 + 300) = 45.150$$

Επομένως:

$$S = S_{300} - S_{100} - S_{42} = 45.150 - 15.150 - 6.321 = 23.679.$$

Άσκηση 22

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 2 + (6-2)(\nu-1) = 2 + 4\nu - 4 = 4\nu - 2 \Rightarrow$$

$$S_\nu > 1000 \Rightarrow \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) > 1000 \Rightarrow \nu(2 + 4\nu - 2) > 2000 \Rightarrow$$

$$4\nu^2 > 2000 \Rightarrow \nu^2 > 500 \xRightarrow{\nu>0} \nu > \sqrt{500} = 10\sqrt{5} \xRightarrow{\sqrt{5}\approx 2,23} \nu > 22$$

Άρα, πρέπει να προσθέσουμε τους 22 πρώτους όρους τής τουλάχιστον, προκειμένου το άθροισμα να ξεπεράσει το 1000.

Άσκηση 23

α_1	ω	ν	α_ν	S_ν
1	1	15	15	120
–4	-7	10	–67	-355
3	2	15	31	255
3	5	11	53	308

Άσκηση 24

$\alpha_1 = 5, \alpha_{14} = 83 \; και \; \nu = 12 + 2 = 14 \Rightarrow$

$$\omega = \frac{\alpha_\nu - \alpha_1}{\nu - 1} = \frac{83 - 5}{13} = 6 \Rightarrow \alpha_\nu = 5 + 6(\nu - 1) = 6\nu - 1 \Rightarrow \left\{\begin{pmatrix} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = 11 \\ \alpha_3 = 17 \\ \alpha_4 = 23 \\ \alpha_5 = 29 \\ \alpha_6 = 35 \\ \alpha_7 = 41 \\ \alpha_8 = 47 \\ \alpha_9 = 53 \\ \alpha_{10} = 59 \\ \alpha_{11} = 65 \\ \alpha_{12} = 71 \\ \alpha_{13} = 77 \\ \alpha_{14} = 83 \end{pmatrix}\right\}$$

Άσκηση 25

$$S_\nu = \frac{2\nu-1}{\nu} + \frac{2\nu-3}{\nu} + \frac{2\nu-5}{\nu} + \cdots + \frac{1}{\nu} \Rightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{\nu}{2}\left(\frac{2\nu-1}{\nu} + \frac{1}{\nu}\right) = \nu$$

Οι όροι στο παραπάνω άθροισμα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής ακολουθίας με σταθερή διαφορά $\omega = -\frac{2}{\nu}$.

Άσκηση 26

α) $\alpha_1 = 1 \; και \; \omega = 5 \Leftrightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 1 + 5(\nu - 1) = 5\nu - 4 \xRightarrow{\nu=10}$

$\alpha_{10} = 46$ πόντοι

β) $\nu = 15 \Rightarrow \alpha_{15} = 71 \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}(1 + 71) = 540$ πόντοι συνολικά γ) $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] \Rightarrow 970 = \frac{\nu}{2}(2 + 5\nu - 5) \Rightarrow 5\nu^2 - 3\nu - 1940 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 9 + 38.800 = 38.809 > 0 \Rightarrow \nu_{1,2} = \frac{3 \pm 197}{10} \Rightarrow \nu_1 = 20 \; \kappa\alpha\iota \; \nu_2 = -19{,}4$ το οποίο απορρίπτεται, καθώς $\nu > 0$. Άρα, $\nu = 20$, δηλαδή στο 20ο επίπεδο.

Άσκηση 27

α) $S_{10} = \frac{10}{2}(\alpha_1 + \alpha_{10}) = 5(4 + 3{,}1) = 35{,}5$

β) $\alpha_1 = 4, \nu = 10 \; \kappa\alpha\iota \; \alpha_{10} = 3{,}1 \Rightarrow \alpha_{10} - \alpha_1 = 9\omega \Rightarrow 9\omega = -0{,}9 \Rightarrow \omega = -0{,}1$

Άρα: $\alpha_7 = \alpha_1 + 6\omega = 4 - 0{,}6 = 3{,}4$

Άσκηση 28

$\alpha_1 = 2 \; \kappa\alpha\iota \; \omega = -3 \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 2 - 3(\nu-1) = -3\nu + 5 \Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{10} = -25 \\ \alpha_{20} = -55 \\ \alpha_{100} = -295 \\ \alpha_{200} = -595 \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 29

α) $\alpha_5 = 7 \; \kappa\alpha\iota \; \omega = 2 \Rightarrow \alpha_5 = \alpha_1 + (5-1)\omega \Rightarrow \alpha_1 = -1 \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega =$

$-1 + 2\nu - 2 = 2\nu - 3 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_{25} = 47 \\ \alpha_{100} = 197 \end{Bmatrix}$

β) $\alpha_3 = 12 \; και \; \alpha_8 = 2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 + 2\omega = 12 \\ \alpha_1 + 7\omega = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \omega = -2 \; και \; \alpha_1 = 16 \Rightarrow$

$\alpha_{18} = \alpha_1 + 17\omega = 16 - 34 = -18$

γ) $\alpha_7 = \frac{7}{2} \; και \; \alpha_{13} = \frac{13}{2} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 + 6\omega = \frac{7}{2} \\ \alpha_1 + 12\omega = \frac{13}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow \omega = \frac{1}{2} \; και \; \alpha_1 = \frac{1}{2}$

Άσκηση 30

$\alpha_{21} = \alpha_{11} + 25 \Rightarrow \alpha_1 + 20\omega = \alpha_1 + 10\omega + 25 \Rightarrow 10\omega = 25 \Rightarrow \omega = 2{,}5$

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = \frac{5}{2}\nu + \frac{1}{2}$

Άσκηση 31

$\alpha_{73} = 7\alpha_9 \Leftrightarrow \alpha_1 + 72\omega = 7\alpha_1 + 56\omega \Leftrightarrow 6\alpha_1 = 16\omega \Leftrightarrow 3\alpha_1 = 8\omega \Rightarrow$

$\alpha_{17} = 4\alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 + 16\omega = 4\alpha_1 + 8\omega \Rightarrow 3\alpha_1 = 8\omega$, το οποίο από τη δοθείσα συνθήκη ισχύει.

Άσκηση 32

Για να είναι διαδοχικοί όροι της ίδιας αριθμητικής προόδου, αρκεί να διαφέρουν ανά δύο το ίδιο. Άρα:

$\begin{Bmatrix} 8 - (-5) = 13 \\ 21 - 8 - 13 \end{Bmatrix} \Rightarrow$ Διαφέρουν το ίδιο, άρα είναι όροι της ίδιας αριθμητικής προόδου με $\omega = 13. \Rightarrow \alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega = -5 + 247 = 242.$

Άσκηση 33

Αφού οι αριθμοί αποτελούν διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου,

ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_1 = 3\omega \Rightarrow 0 - 9 = 3\omega \Rightarrow \omega = -3 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = \alpha_1 + \omega = 9 - 3 = 6 \\ y = \alpha_1 + 2\omega = 9 - 6 = 3 \end{Bmatrix}$

Άσκηση 34

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Rightarrow 350 = 17 + 9\nu - 9 \Rightarrow 9\nu = 342 \Rightarrow \nu = 38$

$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xRightarrow{\nu=38} S_{38} = \frac{38}{2}(17 + 350) = 6.973$

Άσκηση 35

α) $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] \xRightarrow{\alpha_1 = 3 \;\kappa\alpha\iota\; \omega = 7} 679 = \frac{\nu}{2}(6 + 7\nu - 7) \Rightarrow 7\nu^2 - \nu = 1.358$

$7\nu^2 - \nu - 1.358 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 38.024 = 38.025 > 0 \Rightarrow$

$\nu_{1,2} = \frac{1 \pm 195}{14} \Rightarrow \nu_1 = 14 \;\kappa\alpha\iota\; \nu_2 = -13{,}85$, το οποίο απορρίπτεται, αφού $\nu > 0$.

Επομένως, $\nu = 14$.

β) $\alpha_{14} = \alpha_1 + 13\omega = 3 + 91 = 94$

Άσκηση 36

$$\begin{Bmatrix} S_{20}=610 \\ S_{12}=222 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{20}{2}(\alpha_1+\alpha_{20})=610 \\ \frac{12}{2}(\alpha_1+\alpha_{12})=222 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 10(\alpha_1+\alpha_1+19\omega)=610 \\ 6(\alpha_1+\alpha_1+11\omega)=222 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} 2\alpha_1+19\omega=61 \\ 2\alpha_1+11\omega=37 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\alpha_1+19\omega=61 \\ -2\alpha_1-11\omega=-37 \end{Bmatrix} \overset{+}{\Leftrightarrow} 8\omega=24 \Leftrightarrow \omega=3 \Leftrightarrow \alpha_1=2$$

Άσκηση 37

α) $$\begin{Bmatrix} \alpha_1+\alpha_5=-2 \\ \alpha_2+\alpha_6=2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1+\alpha_1+4\omega=-2 \\ \alpha_1+\omega+\alpha_1+5\omega=2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2\alpha_1-4\omega=2 \\ 2\alpha_1+6\omega=2 \end{Bmatrix} \overset{+}{\Leftrightarrow}$$

$$2\omega=4 \Leftrightarrow \omega=2 \Leftrightarrow \alpha_1=-5 \Leftrightarrow \alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega=2\nu-7$$

β) $$\begin{Bmatrix} \alpha_2+\alpha_4=7 \\ \alpha_2\alpha_4=10 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_2=7-\alpha_4 \\ (7-\alpha_4)\alpha_4=10 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow {\alpha_4}^2-7\alpha_4+10=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=49-40=9>0 \Rightarrow \alpha_{4_{1,2}}=\frac{7\pm3}{2} \Rightarrow \alpha_{4_1}=5 \;\kappa\alpha\iota\; \alpha_{4_2}=2 \Rightarrow$$

- Για $\alpha_4=5 \Rightarrow \alpha_2=2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1+\omega=2 \\ \alpha_1+3\omega=5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \omega=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha_1=\frac{1}{2}$
- Για $\alpha_4=2 \Rightarrow \alpha_2=5 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1+\omega=5 \\ \alpha_1+3\omega=2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \omega=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha_1=\frac{13}{2}$

Άσκηση 38

$\alpha_4+\alpha_8+\alpha_{12}+\alpha_{16}=100 \Rightarrow$

$(\alpha_1+3\omega)+(\alpha_1+7\omega)+(\alpha_1+11\omega)+(\alpha_1+15\omega)=100 \Rightarrow$

$4\alpha_1+36\omega=100 \ \ (1)$

$\rightarrow \alpha_1+\alpha_5+\alpha_9+\alpha_{13}=\alpha_1+(\alpha_1+4\omega)+(\alpha_1+8\omega)+(\alpha_1+12\omega)$

$=4\alpha_1+24\omega \ \ (2)$

$\rightarrow \alpha_2+\alpha_6+\alpha_{10}+\alpha_{14}=(\alpha_1+\omega)+(\alpha_1+5\omega)+(\alpha_1+9\omega)+(\alpha_1+13\omega)$

$=4\alpha_1+28\omega \ \ (3)$

$\rightarrow \alpha_3+\alpha_7+\alpha_{11}+\alpha_{15}=(\alpha_1+2\omega)+(\alpha_1+6\omega)+(\alpha_1+10\omega)+(\alpha_1+14\omega)$

$=4\alpha_1+32\omega \ \ (4)$

$S_{16}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{15}+\alpha_{16} \xLeftrightarrow{(1),(2),(3),(4)} S_{16}=16\alpha_1+120\omega \Rightarrow$

$S_{16}=100-12\omega+100-8\omega+100-4\omega+100 \Rightarrow S_{16}=400-24\omega \Rightarrow$

$S_{19}=S_{16}+\alpha_{17}+\alpha_{18}+\alpha_{19}=400-24\omega+\alpha_1+16\omega+\alpha_1+17\omega+\alpha_1+18\omega$

$S_{19}=400+3\alpha_1+27\omega \xLeftrightarrow{(1):\alpha_1+9\omega=25} S_{19}=400+3(25-9\omega)+27\omega=$

$400+75-27\omega+27\omega \Rightarrow S_{19}=475$

Άσκηση 39

α) $\alpha_1 = 16, \alpha_7 = 28\ \kappa\alpha\iota\ \nu = 20 (20\ \sigma\varepsilon\iota\rho\acute{\varepsilon}\varsigma) \Rightarrow \alpha_7 - \alpha_1 = 6\omega \Rightarrow 6\omega = 28 - 16$

$\Rightarrow 6\omega = 12 \Rightarrow \omega = 2 \xRightarrow{\nu=10} \alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega = 16 + 18 = 34$ καθίσματα

β) $S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9 + S_{10} = \frac{4}{2}(2\alpha_1 + 3\omega) + \frac{5}{2}(2\alpha_1 + 4\omega) +$

$\frac{6}{2}(2\alpha_1 + 5\omega) + \frac{7}{2}(2\alpha_1 + 6\omega) + \frac{8}{2}(2\alpha_1 + 7\omega) + \frac{9}{2}(2\alpha_1 + 8\omega) + \frac{10}{2}(2\alpha_1 + 9\omega)$

$76 + 100 + 126 + 154 + 184 + 216 + 250 = 1.106$

γ) Δημιουργούμε μια καινούργια αριθμητική πρόοδο η οποία θα αντικατοπτρίζει τα άδεια καθίσματα:

$$\beta_1 = 6\ \kappa\alpha\iota\ \omega' = 3 \Rightarrow \beta_\nu = \beta_1 + (\nu - 1)\omega' =$$
$$6 + 3(\nu - 1) = 3\nu + 3$$

Για να είναι όλα τα καθίσματα άδεια, θα πρέπει $\alpha_\nu = \beta_\nu \xLeftrightarrow{\alpha_\nu = 2\nu + 14}$

$2\nu + 14 = 3\nu + 3 \Leftrightarrow \nu = 11$, δηλαδή η 11^{η} σειρά.

δ) Αφού από την 11^{η} σειρά και πίσω τα καθίσματα είναι άδεια, συμπεραίνουμε ότι θεατές θα κάθονται μόνο μέχρι τη 10^{η} σειρά.

Δημιουργούμε μια καινούρια αριθμητική πρόοδο τη $\gamma_\nu = \alpha_\nu - \beta_\nu$, η οποία εκφράζει τον αριθμό των θεατών που κάθονται σε κάθε σειρά.

Μας ενδιαφέρει το συνολικό πλήθος των θεατών

Οπότε:

$$S'_{10} = \frac{10}{2}(\gamma_1 + \gamma_{10}) = 5(\alpha_1 - \beta_1 + \alpha_{10} - \beta_{10}) =$$
$$5(16 - 6 + 2 * 10 + 14 - 3 * 10 - 3) \Rightarrow S'_{10} = 55\ \theta\varepsilon\alpha\tau\acute{\varepsilon}\varsigma.$$

5.3 Γεωμετρική Πρόοδος

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

α) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = \alpha_1\left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right)^{\nu-1} = 2\left(\frac{4}{2}\right)^{\nu-1} = 2^\nu$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = \alpha_1\left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right)^{\nu-1} = 6\left(\frac{12}{6}\right)^{\nu-1} = 6 * 2^{\nu-1} = 3 * 2^\nu$

γ) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = \alpha_1\left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right)^{\nu-1} = 5\left(\frac{15}{5}\right)^{\nu-1} = 5 * 3^{\nu-1}$

δ) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = \alpha_1\left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right)^{\nu-1} = 16\left(\frac{8}{16}\right)^{\nu-1} = 2^4 2^{1-\nu} = 2^{5-\nu}$

ε) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = \alpha_1\left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right)^{\nu-1} = 3\left(\frac{-12}{3}\right)^{\nu-1} = 3(-4)^{\nu-1}$

στ) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = \alpha_1\left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right)^{\nu-1} = 1\left(\frac{-1}{1}\right)^{\nu-1} = (-1)^{\nu-1}$

ζ) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = \alpha_1\left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right)^{\nu-1} = -2\left(\frac{10}{-2}\right)^{\nu-1} = -2(-5)^{\nu-1}$

η) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = \alpha_1\left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right)^{\nu-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}\right)^{\nu-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu-1}$

θ) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = \alpha_1\left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right)^{\nu-1} = 1\left(\frac{-\frac{5}{3}}{1}\right)^{\nu-1} = \left(-\frac{5}{3}\right)^{\nu-1}$

Άσκηση 2

α) $\lambda = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = 1 * 3^{\nu-1} \overset{\nu=5}{\Longrightarrow} \alpha_5 = 3^4 = 81$

β) $\lambda = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = 2 * 5^{\nu-1} \overset{\nu=6}{\Longrightarrow} \alpha_6 = 2 * 5^5 = 6.250$

γ) $\lambda = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{-5}{5} = -1 \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = 5 * (-1)^{\nu-1} \xRightarrow{\nu=2020}$

$\alpha_{2020} = 5 * (-1)^{2019} = -5$

δ) $\lambda = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = -1 * \left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} \overset{\nu=9}{\Longrightarrow}$

$$\alpha_9 = -\left(-\frac{1}{2}\right)^8 = -\frac{1}{256}$$

ε) $\lambda = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{-\frac{1}{9}}{\frac{1}{27}} = -3 \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = \frac{1}{27} * (-3)^{\nu-1} = 3^{-3}\,(-3)^{\nu-1} \overset{\nu=8}{\Longrightarrow}$

$\alpha_8 = 3^{-3} * (-3)^7 = -3^4 = -81$

στ) $\lambda = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{16}{27}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = \frac{16}{27} * \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu-1} = \frac{2^4}{3^3}\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu-1} \xRightarrow{\nu=10}$

$$\alpha_{10} = \frac{2^4}{3^3}\left(\frac{3}{2}\right)^9 = \frac{2^4 * 3^9}{3^3 * 2^9} = \frac{3^6}{2^5} = \frac{729}{32}$$

Άσκηση 3

α) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \overset{\nu=5}{\Longleftrightarrow} \alpha_5 = \alpha_1\lambda^4 \Leftrightarrow \lambda^4 = \frac{324}{4} = 81 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 4(\pm 3)^{\nu-1}$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \overset{\nu=7}{\Longleftrightarrow} \alpha_7 = \alpha_1\lambda^6 \Leftrightarrow -192 = \alpha_1 2^6 \Leftrightarrow \alpha_1 = -3 \Leftrightarrow \alpha_\nu = -3 * 2^{\nu-1}$

γ) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \overset{\nu=9}{\Longleftrightarrow} \alpha_9 = \alpha_1\lambda^8 \Leftrightarrow -81 = \alpha_1\left(-\frac{3}{5}\right)^8 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{-3^4 * 5^8}{3^8} = -\frac{390.625}{81}$

Άσκηση 4

α) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_2 = \alpha_1\lambda \\ \alpha_5 = \alpha_1\lambda^4 \end{Bmatrix} \overset{\alpha_1\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{\alpha_2}{\alpha_5} = \frac{1}{\lambda^3} \Leftrightarrow \lambda^3 = \frac{567}{21} = 27 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[3]{27} = 3$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_5 = \alpha_1\lambda^4 \\ \alpha_9 = \alpha_1\lambda^8 \end{Bmatrix} \overset{\alpha_1\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{\alpha_5}{\alpha_9} = \frac{1}{\lambda^4} \Leftrightarrow \lambda^4 = \frac{625}{16} \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \pm\frac{5}{2}$

Άσκηση 5

$\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_4 = \alpha_1\lambda^3 \\ \alpha_7 = \alpha_1\lambda^6 \end{Bmatrix} \overset{\alpha_1\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{\alpha_4}{\alpha_7} = \frac{1}{\lambda^3} \Leftrightarrow \lambda^3 = \frac{-729}{27} = -27 \Leftrightarrow$

$\lambda = -\sqrt[3]{|-27|} = -3 \Leftrightarrow \alpha_1 = -1 \Leftrightarrow \alpha_\nu = -(-3)^{\nu-1}$

Άσκηση 6

α) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_4 = \alpha_1\lambda^3 \\ \alpha_8 = \alpha_1\lambda^7 \end{Bmatrix} \overset{\alpha_1\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{\alpha_4}{\alpha_8} = \frac{1}{\lambda^4} \Leftrightarrow \lambda^4 = \frac{896}{56} = 16 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2 \Leftrightarrow$

$\text{Για } \lambda = 2: \alpha_1 = \frac{56}{8} = 7 \Leftrightarrow \alpha_6 = \alpha_1\lambda^5 = 7 * 32 = 224$

$\text{Για } \lambda = -2: \alpha_1 = \frac{56}{-8} = -7 \Leftrightarrow \alpha_6 = \alpha_1\lambda^5 = -7 * (-32) = 224$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_{13} = \alpha_1\lambda^{12} \\ \alpha_{17} = \alpha_1\lambda^{16} \end{Bmatrix} \overset{\alpha_1 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{17}} = \frac{1}{\lambda^4} \Leftrightarrow \lambda^4 = \frac{81}{9} = 9 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Gamma\iota\alpha\ \lambda = \sqrt{3}: \alpha_1 = \frac{9}{729} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \alpha_4 = \alpha_1\lambda^3 = \frac{1}{81} * 3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{27}$

$\Gamma\iota\alpha\ \lambda = -\sqrt{3}: \alpha_1 = \frac{9}{-729} = -\frac{1}{81} \Leftrightarrow \alpha_4 = \alpha_1\lambda^3 = -\frac{1}{81} * (-3\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{27}$

Άσκηση 7

α) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow 405 = 5 * 3^{\nu-1} \Leftrightarrow 3^{\nu-1} = 81 \Leftrightarrow 3^{\nu-1} = 3^4 \overset{\nu>0}{\Longleftrightarrow} \nu = 5$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = \alpha_1\left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right)^{\nu-1} \Leftrightarrow \frac{128}{81} = 18\left(\frac{12}{18}\right)^{\nu-1} \Leftrightarrow \frac{2^7}{3^4} = 18\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu-1} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu-1} = \frac{2^7}{2*3^2*3^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \overset{\nu>0}{\Longleftrightarrow} \nu = 7$

Άσκηση 8

α) $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 3 \Rightarrow \alpha_\nu > 1.000 \Rightarrow 3^{\nu-1} > 1.000 \Leftrightarrow 3^{\nu-1} > 10^3 > 9^3 = (3^2)^3 \Leftrightarrow$

$3^{\nu-1} > 3^6 \Leftrightarrow \nu - 1 > 6 \Leftrightarrow \nu > 7 \Rightarrow$ Άρα, ο πρώτος όρος που υπερβαίνει το 1.000 είναι ο 8ος. Πράγματι, με επαλήθευση προκύπτει $\alpha_7 = 729\ \kappa\alpha\iota\ \alpha_8 = 2.187$.

Σχόλιο: Με ενδιαφέρει οι βάσεις των δυνάμεων να είναι ο ίδιος αριθμός, για να μπορώ να χειριστώ τους εκθέτες. Αφού το 10 δεν αποτελεί ούτε δύναμη ούτε πολλαπλάσιο του 3, αναζητώ τον αμέσως κοντινότερο και στην προκειμένη περίπτωση λόγω φοράς ανίσωσης μικρότερο ακέραιο που μπορεί να γραφεί ως δύναμη του 3.

β) $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{125}{625} = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha_\nu < \frac{1}{10} \Rightarrow 625\left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-1} < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{5^4}{5^{\nu-1}} < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{5^{\nu-5}} < \frac{1}{10} \Rightarrow$

$5^{\nu-5} > 10 > 5 \Rightarrow \nu - 5 > 1 \Rightarrow \nu > 6$. Άρα, πρόκειται για τον 7ο όρο. Πράγματι, με επαλήθευση προκύπτει $\alpha_6 = 0{,}2 \;\kappa\alpha\iota\; \alpha_7 = 0{,}04$.

Άσκηση 9

α) $\beta^2 = \alpha\gamma = 2 * 18 = 36 \Rightarrow \beta = \sqrt{36} = 6$

β) $\beta^2 = \alpha\gamma = (-3) * (-12) = 36 \Rightarrow \beta = \sqrt{36} = 6$

γ) $\beta^2 = \alpha\gamma = 7 * 28 = 196 \Rightarrow \beta = \sqrt{196} = 14$

δ) $\beta^2 = \alpha\gamma = 3 * 5 = 15 \Rightarrow \beta = \sqrt{15}$

Άσκηση 10

$(2x+2)^2 = (x+1)(5x-1) \Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 5x^2 + 4x - 1 \Rightarrow$

$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 + 20 = 36 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = 5 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = -1$

Εφόσον είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου πρέπει να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Για $x = -1$ οι δύο όροι που προκύπτουν είναι ίσοι με το μηδέν, άρα απορρίπτεται. Επομένως, $x = 5$.

Άσκηση 11

Εφόσον είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ο λόγος τους ανά δύο θα είναι σταθερός και ίσος με λ. Επομένως:

$$\frac{x+5}{x-3}=\frac{5x+1}{x+5}=\lambda \Rightarrow (x+5)^2=(x-3)(5x+1) \Rightarrow$$

$$x^2+10x+25=5x^2-14x-3 \Rightarrow 4x^2-24x-28=0 \Rightarrow x^2-6x-7=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=36+28=64>0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm 8}{2} \Rightarrow x_1=7 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2=-1 \Rightarrow$$

Για $x=7 \Rightarrow \lambda=\frac{12}{4}=3$ $\kappa\alpha\iota\ \gamma\iota\alpha\ x=-1 \Rightarrow \lambda=\frac{4}{-4}=-1.$

Άσκηση 12

α) $\lambda=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{3}{1}=3 \Rightarrow S_\nu=\alpha_1\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1} \overset{\nu=8}{\Longrightarrow} S_8=\frac{3^8-1}{3-1}=3.280$

β) $\lambda=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{-2}{1}=-2 \Rightarrow S_\nu=\alpha_1\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1} \overset{\nu=8}{\Longrightarrow} S_8=\frac{(-2)^8-1}{-2-1}=-85$

γ) $\lambda=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{5}{5}=1 \overset{\lambda=1}{\Longrightarrow} S_\nu=\nu\alpha_1 \overset{\nu=8}{\Longrightarrow} S_8=8*5=40$

δ) $\lambda=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{5}{-10}=-\frac{1}{2} \Rightarrow S_\nu=\alpha_1\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1} \overset{\nu=8}{\Longrightarrow} S_8=(-10)\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^8-1}{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{425}{64}$

Άσκηση 13

α) Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου, καθώς κάθε όρος είναι διπλάσιος του προηγούμενου. Άρα, $\lambda = 2$.

$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \Rightarrow 640 = 5 * 2^{\nu-1} \Rightarrow 2^{\nu-1} = 128 = 2^7 \Leftrightarrow \nu = 8$

Άρα, $S_8 = \alpha_1 \frac{\lambda^8-1}{\lambda-1} = 5\frac{2^8-1}{2-1} = 1.275$

β) $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{-3}{1} = -3 = \frac{9}{-3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \Rightarrow$ Είναι όροι γεωμετρικής προόδου. Οπότε:

$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \Rightarrow -2187 = 1 * (-3)^{\nu-1} \Rightarrow (-3)^{\nu-1} = (-3)^7 \Leftrightarrow \nu = 8$

Άρα, $S_8 = \alpha_1 \frac{\lambda^8-1}{\lambda-1} = \frac{(-3)^8-1}{-3-1} = -1.640$

γ) $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \frac{\frac{3}{4}}{3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \Rightarrow$ Είναι όροι γεωμετρικής προόδου. Οπότε:

$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \Rightarrow \frac{3}{256} = 12 * \left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1} \Rightarrow 4^{\nu-1} = \frac{12*256}{3} \Leftrightarrow 4^{\nu-1} = 4^5 \Rightarrow \nu = 6$

Άρα, $S_6 = \alpha_1 \frac{\lambda^6-1}{\lambda-1} = 12\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^6-1}{\frac{1}{4}-1} = \frac{12*1.365}{1.024} = \frac{4.095}{256}$

Άσκηση 14

α) Καθώς τα μικρόβια διπλασιάζονται, ο πληθυσμός τους συνιστά γεωμετρική πρόοδο. Αφού υπάρχουν εξ' αρχής 10 μικρόβια, δηλαδή ο όρος α_1, μετά από 5 ώρες αναζητούμε τον α_6. Με $\lambda = 2$ προκύπτει:

$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \overset{\nu=6}{\Longrightarrow} \alpha_6 = 10 * 2^5 = 320$ μικρόβια

β) $\alpha_\nu > 10.000 \Rightarrow \alpha_1 \lambda^{\nu-1} > 10.000 \Rightarrow 10 * 2^{\nu-1} > 10.000 \Rightarrow 2^{\nu-1} > 1.000 \Rightarrow$

$2^{\nu-1} > 10.000 > 512 = 2^9 \Rightarrow \nu - 1 > 9 \Rightarrow \nu > 10$, δηλαδή μετά από δέκα ώρες.

Άσκηση 15

α) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \xRightarrow[\lambda=\frac{1}{2}]{\substack{\nu=7\\ \alpha_1=200.000}} \alpha_7 = 200.000\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{200.000}{64} = 3.125$

β) $S_\nu = \alpha_1\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1} \overset{\nu=7}{\Longrightarrow} S_7 = 200.000\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{200.000*127}{64} = 396.875$

Άσκηση 16

α) $\alpha_\nu = 5^\nu \overset{\substack{\nu=1\\ \nu=2\\ \nu=3}}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = 25 \\ \alpha_3 = 125 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{25}{5} = 5 = \frac{125}{25} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \Rightarrow$ Είναι πράγματι

γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 5$ *και* $\lambda = 5$.

β) $\alpha_\nu = 3\left(\frac{7}{4}\right)^\nu \overset{\substack{\nu=1\\ \nu=2\\ \nu=3}}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} \alpha_1 = \frac{21}{4} \\ \alpha_2 = \frac{147}{16} \\ \alpha_3 = \frac{1.029}{64} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\frac{147}{16}}{\frac{21}{4}} = \frac{7}{4} = \frac{\frac{1.029}{64}}{\frac{147}{16}} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \Rightarrow$ Είναι πράγματι

γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = \frac{21}{4}$ *και* $\lambda = \frac{7}{4}$.

γ) $\alpha_\nu = \frac{2^{\nu+3}}{5^{\nu+1}} \overset{\substack{\nu=1\\ \nu=2\\ \nu=3}}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} \alpha_1 = \frac{16}{25} \\ \alpha_2 = \frac{32}{125} \\ \alpha_3 = \frac{64}{625} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\frac{32}{125}}{\frac{16}{25}} = \frac{2}{5} = \frac{\frac{64}{625}}{\frac{32}{125}} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \Rightarrow$ Είναι πράγματι

γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = \frac{16}{25}$ *και* $\lambda = \frac{2}{5}$.

Άσκηση 17

Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, ο λόγος τους ανά δύο θα είναι σταθερός. Άρα:

$$\frac{\sqrt[4]{4x+1}}{\sqrt{2x-7}}=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{4x+1}}\Leftrightarrow\left(\sqrt[4]{4x+1}\right)^2=\sqrt{(2x-7)(x+2)}\Leftrightarrow$$

$$4x+1=2x^2-7x+4x-14\Leftrightarrow 2x^2-7x-15=0\Rightarrow \Delta=49+120=169>0$$

$x_{1,2}=\frac{7\pm13}{4}\Leftrightarrow x_1=5\ \ \kappa\alpha\iota\ \ x_2=-\frac{3}{2}\Rightarrow$ Για $x_2=-\frac{3}{2}$ η $\sqrt{2x-7}$ δεν ορίζεται, γιατί η υπόριζη ποσότητα είναι αρνητική, άρα απορρίπτεται. Συνεπώς, $x=5$.

Άσκηση 18

α) Εφόσον η ακολουθία α_ν είναι γεωμετρική πρόοδος, συμπεραίνουμε ότι ο κάθε όρος της είναι πολλαπλάσιο του προηγούμενου για κάποιο λ. Οπότε:

$$\beta_\nu=5\alpha_\nu\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\beta_1=5\alpha_1\\ \beta_2=5\alpha_2\xRightarrow{\alpha_2=\lambda\alpha_1}\beta_2=5\lambda\alpha_1\\ \beta_3=5\alpha_3\xRightarrow{\alpha_3=\lambda^2\alpha_1}\beta_3=5\lambda^2\alpha_1\\ \beta_4=5\alpha_4\xRightarrow{\alpha_4=\lambda^3\alpha_1}\beta_4=5\lambda^3\alpha_1\\ \dots\end{array}\right\}\Rightarrow$$ Συνεπώς και η β_ν είναι γεωμετρική πρόοδος, καθώς κάθε όρος της είναι πολλαπλάσιο του προηγούμενου κατά 5λ.

β) Δουλεύουμε με αντίστοιχο τρόπο.

$$\gamma_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \gamma_1 = \frac{1}{\alpha_1} \\ \gamma_2 = \frac{1}{\alpha_2} \xRightarrow{\alpha_2 = \lambda\alpha_1} \gamma_2 = \frac{1}{\lambda\alpha_1} \\ \gamma_3 = \frac{1}{\alpha_3} \xRightarrow{\alpha_3 = \lambda^2\alpha_1} \gamma_3 = \frac{1}{\lambda^2\alpha_1} \\ \gamma_4 = \frac{1}{\alpha_4} \xRightarrow{\alpha_4 = \lambda^3\alpha_1} \gamma_4 = \frac{1}{\lambda^3\alpha_1} \\ \dots \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Συνεπώς και η γ_ν είναι

γεωμετρική πρόοδος, καθώς κάθε όρος της είναι πολλαπλάσιο του προηγούνου κατά $\frac{1}{\lambda}$.

Άσκηση 19

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_1 + \alpha_2 = 9 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 72 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha_1 + \alpha_1\lambda = 9 \\ \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 = 72 \end{array}\right\} \xRightarrow{\alpha_1 \neq 0} \frac{1+\lambda}{\lambda^2(1+\lambda)} = \frac{1}{8} \Rightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} \lambda = 2\sqrt{2} \Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{9}{1+2\sqrt{2}} = \dfrac{9-18\sqrt{2}}{1-8} = \dfrac{18\sqrt{2}-9}{7} \\ \kappa\alpha\iota \\ \lambda = -2\sqrt{2} \Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{9}{1-2\sqrt{2}} = \dfrac{9+18\sqrt{2}}{1-8} = -\dfrac{18\sqrt{2}+9}{7} \end{array}\right\}$$

Άσκηση 20

α) $\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_4 = \frac{13}{4} \\ \alpha_5 + \alpha_7 = -\frac{26}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^3 = \frac{13}{4} \\ \alpha_1\lambda^4 + \alpha_1\lambda^6 = -\frac{26}{27} \end{cases} \xRightarrow{\alpha_1 \neq 0} \frac{\lambda(1+\lambda^2)}{\lambda^4(1+\lambda^2)} = -\frac{351}{104} \Rightarrow$

$\lambda^3 = -\frac{104}{351} = -\frac{8}{27} \Rightarrow \lambda = -\sqrt[3]{\left|-\frac{8}{27}\right|} \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{27}{8}$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \xRightarrow{\nu=8} \alpha_8 = \alpha_1\lambda^7 = -\frac{27}{8}\left(-\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{3^3 * 2^7}{2^3 * 3^7} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

Άσκηση 21

Αφού η ένταση μειώνεται κατά 99%, συμπεραίνουμε ότι επόμενη στη σειρά ένταση θα ακούγεται στο 1% της προηγούμενης. Άρα, οι εντάσεις στη σειρά θα συνιστούν γεωμετρική πρόοδο με λ = 0,01. Άρα:

α) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \frac{99}{100}\alpha_\nu = \frac{1}{100}\alpha_\nu$

β) $\alpha_\nu = \alpha_0\lambda^{\nu-1} \xRightarrow{\nu=4} \alpha_4 = 0{,}5 * 0{,}01^3 = 0{,}0000005$

γ) $\alpha_\nu > 10^{-12} \Rightarrow \alpha_0\lambda^{\nu-1} > 10^{-12} \Rightarrow 5 * 10^{-1} * 10^{-2\nu+2} > 10^{-12} \Rightarrow$

$10^{-13} < 5 * 10^{-2\nu} \Rightarrow \frac{1}{10^{13}} < \frac{5}{10^{2\nu}} \Rightarrow \frac{10^{2\nu}}{5} < 10^{13} \Rightarrow 10^{2\nu} < 5 * 10^{13} < 10^{14}$

$\Rightarrow 2\nu < 14 \Rightarrow \nu < 7 \Rightarrow$ Επομένως, πρέπει να περάσει μέσα από 6 τζάμια.

Άσκηση 22

α) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Rightarrow \alpha_{15} = \frac{1}{100}2^{14} = 2^{12} = 4.096$ λεπτά, δηλαδή 40,96 ευρώ

β) $S_\nu = \alpha_1\frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \xRightarrow{\nu=10} S_\nu = \frac{1}{100}\frac{2^{10}-1}{2-1} = \frac{1.023}{100} = 10{,}23$ ευρώ

Άσκηση 23

Αφού η επιχείρηση θα ξοδεύει κάθε μήνα το 20% το ποσού, το αρχικό ποσό θα μειώνεται κατά 20%, άρα τον επόμενο μήνα θα έχει το 80% του προηγούμενου ποσού. Συνεπώς:

α) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \frac{20}{100}\alpha_\nu = \frac{80}{100}\alpha_\nu$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Rightarrow \alpha_5 = \alpha_1\lambda^4 \Rightarrow \alpha_5 = 3.000\left(\frac{80}{100}\right)^4 = \frac{3*10^3*8^4*10^4}{10^8} = 1.228{,}8$

Άρα, αυτό το ποσό θα έχει απομείνει στο λογαριασμό. Επομένως, η επιχείρηση

θα έχει ξοδέψει μέχρι τότε: $3.000 - 1.228{,}8 = 1.771{,}2$ ευρώ.

Άσκηση 24

α) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \overset{\substack{\alpha_1=5\\ \lambda=3}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = 5*3^{\nu-1}$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \overset{\substack{\alpha_1=\frac{2}{3}\\ \lambda=\frac{1}{4}}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = \frac{2}{3}*\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1} = \frac{2}{3}*\frac{1}{2^{2\nu-2}} = \frac{1}{3*2^{2\nu-3}}$

γ) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \overset{\substack{\alpha_1=-20\\ \lambda=\frac{1}{2}}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = (-20)*\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = (-5)4*\frac{1}{2^{\nu-1}} = \frac{-5}{2^{\nu-3}}$

Άσκηση 25

$$\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \Rightarrow 4.374 = 2 * 3^{\nu-1} \Rightarrow 2.187 = 3^{\nu-1} \Rightarrow$$

$$3^{\nu-1} = 3^7 \Rightarrow \nu - 1 = 8 \Rightarrow \nu = 8$$

Άσκηση 26

α) $\alpha_\nu = 2 * 5^{\nu-1} \xLeftrightarrow{\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}} \alpha_1 = 2 \; \kappa\alpha\iota \; \lambda = 5 \Rightarrow$ Είναι προφανώς γεωμετρική πρόοδος, καθώς ο τύπος της γεωμετρικής προόδου επαληθεύεται από την α_ν.

β) $\alpha_\nu = 2 * 5^{\nu-1} \Rightarrow 1.250 = 2 * 5^{\nu-1} \Rightarrow 5^{\nu-1} = 625 \Rightarrow 5^{\nu-1} = 5^4 \Leftrightarrow \nu = 5$

Άσκηση 27

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_4 = \alpha_1 \lambda^3 \\ \alpha_8 = \alpha_1 \lambda^7 \end{Bmatrix} \xRightarrow{\alpha_1 \neq 0} \frac{\alpha_4}{\alpha_8} = \frac{1}{\lambda^4} \Leftrightarrow \lambda^4 = \frac{-\frac{2}{27}}{-6} = \frac{2}{162} = \frac{1}{81} \Rightarrow \lambda = \pm 3 \Rightarrow$$

Για $\lambda = 3 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{3}$ $\kappa\alpha\iota \; \gamma\iota\alpha$ $\lambda = -3 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{3}$.

Άσκηση 28

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_3 = \alpha_1 \lambda^2 \\ \alpha_8 = \alpha_1 \lambda^7 \end{Bmatrix} \xRightarrow{\alpha_1 \neq 0} \frac{\alpha_3}{\alpha_8} = \frac{1}{\lambda^5} \Leftrightarrow \lambda^5 = \frac{384}{12} = 32 \Rightarrow \lambda = \sqrt[5]{32} = 2$$

Άσκηση 29

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \xRightarrow{\nu=4} S_4 = 8\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4 - 1}{\frac{1}{4} - 1} = 8\frac{4 * 255}{3 * 256} = \frac{85}{8}$$

Άσκηση 30

Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, θα έχουν ανά δύο τον ίδιο σταθερό λόγο λ. Συνεπώς:

$$\frac{8x}{x+3} = \frac{30x+6}{8x} \Leftrightarrow 64x^2 = (x+3)(30x+6) \Leftrightarrow 64x^2 = 30x^2 + 96x + 18 \Leftrightarrow$$

$$17x^2 - 48x - 9 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 2.304 + 612 = 2.916 > 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{48 \pm 54}{34} \Rightarrow x_1 = 3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = -\frac{3}{17}$$

Επαληθεύουμε και βλέπουμε ότι και για τις δύο τιμές προκύπτει γεωμετρική πρόοδος.

Άσκηση 31

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_4 = \alpha_1 \lambda^3 \\ \alpha_6 = \alpha_1 \lambda^5 \end{Bmatrix} \xRightarrow{\alpha_1 \neq 0} \frac{\alpha_4}{\alpha_6} = \frac{1}{\lambda^2} \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{117}{13} = 9 \Rightarrow \lambda = \pm 3$$

Για $\lambda = 3 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{13}{27}$ $\kappa\alpha\iota\; \gamma\iota\alpha\; \lambda = -3 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{13}{27}$.

Άρα:

Για $\lambda = 3 \;\kappa\alpha\iota\; \alpha_1 = \frac{13}{27} : \alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \Rightarrow 9477 = \frac{13}{27} * 3^{\nu-1} \Rightarrow 19.683 = 3^{\nu-1} \Rightarrow$

$3^9 = 3^{\nu-1} \Rightarrow \nu - 1 = 9 \Rightarrow \nu = 10.$

Για $\lambda = -3 \; και \; \alpha_1 = -\frac{13}{27}: \alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \Rightarrow 9477 = \left(-\frac{13}{27}\right)(-3)^{\nu-1} \Rightarrow$

$-19.683 = (-3)^{\nu-1} \Rightarrow (-3)^9 = (-3)^{\nu-1} \Rightarrow \nu - 1 = 9 \Rightarrow \nu = 10.$

Άσκηση 32

$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \Rightarrow 972 = 4\lambda^{\nu-1} \Rightarrow \lambda^{\nu-1} = 243 \Rightarrow \lambda^{\nu-1} = 3^5 \Leftrightarrow \lambda = 3 \; και \; \nu = 6$

Επαληθεύουμε στο άθροισμα S_ν για να δούμε, αν ισχύει.

$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 4\frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 2 * 728 = 1.456 \Rightarrow$ Πράγματι, επαληθεύουν το δεδομένο της άσκησης.

Σημείωση:

Δύο δυνάμεις είναι εάν και μόνον εάν τόσο οι βάσεις τους όσο και οι εκθέτες τους είναι ίσα μεταξύ τους αντίστοιχα.

Άσκηση 33

Έστω $\alpha_1 = 31$ και $\alpha_5 = 496$. Προκύπτει: $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \overset{\nu=5}{\Longrightarrow} \alpha_5 = \alpha_1 \lambda^4 \Rightarrow$

$496 = 31\lambda^4 \Rightarrow \lambda^4 = 2 \Rightarrow \lambda = \pm 2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} 31, 62, 124, 248, 496 \\ και \\ 31, -62, 124, -248, 496 \end{Bmatrix}$

Άσκηση 34

$$\alpha_1+\alpha_2=1\Rightarrow \alpha_1+\lambda\alpha_1=1 \xRightarrow{\alpha_1=\frac{4}{3}\lambda} \frac{4}{3}\lambda+\lambda*\frac{4}{3}\lambda=1\Rightarrow 4\lambda^2+4\lambda-3=0\Rightarrow$$

$$\Delta=16+48=64>0\Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{-4\pm 8}{8}\Rightarrow \lambda_1=\frac{1}{2}\ \kappa\alpha\iota\ \lambda_2=-\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha_1=\frac{2}{3}\Rightarrow \alpha_8=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{3*2^6}=\frac{1}{192} \\ \kappa\alpha\iota \\ \lambda=-\frac{3}{2}\Rightarrow \alpha_1=-2\Rightarrow \alpha_8=(-2)\left(-\frac{3}{2}\right)^7=\frac{3^7}{2^6}=\frac{2.187}{64} \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 35

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\frac{13}{2}\Rightarrow S_3=\frac{13}{2}\Rightarrow \alpha_1\frac{\lambda^2-1}{\lambda-1}=\frac{13}{2}\Rightarrow \alpha_1(\lambda+1)=\frac{13}{2}\quad (1)$$

$$\alpha_1+1=\alpha_2\Rightarrow \alpha_1+1=\alpha_1\lambda\overset{(1)}{\Rightarrow}\alpha_1+1=\frac{13}{2}-\alpha_1\Rightarrow 2\alpha_1=\frac{11}{2}\Rightarrow$$

$$\alpha_1=\frac{11}{4}\Rightarrow \frac{11}{4}\lambda+\frac{11}{4}=\frac{13}{2}\Rightarrow \lambda=\frac{15}{11}\Rightarrow \alpha_\nu=\frac{11}{4}\left(\frac{15}{11}\right)^{\nu-1}=\frac{1}{4}*\frac{15^{\nu-1}}{11^{\nu-2}}$$

Άσκηση 36

α) Αφού στο τέλος κάθε χρόνου χάνει το 10% της αξίας που είχε στην αρχή του χρόνου, συμπεραίνουμε ότι η αξία του στο τέλος του χρόνου θα είναι ίση με το 90% αυτής που είχε στην αρχή της χρονιάς.

$$\alpha_2=\alpha_1\lambda=10.000.000*\frac{9}{10}=9.000.000\Rightarrow$$

Συνεπώς, η απάντηση στην ερώτηση είναι όχι.

β) Όχι, γιατί στο τέλους κάθε χρόνου η αξία του πλοίου χάνει το $^1/_{10}$ της αξίας του και άρα οι αξίες στο τέλος κάθε χρόνου αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με σταθερό ρυθμό ίσο με $^9/_{10}$. Η πρόταση θα ήταν σωστή, στο τέλος κάθε χρόνου η αξία του πλοίου υποδεκαπλασιαζόταν σε σχέση με την αρχική.

γ) Μετά από δύο χρόνια μειώνεται κατά $\lambda^2 = \frac{1}{100} \Rightarrow$

$\alpha_3 = \alpha_1\lambda^2 = 10.000.000 * \frac{81}{100} = 8.100.000 \Rightarrow$ Οπότε, η απάντηση στην ερώτηση είναι όχι, αφού μειώθηκε κατά $1.900.000$ $\varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}$.

δ) Το τέλος του 5ου χρόνου ισούται με την αρχή του 6ου. Άρα:

$\alpha_6 = \alpha_1\lambda^5 = 10.000.000 * \frac{59.049}{100.000} = 5.904.900 > 5.000.000$. Άρα, η απάντηση είναι ναι.

5.4 Ανατοκισμός – Ίσες Καταθέσεις

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

$\alpha = 10.0000$ €

$\tau = 8\% = 0{,}08$

$\nu = 5$

Επομένως, σε πέντε χρόνια θα εισπράξουμε:

$\alpha_5 = 10.000(1 + 0{,}08)^5 = 14.693{,}280768€ \Rightarrow$ Έχουμε κέρδος τη διαφορά του αρχικού ποσού από το τελικό.

Άσκηση 2

$\tau = 10\% = 0{,}1$

$\nu = 8$

$\alpha_8 = 5.000€$

$$\alpha = \frac{\alpha_8}{(1 + 0{,}1)^8} = \frac{5.000}{2{,}14358881} = 2.332{,}5369010487$$

Άσκηση 3

$\alpha = 10.0000$ €

$\nu = 10$

$\alpha_{10} = 13.439{,}16€$

$\alpha_{10} = 10.000(1 + \tau)^{10} \Leftrightarrow 13.439{,}16 = 10.000(1 + \tau)^{10} \Leftrightarrow$

$$(1 + \tau)^{10} = \frac{13.439{,}16}{10.000} = 1{,}343916 \Leftrightarrow 1 + \tau = \sqrt[10]{1{,}343916} = 1{,}0299999709 \Leftrightarrow$$

$\tau = 0{,}03$ ή $\tau = 3\%$

Άσκηση 4

$\alpha = 1.000€$

$\tau = 2\% = 0{,}02$

$\nu = 5$

$$\Sigma = 1.000(1 + 0{,}02)\frac{(1 + 0{,}02)^5 - 1}{0{,}02} = 1.020\frac{1{,}1040808032 - 1}{0{,}02} \Rightarrow$$

$\Sigma = 5.308{,}1209642€$

Κεφάλαιο 6 : Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

$f(x) = |x-1| + 3$

α) $f(0) = |0-1| + 3 = 4$

β) $f(1) = |1-1| + 3 = 3$

γ) $f(-1) = |-1-1| + 3 = 5$

Άσκηση 2

α) $f(x) = \frac{1}{x-5} \Rightarrow$ Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, εκτός από εκεί που μηδενίζεται ο παρονομαστής, γιατί τότε το κλάσμα δεν ορίζεται. Άρα: $A_f = \mathbb{R} \backslash \{5\}$.

β) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3} \Rightarrow$ Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, εκτός από εκεί που μηδενίζεται ο παρονομαστής, γιατί τότε το κλάσμα δεν ορίζεται. Άρα: $A_f = \mathbb{R} \backslash \{-3\}$.

γ) $f(x) = \frac{9x}{5x^2-25x} \Rightarrow$ Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, εκτός από εκεί που μηδενίζεται ο παρονομαστής, γιατί τότε το κλάσμα δεν ορίζεται. Άρα: $A_f = \mathbb{R} \backslash \{0, 5\}$.

δ) $f(x) = \frac{1}{|x-10|} \Rightarrow$ Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, εκτός

από εκεί που μηδενίζεται ο παρονομαστής, γιατί τότε το κλάσμα δεν ορίζεται.

Άρα: $A_f = \mathbb{R}\backslash\{-10, 10\}$.

ε) $f(x) = \frac{1}{x^2-8x+7} \Rightarrow$ Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, εκτός

από εκεί που μηδενίζεται ο παρονομαστής, γιατί τότε το κλάσμα δεν ορίζεται.

Άρα: $A_f = \mathbb{R}\backslash\{1, 7\}$.

στ) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5} \Rightarrow$ Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, εκτός

από εκεί που μηδενίζεται ο παρονομαστής, γιατί τότε το κλάσμα δεν ορίζεται. Το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα και επομένως, ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Άρα: $A_f = \mathbb{R}$.

Άσκηση 3

Για να ορίζεται μία ρίζα, πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι θετική ή ίση με το μηδέν. Δηλαδή, να μην είναι αρνητική. Συνεπώς:

α) $f(x) = \sqrt{5x+10} \Rightarrow 5x + 10 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow A_f = [-2, +\infty)$.

β) $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x+2 \geq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ 3-x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x \geq -2 \\ \kappa\alpha\iota \\ x \leq 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_f = [-2.3]$.

γ) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6} \Rightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Rightarrow x_1 = 3 \; \kappa\alpha\iota \; x_2 = 2 \Rightarrow$

Σύμφωνα με τη γνωστή θεωρία, το τριώνυμο είναι θετικό στα διαστήματα εκτός των ριζών του και μηδενίζεται από τις ρίζες του. Άρα:

$A_f = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

δ) $f(x)=\sqrt[5]{-x^2+7x+8} \Rightarrow -x^2+7x+8\geq 0 \Rightarrow x_1=-1 \text{ και } x_2=8 \Rightarrow$

Σύμφωνα με τη γνωστή θεωρία, το τριώνυμο είναι θετικό στο διάστημα μεταξύ των ριζών του και μηδενίζεται από τις ρίζες του. Άρα: $A_f=[-1,8]$.

ε) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x-4}} \Rightarrow 2x-4>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow A_f=(2,+\infty)$.

→ Όχι ίσο με το μηδέν, γιατί τότε θα μηδενίζεται ο παρονομαστής και δε θα ορίζεται το κλάσμα.

στ) $f(x)=\frac{5x+1}{2-\sqrt{x+1}} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x+1\geq 0 \\ \text{και} \\ 2-\sqrt{x+1}\neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x\geq -1 \\ \text{και} \\ x+1\neq 4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x\geq -1 \\ \text{και} \\ x\neq 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$A_f=[-1,3)\cup(3,+\infty)$ ή $A_f=[-1,+\infty)\setminus\{3\}$.

Άσκηση 4

α) $f(x)=x^2+7x-1 \Rightarrow A_f=\mathbb{R}$

→ Τα πολυώνυμα ορίζονται πάντα για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό.

β) $f(x)=x^5+\sqrt{x-7}+\frac{1}{x-10} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x-7\geq 0 \\ \text{και} \\ x-10\neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x\geq 7 \\ \text{και} \\ x\neq 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$A_f=[7,10)\cup(10,+\infty)$ ή $A_f=[7,+\infty)\setminus\{10\}$

γ) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-2x-8}+\frac{10}{|x-8|-1} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x+1\geq 0 \\ \text{και} \\ x^2-2x-8\neq 0 \\ \text{και} \\ |x-8|-1\neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x\geq -1 \\ \text{και} \\ x\neq -2,4 \\ \text{και} \\ x\neq 7,9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$A_f=[-1,-2)\cup(-2,4)\cup(4,7)\cup(7,9)\cup(9,+\infty)$ ή

$A_f=[-1,+\infty)\setminus\{-2,4,7,9\}$.

Άσκηση 5

α) $f(x) = (x+2)^{-2} = \frac{1}{(x+2)^2} \Leftrightarrow x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \Rightarrow A_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$

β) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x \geq 0 \Rightarrow A_f = [0, +\infty)$

Άσκηση 6

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5\,, & x \geq 1 \\ 3x + 1\,, & -8 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow$

α) $A_f = (-8, 1) \cup [1, +\infty) = (-8, +\infty)$

β) i) $f(-5) = 3(-5) + 1 = -14$

ii) $f(1) = 1 - 5 = -4$

iii) $f(4) = 16 - 5 = 11$

Σημείωση:

Όταν έχουμε κλαδωτή συνάρτηση, αναζητούμε την τιμή που επιστρέφει αυτή για δοθέν x του πεδίου ορισμού της στον κλάδο που ανήκει αυτό το x.

Άσκηση 7

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x-1\,, & x\in(-\infty,-5] \\ |x+3|\,, & x\in(-5,2] \\ \sqrt{x-2}+3\,, & x\in(2,+\infty) \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

α) $f(-10)=-10-1=-11$

β) $f(-5)=-5-1=-6$

γ) $f(0)=|0+3|=3$

δ) $f(2)=|2+3|=5$

ε) $f(11)=\sqrt{11-2}+3=6$

Άσκηση 8

α) $f(x)=3(x-2)+x^2=x^2+3x-6\Rightarrow$

Η συνάρτηση είναι πολυωνυμική συνάρτηση, επομένως ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, άρα $A_f=\mathbb{R}$.

β) $f(-2)=4-6-6=-8$

$f(-1)=1-3-6=-8$

$f(0)=\ -6$

$f(1)=1+3-6=-2$

γ) i) $f(x) = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 6 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 40 = 49 > 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -5.$

ii) $f(x) = 34 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 6 = 34 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 40 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 9 + 160 = 169 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 13}{2} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -8.$

iii) $f(x) = -6 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 6 = -6 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x+3) = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 0,\ x_2 = -3.$

iv) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 24 = 33 > 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{33}}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{33}}{2}, x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{33}}{2}.$

Άσκηση 9

$f(x) = x^2 - 5 \Rightarrow$

α) $f(x) = 14 \Rightarrow x^2 - 5 = 14 \Rightarrow x^2 = 19 \Rightarrow x = \pm\sqrt{19}$

β) $f(x) = 20 \Rightarrow x^2 - 5 = 20 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$

γ) $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

Άσκηση 10

$f(x) = \sqrt{5 - x} \Rightarrow A_f = (-\infty, 5] \Rightarrow$

α) $f(x) = 2 \Rightarrow \sqrt{5 - x} = 2 \Rightarrow 5 - x = 4 \Rightarrow x = 1$

β) $f(x) = -1 \not\Rightarrow$ Μια ρίζα δεν μπορεί ποτέ να είναι ίση με αρνητική ποσότητα.

γ) $f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{5 - x} = 0 \Rightarrow 5 - x = 0 \Rightarrow x = 5$

Άσκηση 11

$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2} \Rightarrow A_f=\mathbb{R}\backslash\{-2\} \Rightarrow$

α) $f(x)=3 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x+2}=3 \Rightarrow x^2-4=3x+6 \Rightarrow x^2-3x-10=0 \Rightarrow$

$\Delta=9+40=49>0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm7}{2} \Rightarrow x_1=2,\ x_2=-5.$

β) $f(x)=-4 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x+2}=-4 \Rightarrow x^2-4=-4x-8 \Rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow$

$(x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2, αδύνατη, γιατί\ το -2\ εξαιρείται\ από\ το\ πεδίο$

$ορισμού\ της\ συνάρτησης.$

γ) $f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x+2}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm2 \Rightarrow x=2\ και$

$x=-2\ απορρίπετεται, γιατί\ δεν\ ανήκει\ στο\ πεδίο\ ορισμού\ της\ f.$

Προσοχή!!! Δεν απλοποιούμε το κλάσμα, διότι χάνουμε τιμές, όπως στην περίπτωση (α).

Άσκηση 12

$f:[2,4)\rightarrow\mathbb{R}\ \ και\ \ f(x)=(x-1)^2+2$

α) $f(x)=3 \Rightarrow (x-1)^2+2=3 \Rightarrow x^2-2x+1-1=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow$

$x=0\ \ ή\ \ x=2$

β) $f(x)=11 \Rightarrow (x-1)^2+2=11 \Rightarrow x^2-2x+1-9=0 \Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow$

$\Delta=4+32=36>0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm4}{2} \Rightarrow x_1=3, x_2=-1$

γ) $f(x)=18 \Rightarrow (x-1)^2+2=18 \Rightarrow x^2-2x+1-16=0 \Rightarrow$

$x^2-2x-15=0 \Rightarrow\ \ \Delta=4+60=64>0 \Rightarrow$

$x_{1,2}=\frac{2\pm8}{2} \Rightarrow x_1=5, x_2=-3$

Άσκηση 13

$f(x) = \begin{cases} 2-5x\ , \ x \leq 3 \\ x^2\ , \ x > 3 \end{cases} \Rightarrow$ Επειδή η δοθείσα συνάρτηση είναι κλαδωτή, θα επιλύσουμε και τους δύο τύπους της και ύστερα θα συναληθεύσουμε με το πεδίο ορισμού του κάθε τύπου. Άρα:

- $f(x) = 16 \Rightarrow 2 - 5x = 16 \Rightarrow 5x = -14 \Rightarrow x = -\frac{14}{5}$
- $f(x) = 16 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

Συναληθεύοντας με τα πεδία ορισμού του κάθε τύπου της εξίσωσης παρατηρούμε ότι η πρώτη αληθεύει για $x = -\frac{14}{5}$, ενώ η δεύτερη αληθεύει μόνο για $x = 4$, γιατί η τιμή -4 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού του δεύτερου τύπου της συνάρτησης.

Άσκηση 14

$f(x) = 2x^2 - x - 1 \Rightarrow$

α) $f(0) = -1$

β) $f(1) = 2 - 1 - 1 = 0$

γ) $f(t-2) = (t-2)^2 - (t-2) - 1 = t^2 - 4t + 4 - t + 2 - 1 = t^2 - 5t + 5$

δ) $f(3x^2) = 2(3x^2)^2 - 3x^2 - 1 = 18x^4 - 3x^2 - 1$

ε) $f(-x) = 2(-x)^2 - (-x) - 1 = 2x^2 + x - 1$

στ) $f\big(f(1)\big) = f(0) = -1$

Άσκηση 15

$f(x) = x^2 - 3x - 4 \Rightarrow$

α) Η δοθείσα συνάρτηση είναι πολυωνυμική συνάρτηση, επομένως ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό. Άρα, $A_f = \mathbb{R}$.

β) i) $f(-1) = 1 + 3 - 4 = 0$

ii) $f(0) = -4$

iii) $f(4) = 16 - 12 - 4 = 0$

iv) $f(5) = 25 - 15 - 4 = 6$

γ) $f(x) = -6 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = -6 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 8 = 1 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1$

Άσκηση 16

$f(x) = \sqrt{x - 2} \Rightarrow$

α) Πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι μη αρνητική. Άρα: $A_f = [2, +\infty)$.

β) i) $f(6) = \sqrt{6 - 2} = 2$

ii) $f(11) = \sqrt{11 - 2} = 3$

iii) $f\left(\frac{41}{16}\right) = \sqrt{\frac{41}{16} - 2} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

iv) Το $f(1)$ δεν ορίζεται, γιατί η τιμή 1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Άσκηση 17

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-1\,, & x\geq 1\\ \dfrac{2}{x-1}\,, & x<1\end{cases}$$

α) i) $f(0)=-2$

ii) $f(1)=3-1=2$

iii) $f(\sqrt{2})=3*2-1=5$

iv) $f(\sqrt{2}-1)=\frac{2}{\sqrt{2}-1-1}=\frac{2(\sqrt{2}+2)}{2-4}=-2-\sqrt{2}$

β) Επειδή η δοθείσα συνάρτηση είναι κλαδωτή, θα επιλύσουμε και τους δύο τύπους της και ύστερα θα συναληθεύσουμε με το πεδίο ορισμού του κάθε τύπου.

Επομένως:

$$\begin{cases}3x^2-1=2\\ \frac{2}{x-1}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2=3\\ 2=2x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\ x=2\end{cases}\Leftrightarrow$$

Ο πρώτος τύπος της συνάρτησης λειτουργεί για $x\geq 1$ και ο δεύτερος για $x<1$. Επομένως, αφού η δεύτερη δίνει αποτέλεσμα για τιμή που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της είναι αδύνατη και από την πρώτη κρατάμε μόνο το $x=1$. Άρα, $f(x)=2\Leftrightarrow x=1$.

Άσκηση 18

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1\,, & x<1 \\ -x+3\,, & 1\le x\le 2 \\ 0\,, & x>2 \end{cases} \Rightarrow$$

α) Εφόσον η δοθείσα συνάρτηση είναι κλαδωτή, το πεδίο ορισμού της θα είναι η ένωση των πεδίων ορισμού του κάθε τύπου της ξεχωριστά. Δηλαδή:

$A_f = (-\infty,1) \cup [1,2] \cup (2,+\infty) = \mathbb{R}$

β) i) $f(-1) = -3-1 = -4$

ii) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

iii) $f(5) = 0$

iv) $f(2) = -2+3 = 1$

Άρα, σε αύξουσα σειρά ισχύει: $f(-1) < f(5) < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(2)$.

Άσκηση 19

$f(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow$

α) $f(x) = f(0) \Rightarrow\ x^2 - 2x + 3 = 3 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 2$

β) $f(x) = f(-1) \Rightarrow\ x^2 - 2x + 3 = 6 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 4 + 12 = 16 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2\pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -1$

γ) $f(-x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) + 0{,}25 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{4} + 1 + 3 + \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 4 + 6 = 10 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x_1 = -1 + \frac{\sqrt{10}}{2},\ x_2 = -1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$

Άσκηση 20

$$f(x)=\begin{Bmatrix} 3x-1\,, & x\in(-\infty,2) \\ 2\,, & x\in[2,5) \\ x^2-1\,, & x\in[5,10) \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

α) Εφόσον η δοθείσα συνάρτηση είναι κλαδωτή, το πεδίο ορισμού της θα είναι η ένωση των πεδίων ορισμού του κάθε τύπου της ξεχωριστά. Δηλαδή:

$A_f=(-\infty,2)\cup[2,5)\cup[5,10)=(-\infty,10)$

β) i) $f(-1)=-3-1=-4$

ii) $f(5+\sqrt{2})=25+10\sqrt{2}+2-1=26+10\sqrt{2}$

iii) $f(3)=2$

iv) $f(12)\nRightarrow$ αδύνατο, γιατί το 12 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Άσκηση 21

α) $f(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{1}{a}\Rightarrow x-1\neq 0\Rightarrow x\neq 1\Rightarrow A_f=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$\rightarrow$ Η συνάρτηση είναι δοσμένη ως προς x, επομένως το πεδίο ορισμού της θα αφορά το x.

β) $f(x)=\frac{x-2}{x^3+1}\Rightarrow x^3+1\neq 0\Rightarrow x^3\neq -1\Rightarrow x\neq -1\Rightarrow A_f=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

γ) $f(t)=\frac{t+1}{t^2+3t}-\frac{1}{x}\Rightarrow t^2+3t\neq 0\Rightarrow t(t+3)\neq 0\Rightarrow t\neq 0,-3\Rightarrow A_f=\mathbb{R}\backslash\{0,-3\}$

δ) $f(x)=\frac{x-2}{2x^2-x-1}\Rightarrow 2x^2-x-1\neq 0\Rightarrow \Delta=1+8=9>0\Rightarrow$

$x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{4}\Rightarrow x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}\Rightarrow x\neq 1,-\frac{1}{2}A_f=\mathbb{R}\backslash\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}$

ε) $f(x)=\frac{x}{x^2-x+1} \Rightarrow x^2-x+1\neq 0 \Rightarrow \Delta=1-4=-3<0 \Rightarrow$ Το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε δε μηδενίζει ποτέ. Άρα: $A_f=\mathbb{R}$.

Άσκηση 22

α) $f(x)=x^3-5x+6 \Rightarrow A_f=\mathbb{R}$, γιατί η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση.

β) $f(x)=2x^2-7x=13 \Rightarrow A_f=\mathbb{R}$, γιατί η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση.

γ) $f(x)=\frac{x-1}{2x-8} \Rightarrow 2x-8\neq 0 \Rightarrow x\neq 4 \Rightarrow A_f=\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

δ) $f(x)=\frac{3x+2}{12+4x} \Rightarrow 12+4x\neq 0 \Rightarrow x\neq -3 \Rightarrow A_f=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

ε) $f(x)=\sqrt{3x+6} \Rightarrow 3x+6\geq 0 \Rightarrow x\geq -2 \Rightarrow A_f=[-2,+\infty)$.

στ) $f(x)=\sqrt{10-5x} \Rightarrow 10-5x\geq 0 \Rightarrow x\leq 2 \Rightarrow A_f=(-\infty,2]$.

Άσκηση 23

α) $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow x\neq 0 \Rightarrow A_f=\mathbb{R}^*$

β) $f(x)=\frac{1+x}{x^2+x-2} \Rightarrow x^2+x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2,1 \Rightarrow A_f=\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$

γ) $f(x)=\frac{1}{x+|x|} \Rightarrow x+|x|\neq 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x+x\neq 0,\ x>0 \\ \kappa\alpha\iota \\ x-x\neq 0,\ x<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_f=(0,+\infty)$

δ) $f(x)=\sqrt{x-2} \Rightarrow x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2 \Rightarrow A_f=[2,+\infty)$

ε) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 1-x\geq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ 1-x\neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 1-x>0 \Rightarrow x<1 \Rightarrow A_f=(-\infty,1)$

στ) $f(x)=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow 4-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 4 \Rightarrow A_f=[-2,2]$

ζ) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \geq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ 2-x \geq 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x \geq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ x \leq 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow A_f = [0,2]$

η) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x^2 \geq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ x-1 \geq 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x \in \mathbb{R} \\ \kappa\alpha\iota \\ x \geq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$A_f = [1,+\infty)$

θ) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{|x|-1} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \geq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ |x| \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow A_f = [0,+\infty) \setminus \{-1,1\}$

ι)$f(x) = \frac{1-|x|}{1+|x|} \Rightarrow 1 + |x| \neq 0 \Rightarrow A_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

Άσκηση 24

α) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1 \Rightarrow$

Όπως γνωρίζουμε από τη βασική θεωρία το τριώνυμο θα έχει θετικό πρόσημο στα διαστήματα εκτός των ριζών του και θα μηδενίζεται στις ρίζες του. Άρα:

$A_f = (-\infty,-1] \cup [3,+\infty)$

β) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 8} \Rightarrow -x^2 - 2x + 8 \geq 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 2 \Rightarrow$

Όπως γνωρίζουμε από τη βασική θεωρία το τριώνυμο θα έχει θετικό πρόσημο στο διάστημα μεταξύ των ριζών του και θα μηδενίζεται στις ρίζες του. Άρα:

$A_f = [-4,2]$

γ) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$

Όπως γνωρίζουμε από τη βασική θεωρία το τριώνυμο θα έχει παντού θετικό πρόσημο και δεν έχει ρίζες πραγματικές. Άρα: $A_f = \mathbb{R}$

δ) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x - 9} \Rightarrow x^2 - 6x + 9 \geq 0 \Rightarrow (x-3)^2 \geq 0 \Rightarrow$

Είναι η γνωστή ταυτότητα διαφορά στο τετράγωνο που είναι εξ' ορισμού μη αρνητικός όρος. Συνεπώς, ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό. Άρα: $A_f = \mathbb{R}$

ε) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x - 1} \Rightarrow -x^2 + 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow -(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow$

Είναι η γνωστή ταυτότητα διαφορά στο τετράγωνο που είναι εξ' ορισμού μη αρνητικός όρος. Όμως στην προκειμένη περίπτωση η υπόριζη ποσότητα είναι ο αντίθετος της ταυτότητας, που θα είναι πάντα αρνητικός. Συνεπώς, η δοθείσα συνάρτηση δεν ορίζεται για κανέναν πραγματικό αριθμό.

στ) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 4} \Rightarrow -x^2 + 3x - 4 \geq 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$

Όπως γνωρίζουμε από τη βασική θεωρία το τριώνυμο θα έχει παντού αρνητικό πρόσημο και δεν έχει πραγματικές ρίζες. Συνεπώς, η δοθείσα συνάρτηση δεν ορίζεται για κανέναν πραγματικό αριθμό.

στο διάστημα μεταξύ των ριζών του και θα μηδενίζεται στις ρίζες του. Άρα:

$A_f = [-4, 2]$

Άσκηση 25

α) $f(x)=x^2-4x+5 \Rightarrow \Delta=16-20=-4<0 \Rightarrow$ Το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες και επιπλέον θα έχει παντού θετικό πρόσημο. Άρα, $A_f=\mathbb{R}$.

β) i) $f(-2)=4+8+5=17$

ii) $f(0)=5$

iii) $f(5)=25-20+5=10$

γ) i) $f(-3a)=9a^2+12a+5$

ii) $f(2a^2)=4a^4-8a^2+5$

iii) $f(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)^2-4(\alpha-\beta)+5=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-4\alpha+4\beta+5$

δ) $f(x)=2 \Leftrightarrow x^2-4x+5=2 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow \Delta=16-12=4>0 \Rightarrow$

$x_{1,2}=\frac{4\pm2}{2} \Rightarrow x_1=3, x_2=1$

ε) $f(x+2)+f(x)\le 22 \Rightarrow (x+2)^2-4(x+2)+5+x^2-4x+5\le 22 \Rightarrow$

$x^2+4x+4-4x-8+10+x^2-4x\le 22 \Rightarrow 2x^2-4x-16\le 0 \Rightarrow$

$x^2-2x-8\le 0 \Rightarrow \Delta=4+32=36>0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm4}{2} \Rightarrow x_1=3, x_2=-1$

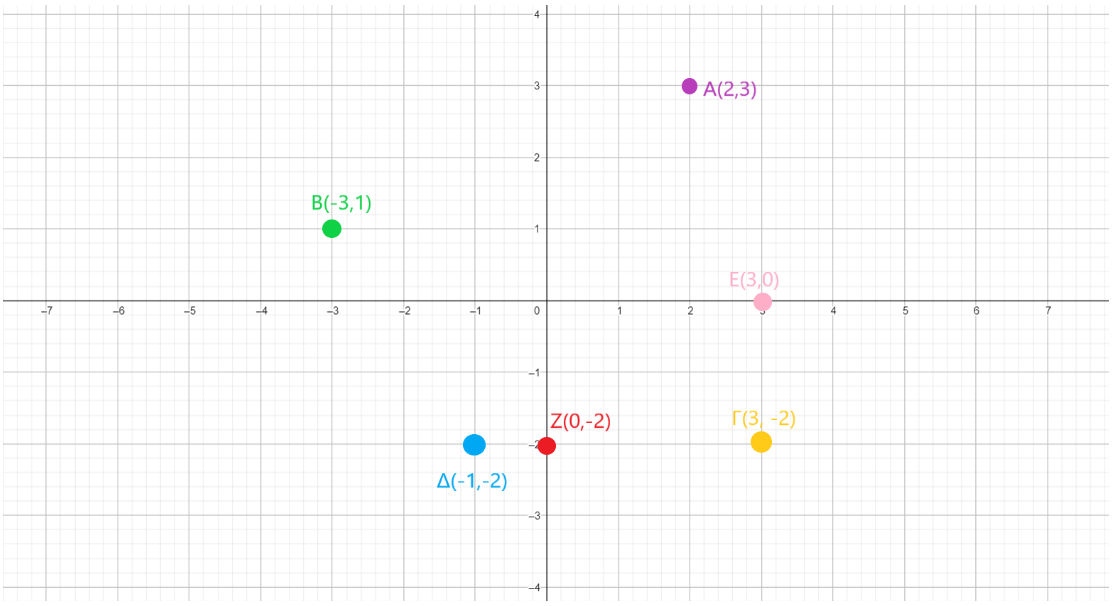
Από τη γνωστή θεωρία γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο θα είναι αρνητικό στο Διάστημα μεταξύ των ριζών του και θα μηδενίζεται στις ρίζες του. Άρα:

$f(x+2)+f(x)\le 22 \Leftrightarrow x^2-2x-8\le 0 \Leftrightarrow x\in[-1,3]$.

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1



Άσκηση 2

- $A(3,3)$
- $B(-2,1)$
- $\Gamma(3,-1)$
- $\Delta(-1,0)$

Άσκηση 3

$AB = \Delta\Gamma = |x| = 7$

$A\Delta = B\Gamma = |y| = 6$

Σύμφωνα με το σχήμα προκύπτει: $\begin{Bmatrix} -1 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 4 \end{Bmatrix}$.

Άσκηση 4

Το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει φαίνεται από τα πρόσημα των συντεταγμένων του. Επομένως, έχουμε:

α) $A(5,9) \Rightarrow 1^o$ *τεταρτημόριο*, γιατί και οι δύο συντεταγμένες είναι θετικές.

β) $B(-8,1) \Rightarrow 2^o$ *τεταρτημόριο*, γιατί η συντεταγμένη x είναι αρνητική, αλλά η συντεταγμένη y είναι θετική.

γ) $\Gamma(-5,-7) \Rightarrow 3^o$ *τεταρτημόριο*, γιατί και οι δύο συντεταγμένες είναι αρνητικές.

δ) $\Delta(3,-2) \Rightarrow 4^o$ *τεταρτημόριο*, γιατί η συντεταγμένη x είναι θετική, αλλά η συντεταγμένη y είναι αρνητική.

ε) $E(-1,-2) \Rightarrow 3^o$ *τεταρτημόριο*, γιατί και οι δύο συντεταγμένες είναι αρνητικές.

στ) $Z(0,-3) \Rightarrow$ Το σημείο Ζ ανήκει στον άξονα των y και μάλιστα στον αρνητικό ημιάξονα.

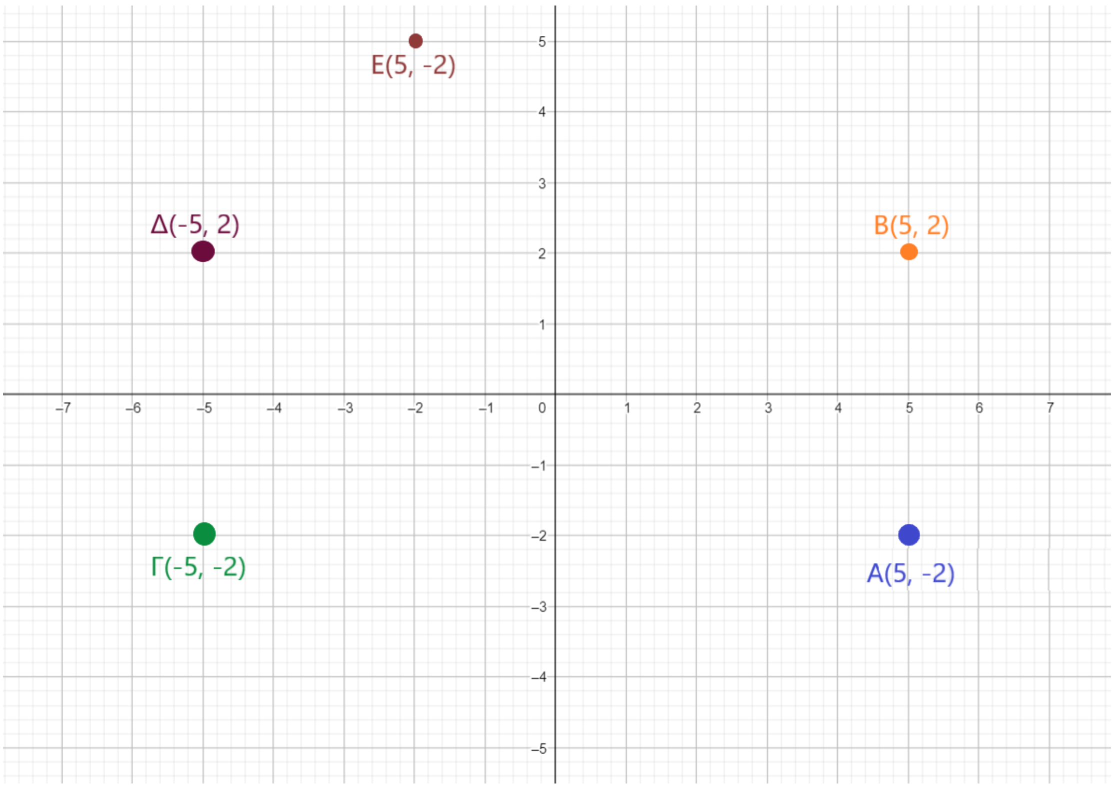
Άσκηση 5

α) Αφού είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των x, τα δύο σημεία θα έχουν ίδια τη συντεταγμένη x και αντίθετο y. Άρα: $B(5,2)$.

β) Αφού είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των y, τα δύο σημεία θα έχουν ίδια τη συντεταγμένη y και αντίθετο x. Άρα: $\Gamma(-5,-2)$.

γ) Αφού είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων, τα δύο σημεία θα έχουν αντίθετες και τις δύο συντεταγμένες. Άρα: $\Delta(-5,2)$.

δ) Η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$ είναι η ευθεία $y=x$. Επομένως τα δύο σημεία θα έχουν αντίθετες ανάποδα τις συντεταγμένες τους. Άρα: $E(-2,5)$.



Άσκηση 6

Γνωρίζουμε ότι η απόσταση δύο σημείων με καρτεσιανές συντεταγμένες είναι ίση με την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των διαφορών των αντίστοιχων καρτεσιανών συντεταγμένων τους. Δηλαδή:

$$(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

α) $(AB) = \sqrt{(2-8)^2 + (1-9)^2} = \sqrt{36+64} = 10$

β) $(AB) = \sqrt{[-5-(-1)]^2 + (2-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

γ) $(AO) = \sqrt{(7-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$

δ) $(AB) = \sqrt{(5-0)^2 + [0-(-3)]^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

ε) $(AB) = \sqrt{(7-7)^2 + [2-(-3)]^2} = \sqrt{25} = 5$

στ) $(AB) = \sqrt{(2-1)^2 + [-3-(-3)]^2} = \sqrt{1} = 1$

Άσκηση 7

α) Για να είναι τα τρία σημεία κορυφές ισοσκελούς τριγώνου πρέπει οι κορυφές της βάσης να ισαπέχουν από την τρίτη κορυφή. Δηλαδή:

$$(A\Gamma) = (B\Gamma) \Leftrightarrow \sqrt{(1-5)^2 + [1-(-6)]^2} = \sqrt{(4-5)^2 + [2-(-6)]^2} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{16+49} = \sqrt{1+64} \Leftrightarrow \sqrt{65} = \sqrt{65}$$

→ Μπορούμε τοποθετώντας τα σημεία στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων να αντιληφθούμε ότι ισχύει και πώς πρέπει να δουλέψουμε τις κορυφές.

β) Για να είναι τα σημεία κορυφές ορθογωνίου τριγώνου, αρκεί οι πλευρές που σχηματίζουν ανά δύο να επαληθεύουν το πυθαγόρειο θεώρημα. Δηλαδή:

$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (B\Gamma)^2 \Leftrightarrow$

$(-1-2)^2 + (2-6)^2 + [-1-(-5)]^2 + (2-5)^2 = [2-(-5)]^2 + (6-5)^2 \Leftrightarrow$

$9 + 16 + 16 + 9 = 49 + 1 \Leftrightarrow 50 = 50$

γ) Για να ανήκουν τα σημεία αυτά πάνω σε κύκλο με το δοθέν κέντρο πρέπει να ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα. Δηλαδή:

$(AK) = (BK) \Leftrightarrow \sqrt{(5-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{(-4-1)^2 + (7-3)^2} \Leftrightarrow$

$\sqrt{16+25} = \sqrt{25+16} \Leftrightarrow \sqrt{41} = \sqrt{41}$

Άσκηση 8

$f(x) = x^2 - 3x + 5 \Rightarrow$ Για να ανήκουν τα δοθέντα σημεία στη γραφική παράσταση της συνάρτησης θα πρέπει να την επαληθεύουν, δηλαδή για κάθε x να μας επιστρέφει η συνάρτηση το αντίστοιχο y.

α) $A(3,2) \Rightarrow f(3) = 2 \Rightarrow 9 - 9 + 5 = 5 \neq 2 \Rightarrow$ Συνεπώς, το σημείο Α δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

β) $B(5,15) \Rightarrow f(5) = 15 \Rightarrow 25 - 15 + 5 = 15 \Rightarrow$ Συνεπώς, το σημείο Β ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

γ) $\Gamma(0,-5) \Rightarrow f(0) = -5 \Rightarrow 0 - 0 + 5 = 5 \neq -5 \Rightarrow$ Συνεπώς, το σημείο Γ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

δ) $\Delta(-1,3) \Rightarrow f(-1) = 3 \Rightarrow 1 + 3 + 5 = 9 \neq 3 \Rightarrow$ Συνεπώς, το σημείο Δ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Άσκηση 9

Για να ανήκει το σημείο Μ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης πρέπει οι καρτεσιανές συντεταγμένες του να επαληθεύουν τη συνάρτηση.

α) $f(x) = ax^2 \xLeftrightarrow{M(-2,20)\in f} 20 = a(-2)^2 \Leftrightarrow 4a = 20 \Leftrightarrow a = 5$

β) $g(x) = x^2 - ax \xLeftrightarrow{M(3,6)\in g} 6 = (3)^2 - 3a \Leftrightarrow 3a = 3 \Leftrightarrow a = 1$

γ) $h(x) = (x-a)^3 \xLeftrightarrow{M(1,27)\in h} 27 = (1-a)^3 \Leftrightarrow 1 - a = \sqrt[3]{27} = 3 \Leftrightarrow a = -2$

Άσκηση 10

Σύμφωνα με το σχήμα προκύπτει:

α) $f(-2) = -1$

β) $f(0) = -2$

γ) $f(3) = 0$

δ) $f(5) = 3$

ε) $f(7) = 1$

Άσκηση 11

Η συνάρτηση μηδενίζεται για εκείνα τα x που βρίσκονται πάνω στον άξονα των x, καθώς εκεί η συντεταγμένη $y = 0$. Άρα: $f(x) = 0 \Rightarrow x = -2, 1, 4$.

Άσκηση 12

Οι (α) και (β) αποτελούν γραφικές παραστάσεις κάποιων συναρτήσεων. Έχουν και οι δύο συνεχείς γραφικές παραστάσεις και μάλιστα είναι και συμμετρικές ως προς τους δύο άξονες. Από την άλλη πλευρά, η (γ) δεν είναι, διότι το ίδιο $x = 0$ αντιστοιχίζεται σε 2 διαφορετικά y, κάτι που δεν υφίσταται σε μία συνάρτηση και τέλος η (δ) δεν είναι, αν ήταν κλαδωτή όπως φαίνεται εκ πρώτης όψεως, το δεύτερο τμήμα της θα ξεκινούσε από εκεί που θα τελείωνε το προηγούμενο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Σε μια συνάρτηση το κάθε x αντιστοιχίζεται μόνο σε ένα y. Τα στοιχεία του πεδίου τιμών τής μπορούν να έχουν πολλά διαφορετικά x που αντιστοιχίζονται σε αυτά. Ωστόσο, τα στοιχεία του πεδίου ορισμού της δεν μπορούν να αντιστοιχίζονται έκαστο σε παραπάνω από ένα y.

Άσκηση 13

Τα σημεία τομής με τον άξονα των x είναι αυτά που έχουν $y = 0$ και αντίστοιχα τα σημεία τομής με τον άξονα των y είναι αυτά που έχουν $x = 0$.

α) $\begin{Bmatrix} \text{Σημείο τομής με άξονα των } x\text{: } f(x) = 0 \\ \text{Σημείο τομής με άξονα των } y\text{: } f(0) = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3x - 6 = 0 \\ 0 - 6 = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{Bmatrix} x = 2 \text{ και } y = 0 \\ x = 0 \text{ και } y = -6 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A(2,0) \\ B(0,-6) \end{Bmatrix}$

β) $\begin{Bmatrix} \text{Σημείο τομής με άξονα των } x\text{: } g(x) = 0 \\ \text{Σημείο τομής με άξονα των } y\text{: } g(0) = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2 - 4 = 0 \\ 0 - 4 = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{Bmatrix} x = \pm 2 \text{ και } y = 0 \\ x = 0 \text{ και } y = -4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A(-2,0) \text{ και } B(2,0) \\ \Gamma(0,-4) \end{Bmatrix}$

γ) $\begin{Bmatrix} \text{Σημείο τομής με άξονα των } x\text{: } h(x) = 0 \\ \text{Σημείο τομής με άξονα των } y\text{: } h(0) = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2 + 8x - 9 = 0 \\ 0 + 0 - 9 = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{Bmatrix} x_1 = 1, x_2 = -9 \text{ και } y = 0 \\ x = 0 \text{ και } y = -9 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A(1,0) \text{ και } B(-9,0) \\ \Gamma(0,-6) \end{Bmatrix}$

δ) $\begin{Bmatrix} \text{Σημείο τομής με άξονα των } x\text{: } p(x) = 0 \\ \text{Σημείο τομής με άξονα των } y\text{: } p(0) = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x\sqrt{x-3} = 0 \\ 0\sqrt{0-3} = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{Bmatrix} x = 3 \text{ και } y = 0 \\ \text{αδύνατη, διότι δεν ορίζεται για } x = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{Bmatrix} A(2,0) \\ \text{Δεν έχει σημείο τομής με τον άξονα των } y \end{Bmatrix}$

ε) $\begin{cases} \text{Σημείο τομής με άξονα των } x: q(x)=0 \\ \text{Σημείο τομής με άξονα των } y: q(0)=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+4=0 \\ 0-0+4=y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \Delta=-15<0 \\ x=0 \text{ και } y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Δεν έχει σημείο τομής με τον άξονα των } x \\ A(0,4) \end{cases}$

στ) $\begin{cases} \text{Σημείο τομής με άξονα των } x: \varphi(x)=0 \\ \text{Σημείο τομής με άξονα των } y: \varphi(0)=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=0 \\ \frac{1}{0}=y \end{cases} \not\Rightarrow$

Δεν έχει κανένα σημείο τομής με κανέναν εκ των δύο αξόνων.

Άσκηση 14

α) $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow$ Ισχύει για όλα εκείνα τα x που ανήκουν στον άξονα των x και όσα βρίσκονται πάνω από αυτόν. Δηλαδή: $x \in [-5,-2] \cup [3,5]$.

β) $f(x)<0 \Leftrightarrow$ Ισχύει για όλα εκείνα τα x βρίσκονται κάτω από τον άξονα των x . Δηλαδή: $(-2,3)$.

Άσκηση 15

α) Αναζητούμε τις τετμημένες για τις οποίες ισχύει: $f(x)>0 \Leftrightarrow x^2+x-6>0$

$\Delta=1+24=25>0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm 5}{2} \Rightarrow x_1=2 \text{ και } x_2=-3 \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει θετικό πρόσημο στα διαστήματα εκτός των ριζών του. Άρα: $x \in (-\infty,-3) \cup (2,+\infty)$.

β) Αντίστοιχα, αναζητούμε τις τετμημένες για τις οποίες ισχύει: $f(x)<0$.

Το τριώνυμο έχει αρνητικό πρόσημο στο διάστημα μεταξύ των ριζών του. Άρα:$x \in (-3,2)$.

Άσκηση 16

Σύμφωνα με τη γραφική παράσταση αναζητούμε:

α) εκείνο/α το/τα x που η συνάρτηση επιστρέφει τιμή 2. Αυτό συμβαίνει για $x_1 = -2 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = 1$.

β) εκείνο/α το/τα x που η συνάρτηση επιστρέφει τιμή -1. Αυτό συμβαίνει για $x_1 = -3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = 3$.

Άσκηση 17

α) Δύο συναρτήσεις είναι ίσες στα σημεία τομής τους. Δηλαδή, στο κοινό σημείο η τετμημένη του οποίου τις επαληθεύει συγχρόνως. Άρα:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x_1 = -2, \;\; x_2 = 1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_3 = 3.$

β) Ισχύει $f(x) < g(x)$ στα σημεία εκείνα όπου η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από αυτή της g. Άρα: $x \in (-2, 1) \cup (3, 5)$.

Άσκηση 18

α) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 5 = 2x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 = 0 \Rightarrow$

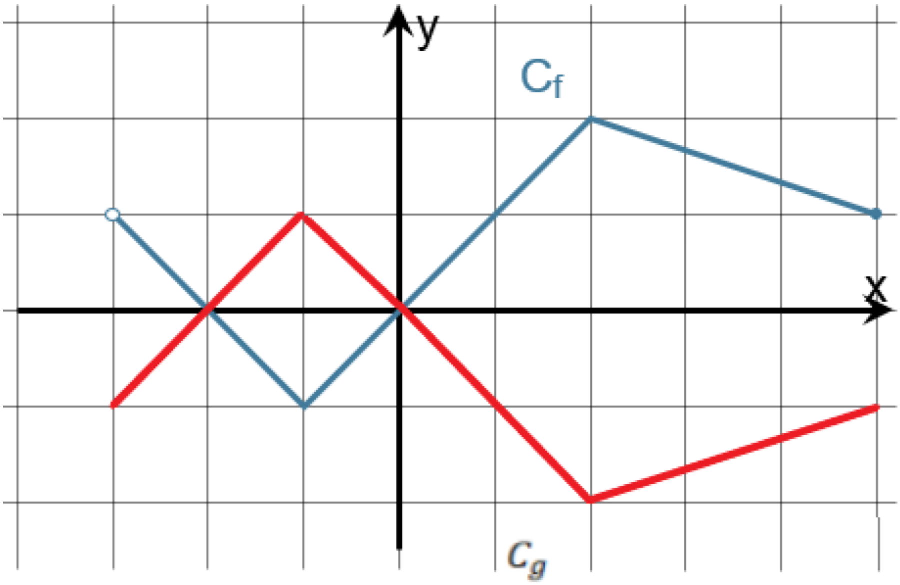
$\Delta = 25 + 56 = 81 > 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = 7 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = -2 \;\; \Rightarrow$

Άρα, για $x_1 = 7 \Rightarrow A(7, 23)$ $\kappa\alpha\iota$ $\gamma\iota\alpha$ $x_2 = -2 \;\; \Rightarrow B(-2, 5)$.

β) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 > 0 \Rightarrow$

Σύμφωνα με τη γνωστή θεωρία, το τριώνυμο έχει θετικό πρόσημο στα διαστήματα εκτός των ριζών του. Άρα: $x \in (-\infty, -2) \cup (7, +\infty)$.

Άσκηση 19



Άσκηση 20

Σημείο	**Συμμετρικό ως προς τον άξονα** x΄x	**Συμμετρικό ως προς τον άξονα** y΄y	**Συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων**	**Συμμετρικό ως προς τη διχοτόμο** $1^{ου}$ **και** $3^{ου}$ **τεταρτημορίου**
(2, –3)	$(2,3)$	$(-2,-3)$	$(-2,3)$	$(-3,2)$
(–3, 5)	$(-3,-5)$	$(3,5)$	$(3,-5)$	$(5,-3)$
(3, 3)	$(3,-3)$	$(-3,3)$	$(-3,-3)$	$(3,3)$
(–6, –4)	$(-6,4)$	$(6,-4)$	$(6,4)$	$(-4,-6)$

Άσκηση 21

α) Αφού το σημείο Α ανήκει στον άξονα των x, συμπεραίνουμε ότι η τεταγμένη του είναι ίση με μηδέν. Επομένως: $\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$.

β) Αφού το σημείο Β ανήκει στο θετικό ημιάξονα Oy, συμπεραίνουμε ότι η τετμημένη του είναι με μηδέν και η τεταγμένη του θετική. Επομένως:

$$\alpha^2 - 9 = 0 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha = 3.$$

γ) Αφού το σημείο Γ ανήκει στο 4ο τεταρτημόριο, συμπεραίνουμε ότι η τετμημένη του είναι θετική και η τεταγμένη του αρνητική. Επομένως:

$$2\alpha > 0 \; \kappa\alpha\iota \; \alpha - 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha > 0 \; \kappa\alpha\iota \; \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha \in (0,1).$$

Άσκηση 22

α) $f(x) = \frac{\sqrt{3x-2}}{x-2} \Leftrightarrow 3x - 2 \geq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x \neq 2$

β) $\begin{Bmatrix} \Sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o \; \tau o\mu\acute{\eta}\varsigma \; \mu\varepsilon \; \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha \; \tau\omega\nu \; x: f(x) = 0 \\ \Sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o \; \tau o\mu\acute{\eta}\varsigma \; \mu\varepsilon \; \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha \; \tau\omega\nu \; y: f(0) = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3x-2}}{x-2} = 0 \\ \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{Bmatrix} x = \frac{2}{3} \kappa\alpha\iota \; y = 0 \\ \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A\left(\frac{2}{3}, 0\right) \\ \delta\varepsilon\nu \; \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota \; \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o \; \tau o\mu\acute{\eta}\varsigma \; \mu\varepsilon \; \tau o\nu \; \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha \; \tau\omega\nu \; y \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 23

$$\begin{Bmatrix} \Sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o \; \tau o\mu\acute{\eta}\varsigma \; \mu\varepsilon \; \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha \; \tau\omega\nu \; x: f(x) = 0 \\ \Sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o \; \tau o\mu\acute{\eta}\varsigma \; \mu\varepsilon \; \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha \; \tau\omega\nu \; y: f(0) = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x - 1 = 0 \; \kappa\alpha\iota \; x^2 - 1 = 0 \\ y = -1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x = \frac{1}{2} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x = \pm 1 \\ y = -1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \frac{1}{2} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x = 1 \\ y = -1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{2}, -1\right) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; B(1, -1).$$

Άσκηση 24

α) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 2x - 7 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = 2 \Rightarrow$

Άρα, για $x_1 = 3 \Rightarrow A(3, -1)$ $\kappa\alpha\iota$ $\gamma\iota\alpha$ $x_2 = 2 \;\Rightarrow B(2, -3)$.

β) i) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow$ Το τριώνυμο έχει θετικό πρόσημο στα διαστήματα εκτός των ριζών του, άρα: $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

ii) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Rightarrow$ Το τριώνυμο έχει αρνητικό πρόσημο στο διάστημα μεταξύ των ριζών του, άρα: $x \in (2, 3)$.

Άσκηση 25

Για να αποτελούν τα σημεία κορυφές ορθογωνίου πρέπει:

$$\begin{Bmatrix} (AB) = (\Delta\Gamma) \\ \kappa\alpha\iota \\ (\Delta A) = (\Gamma B) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sqrt{(1-1)^2 + [3-(-3)]^2} = \sqrt{[-1-(-1)]^2 + [3-(-3)]^2} \\ \kappa\alpha\iota \\ \sqrt{(-1-1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + [-3-(-3)]^2} \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sqrt{0+36} = \sqrt{0+36} \\ \kappa\alpha\iota \\ \sqrt{4+0} = \sqrt{4+0} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 6 = 6 \\ \kappa\alpha\iota \\ 2 = 2 \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 26

$(AB) = 13 \Leftrightarrow \sqrt{[(2x - (x+3)]^2 + (14-2)^2} = 13 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 144} = 13 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2 + 144 = 169 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 25 \Leftrightarrow x - 3 = \pm 5 \Leftrightarrow x = 8 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x = -2.$

Άσκηση 27

α) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 3 = 1 - x \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow A\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

β)$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = x^3 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x = 1 \Leftrightarrow$

$A(0,0) \ \ \kappa\alpha\iota \ \ B(1,1)$.

γ) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x_2 = -1 \ \Rightarrow \ A(2,7) \ \kappa\alpha\iota \ B(-1,1)$

δ) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 2 = x^3 + x^2 \Leftrightarrow \ x^4 - x^2 - 2 = 0 \overset{x^2 = y}{\Longleftrightarrow}$

$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow y_1 = 2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ y_2 = -1$

$y = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \ \ \kappa\alpha\iota \ \ y = -1 \Leftrightarrow x^2 = -1 \not\Leftrightarrow$

Άρα: $A\left(\sqrt{2}, \ 2\sqrt{2} + 2\right) \ \ \kappa\alpha\iota \ \ B\left(-\sqrt{2}, \ -2\sqrt{2} + 2\right)$.

Άσκηση 28

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x > 2 \ \text{ή} \ x < -2 \Leftrightarrow$

$x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Άσκηση 29

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow -x^2 + x - 3 > 3x - 11 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 8 > 0 \Rightarrow$

$$\Delta = 4 + 32 = 36 > 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 6}{-2} \Rightarrow x_1 = -4 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x_2 = 2$$

Από γνωστή θεωρία το τριώνυμο θα έχει θετικό πρόσημο στο διάστημα μεταξύ των ριζών του, άρα: $x \in (-4, 2)$.

6.3 Η Συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1:

α) $y = x \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$

β) $y = x + 8 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$

γ) $y = -x + 3 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1 \Rightarrow \omega = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

δ) $y = \sqrt{3}x + 8 \Rightarrow a = \sqrt{3} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3}$

ε) $y = -\sqrt{3}x \Rightarrow a = -\sqrt{3} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = -\sqrt{3} \Rightarrow \omega = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

στ) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{8}{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{6}$

Άσκηση 2

Η κλίση μιας ευθείας ισούται με το συντελεστή της ανεξάρτητης μεταβλητής x, που μας δείχνει πόσο κοντά ή μακριά βρίσκεται η ευθεία από τον άξονα των x.

α) $y = 2x + 1 \Rightarrow a = 2$

β) $y = 5x - 9 \Rightarrow a = 5$

γ) $y = -3x + 8 \Rightarrow a = -3$

δ) $y = x - 3 \Rightarrow a = 1$

ε) $y = -x + 7 \Rightarrow a = -1$

στ) $y = 8 \Rightarrow a = 0$

Σχόλιο:

Μια ευθεία παράλληλη στον άξονα των x νοερά ταυτίζεται με τον άξονα. Ό, τι είναι παράλληλο στον άξονα έχει μηδενική κλίση.

Άσκηση 3

Για δύο σημεία που ανήκουν στην ίδια ευθεία η κλίση υπολογίζεται ως:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

α) $A(1,4)\ και\ B(5,7) \Rightarrow \lambda = \frac{7-4}{5-1} = \frac{3}{4}$

β) $A(-1,3)\ και\ B(-2,2) \Rightarrow \lambda = \frac{2-3}{-2-(-1)} = 1$

γ) $A(8,3)\ και\ B(-1,3) \Rightarrow \lambda = \frac{3-3}{-1-8} = 0$

→ Τα δύο σημεία έχουν ίδια τεταγμένη!!!

δ) $O(0,0)\ και\ A(5,-3) \Rightarrow \lambda = \frac{-3-0}{5-0} = -\frac{3}{5}$

ε) $A(1,1)\ και\ B(5,6) \Rightarrow \lambda = \frac{6-1}{5-1} = \frac{5}{4}$

στ) $A(-83,40)\ και\ B(97,40) \Rightarrow \lambda = 0$

Άσκηση 4

Δύο ευθείες είναι παράλληλες αν και μόνον εάν έχουν την ίδια κλίση. Συνεπώς, με τη δοθείσα ευθεία παράλληλες είναι οι ευθείς (β) και (ε).

Άσκηση 5

α) Για να είναι οι ευθείες παράλληλες πρέπει να έχουν την ίδια κλίση. Αφού οι $3 \neq -2$ συνεπάγεται ότι οι ευθείες τέμνονται.

β) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Leftrightarrow 3x - 6 = -2x + 4 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2$

Άσκηση 6

α) $y = \alpha x + \beta \overset{\alpha=3}{\underset{}{\overset{A(0,5)}{\Longleftrightarrow}}} 5 = \beta \Rightarrow y = 3x + 5$

β) $y = \alpha x + \beta \overset{\omega=30^0}{\overset{A(0,-2)}{\Longleftrightarrow}} \alpha = \varepsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow -2 = \beta \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$

γ) $y = \alpha x + \beta \overset{\varepsilon_1//\varepsilon_2}{\overset{A(0,-4)}{\Longleftrightarrow}} \alpha = -2 \;\kappa\alpha\iota\; -4 = \beta \Rightarrow y = -2x - 4$

Άσκηση 7

α) $y = \alpha x + \beta \overset{\alpha=2}{\overset{A(3,11)}{\Longleftrightarrow}} 11 = 6 + \beta \Rightarrow \beta = 5 \Rightarrow y = 2x + 5$

β) $y = \alpha x + \beta \overset{\alpha=-3}{\overset{A(2,-5)}{\Longleftrightarrow}} -5 = -6 + \beta \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow y = -3x + 1$

Άσκηση 8

α) $A(1,3) \;\kappa\alpha\iota\; B(2,5) \Rightarrow \lambda = \frac{5-3}{2-1} = 2 \overset{A(1,3)}{\Longrightarrow} 3 = 2 + \beta \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow y = 2x + 1$

β) $A(-2,4) \;\kappa\alpha\iota\; B(1,7) \Rightarrow \lambda = \frac{7-4}{1+2} = 1 \overset{A(-2,4)}{\Longrightarrow} 4 = -2 + \beta \Rightarrow \beta = 6 \Rightarrow y = x + 6$

γ) $A(5,2) \;\kappa\alpha\iota\; B(3,1) \Rightarrow \lambda = \frac{1-2}{3-5} = \frac{1}{2} \overset{A(5,2)}{\Longrightarrow} 2 = \frac{5}{2} + \beta \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

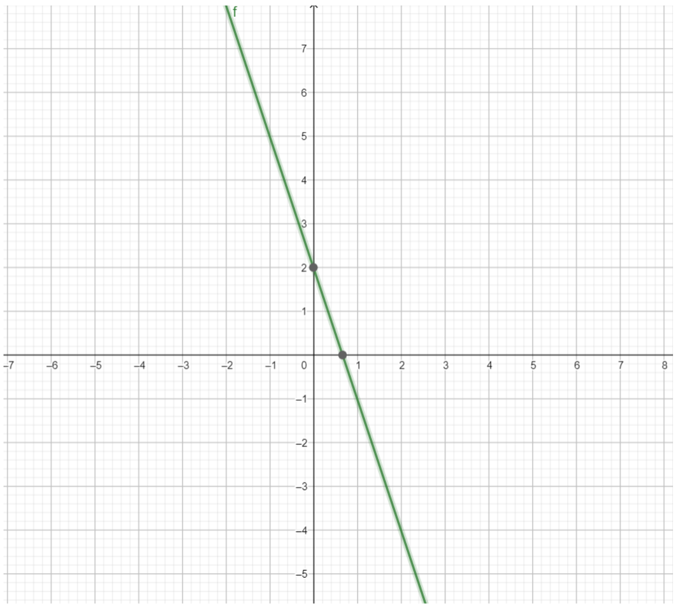
δ) $A(-2,3) \;\kappa\alpha\iota\; B(1,3) \Rightarrow \lambda = 0 \overset{A(1,3)}{\Longrightarrow} 3 = \beta \Rightarrow y = 3$

Άσκηση 9

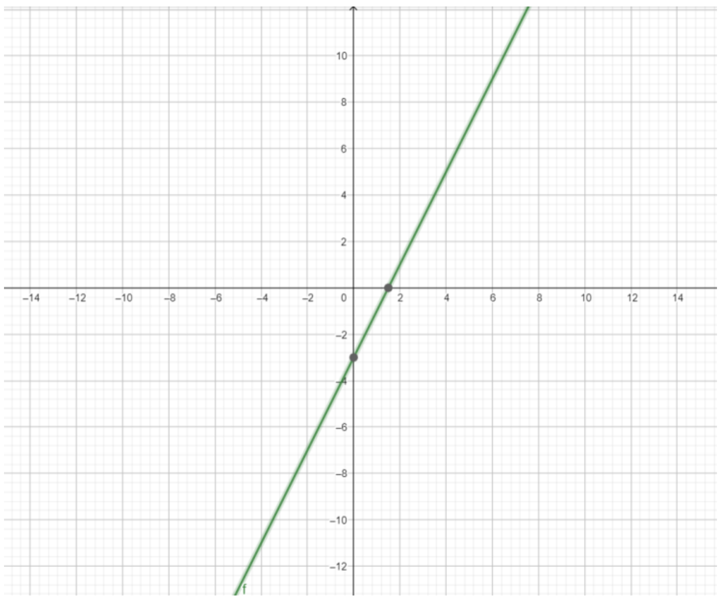
$$y = ax + \beta \overset{B(0,1)}{\underset{}{\overset{A(-1,0)}{\Longleftrightarrow}}} \begin{Bmatrix} -a + \beta = 0 \\ \beta = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow y = x + 1$$

Άσκηση 10

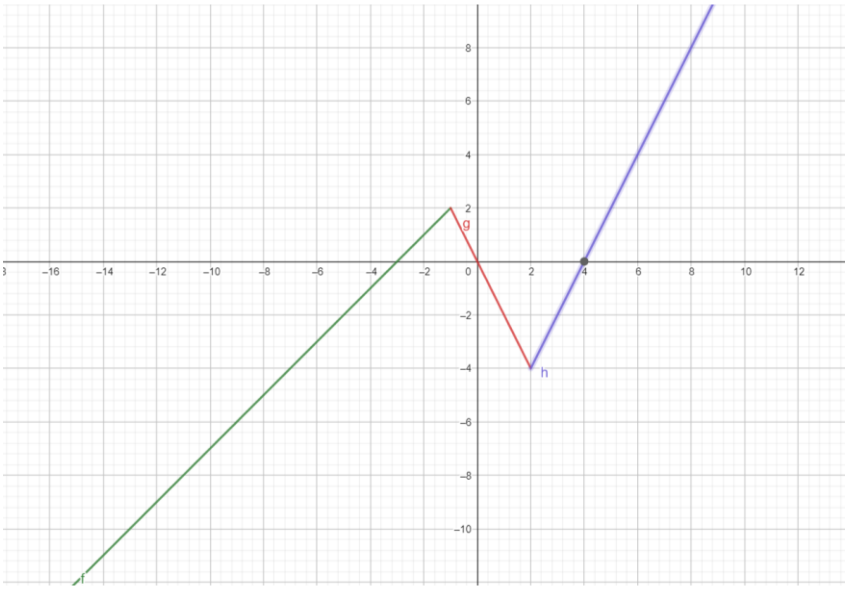
α)



β)

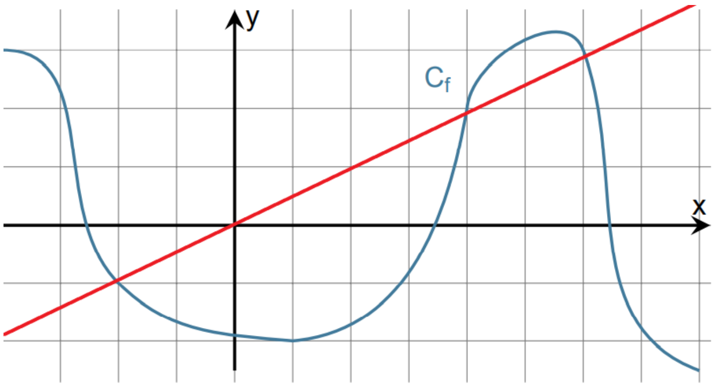


Άσκηση 11



Άσκηση 12

α)

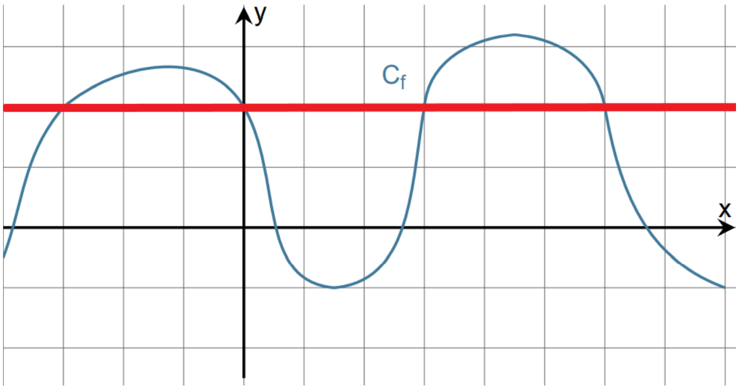


β) $f(x) = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow 3$ *κοινά σημεία*: $A(-2,-1)$, $B(4,2)$ *και* $\Gamma(6,3)$.

γ) $f(x) \leq \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x \in [-2,4] \cup [6,8]$.

Άσκηση 13

α)

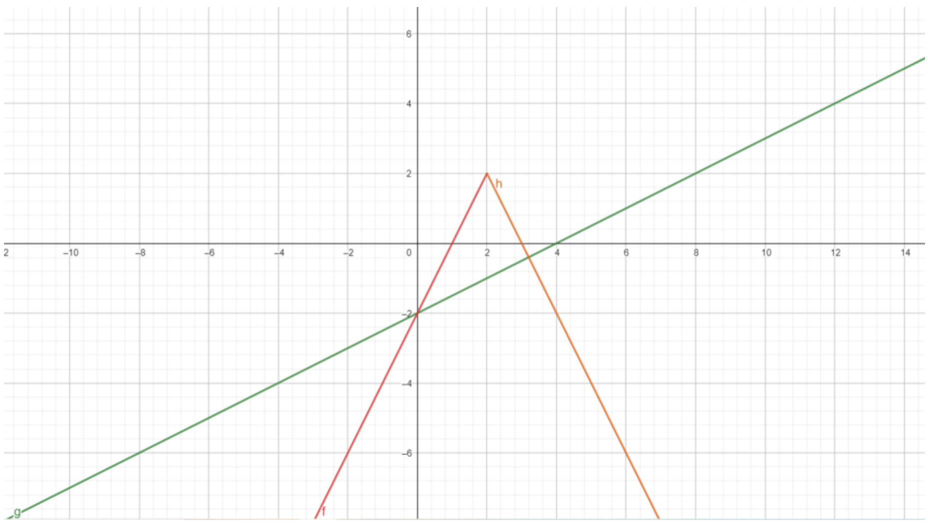


β) $f(x) = 2 \Leftrightarrow 4$ *κοινά σημεία*: $A(-3,2)$, $B(0,2)$, $\Gamma(3,3)$ *και* $\Delta(6,2)$.

γ) $f(x) > 2 \Leftrightarrow x \in [-3,0] \cup [3,6]$.

Άσκηση 14

α)



β) Σύμφωνα με τις γραφικές τούς παραστάσεις οι συναρτήσεις είναι ίσες στα σημεία τομής τους. Έχουν δύο κοινά σημεία, τα : $A(0,-2)$ *και* $B\left(\frac{16}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

γ) $f(x) > g(x) \Rightarrow x \in \left(0, \frac{16}{5}\right)$.

δ) $2x - 2 = \frac{1}{2}x - 2 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -2$

$-2x + 6 = \frac{1}{2}x - 2 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = 8 \Rightarrow x = \frac{16}{5} \Rightarrow y = -\frac{2}{5}$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2x - 2 > \frac{1}{2}x - 2 \\ -2x + 6 > \frac{1}{2}x - 2 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 < x \leq 2 \\ 2 < x < \frac{16}{5} \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{16}{5}\right).$$

Άσκηση 15

α) i) $f(-3) = -3$

ii) $f(-1) = 3$

iii) $f(0) = 3$

iv) $f(2) = 3$

v) $f(4) = 0$

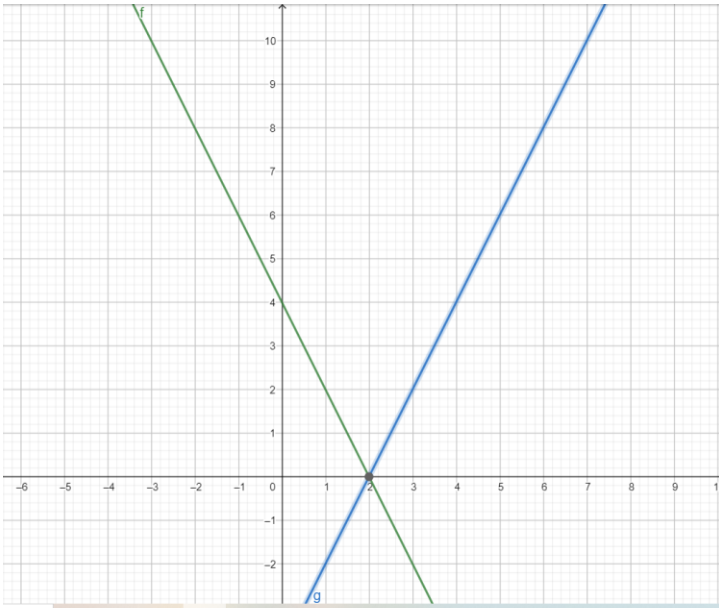
vi) $f(8) = 2$

β) i) $f(x) = -3 \Rightarrow x = -3$

ii) $f(x) = 3 \Rightarrow x \in [-2, 3]$

γ) Αναζητούμε εκείνα τα x για τα οποία η συνάρτηση βρίσκεται κάτω από τη διχοτόμο του 1ου τεταρτημορίου. Αυτό ισχύει για $x \in [3, 8]$.

Άσκηση 16



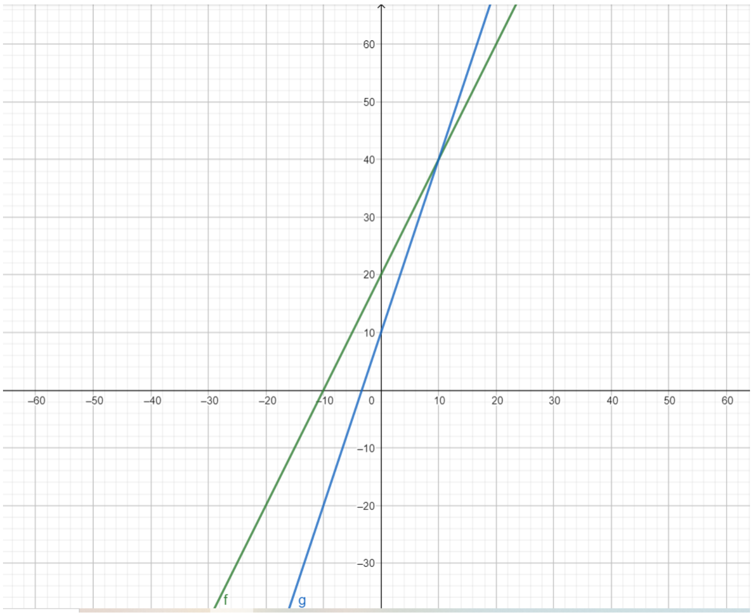
Εφόσον η ευθεία κινείται πάνω στην ευθεία $y = -2x + 4$ και ανακλάται στον άξονα των x θα επιστρέψει προς τα πίσω κινούμενη τώρα σε μια άλλη ευθεία η οποία θα έχει την ίδια κλίση με την αρχική κατ' απόλυτη τιμή, διότι η ανακλώμενη ευθεία τώρα θα είναι αύξουσα ως συνάρτηση.

Άρα, θα έχει κλίση ίση με 2. Οι δύο ευθείες θα είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της μεταξύ τους γωνίας, δηλαδή ως προς την ευθεία $x = 2$. Για να είναι συμμετρικές, πρέπει ο συντελεστής β να είναι αρνητικός και ίσος με 4. Άρα, προκύπτει η ευθεία $y = 2x + 4$.

Άσκηση 17

α) $\begin{cases} \Delta u_1 = a_1 \Delta_t \Rightarrow u_1 - u_0 = a_1 \Delta_t \Rightarrow u_1 = 20 + 2\Delta_t \\ \Delta u_2 = a_2 \Delta_t \Rightarrow u_2 - u_0 = a_2 \Delta_t \Rightarrow u_2 = 10 + 3\Delta_t \end{cases}$

β)



Στην προκειμένη περίπτωση η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η ταχύτητα και η ανεξάρτητη ο χρόνος. Τα δύο αυτοκίνητα θα συναντηθούν στο κοινό τους σημείο, μετά από 10 δευτερόλεπτα.

Άσκηση 18

α) $\lambda = \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi 0^o = 0$

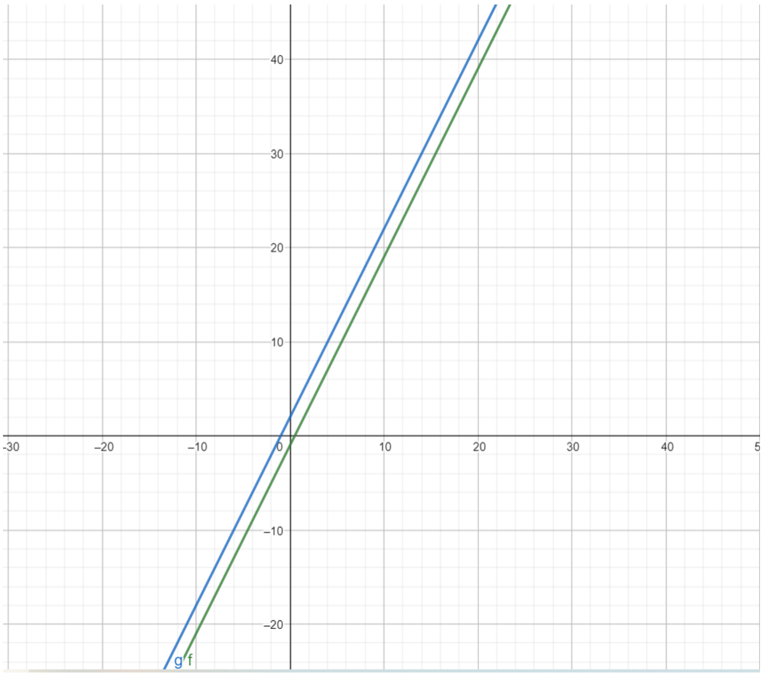
β) $\lambda = \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi 120^o = \varepsilon\varphi(180^o - 60^o) = -\varepsilon\varphi 60^o = -\sqrt{3}$

γ) $\lambda = \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$

δ) $\lambda = \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi 45^o = 1$

Άσκηση 19

Προφανώς οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, εφόσον έχουν την ίδια κλίση.



Άσκηση 20

α) $y = x - 2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \textit{Σημείο τομής με τον άξονα των } x \textit{ το } A(2,0) \\ \textit{Σημείο τομής με τον άξονα των } y \textit{ το } B(0,-2) \end{Bmatrix}$

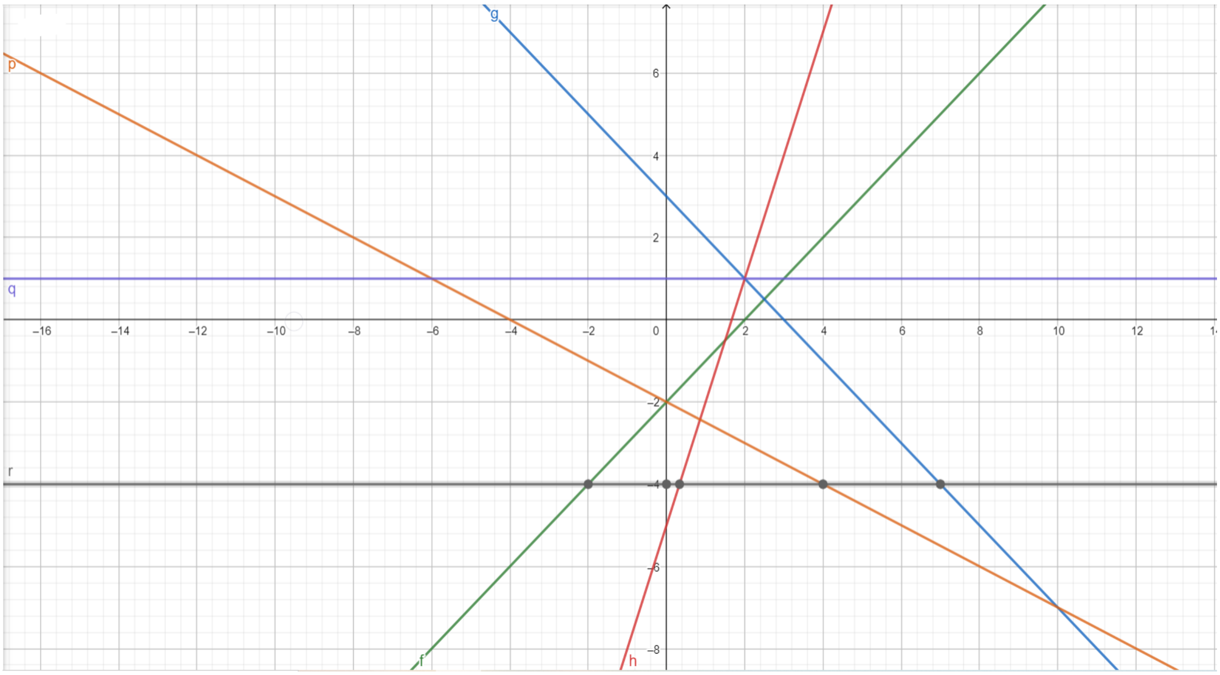
β) $y = -x + 3 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \textit{Σημείο τομής με τον άξονα των } x \textit{ το } A(3,0) \\ \textit{Σημείο τομής με τον άξονα των } y \textit{ το } B(0,3) \end{Bmatrix}$

γ) $y = 3x - 5 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \textit{Σημείο τομής με τον άξονα των } x \textit{ το } A\left(\frac{5}{3},0\right) \\ \textit{Σημείο τομής με τον άξονα των } y \textit{ το } B(0,-5) \end{Bmatrix}$

δ) $y = -\frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \textit{Σημείο τομής με τον άξονα των } x \textit{ το } A(-4,0) \\ \textit{Σημείο τομής με τον άξονα των } y \textit{ το } B(0,-2) \end{Bmatrix}$

ε) $y = 1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Δεν έχει σημεία τομής με τον άξονα των } x \\ \text{Σημείο τομής με τον άξονα των } y \text{ το } B(0,1) \end{Bmatrix}$

στ) $y = -4 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Δεν έχει σημεία τομής με τον άξονα των } x \\ \text{Σημείο τομής με τον άξονα των } y \text{ το } B(0,-4) \end{Bmatrix}$



Άσκηση 21

Η κλίση μιας ευθείας είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των x. Άρα:

α) $\varepsilon\varphi\omega = 1 \Rightarrow \omega = 45^o$

β) $\varepsilon\varphi\omega = -1 \Rightarrow \omega = 180^o - 45^o = 135^o$

γ) $\varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3} \Rightarrow \omega = 60^o$

δ) $\varepsilon\varphi\omega = -\sqrt{3} \Rightarrow \omega = 180^o - 60^o = 120^o$

ε) $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \omega = 30^o$

στ) $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \omega = 180^o - 30^o = 150^o$

Άσκηση 22

α) $A(3,4)\ \kappa\alpha\iota\ B(5,6) \Rightarrow \lambda = \frac{6-4}{5-3} = 1$

β) $A(2,-3)\ \kappa\alpha\iota\ B(5,-3) \Rightarrow \lambda = \frac{-3+3}{5-2} = 0 \Rightarrow$

Τα σημεία έχουν ίδια τεταγμένη, άρα ανήκουν σε ευθεία της μορφής $y = a$, η οποία προφανώς δεν έχει κλίση.

γ) $A(-1,2)\ \kappa\alpha\iota\ B(5,6) \Rightarrow \lambda = \frac{6-2}{5+1} = \frac{2}{3}$

Άσκηση 23

α) $y = ax + \beta \overset{\alpha=-2}{\underset{}{\overset{B(0,3)}{\Longleftrightarrow}}} 3 = \beta \Rightarrow y = -2x + 3$

β) $\omega = 60^o \Rightarrow \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \beta = -1 \Rightarrow\ y = \sqrt{3}x - 1$

γ) παράλληλη με την ευθεία ζ, άρα έχουν ίδια κλίση$\Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow$

$y = ax + \beta \overset{\alpha=3}{\overset{K(1,3)}{\Longleftrightarrow}} 3 = 3 + \beta \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow y = 3x$

Άσκηση 24

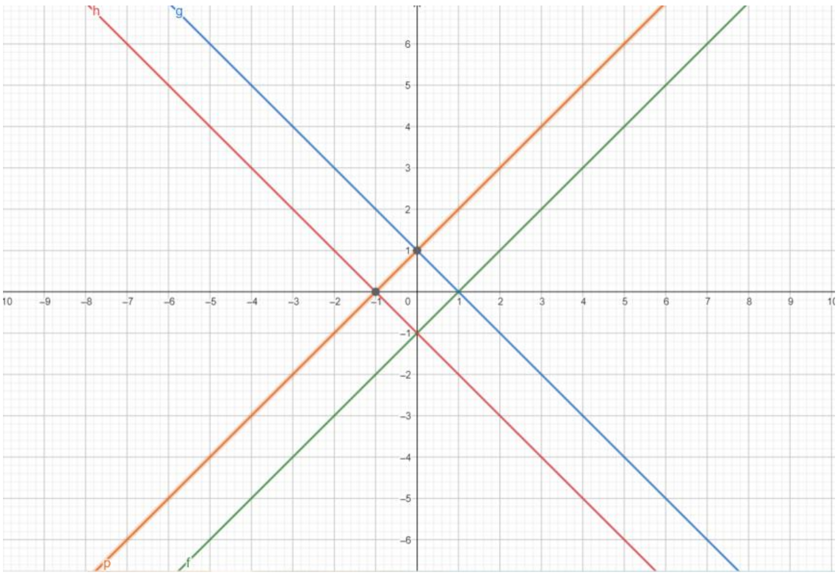
α) $A(0,2)\ και\ B(3,0) \Rightarrow \lambda = \frac{0-2}{3-0} = -\frac{2}{3} \xRightarrow{A(0,2)} 2 = \beta \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$

β) $A(1,3)\ και\ B(-1,1) \Rightarrow \lambda = \frac{1-3}{-1-1} = 1 \xRightarrow{A(1,3)} 3 = 1 + \beta \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow y = x + 2$

γ) $A(2,3)\ και\ B(-5,3) \Rightarrow \lambda = 0 \xRightarrow{A(2,3)} 3 = \beta \Rightarrow y = 3$

δ) $A\left(1,\frac{1}{2}\right)\ και\ B\left(-1,-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{-1-1} = \frac{1}{2} \xRightarrow{A\left(1,\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{2} = 1 + \beta \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow$
$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Άσκηση 25



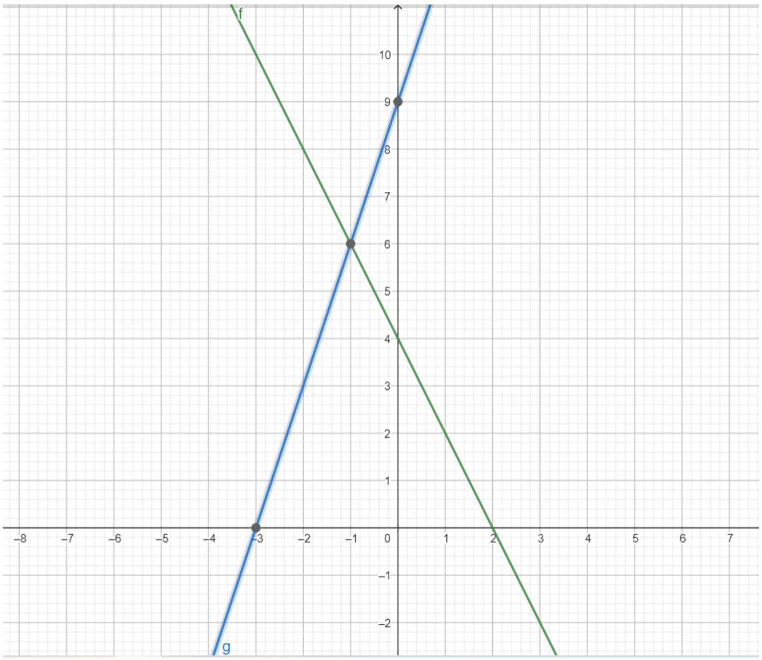
Προφανώς το επίπεδο που περικλείεται και από τις τέσσερις ευθείες είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $A(0,1),\ B(1,0),\ \Gamma(0,-1)\ και\ \Delta(-1,0)$. Άρα, έχει εμβαδόν $E = 1^2 = 1$.

Άσκηση 26

α) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Leftrightarrow -2x + 4 = 3x + 9 \Leftrightarrow 5x = -5 \Leftrightarrow x = -1 \Leftrightarrow y = 6$

Άρα, κοινό σημείο των δύο ευθειών το σημείο $A(-1, 6)$.

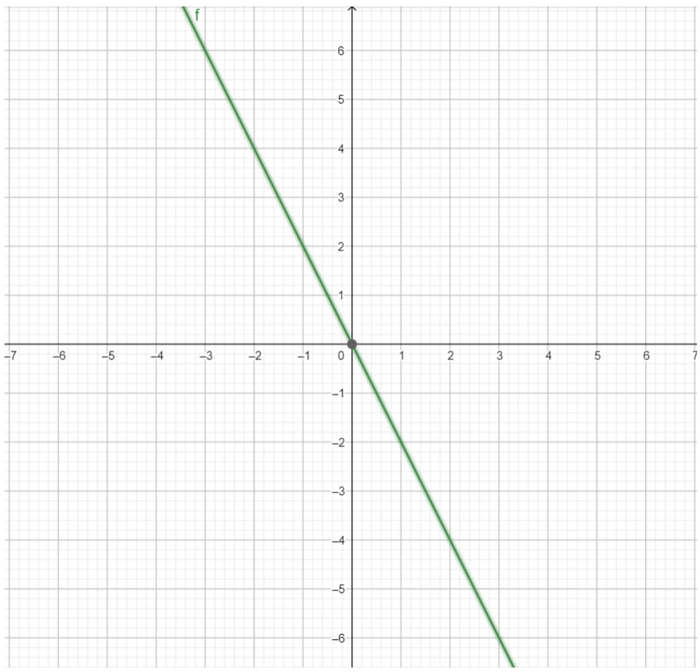
β)



Άσκηση 27

α) Αφού η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, συνεπάγεται ότι ο συντελεστής β είναι ίσος με το μηδέν. Άρα: $2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -4 \Leftrightarrow y = -2x$

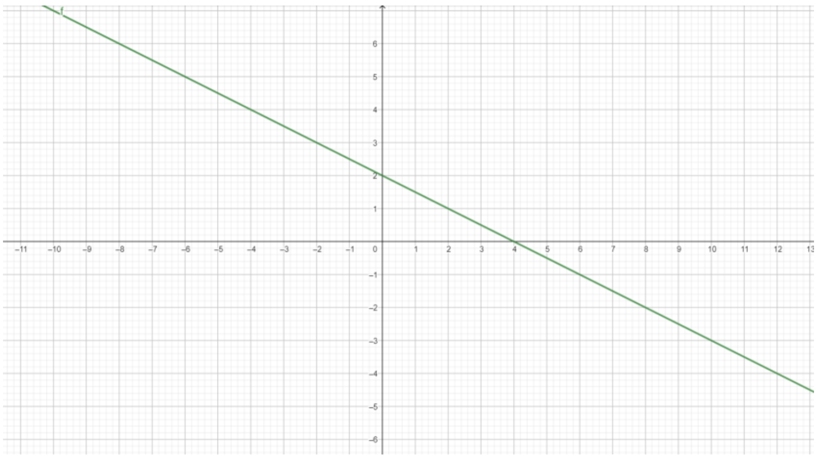
β)



Άσκηση 28

α) $y = ax + 2a + 3 \xLeftrightarrow{A(4,0)\in y} 4a + 2a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$

β)



Άσκηση 29

α) $3\lambda - 5 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 3$

β) $\lambda - 3 = 5 - \lambda \Leftrightarrow \lambda = 4$

γ) $\frac{\lambda-1}{2} = \lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 2\lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda = -3$

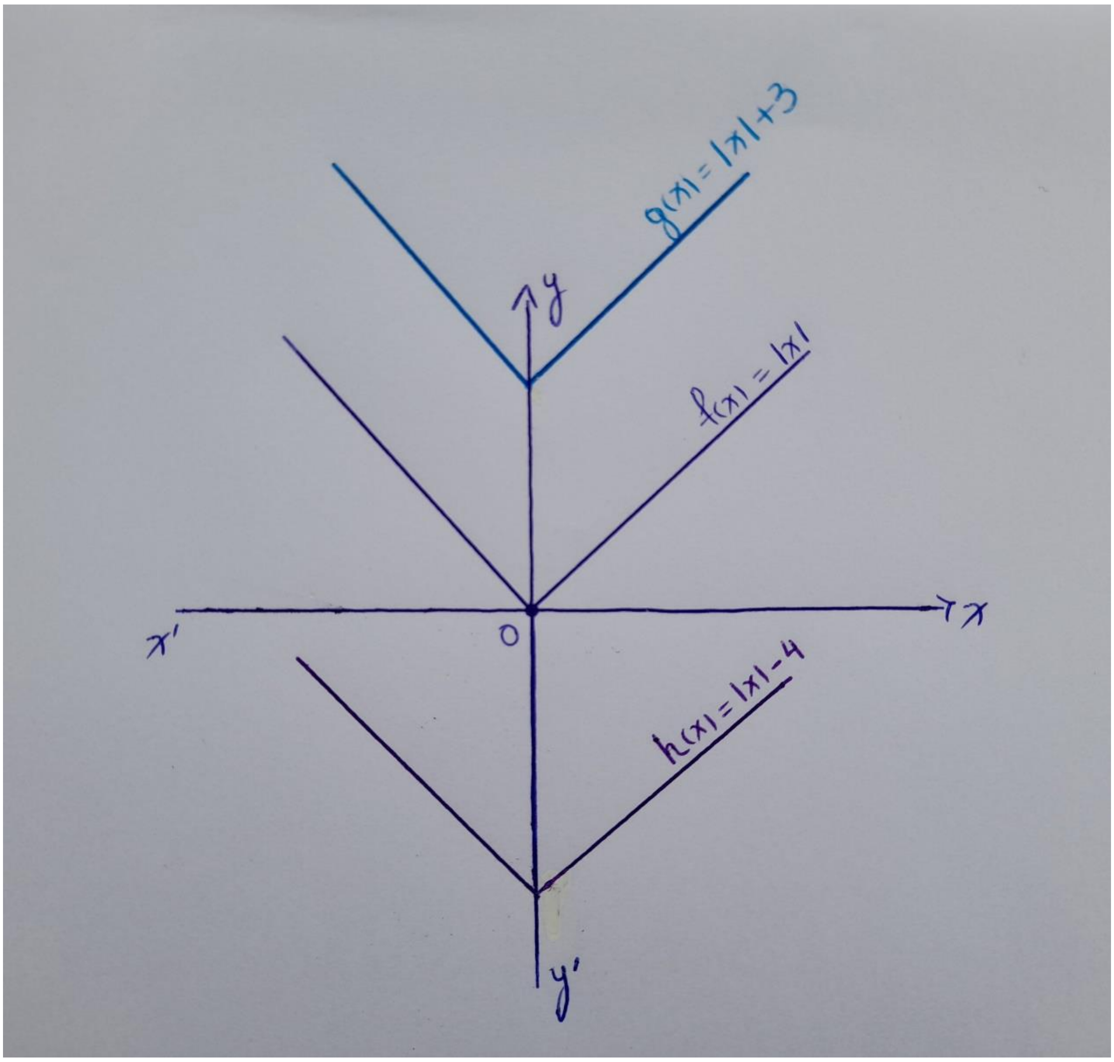
δ) $\lambda - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{2}$

6.4 Κατακόρυφη – Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

Ασκήσεις για Διδασκαλία

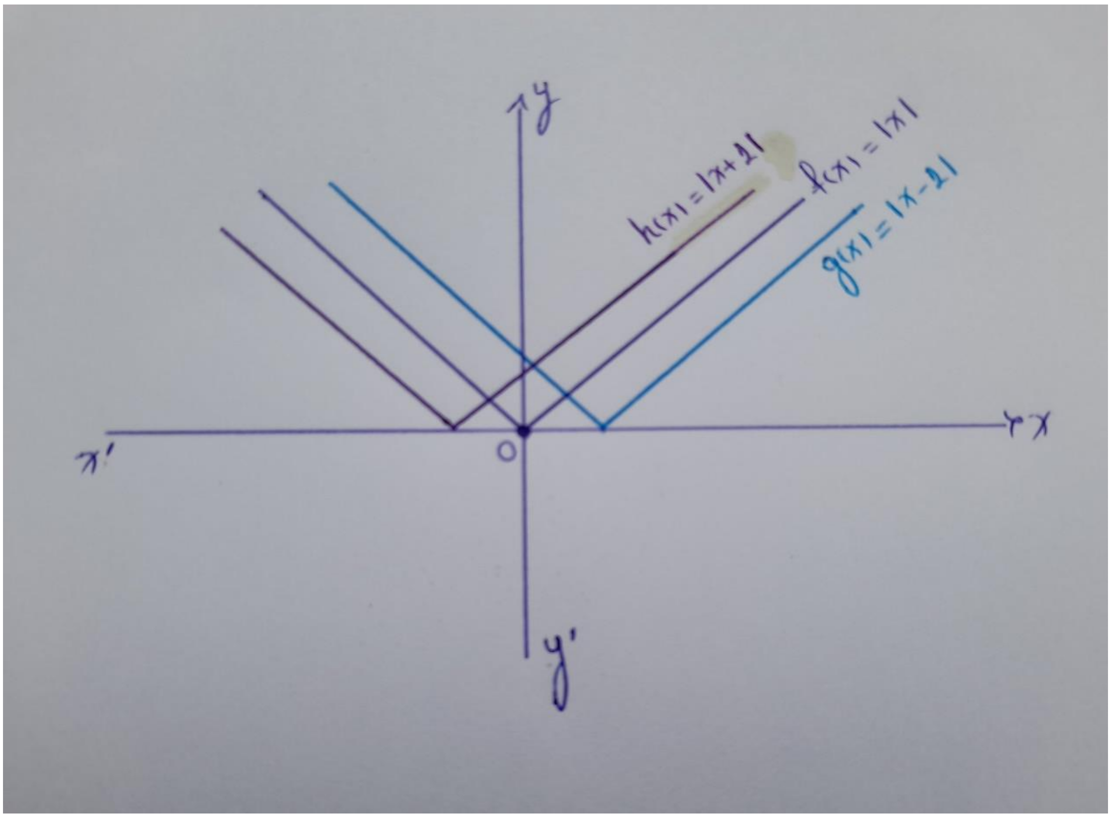
Άσκηση 1

Οι συναρτήσεις g και h αποτελούν κατακόρυφες μετατοπίσεις της συνάρτησης f προς τα πάνω κατά 3 μονάδες και προς τα κάτω κατά 4 μονάδες αντίστοιχα.



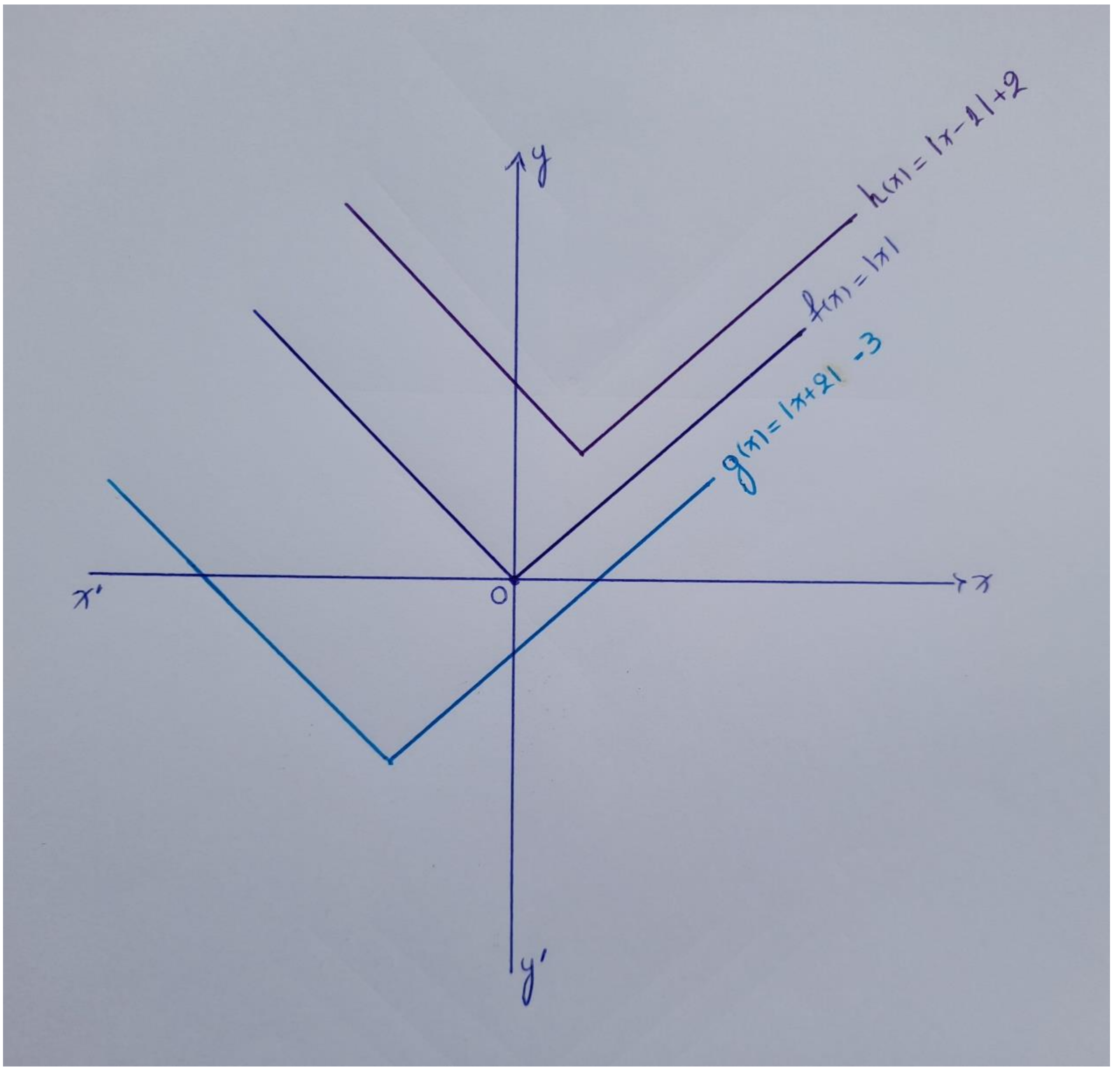
Άσκηση 2

Οι συναρτήσεις g και h αποτελούν οριζόντιες μετατοπίσεις της συνάρτησης f προς τα δεξιά κατά 1 μονάδα και προς τα αριστερά κατά 1 μονάδα αντίστοιχα.



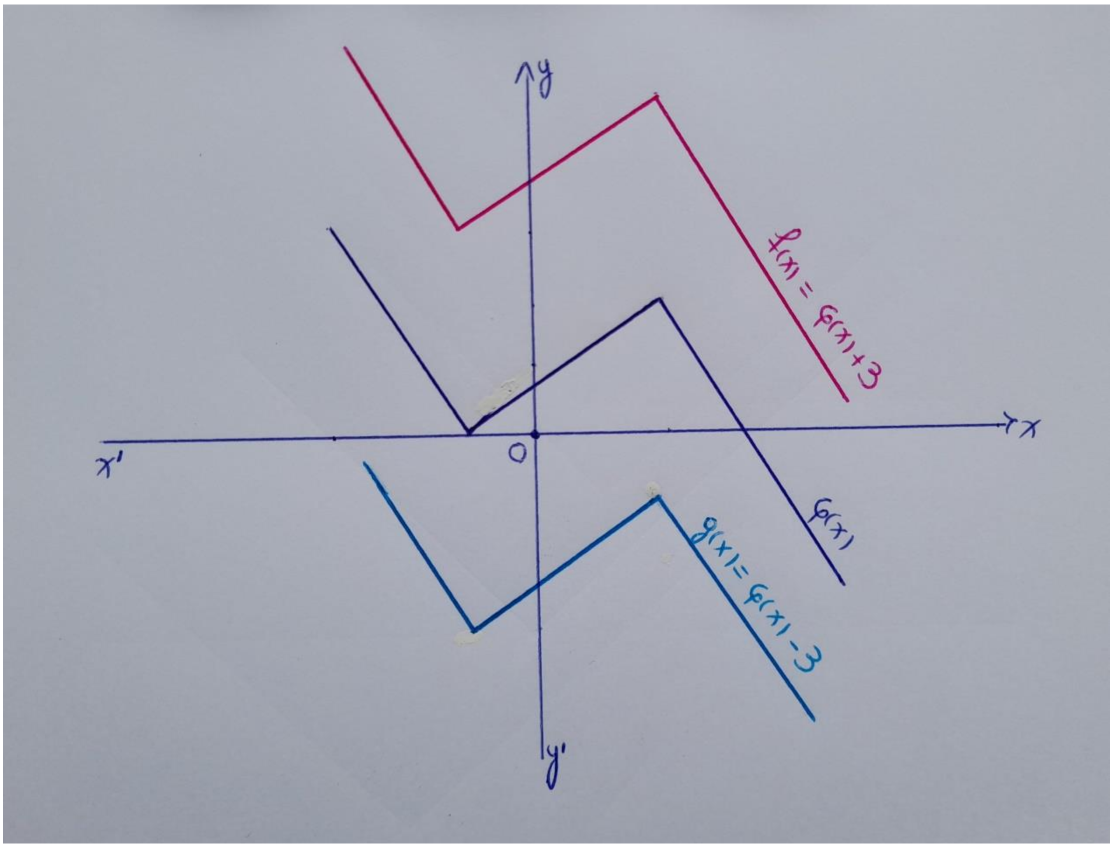
Άσκηση 3

Οι συναρτήσεις g και h αποτελούν οριζόντια μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και έπειτα κάθετη μετατόπιση κατά 3 μονάδες προς τα κάτω της f και οριζόντια μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και έπειτα κάθετη μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα πάνω της f αντίστοιχα.

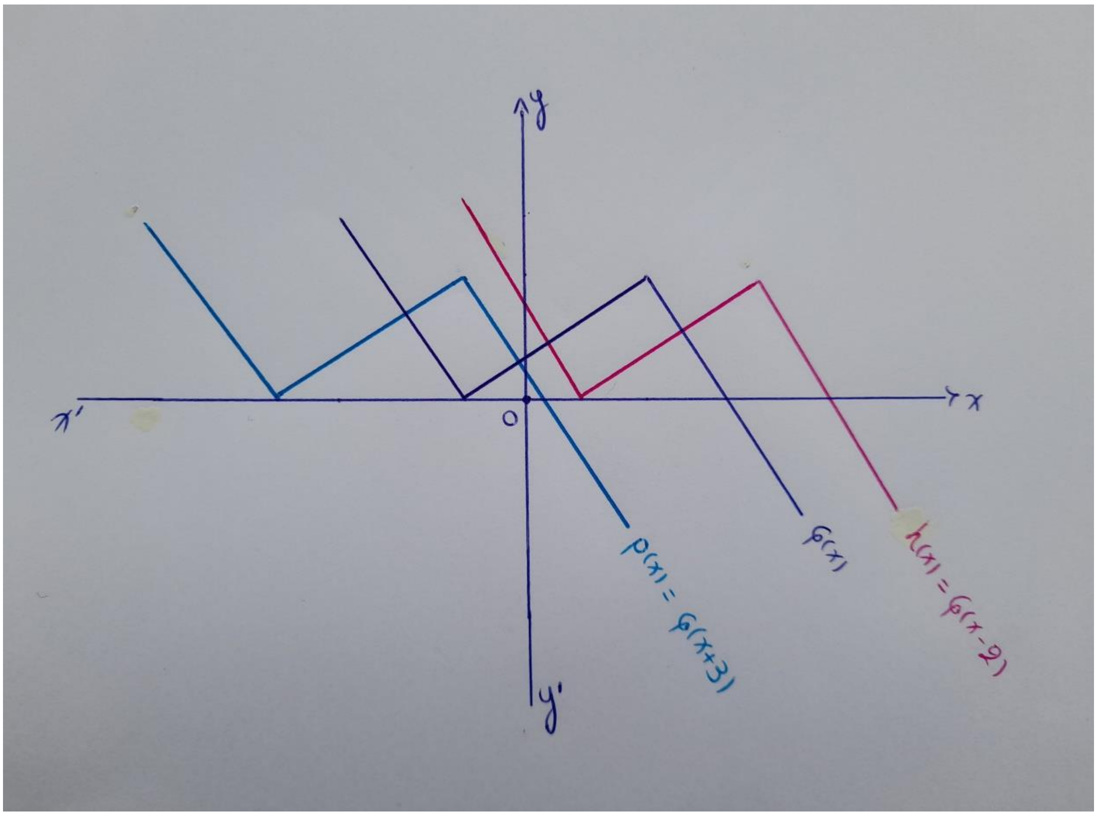


Άσκηση 4

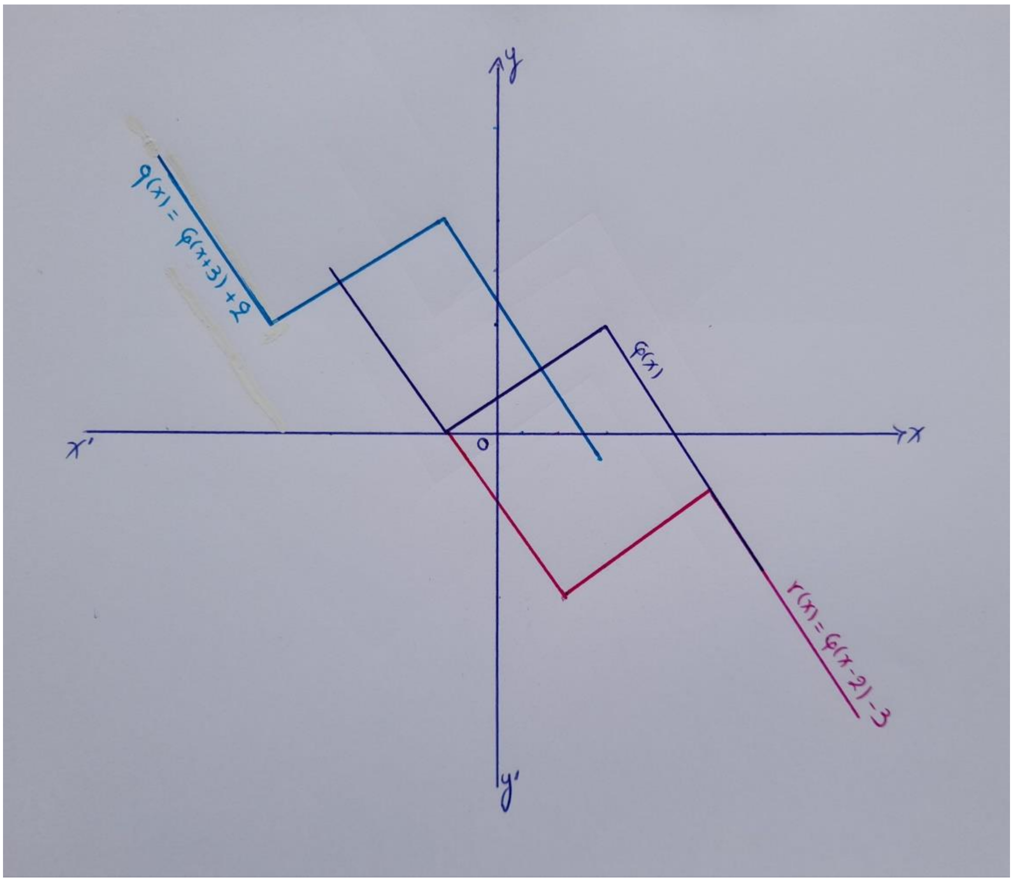
α) Οι συναρτήσεις f και g αποτελούν κατακόρυφες μετατοπίσεις της συνάρτησης φ κατά 3 μονάδες προς τα πάνω και προς τα κάτω αντίστοιχα.



β) Οι συναρτήσεις h και p αποτελούν οριζόντιες μετατοπίσεις της συνάρτησης φ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά αντίστοιχα.



γ) Οι συναρτήσεις r και q αποτελούν οριζόντια μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και έπειτα κάθετη μετατόπιση κατά 3 μονάδες προς τα κάτω της συνάρτησης φ και οριζόντια μετατόπιση κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και έπειτα κάθετη μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα πάνω της συνάρτησης φ αντίστοιχα.



Άσκηση 5

$\varphi(x) = 3x^2 - 2x + 1$

α)

$$f(x) = 3(x+1)^2 - 2(x+1) + 1 - 3 = 3x^2 + 6x + 3 - 2x - 2 - 2$$
$$\Rightarrow f(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

β)

$$f(x) = 3(x+3)^2 - 2(x+3) + 1 + 2 = 3x^2 + 18x + 27 - 2x - 6 + 3$$
$$\Rightarrow f(x) = 3x^2 + 16x + 24$$

γ)

$$f(x) = 3(x-2)^2 - 2(x-2) + 1 - 1 = 3x^2 - 12x + 12 - 2x + 4$$
$$\Rightarrow f(x) = 3x^2 - 14x + 16$$

δ)

$$f(x) = 3(x-1)^2 - 2(x-1) + 1 + 5 = 3x^2 - 6x + 3 - 2x + 2 + 6$$
$$\Rightarrow f(x) = 3x^2 - 8x + 11$$

6.5 Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες Συνάρτησης

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

Μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. Αντίστοιχα, μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. Με άλλα λόγια, όταν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, η γραφική της παράσταση ανέρχεται, ενώ, όταν είναι γνησίως φθίνουσα, η γραφική της παράσταση κατέρχεται. Συνεπώς, βασιζόμενοι στις δοθείσες γραφικές παραστάσεις συμπεραίνουμε ότι:

- Η f στο $\Delta_1 = (-\infty, 1)$ είναι γνησίως αύξουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα ανέρχεται και στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$, γιατί στο διάστημα αυτό κατέρχεται.
- Η g στο $\Delta_1 = (-\infty, -1)$ είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα κατέρχεται, στο $\Delta_2 = [-1, 3)$ είναι γνησίως αύξουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα κατέρχεται και στο $\Delta_3 = [3, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα κατέρχεται.
- Η h στο $\Delta_1 = (-\infty, -3)$ είναι γνησίως αύξουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα ανέρχεται, στο $\Delta_2 = [-3, 0)$ είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα κατέρχεται, στο $\Delta_3 = [0, 3)$ είναι γνησίως αύξουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα ανέρχεται και στο $\Delta_4 = [3, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα κατέρχεται.
- Η p είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της Δ, καθώς ανέρχεται σε οποιοδήποτε διάστημα.

Άσκηση 2

- Η f παρουσιάζει ένα ολικό ακρότατο, το 2 το οποίο είναι ολικό μέγιστο στη θέση $x_0 = 1$.
- Η g παρουσιάζει δύο ολικά ακρότατα, το -2 το οποίο είναι ολικό ελάχιστο στη θέση $x_1 = -1$ και το 0 το οποίο είναι ολικό μέγιστο στη θέση $x_2 = 3$.
- Η h παρουσιάζει δύο ολικά ακρότατα, το 2 το οποίο είναι ολικό μέγιστο σε δύο θέσεις, τις $x_1 = -3$ και $x_2 = 3$ και το -2 το οποίο είναι ολικό ελάχιστο στη θέση $x_3 = 0$.
- Η p δεν παρουσιάζει κανένα ολικό ακρότατο.

Σημείωση:

Τα (ολικά) ακρότατα μιας συνάρτησης εντοπίζονται πάντα στα σημεία στα οποία αλλάζει η μονοτονία της συνάρτησης. Για παράδειγμα, η συνάρτηση p δεν παρουσιάζει κανένα ακρότατο, διότι δεν αλλάζει ποτέ η μονοτονία της.

Επίσης, ένας ακόμη τρόπος να εντοπίσουμε τα (ολικά) ακρότατα μιας συνάρτησης είναι μέσω της γραφικής της παράστασης, όπου εντοπίζονται στα σημεία εκείνα στα οποία η γραφική παράσταση αλλάζει, δηλαδή παύει να ανέρχεται και ξεκινά να κατέρχεται ή και το ανάποδο.

Άσκηση 3

Η συνάρτηση $f : [-6, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει δύο ολικά ακρότατα, το 2 και το -2, όπου το 2 είναι ολικό μέγιστο και εντοπίζεται στις θέσεις $x_1 = -2$ και $x_2 = 6$ και το -2 είναι ολικό ελάχιστο και εντοπίζεται στις θέσεις $x_3 = -6$ και $x_4 = 2$.

Άσκηση 4

α)

$$f(x) = x^2 + 4x + 6 = x^2 + 4x + 4 + 2 = (x+2)^2 + 2$$

Η f είναι άθροισμα μη αρνητικών όρων, οπότε η μικρότερη τιμή που μπορεί να λάβει σε όλο το πεδίο ορισμού της θα είναι αναγκαστικά για την τιμή εκείνη του x που μηδενίζει τον όρο που περιέχει το x. Συνεπώς, έχουμε: $(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$.

Άρα, η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -2$.

β)

$$f(x) = -x^2 + 1$$

Η f ορίζεται σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών και, καθώς το x^2 είναι πάντα μη αρνητικός όρος, συνεπάγεται ότι το $-x^2$ θα είναι πάντα μη θετικός. Οπότε, η μέγιστη τιμή της εντοπίζεται για $x = 0$, καθώς για οποιαδήποτε άλλη τιμή η συνάρτηση θα μηδενίζεται ή θα επιστρέφει αρνητικές τιμές. Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$.

γ)

$$f(x) = \frac{6x}{x^2+9} = \frac{6x}{x^2 + 9 + 6x - 6x} = \frac{6x}{6x + (x-3)^2}$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής είναι πάντα μικρότερος από τον παρονομαστή, καθώς ο παρονομαστής είναι άθροισμα μη αρνητικών όρων και μάλιστα ο ένας εκ των δύο είναι ίσος με τον αριθμητή του κλάσματος. Οπότε, προκειμένου να βρούμε που παρουσιάζει η συνάρτηση τη μέγιστη τιμή της, συμπεραίνουμε ότι πρέπει ο αριθμητής να γίνει ίσος με τον παρονομαστή. Δηλαδή, $(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$. Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 3$.

δ)

$$f(x) = \frac{5}{x^2 + 7}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι πάντα θετική, καθώς ο όρος x^2 είναι πάντα μη αρνητικός, με αποτέλεσμα και ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος να είναι θετικοί. Άρα, η συνάρτηση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, οπότε για κάθε τιμή του πεδίου ορισμού της ο παρονομαστής θα αυξάνεται, με αποτέλεσμα το κλάσμα να ελαττώνεται. Επομένως, η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$.

ΚΟΛΠΟ!!!

Πολλές φορές θα χρειάζεται να συγκρίνουμε όρους μεταξύ τους, προκειμένου να καταλήξουμε σε κάποιο αποτέλεσμα. Όταν έχουμε κλάσμα, προσπαθούμε να βγάλουμε κάποια σύγκριση μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή, προκειμένου να μπορούμε να προβλέπουμε κάθε φορά την αυξομείωση του κλάσματος.

Επίσης, προσέχουμε μήπως μπορούμε να δημιουργήσουμε με προσθαφαίρεση όρων άθροισμα ή διαφορά στο τετράγωνο(γνωστή ταυτότητα δηλαδή)!

Άσκηση 5

Μια συνάρτηση f : A → ℝ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 ε Α, εάν για κάθε x ε Α ισχύει f(x)≥f(x_0).

α)

Επειδή η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση και άθροισμα μη αρνητικών όρων, συμπεραίνουμε ότι θα ισχύει f(x)≥0 για κάθε x ε [-5, 2]. Άρα, επειδή f(x) = x^2 + 3, το x = 0 θα είναι η μικρότερη κατ΄ απόλυτη τιμή του πεδίου ορισμού της που παίρνει και επομένως εκεί η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Για x = 0: $f(0) = 0^2 + 3 = 3$.

β)

Το x = -5 είναι η μεγαλύτερη κατ΄ απόλυτη τιμή που παίρνει η f στο πεδίο ορισμού της. Άρα, στο x = -5 παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

Για x = -5: $f(-5) = (-5)^2 + 3 = 28$

Άσκηση 6

Μία συνάρτηση f: A → ℝ λέγεται άρτια, αν για κάθε x ∈ A ισχύει ότι –x ∈ A και f(–x) = f(x) και περιττή αντίστοιχα, αν για κάθε x ∈ A ισχύει ότι –x ∈ A και f(–x) = $-$f(x). Οπότε, προκειμένου να αποφανθούμε, εξετάζουμε τι συμβαίνει στη θέση $-x$.

α)

$$f(x) = 5x^2 + 7x^8 \Rightarrow f(-x) = 5(-x)^2 + 7(-x)^8 = 5x^2 + 7x^8 \Rightarrow$$
$$f(-x) = f(x)$$

⇒ Η f είναι άρτια.

β)

$g(x) = -x^7 + 2x^3 \Rightarrow g(-x) = -(-x)^7 + 2(-x)^3 = x^7 - 2x^3 =$
$-(-x^7 + 2x^3) \Rightarrow g(-x) = g(x) \Rightarrow$

Η g είναι περιττή.

γ)

$h(x) = |x| - |x|^3 \Rightarrow h(-x) = |-x| - |-x|^3 = |x| - |x|^3$

$\Rightarrow h(-x) = h(x) \Rightarrow$ Η h είναι άρτια.

δ)

$$\varphi(x) = \frac{3x}{5 + x^2} \Rightarrow \varphi(-x) = \frac{3(-x)}{5 + (-x)^2} = \frac{-3x}{5 + x^2} \Rightarrow$$

$\varphi(-x) = -\varphi(x) \Rightarrow$ Η φ είναι περιττή.

ε)

$p(x) = x^2 + 3x \Rightarrow p(-x) = (-x)^2 + 3(-x) = x^2 - 3x \Rightarrow$

$p(-x) \neq p(x), -p(x) \Rightarrow$ Η p δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

στ)

$q(x) = (x-1)^2 \Rightarrow q(-x) = (-x-1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow$

$q(-x) \neq q(x), -q(x) \Rightarrow$ Η q δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

ζ)

$r(x) = x - 2 \Rightarrow r(-x) = \ -x - 2 \ \Rightarrow r(-x) \neq r(x), -r(x) \Rightarrow$

Η r δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

η)

$$s(x) = \frac{1}{x^2 + x^4 + 1} \Rightarrow s(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + (-x)^4 + 1} = \frac{1}{x^2 + x^4 + 1} \Rightarrow$$

$s(-x) = s(x) \Rightarrow$ Η s είναι άρτια.

Άσκηση 7

α)

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$$

Η f είναι περιττή.

β)

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow g(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow g(-x) = g(x) \Rightarrow$$

Η g είναι άρτια.

γ)

$$h(x)=\frac{x^3}{x-5}\Rightarrow h(-x)=\frac{(-x)^3}{-x-5}=\frac{-x^3}{-(x+5)}=\frac{x^3}{x+5}\Rightarrow$$

$h(-x)\neq h(x),-h(x)\Rightarrow$ Η h δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

δ)

$\varphi(x)=\frac{x^3-x^2}{x-1}\Rightarrow\varphi(-x)=\frac{(-x)^3-(-x)^2}{-x-1}=\frac{-x^3-x^2}{-x-1}=\frac{x^3+x^2}{x+1}\Rightarrow\varphi(-x)\neq$
$\varphi(x),-\varphi(x)\Rightarrow$

Η φ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

ε)

$$p(x)=\sqrt{x-4}\Rightarrow p(-x)=\sqrt{-x-4}\Rightarrow$$

$p(-x)\neq p(x),-p(x)\Rightarrow$ Η p δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

στ)

$$q(x)=\sqrt{9-x^2}\Rightarrow q(-x)=\sqrt{9-(-x)^2}=\sqrt{9-x^2}\Rightarrow$$

$q(-x)=q(x)\Rightarrow$ Η q είναι άρτια.

Άσκηση 8

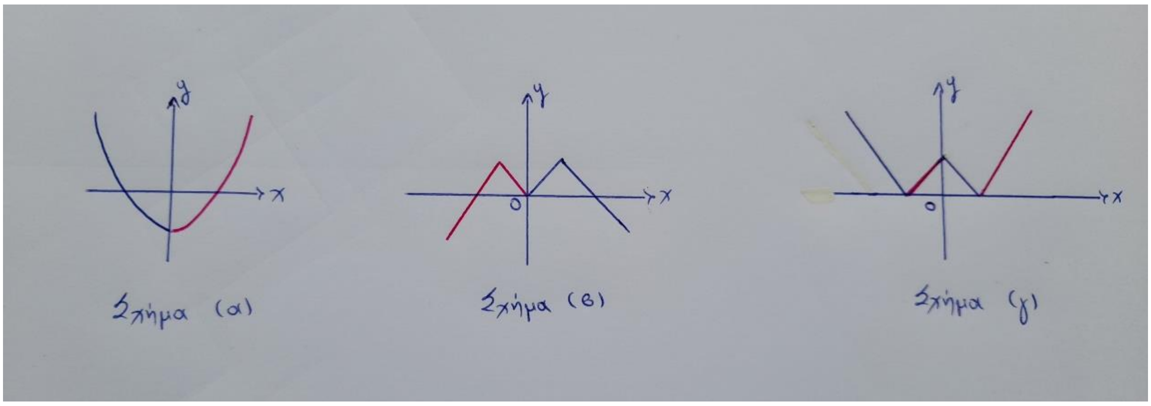
Προκειμένου να εξετάσουμε μια συνάρτηση και να διαπιστώσουμε, αν είναι άρτια ή περιττή, εξετάζουμε ως προς τι είναι συμμετρική. Μια άρτια συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, ενώ μια περιττή συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων O(0,0). Άρα, με βάση τις δοθείσες γραφικές παραστάσεις, συμπεραίνουμε ότι:

- Η f είναι άρτια.
- Η g είναι περιττή.
- Η h δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.
- Η φ είναι περιττή.
- Η p δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.
- Η q είναι άρτια.

Άσκηση 9

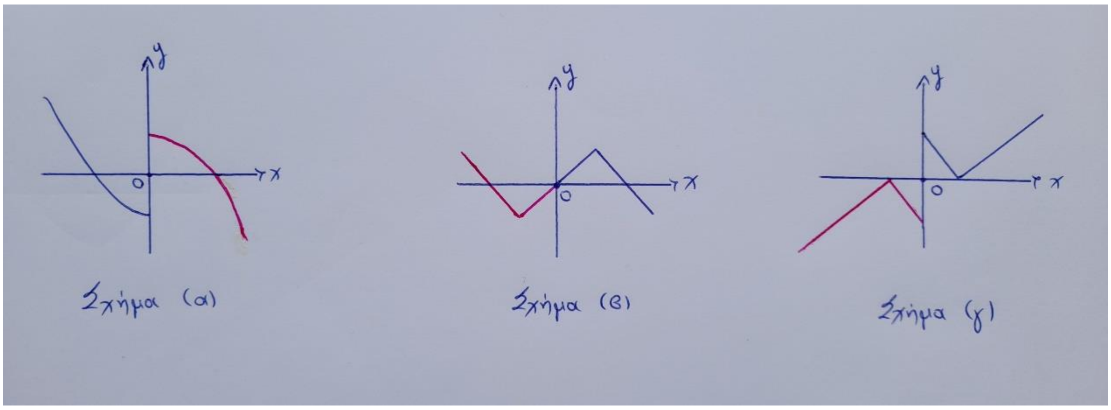
Μια συνάρτηση καλείται άρτια, όταν είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Οπότε:



Άσκηση 10

Μια συνάρτηση καλείται περιττή, όταν είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων O(0,0). Οπότε:



Κεφάλαιο 7 : Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

7.1 Μελέτη της Συνάρτησης $f(x) = ax^2$

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

α) Το σημείο Α ανήκει στην παραβολή, άρα θα την επαληθεύει. Επομένως:

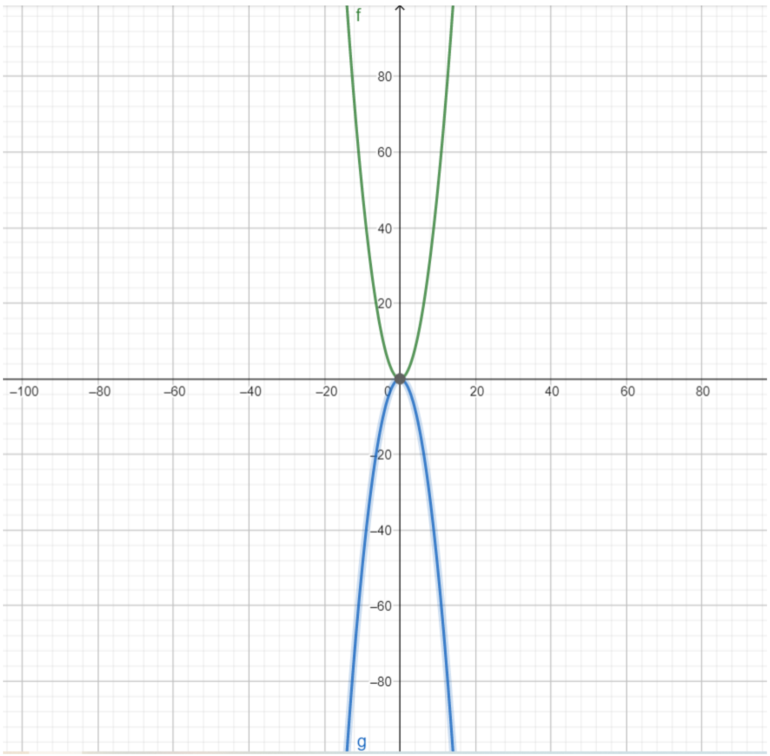
$$y = ax^2 \overset{A(1,3)}{\Longleftrightarrow} 3 = a * 1 \Leftrightarrow a = 3 \Leftrightarrow y = 3x^2$$

β) Το σημείο Α ανήκει στην παραβολή, άρα θα την επαληθεύει. Επομένως:

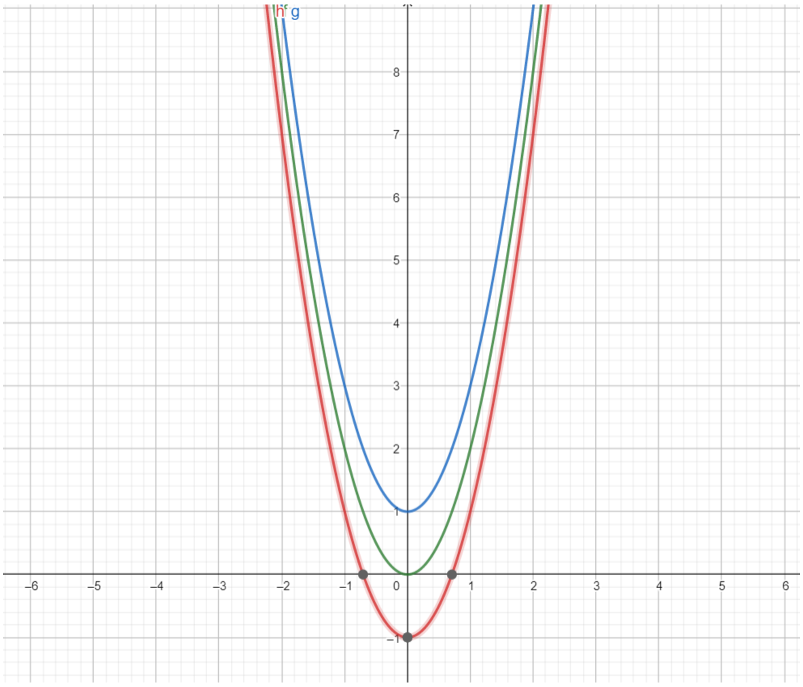
$$y = ax^2 \overset{A(2,-1)}{\Longleftrightarrow} -1 = a * 4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x^2$$

Άσκηση 2

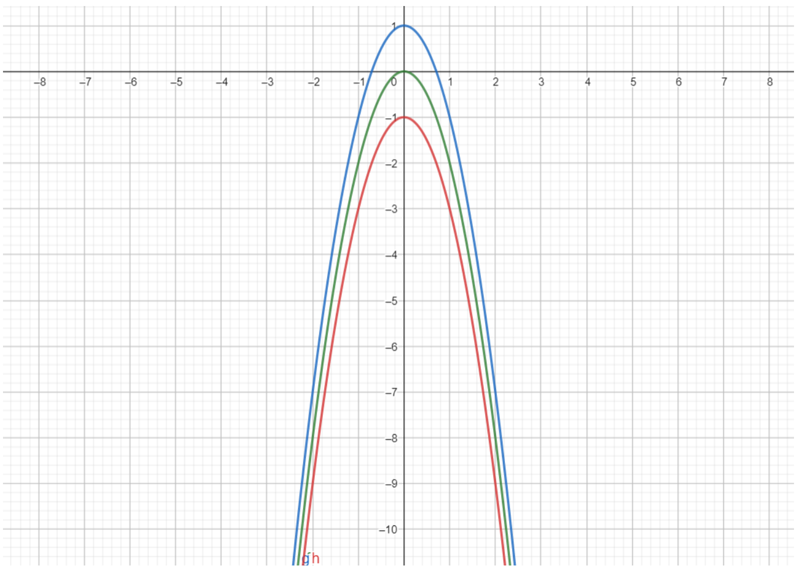
α)



β)

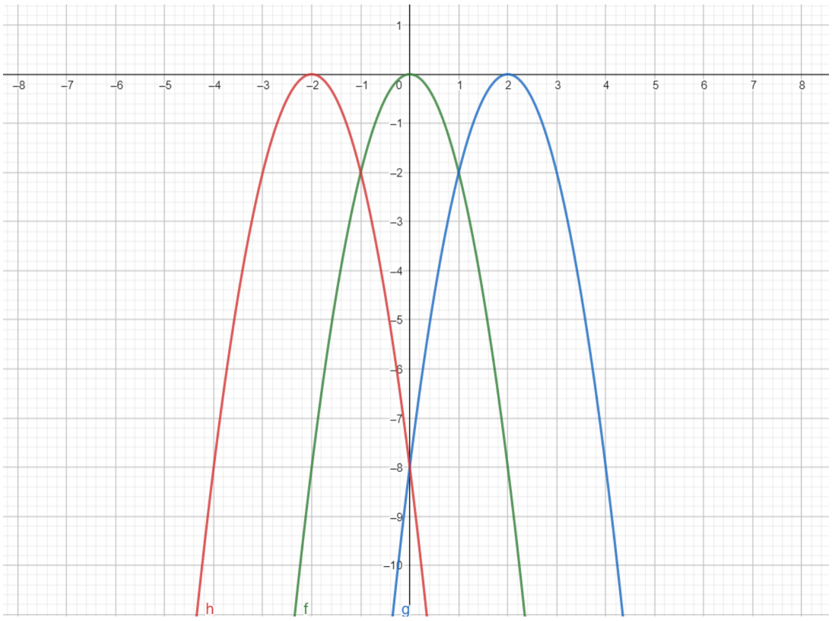

h
f
g
8
7
6
5
4
3
2
1
–6
–5
–4
–3
–2
–1
0
1
2
3
4
5
6
–1

γ)


1
–8
–7
–6
–5
–4
–3
–2
–1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
–1
–2
–3
–4
–5
–6
–7
–8
–9
–10
g
h

δ)

ε)

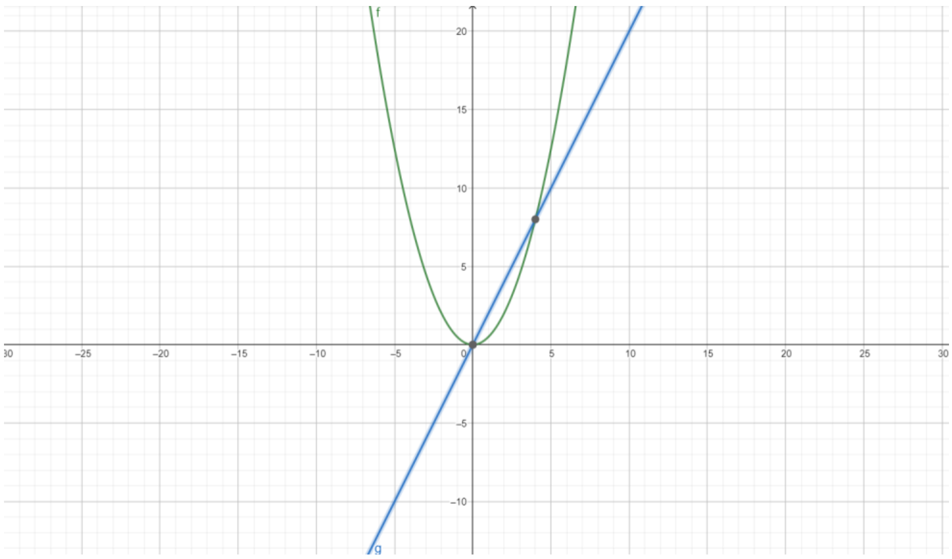


στ)


f
g
h
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1

Άσκηση 3

α)


f
g
20
15
10
5
−5
−10
−30
−25
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30

β) i) Πρόκειται για τα σημεία στα οποία οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται. Άρα: $A(0,0)$ $και$ $B(4,8)$.

ii) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ Αυτό ισχύει για εκείνα τα σημεία όπου η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από αυτήν της g. Άρα:

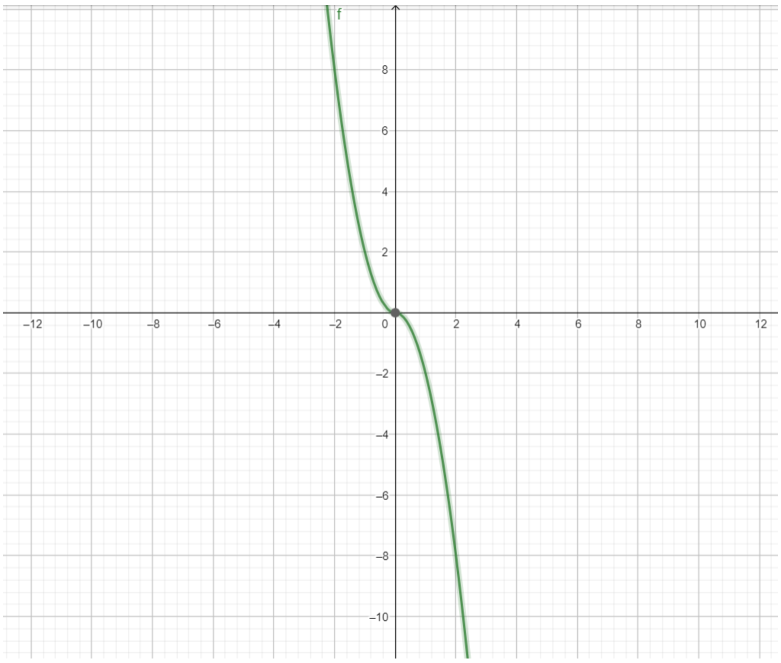
$x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

γ) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow$

2 σημεία τομής: $A(0,0)$ $και$ $B(4,8)$.

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x > 0 \Rightarrow$ Το τριώνυμο έχει θετικό πρόσημο στα διαστήματα εκτός των ριζών του, άρα: $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

Άσκηση 4



Άσκηση 5

α)

β) Το πρώτο τμήμα της f, δηλαδή η $-2x$ είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της. Από την άλλη πλευρά, το δεύτερο τμήμα της, δηλαδή η $2x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Το μοναδικό της ακρότατο παρουσιάζεται στο σημείο $O(0,0)$ και μάλιστα είναι ολικό ελάχιστο.

Άσκηση 6

Γνωρίζουμε ότι, αν ο συντελεστής α είναι θετικός, τότε η παραβολή είναι με τα κοίλα προς τα άνω, ενώ αν είναι αρνητικός, η παραβολή είναι με τα κοίλα προς τα κάτω. Επίσης, ξέρουμε ότι όσο μεγαλύτερος κατ' απόλυτη τιμή είναι ο συντελεστής α τόσο πιο κλειστή είναι η παραβολή, καθώς «τρέχει» γρηγορότερα προς το άπειρο.

Δεδομένων των παραπάνω, προκύπτει η παρακάτω αντιστοίχιση:

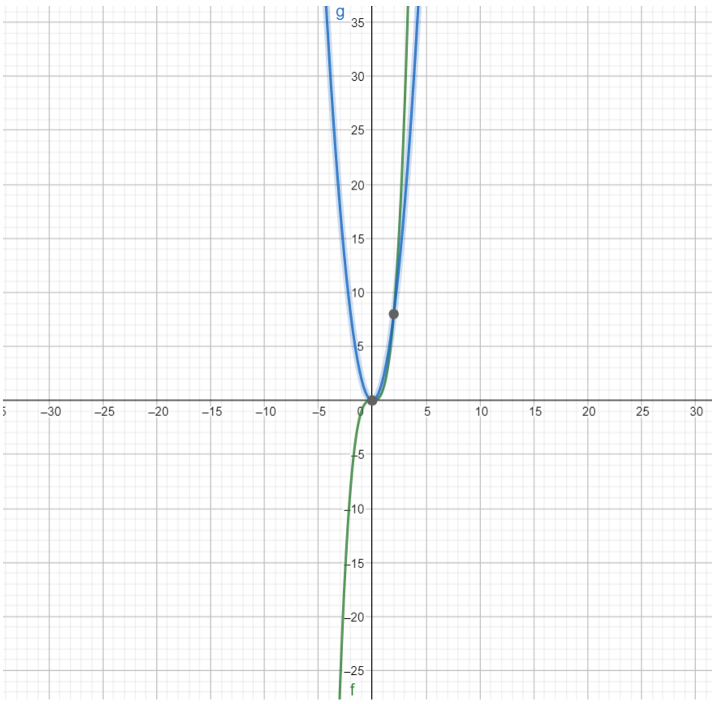
$f(x) - C_2$

$g(x) - C_1$

$h(x) - C_3$

$\varphi(x) - C_4$

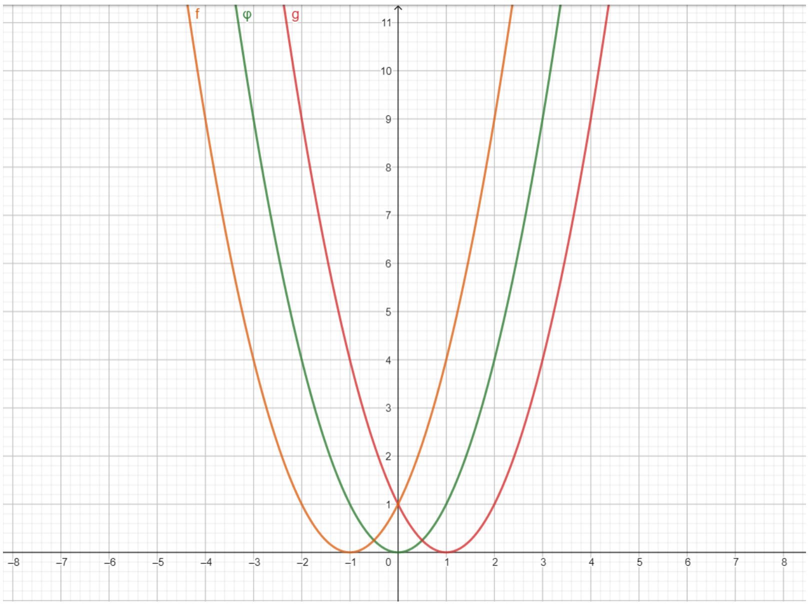
Άσκηση 7



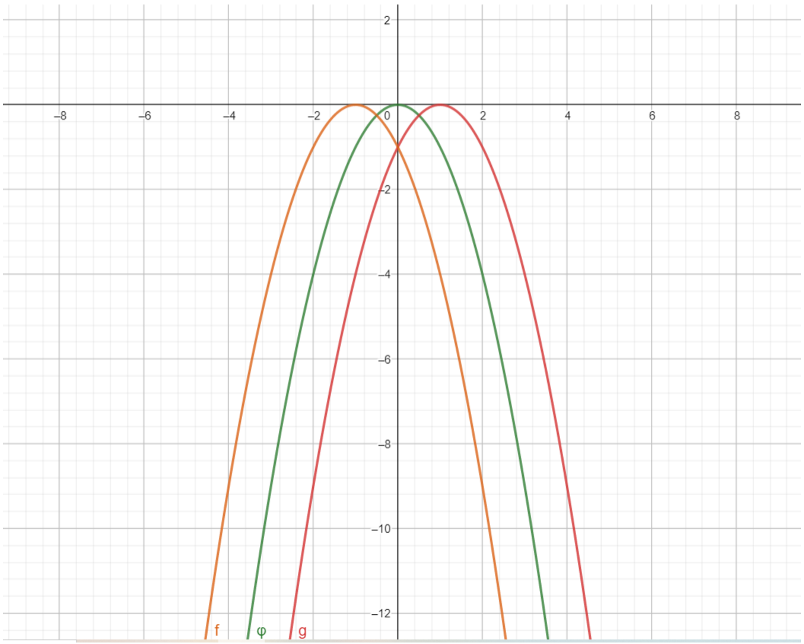
$f(x) < g(x) \Leftrightarrow$ Σύμφωνα με τις γραφικές τους παραστάσεις, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ βρίσκεται κάτω από αυτήν της $g(x)$ για όλα εκείνα τα σημεία που προηγούνται του δεύτερου σημείου τομής τους, το $A(2,8)$. Δηλαδή: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$.

Άσκηση 8

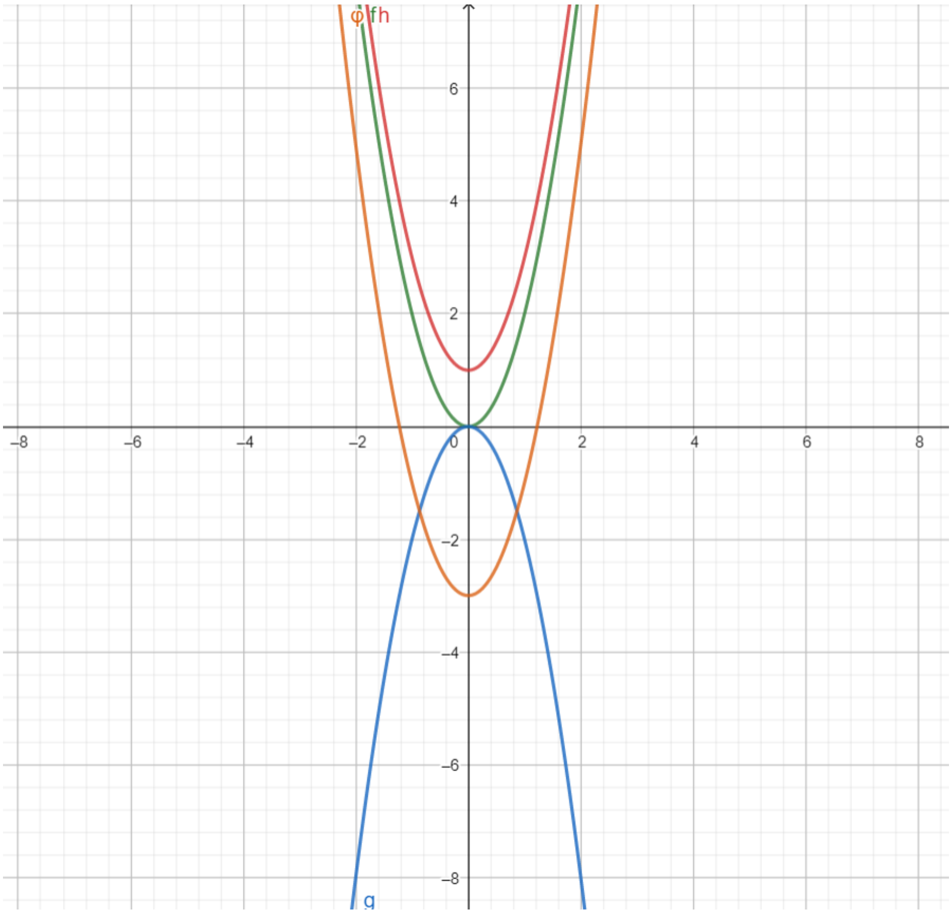
α)



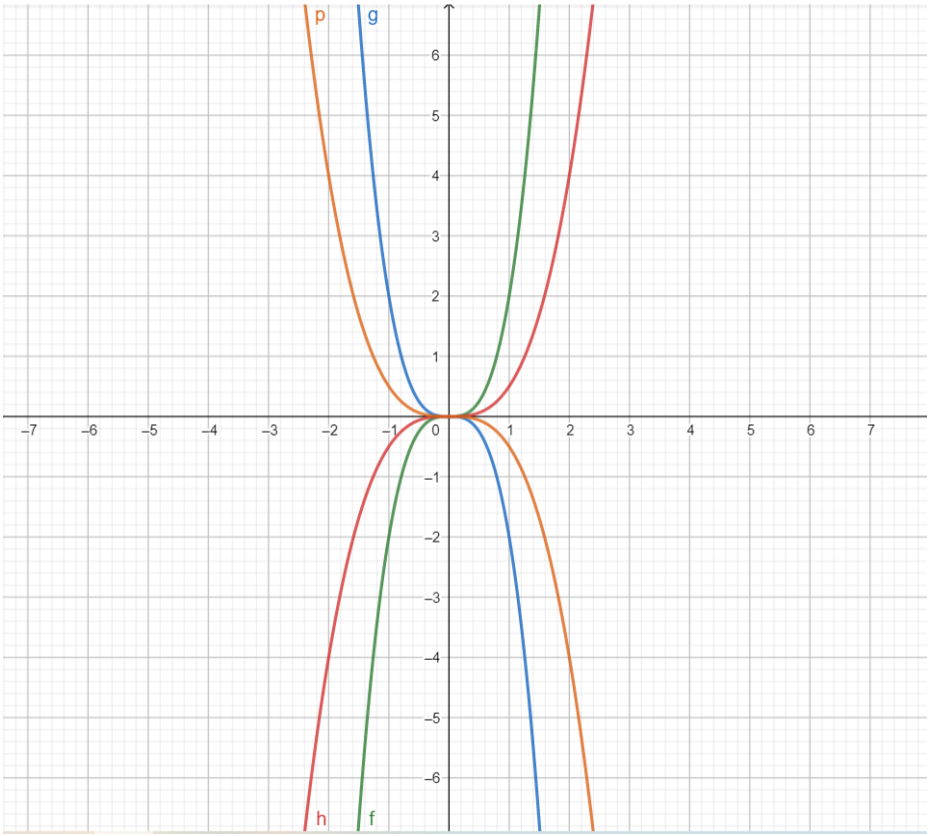
β)



Άσκηση 9

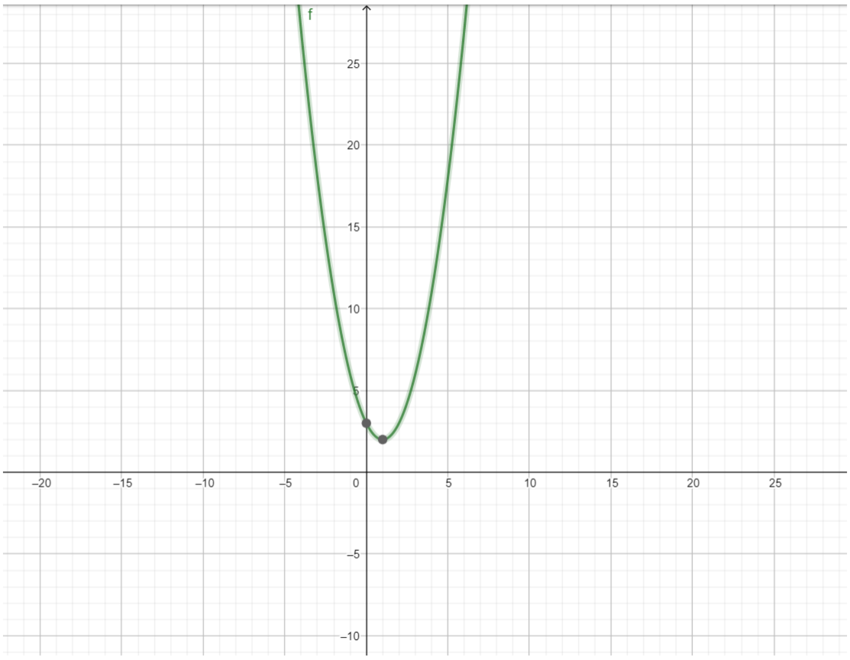


Άσκηση 10

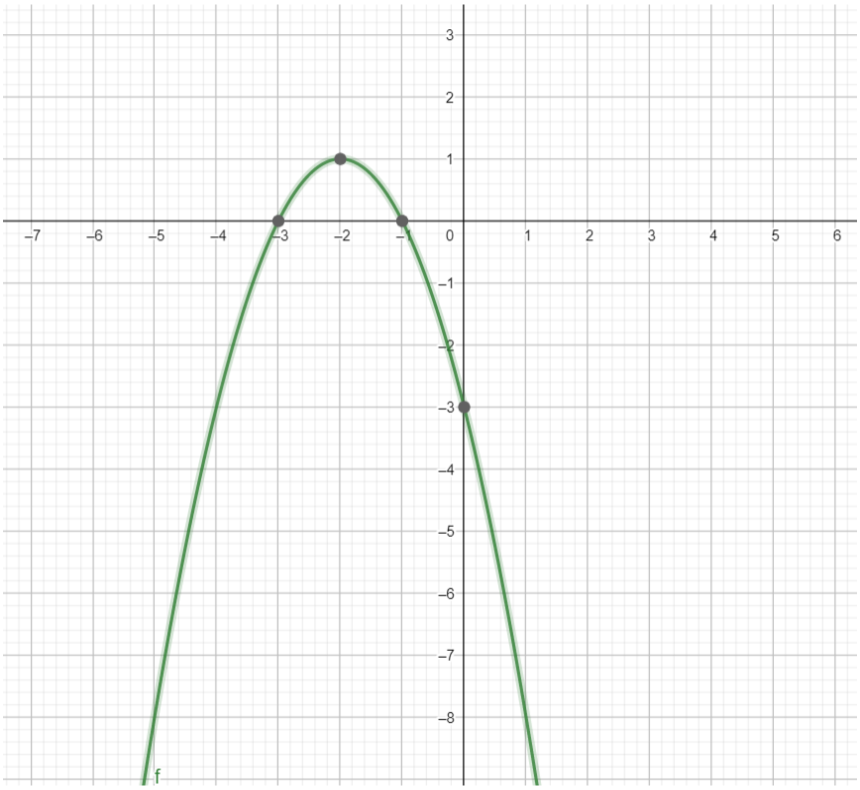


Άσκηση 11

α)

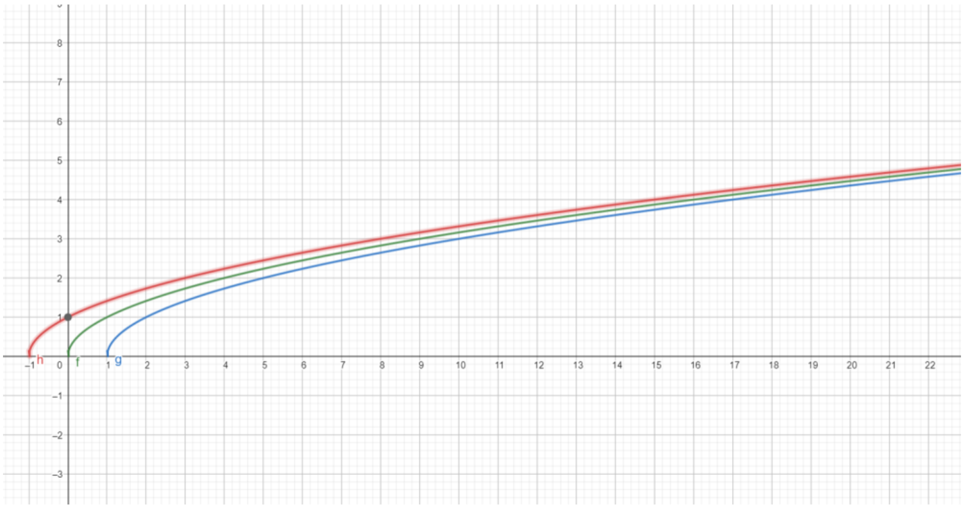

f
25
20
15
10
5
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20
25
−5
−10

β)

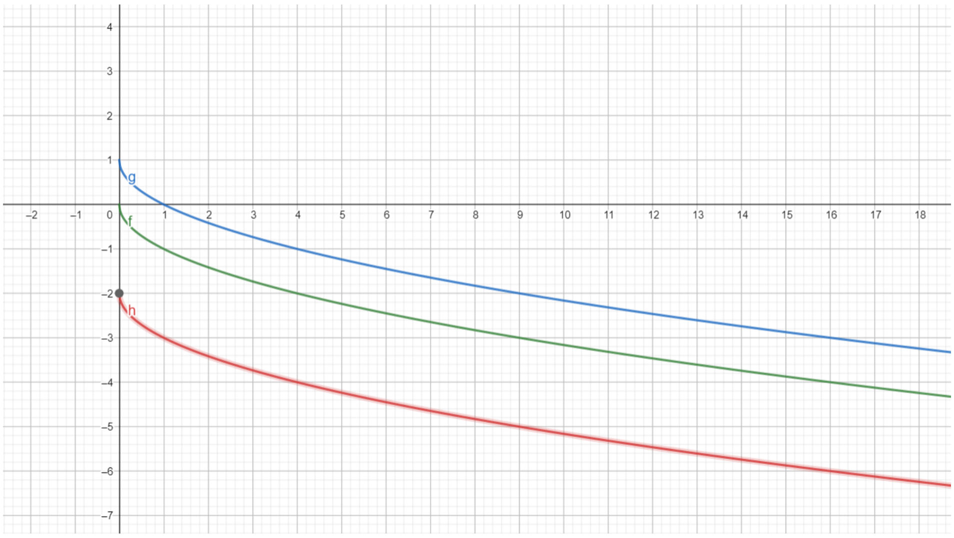

3
2
1
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
f

Άσκηση 12

α)

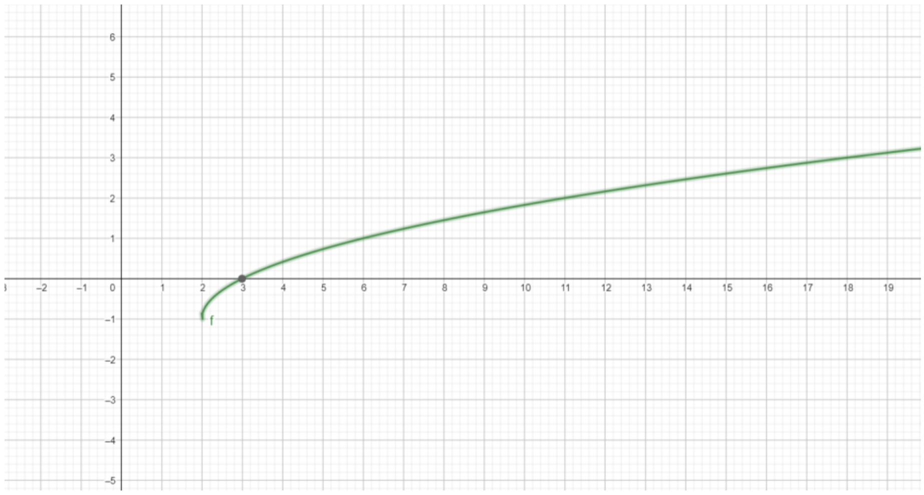


β)

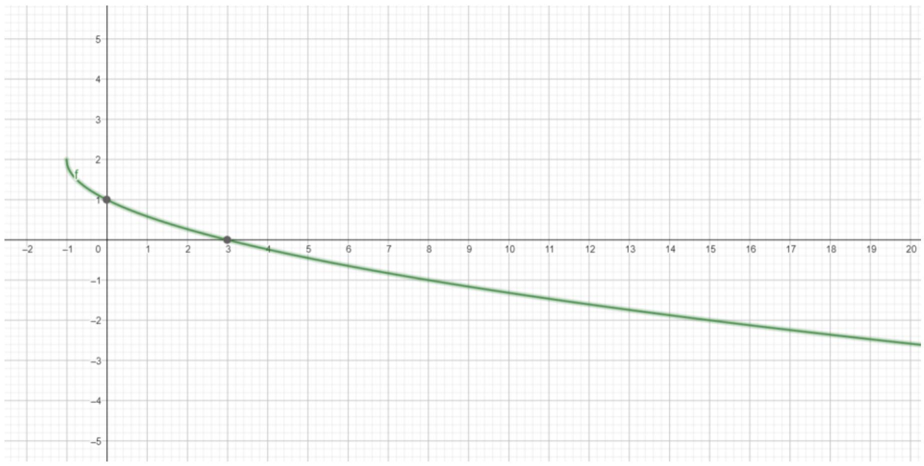


Άσκηση 13

α)

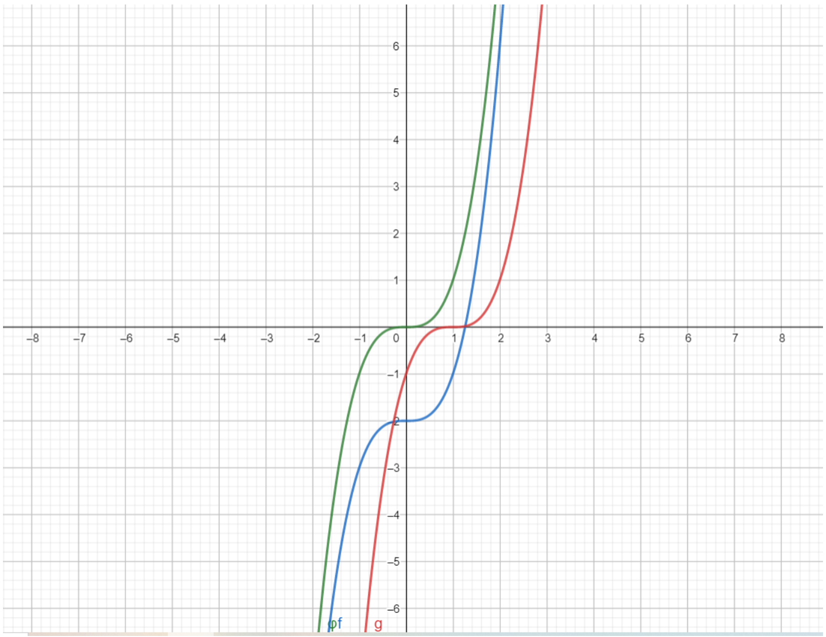


β)



Άσκηση 14

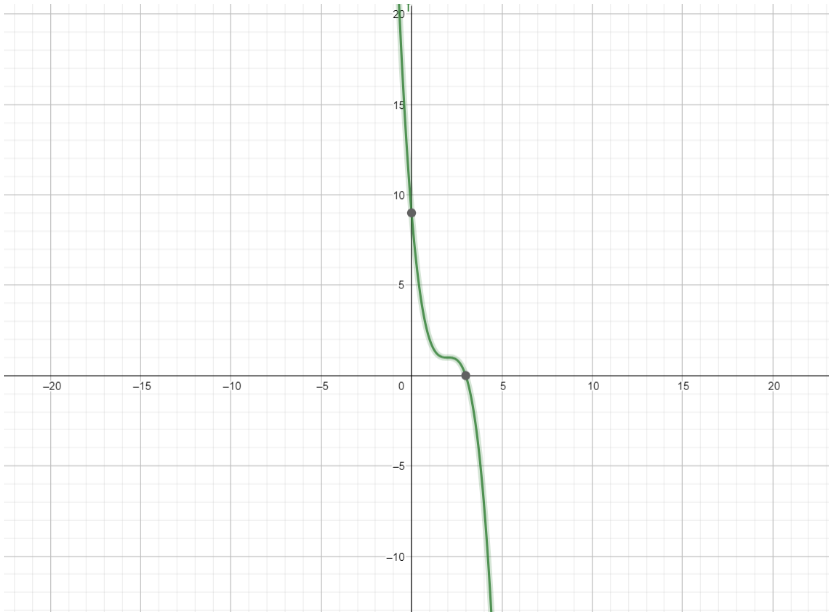
α)



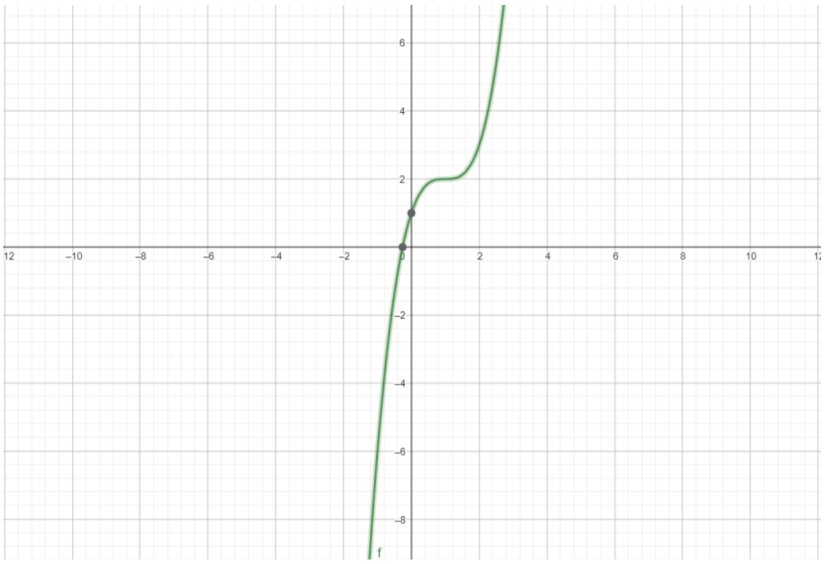
β)

Άσκηση 15

α)



β)



Άσκηση 16

$2x + 1 - \lambda < x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + \lambda - 1 > 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(\lambda - 1) = -4\lambda$

Θέλουμε η δοθείσα ευθεία να βρίσκεται εξολοκλήρου κάτω από την παραβολή, συνεπώς θέλουμε το τριώνυμο να είναι πάντα θετικό. Αρκεί η διακρίνουσά του να είναι πάντα αρνητική, άρα $\lambda > 0$.

Άσκηση 17

α) $f(x) = ax^2 \overset{A(-2,4)\in f}{\Longleftrightarrow} 4 = 4a \Leftrightarrow a = 1$

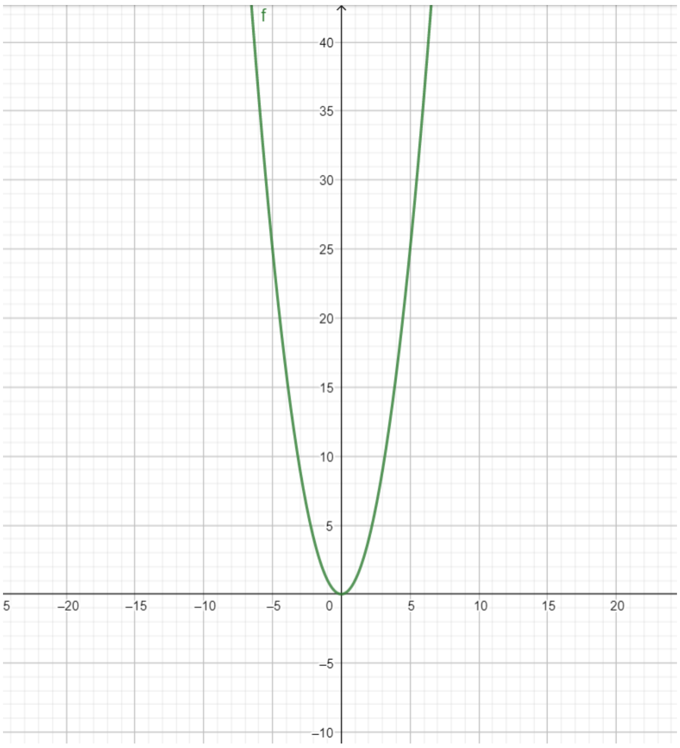
β) Η f είναι παραβολή με τα κοίλα προς τα άνω, αφού ο συντελεστής $\alpha > 0$.

Άρα, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

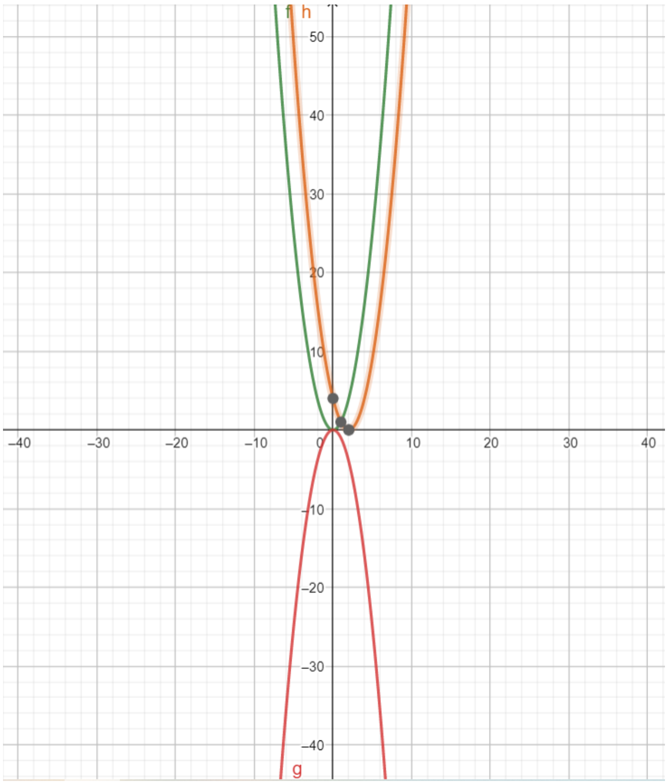
γ) Εφόσον η μονοτονία της αλλάζει μόνο μία φορά, θα έχει μόνο ένα ακρότατο, το 0 στη θέση $x = 0$, το οποίο μάλιστα είναι ολικό ελάχιστο.

δ) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \Rightarrow$ Η συνάρτηση είναι άρτια.

ε)

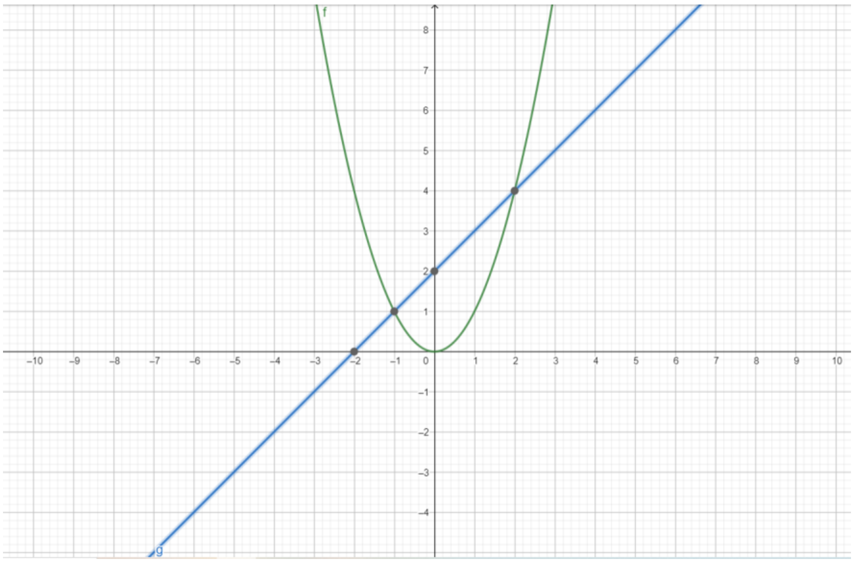


στ)



Άσκηση 18

α)



β) Από το σχήμα προκύπτουν τα εξής κοινά σημεία:

$$A(-2,0),\ \ B(-1,1),\ \ \Gamma(0,2)\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \Delta(2,4).$$

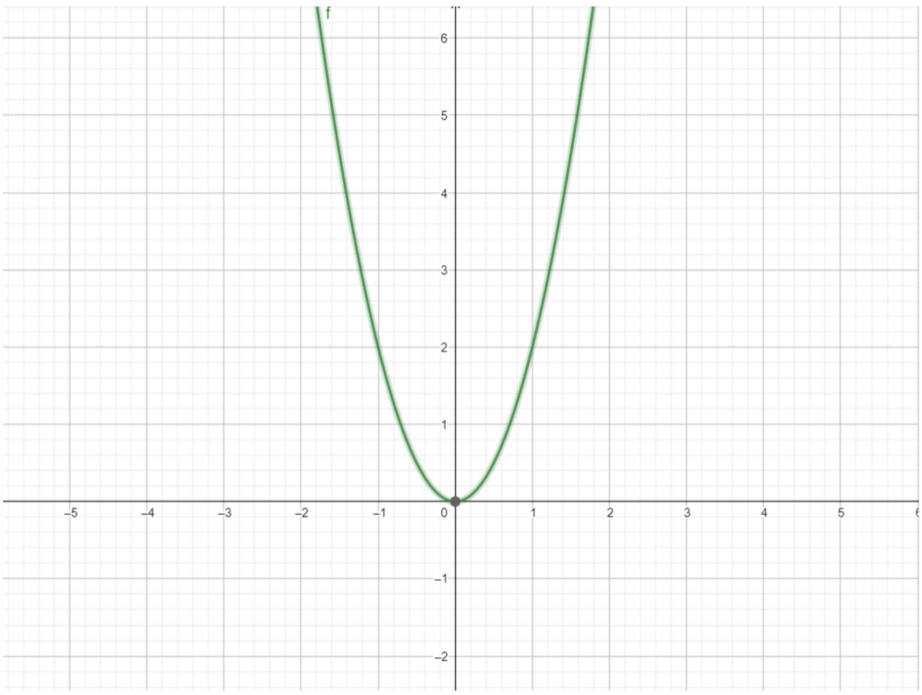
γ) Αναζητούμε τα σημεία εκείνα για τα οποία η παραβολή βρίσκεται κάτω από την ευθεία. Αυτό συμβαίνει για $x \in (-1,2)$.

Άσκηση 19

α) $f(x) = (a^2 - 6a + 11)x^2 \xLeftrightarrow{M(-3,18)} 18 = 9(a^2 - 6a + 11) \Leftrightarrow a^2 - 6a + 11 = 2$

$\Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Leftrightarrow (a-3)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 3$

β) $f(x) = (9 - 18 + 11)x^2 \Rightarrow f(x) = 2x^2$



7.2 Μελέτη της Συνάρτησης $f(x)=\frac{a}{x}$

Ασκήσεις για Διδασκαλία

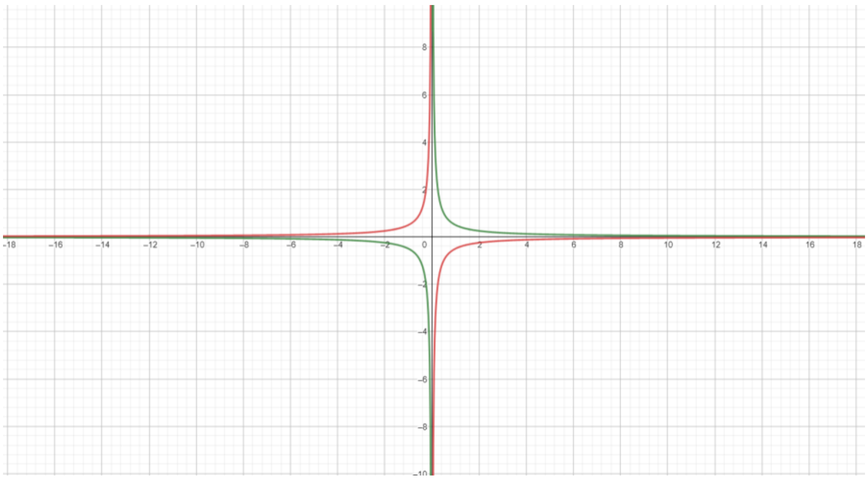
Άσκηση 1

α) $f(x)=\frac{a}{x} \xLeftrightarrow{A(3,1)\in f} 1=\frac{a}{3} \Leftrightarrow a=3 \Rightarrow f(x)=\frac{3}{x}$

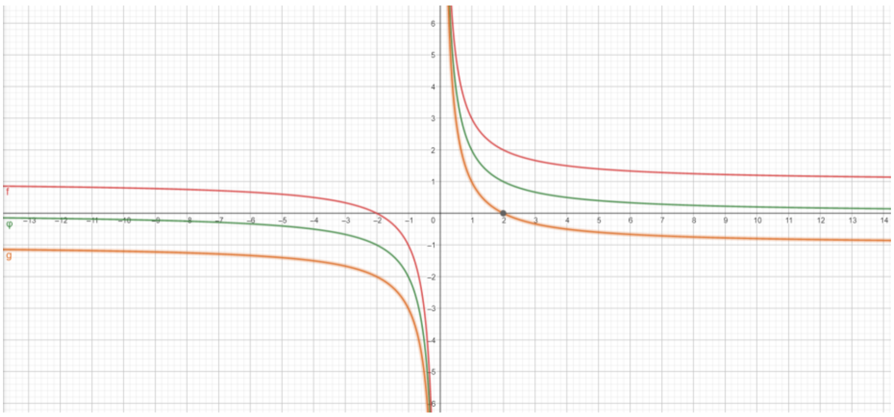
β) $f(x)=\frac{a}{x} \xLeftrightarrow{A(2,-1)\in f} -1=\frac{a}{2} \Leftrightarrow a=-2 \Rightarrow f(x)=-\frac{2}{x}$

Άσκηση 2

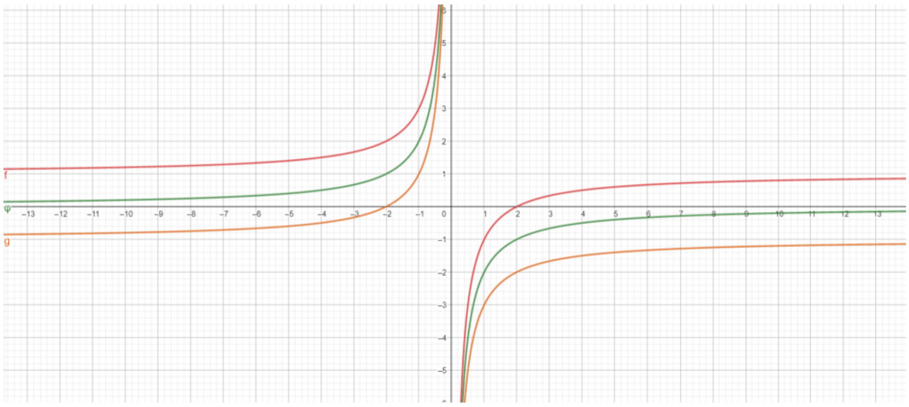
α)



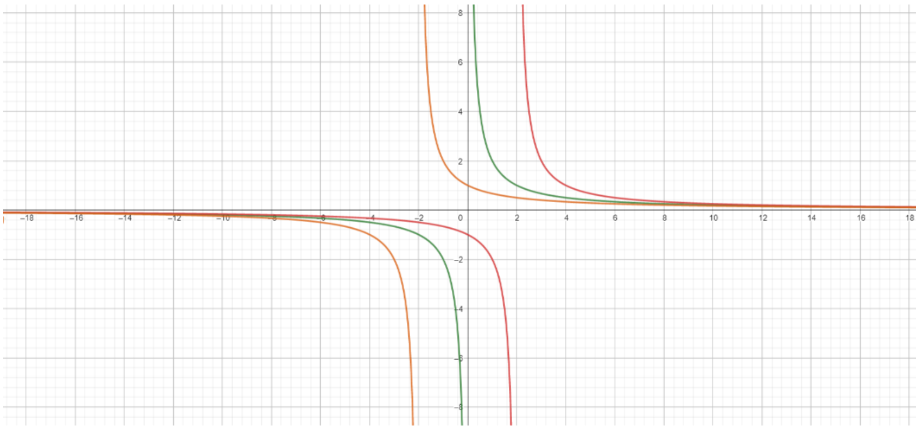
β)



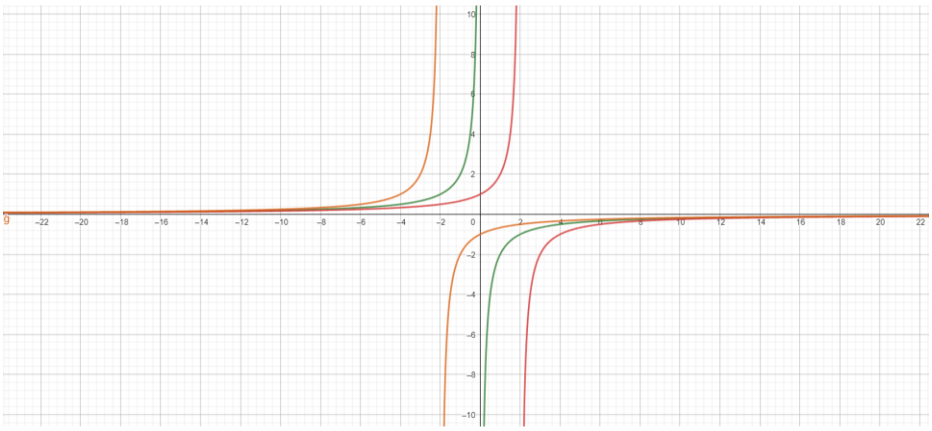
γ)



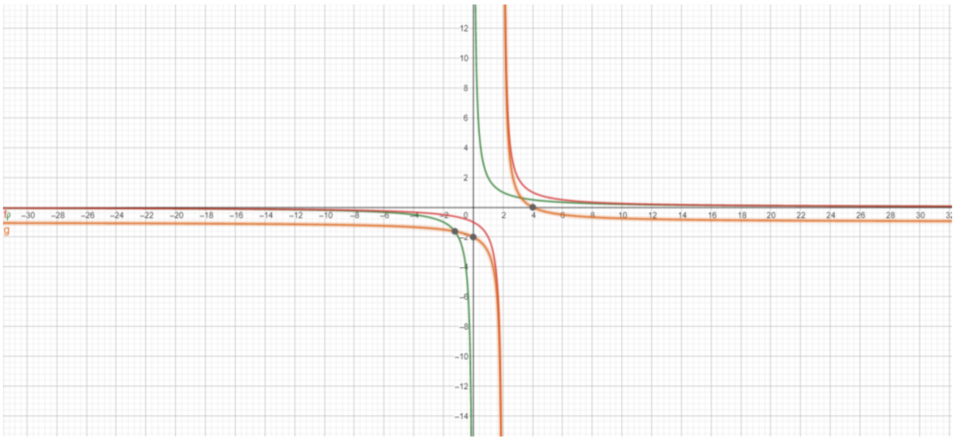
δ)



ε)

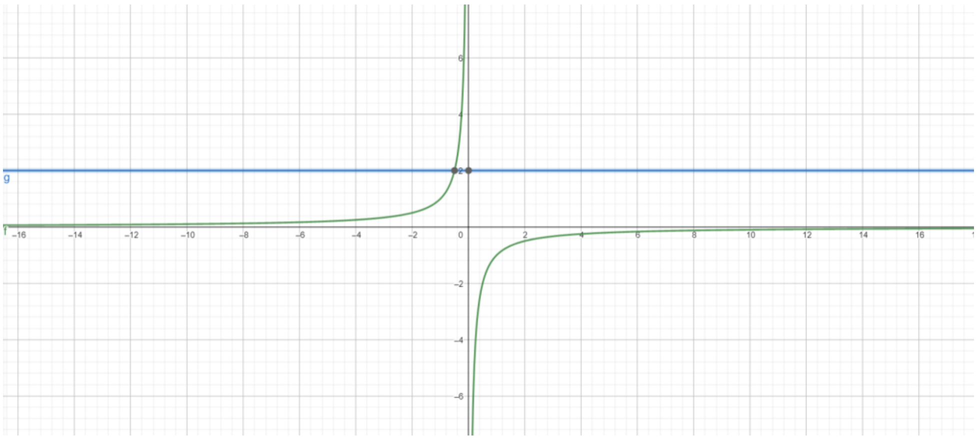


στ)



Άσκηση 3

α)



β) i) Υπάρχει μόνο ένα σημείο τομής των δύο συναρτήσεων, το $A\left(-\frac{1}{2},2\right)$.

ii) Αναζητούμε τα σημεία για τα οποία η υπερβολή βρίσκεται κάτω από την ευθεία. Συνεπώς, σύμφωνα με το σχήμα προκύπτει:

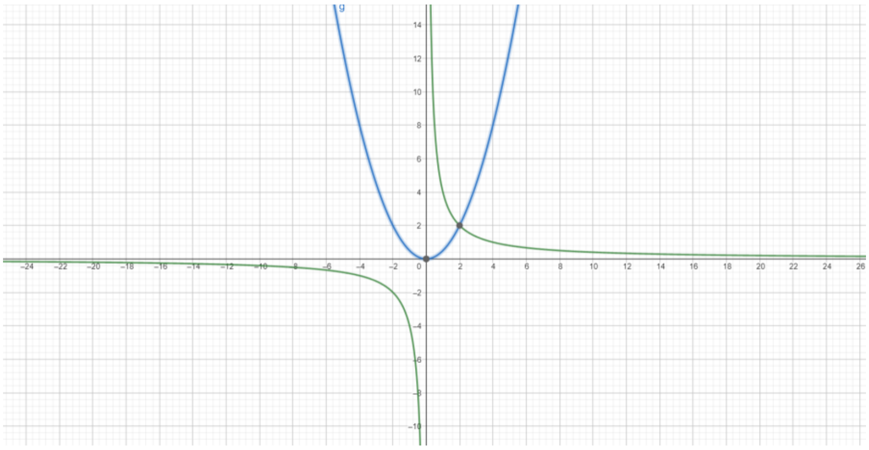
$x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup (0,+\infty)$.

γ) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$f(x) < g(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

Άσκηση 4

α)



β) i) Υπάρχει μόνο ένα σημείο τομής των δύο συναρτήσεων, το $A(2, 2)$.

ii) Αναζητούμε τα σημεία για τα οποία η υπερβολή βρίσκεται κάτω από την παραβολή. Συνεπώς, σύμφωνα με το σχήμα προκύπτει:

$$x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty).$$

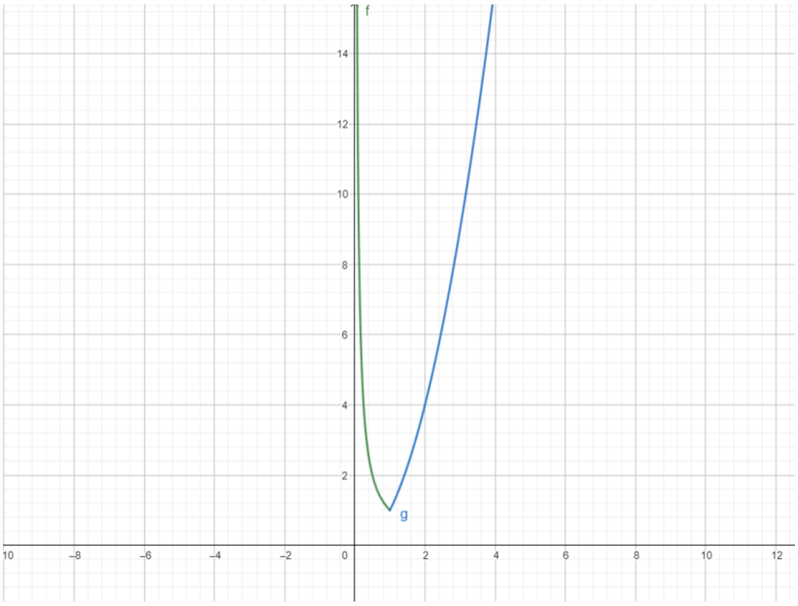
γ) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{4}{x} = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 2).$

$f(x) < g(x) \Leftrightarrow \frac{4}{x} < \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^3 > 8 \Leftrightarrow x > 2$

Προφανώς για όλα τα αρνητικά x η υπερβολή βρίσκεται κάτω από την παραβολή, αφού η $g(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5

α)



β) Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα για το πρώτο τμήμα της, δηλαδή για την υπερβολή και γνησίως αύξουσα για το δεύτερο κομμάτι της, δηλαδή την παραβολή. Επομένως, εφόσον αλλάζει μόνο μία φορά μονοτονία θα έχει και ένα ακρότατο, το 1 στη θέση $x = 1$, το οποίο μάλιστα είναι ολικό ελάχιστο.

Άσκηση 6

Η απόλυτη τιμή του συντελεστή α μας δείχνει πόσο μακριά απέχει η υπερβολή από την αρχή των αξόνων. Άρα, γνωρίζοντας αυτό συμπεραίνουμε ότι:

$f(x) : C_2$

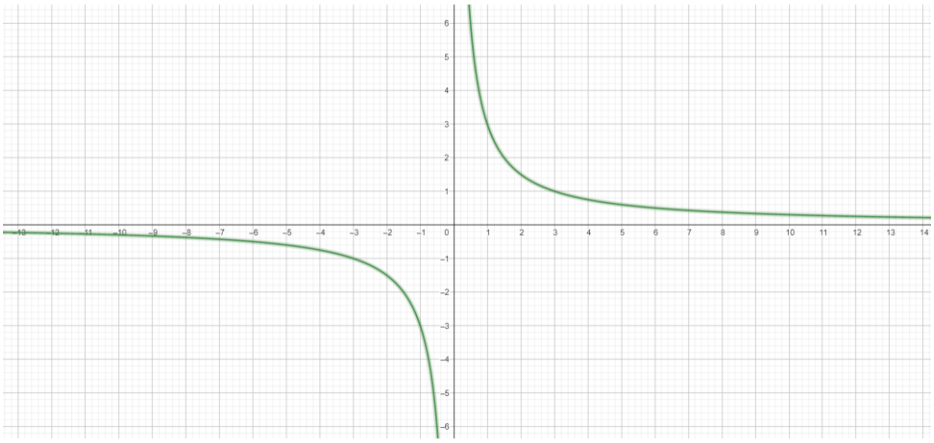
$g(x) : C_4$

$h(x) : C_3$

$\varphi(x) : C_1$

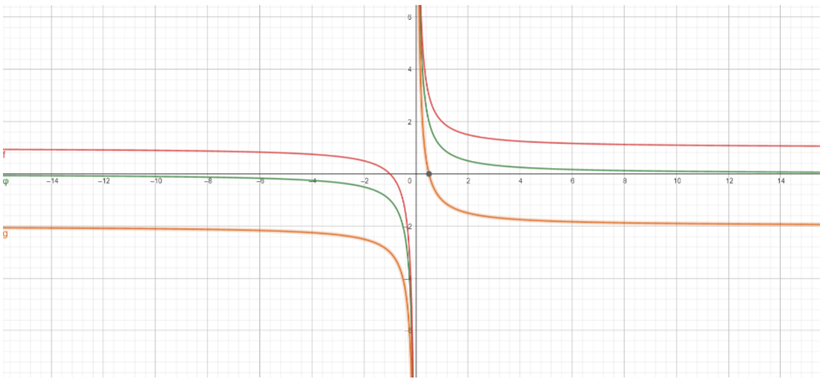
Άσκηση 7

$E = 3 \Leftrightarrow xy = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x}$, $\mu\varepsilon\ x \neq 0$

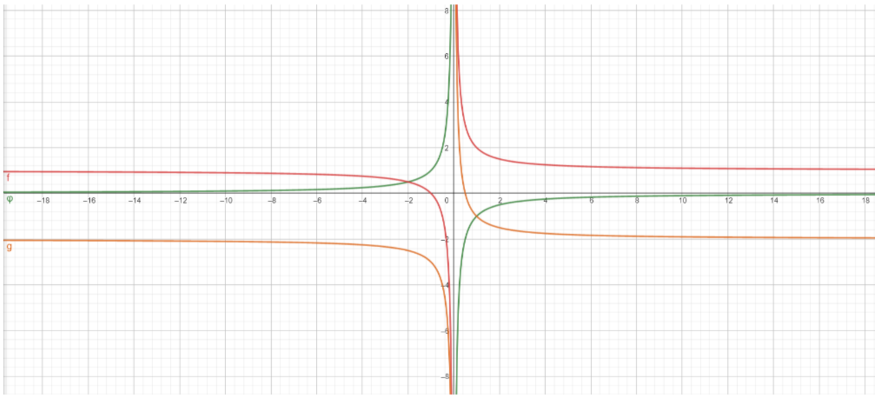


Άσκηση 8

α)

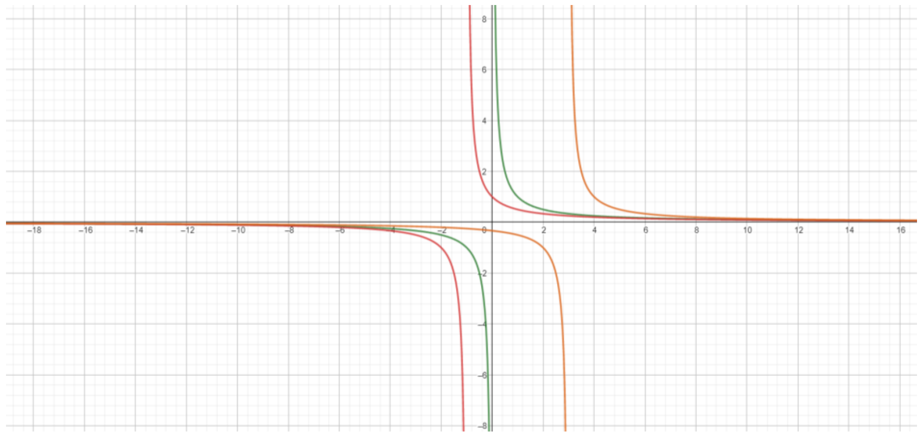


β)

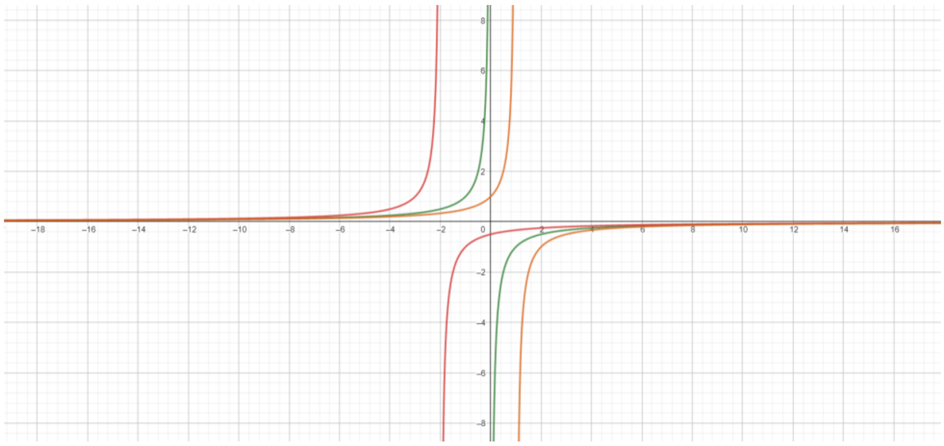


Άσκηση 9

α)

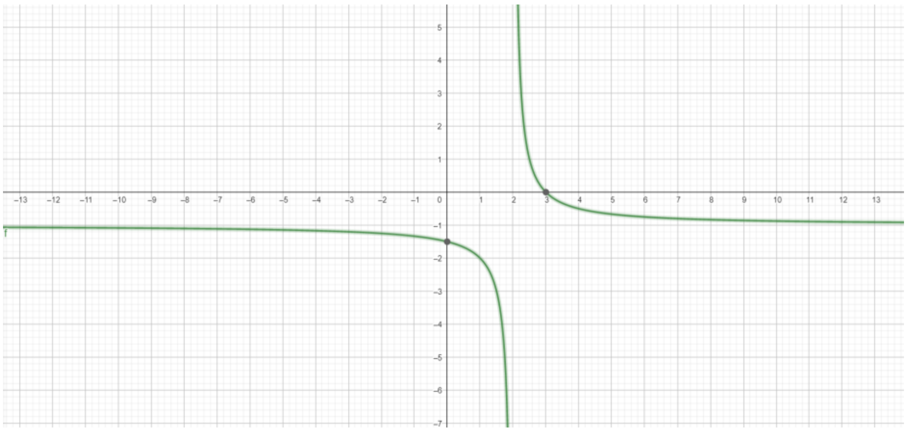


β)

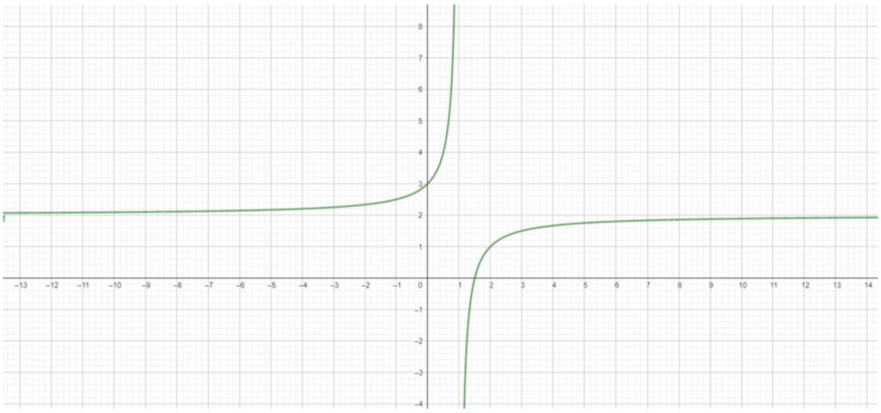


Άσκηση 10

α)

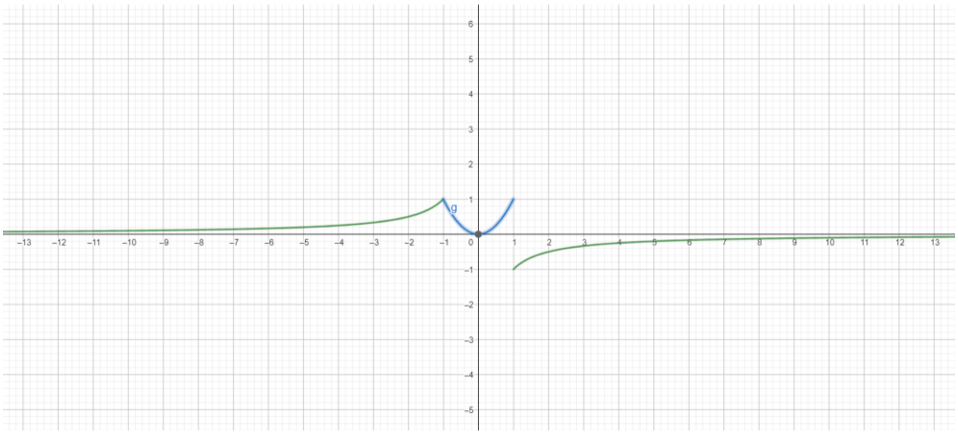


β)



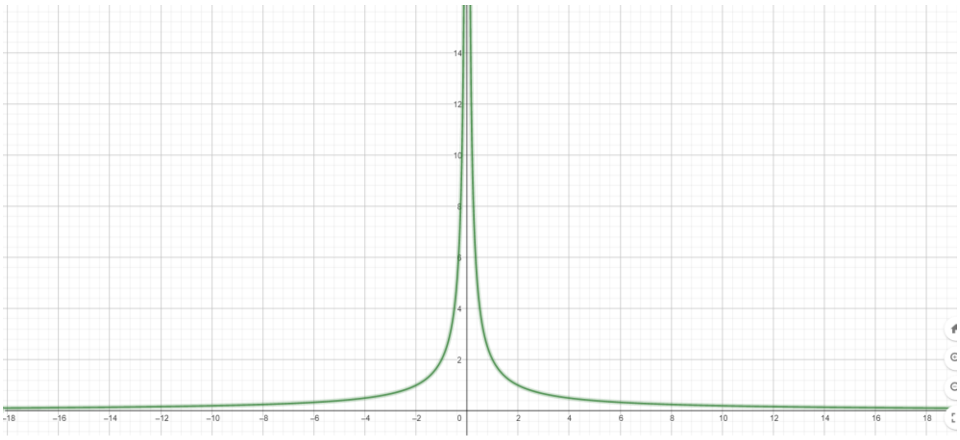
Άσκηση 11

α)



Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-1)$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,0]$ και τέλος γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$. Επομένως, η μονοτονία της αλλάζει δύο φορές, άρα έχει δύο ακρότατα, τα 1 και 0 στις θέσεις -1 και 0 αντίστοιχα, τα οποία είναι τοπικό μέγιστο και τοπικό ελάχιστο αντίστοιχα.

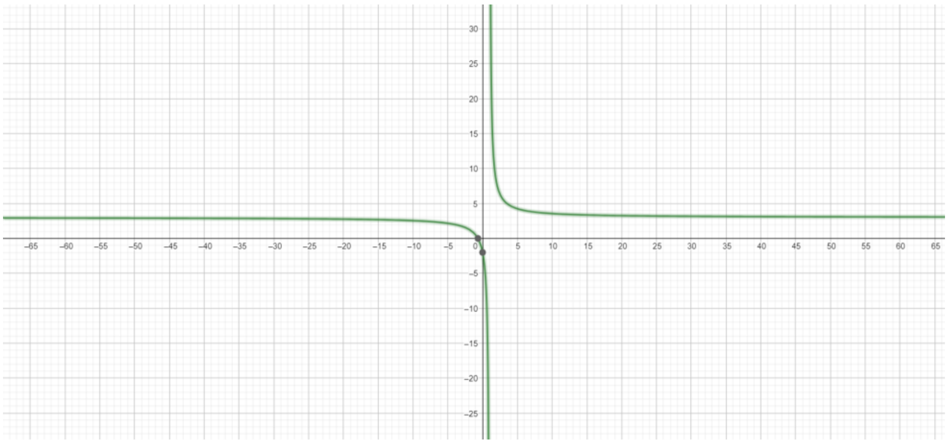
β)



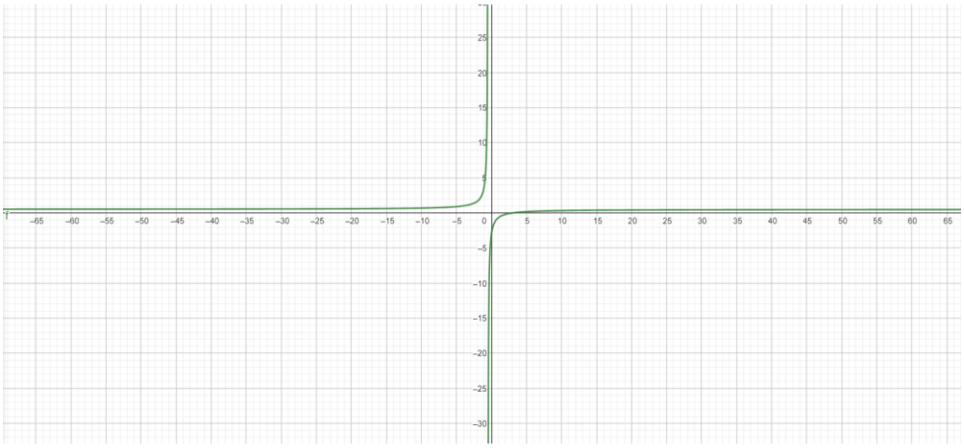
Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0)$ και γνησίως φθίνουσα αντίστοιχα στο $(0,+\infty)$. Ωστόσο, δεν έχει ακρότατο, διότι στη θέση 0 δεν ορίζεται.

Άσκηση 12

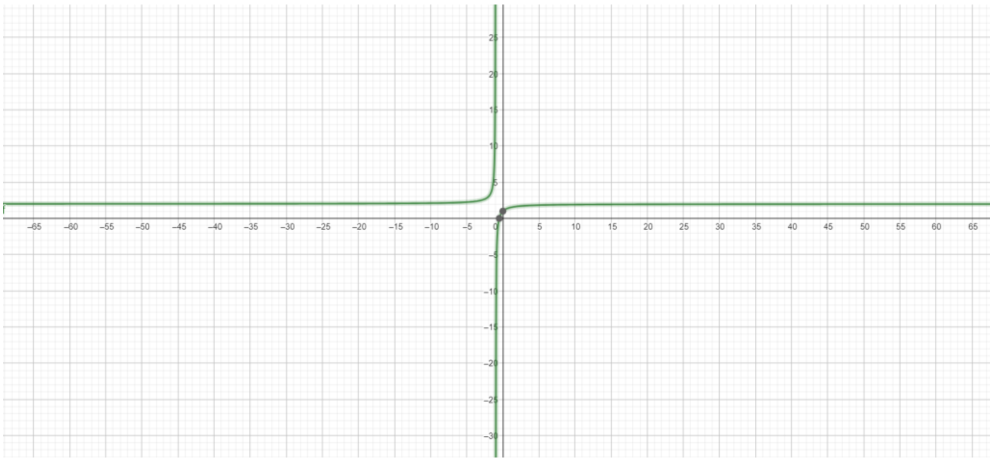
α)



β)



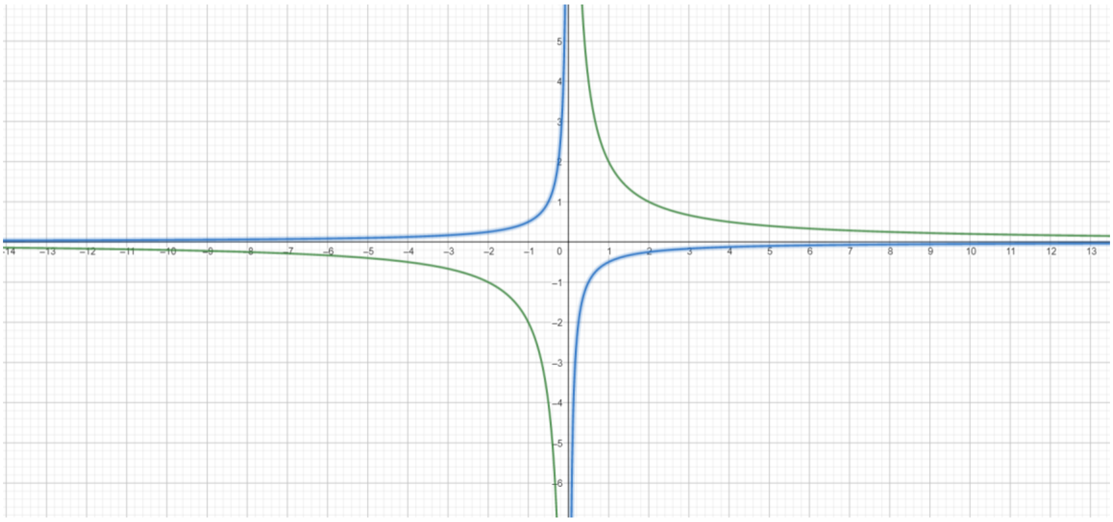
γ)



Άσκηση 13

$$f(x)=\frac{a}{x}\overset{A(1,2)\in f}{\Longleftrightarrow}2=\frac{a}{1}\Leftrightarrow a=2\Rightarrow f(x)=\frac{2}{x}$$

$$g(x)=\frac{a}{x}\overset{B\left(-1,\frac{1}{2}\right)\in g}{\Longleftrightarrow}\frac{1}{2}=\frac{a}{-1}\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2x}$$



7.3 Μελέτη της Συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1

$f(x) = a(x-p)^2 + q = ax^2 - 2apx + ap^2 + q$

α) $f(x) = x^2 + 10x + 8 \Rightarrow a = 1,\ p = -5,\ q = -13$

Άρα, $f(x) = (x+5)^2 - 13$ και είναι οριζόντια μετατόπιση της $f(x) = x^2$ κατά 5 μονάδες προς τα αριστερά και ύστερα κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω κατά 13 μονάδες.

β) $f(x) = -x^2 + 10x + 8 \Rightarrow a = -1,\ p = 5,\ q = 33$

Άρα, $f(x) = -(x-5)^2 + 33$ και είναι οριζόντια μετατόπιση της $f(x) = -x^2$ κατά 5 μονάδες προς τα δεξιά και ύστερα κατακόρυφη μετατόπιση προς τα πάνω κατά 33 μονάδες.

γ) $f(x) = 3x^2 - 12x + 13 \Rightarrow a = 3,\ p = 2,\ q = 1$

Άρα, $f(x) = 3(x-2)^2 + 1$ και είναι οριζόντια μετατόπιση της $f(x) = 3x^2$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και ύστερα κατακόρυφη μετατόπιση προς τα πάνω κατά 1 μονάδα.

δ) $f(x) = -2x^2 + x - 7 \Rightarrow a = -2,\ p = \frac{1}{4},\ q = -\frac{55}{8}$

Άρα, $f(x) = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{55}{8}$ και είναι οριζόντια μετατόπιση της $f(x) = -2x^2$ κατά $\frac{1}{4}$ μονάδες προς τα δεξιά και ύστερα κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω κατά $\frac{55}{8}$ μονάδες.

Άσκηση 2

α) $f(x) = x^2 + 6x + 1 \Rightarrow$ Καθώς ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι

θετικός, συνεπάγεται ότι η παραβολή έχει ελάχιστο, το οποίο από γνωστή θεωρία είναι ίσο με $-\frac{\Delta}{4\alpha} \Rightarrow -\frac{32}{4} = -8 \Rightarrow x^2 + 6x + 1 = -8 \Leftrightarrow$

$x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow$

Άρα, η παραβολή παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $A(-3, -8)$.

β) $f(x) = -x^2 + 6x + 1 \Rightarrow$ Καθώς ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι αρνητικός, συνεπάγεται ότι η παραβολή έχει μέγιστο, το οποίο από γνωστή θεωρία είναι ίσο με $-\frac{\Delta}{4\alpha} \Rightarrow -\frac{40}{-4} = 10 \Rightarrow -x^2 + 6x + 1 = 10 \Leftrightarrow$

$-x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow -(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow$

Άρα, η παραβολή παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $B(3, 10)$.

γ) $f(x) = 5x^2 - 20x + 3 \Rightarrow$ Καθώς ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι θετικός, συνεπάγεται ότι η παραβολή έχει ελάχιστο, το οποίο από γνωστή θεωρία είναι ίσο με $-\frac{\Delta}{4\alpha} \Rightarrow -\frac{340}{20} = -17 \Rightarrow 5x^2 - 20x + 3 = -17 \Leftrightarrow$

$5x^2 - 20x + 20 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow$

Άρα, η παραβολή παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $A(2, -17)$.

δ) $f(x) = -7x^2 + 14x - 5 \Rightarrow$ Καθώς ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι αρνητικός, συνεπάγεται ότι η παραβολή έχει μέγιστο, το οποίο από γνωστή θεωρία είναι ίσο με $-\frac{\Delta}{4\alpha} \Rightarrow -\frac{56}{-28} = 2 \Rightarrow -7x^2 + 14x - 5 = 2 \Leftrightarrow$

$-7x^2 + 14x - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$

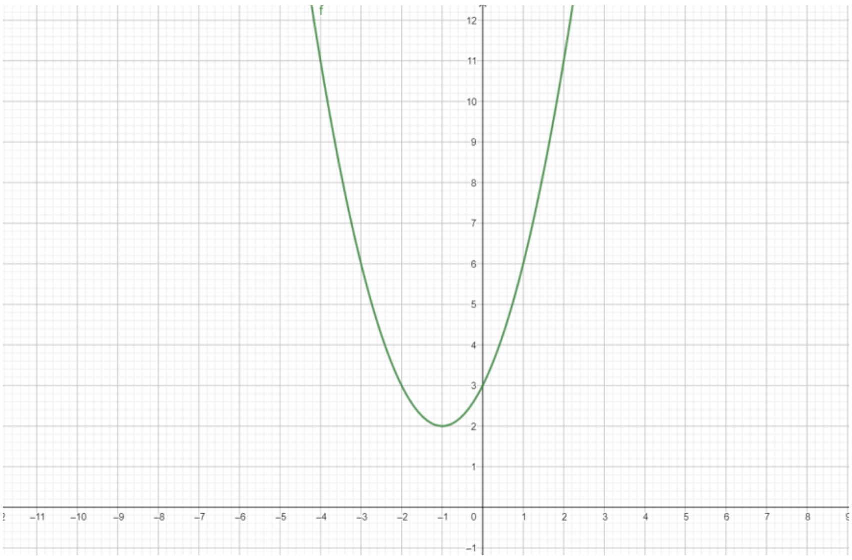
Άρα, η παραβολή παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $A(1, 2)$.

Άσκηση 3

$f(x) = a(x-p)^2 + q = ax^2 - 2apx + ap^2 + q$

α) $f(x) = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow a = 1,\ p = -1,\ q = 2$

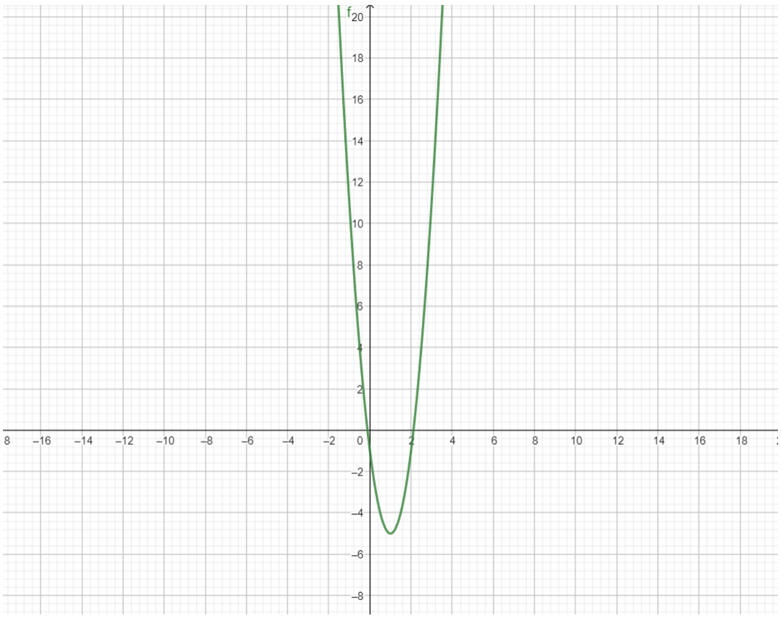
Άρα, $f(x) = (x+1)^2 + 2$ και είναι οριζόντια μετατόπιση της $f(x) = x^2$ κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και ύστερα κατακόρυφη μετατόπιση προς τα πάνω κατά 2 μονάδες.



Η παραβολή παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $A(-1, 2)$. Επομένως, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$.

β) $g(x) = 4x^2 - 8x - 1 \Rightarrow a = 4,\ p = 1,\ q = -5$

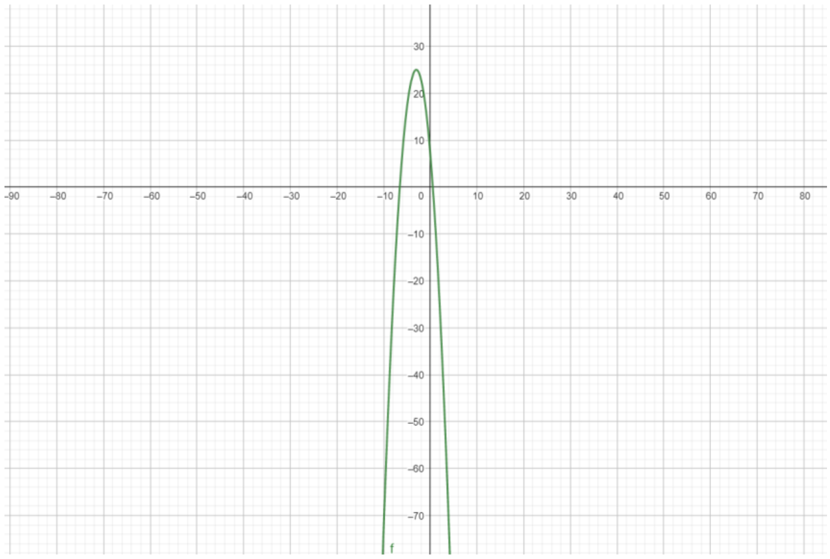
Άρα, $f(x) = 4(x-1)^2 - 5$ και είναι οριζόντια μετατόπιση της $f(x) = 4x^2$ κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και ύστερα κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω κατά 5 μονάδες.



Η παραβολή παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $A(1, -5)$. Επομένως, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1)$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

γ) $h(x) = -2x^2 - 12x + 7 \Rightarrow a = -2,\ p = -3,\ q = 25$

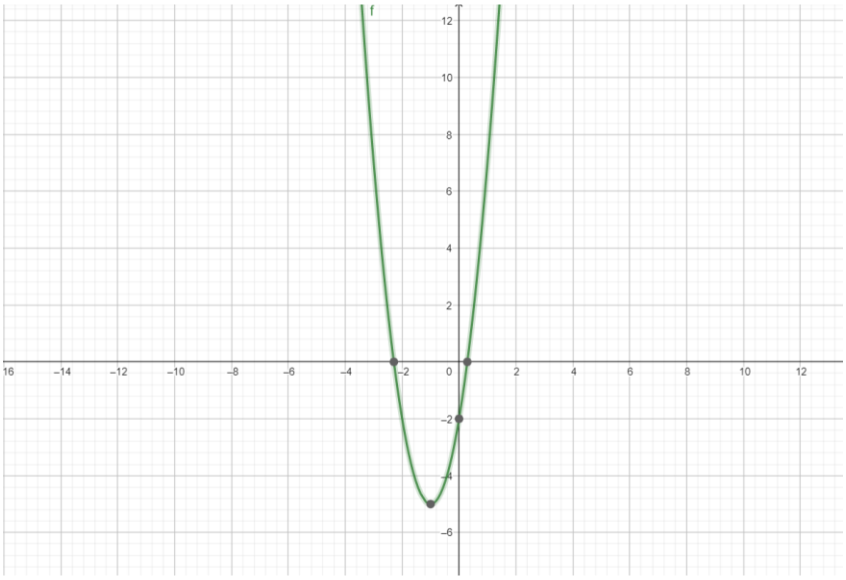
Άρα, $f(x) = -2(x+3)^2 + 25$ και είναι οριζόντια μετατόπιση της $f(x) = -2x^2$ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και ύστερα κατακόρυφη μετατόπιση προς τα πάνω κατά 25 μονάδες.



Η παραβολή παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $A(-3, 25)$. Επομένως, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -3)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-3, +\infty)$.

δ) $\varphi(x) = 3x^2 + 6x - 2 \Rightarrow a = 3,\ p = -1,\ q = -5$

Άρα, $f(x) = 3(x+1)^2 - 5$ και είναι οριζόντια μετατόπιση της $f(x) = 3x^2$ κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και ύστερα κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω κατά 5 μονάδες.



Η παραβολή παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $A(-1,-5)$. Επομένως, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-1)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$.

Άσκηση 4

α) $\begin{cases} \alpha > 0, \text{γιατί η παραβολή είναι με τα κοίλα προς τα άνω} \\ \beta > 0, \text{γιατί η κορυφή της έχει αρνητική τετμημένη} \\ \gamma > 0, \text{γιατί η παραβολή τέμνει το θετικό ημιάξονα } y'y \\ \Delta > 0, \text{γιατί η κορυφή έχει αρνητική τεταγμένη} \end{cases}$

β) $\begin{cases} \alpha > 0, \text{γιατί η παραβολή είναι με τα κοίλα προς τα άνω} \\ \beta < 0, \text{γιατί η κορυφή της έχει θετική τετμημένη} \\ \gamma > 0, \text{γιατί η παραβολή τέμνει το θετικό ημιάξονα } y'y \\ \Delta = 0, \text{γιατί η κορυφή έχει τεταγμένη ίση με το μηδέν} \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \alpha < 0, \text{γιατί η παραβολή είναι με τα κοίλα προς τα κάτω} \\ \beta = 0, \text{γιατί η κορυφή της έχει τετμημένη ίση με το μηδέν} \\ \gamma > 0, \text{γιατί η παραβολή τέμνει το θετικό ημιάξονα } y'y \\ \Delta < 0, \text{γιατί η κορυφή έχει θετική τεταγμένη} \end{cases}$

δ) $\begin{cases} \alpha < 0, \text{γιατί η παραβολή είναι με τα κοίλα προς τα κάτω} \\ \beta < 0, \text{γιατί η κορυφή της έχει θετική τετμημένη} \\ \gamma = 0, \text{γιατί η παραβολή διέρχεται την αρχή των αξόνων} \\ \Delta < 0, \text{γιατί η κορυφή έχει θετική τεταγμένη} \end{cases}$

ε) $\begin{cases} \alpha > 0, \text{γιατί η παραβολή είναι με τα κοίλα προς τα άνω} \\ \beta < 0, \text{γιατί η κορυφή της έχει θετική τετμημένη} \\ \gamma > 0, \text{γιατί η παραβολή τέμνει το θετικό ημιάξονα } y'y \\ \Delta < 0, \text{γιατί η κορυφή έχει θετική τεταγμένη} \end{cases}$

στ) $\begin{cases} \alpha < 0, \text{γιατί η παραβολή είναι με τα κοίλα προς τα κάτω} \\ \beta > 0, \text{γιατί η κορυφή της έχει αρνητική τετμημένη} \\ \gamma < 0, \text{γιατί η παραβολή τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα } y'y \\ \Delta > 0, \text{γιατί η κορυφή έχει αρνητική τεταγμένη} \end{cases}$

Άσκηση 5

$f(x) = x^2 + kx + k + 3$

α) Για να εφάπτεται η παραβολή στον άξονα $x'x$ πρέπει η κορυφή της να βρίσκεται πάνω στον άξονα, δηλαδή η τεταγμένη της να είναι ίση με μηδέν.

Άρα: $\Delta = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4(k+3) = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4k - 12 = 0 \Rightarrow$

$\Delta' = 16 + 48 = 64 \Rightarrow k_{1,2} \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow k_1 = 6,\ k_2 = -2 \Rightarrow$

Άρα: $f(x) = x^2 + 6x + 9$ ή $f(x) = x^2 - 2x + 1$

β) Η παραβολή τέμνει το σημείο $A(0,5)$, άρα τέμνει το θετικό ημιάξονα $y'y$, άρα

$\gamma = 5 \Leftrightarrow k + 3 = 5 \Leftrightarrow k = 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 5$

γ) Για να είναι η παραβολή συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ πρέπει η κορυφή της να ανήκει πάνω στον άξονα $y'y$. Άρα, θα έχει τετμημένη ίση με το μηδέν.

Επομένως: $k = 0$.

δ) Ελάχιστη τιμή το 4, οπότε: $4 = -\frac{\Delta}{4\alpha} \Leftrightarrow -\frac{k^2-4k-12}{4} = 4 \Leftrightarrow$

$k^2 - 4k - 12 = -16 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow (k-2)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 2 \Rightarrow$

$f(x) = x^2 + 2x + 5$

Άσκηση 6

α) $\begin{cases} \alpha > 0, \text{γιατί η παραβολή είναι με τα κοίλα προς τα άνω} \\ \beta < 0, \text{γιατί η κορυφή της έχει θετική τετμημένη} \\ \gamma > 0, \text{γιατί η παραβολή τέμνει το θετικό ημιάξονα } y'y \\ \Delta > 0, \text{γιατί η κορυφή έχει αρνητική τεταγμένη} \end{cases}$

β) Τα σημεία $A(2,0)$ $και$ $B(4,0)$ ανήκουν στην παραβολή άρα την επαληθεύουν.

$$f(x) = ax^2 + \beta x + 3 \overset{A,B\in f}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 4\alpha + 2\beta + 3 = 0 \\ 16\alpha + 4\beta + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8\alpha - 4\beta = 6 \\ 16\alpha + 4\beta = -3 \end{cases} \overset{+}{\Leftrightarrow}$$

$$8\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{8} \Rightarrow \beta = -\frac{9}{4}$$

Άσκηση 7

α) $\begin{cases} \alpha > 0, \text{γιατί η παραβολή είναι με τα κοίλα προς τα άνω} \\ \beta > 0, \text{γιατί η κορυφή της έχει αρνητική τετμημένη} \\ \gamma < 0, \text{γιατί η παραβολή τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα } y'y \\ \Delta > 0, \text{γιατί η κορυφή έχει αρνητική τεταγμένη} \end{cases}$

Εφόσον η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία, αυτό σημαίνει ότι η κορυφή της θα είναι συμμετρική ως προς τα δύο αυτά σημεία, δηλαδή θα έχει τετμημένη ίση με -1, άρα το $\beta > 0$.

β) $f(x) = ax^2 + \beta x - 3 \overset{A,B\in f}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 9\alpha - 3\beta - 3 = 0 \\ \alpha + \beta - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \overset{+}{\Leftrightarrow}$

$$4\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \beta = 2$$

Άσκηση 8

α) $f(x) = \frac{1}{2}(2x)(6-x) = -x^2 + 6x$

β) Η εξίσωση του εμβαδού είναι παραβολή και, επειδή ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι αρνητικός, συμπεραίνουμε ότι έχει τα κοίλα προς τα κάτω και άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο. Άρα, γνωρίζουμε:

$$maxf = -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{36}{-4} = 9 \Rightarrow -x^2 + 6x = 9 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Άρα, το εμβαδόν μεγιστοποιείται για $x = 3$ και ισούται με 9τ.μ.

Άσκηση 9

α) $E = E_O - E_T = (10-x)(x+2) - \frac{1}{2}2(x+2) = -x^2 + 7x + 18$

β) Η εξίσωση του εμβαδού είναι παραβολή και, επειδή ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι αρνητικός, συμπεραίνουμε ότι έχει τα κοίλα προς τα κάτω και άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο. Άρα, γνωρίζουμε:

$$maxf = -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{49+72}{-4} = \frac{121}{4} \Rightarrow -x^2 + 7x + 18 = \frac{121}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

Άρα, το εμβαδόν μεγιστοποιείται για $x = \frac{7}{2}$και ισούται με $\frac{121}{4}$τ.μ.

Άσκηση 10

$f(x) = a(x-p)^2 + q = ax^2 - 2apx + ap^2 + q$

$f(x) = 3x^2 - 6x + 2 \Rightarrow a = 3,\ \ p = 1,\ \ q = -1$

Άρα, $f(x) = 3(x-1)^2 - 1$ και είναι οριζόντια μετατόπιση της $f(x) = 3x^2$ κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και ύστερα κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω κατά 1 μονάδα.

Άσκηση 11

$f(x) = a(x-p)^2 + q = ax^2 - 2apx + ap^2 + q$

$f(x) = -2x^2 + 6x - 6 \Rightarrow a = -2,\ \ p = \frac{3}{2},\ \ q = -\frac{3}{2}$

Άρα, $f(x) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$ και είναι οριζόντια μετατόπιση της $f(x) = -2x^2$ κατά $\frac{3}{2}$ μονάδες προς τα δεξιά και ύστερα κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω κατά $\frac{3}{2}$ μονάδες.

Άσκηση 12

α) $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow$ Είναι παραβολή με τα κοίλα προς τα άνω, αφού $\alpha > 0$,

άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στην κορυφή της.

$-\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{1}{8}$ $\kappa\alpha\iota$ $-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{33/4}{8} = -\frac{33}{32} \Rightarrow$ Ολικό ελάχιστο στο $A\left(\frac{1}{8}, -\frac{33}{32}\right)$ και

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{8}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{8}, +\infty\right)$.

β) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1 \Rightarrow$ Είναι παραβολή με τα κοίλα προς τα κάτω, αφού

$\alpha < 0$, άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο στην κορυφή της.

$-\frac{\beta}{2\alpha} = 3$ $\kappa\alpha\iota$ $-\frac{\Delta}{4\alpha} = 7 \Rightarrow$ Ολικό μέγιστο στο $A(3, 7)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 3)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3, +\infty)$.

γ) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x \Rightarrow$ Είναι παραβολή με τα κοίλα προς τα κάτω, αφού $\alpha < 0$,

άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο στην κορυφή της.

$-\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{3}{4}$ $\kappa\alpha\iota$ $-\frac{\Delta}{4\alpha} = \frac{3}{8} \Rightarrow$ Ολικό μέγιστο στο $A\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

δ) $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow$ Είναι παραβολή με τα κοίλα προς τα άνω, αφού $\alpha > 0$,

άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στην κορυφή της.

$-\frac{\beta}{2\alpha} = 0$ $\kappa\alpha\iota$ $-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ Ολικό ελάχιστο στο $A\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Άσκηση 13

α) $f(x) = 2x^2 + 12x - 5 \Rightarrow . -\frac{\beta}{2\alpha} = -3$ $\kappa\alpha\iota$ $-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{184}{8} = -23 \Rightarrow$

Η παραβολή έχει τα κοίλα προς τα άνω, άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στην κορυφή της $(-3, -23)$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -3)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-3, +\infty)$. Το πεδίο τιμών της είναι το $[-23, +\infty)$.

β) $f(x) = -x^2 + 5x - 1 \Rightarrow . -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{5}{2}$ $\kappa\alpha\iota$ $-\frac{\Delta}{4\alpha} = \frac{21}{4} \Rightarrow$

Η παραβολή έχει τα κοίλα προς τα κάτω, άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο στην κορυφή της $\left(\frac{5}{2}, \frac{21}{4}\right)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$. Το πεδίο τιμών της είναι το $\left(-\infty, \frac{21}{4}\right]$.

γ) $f(x) = x^2 + 4x - 1 \Rightarrow . -\frac{\beta}{2\alpha} = -2 \;\; \kappa\alpha\iota - \frac{\Delta}{4\alpha} = -5 \Rightarrow$

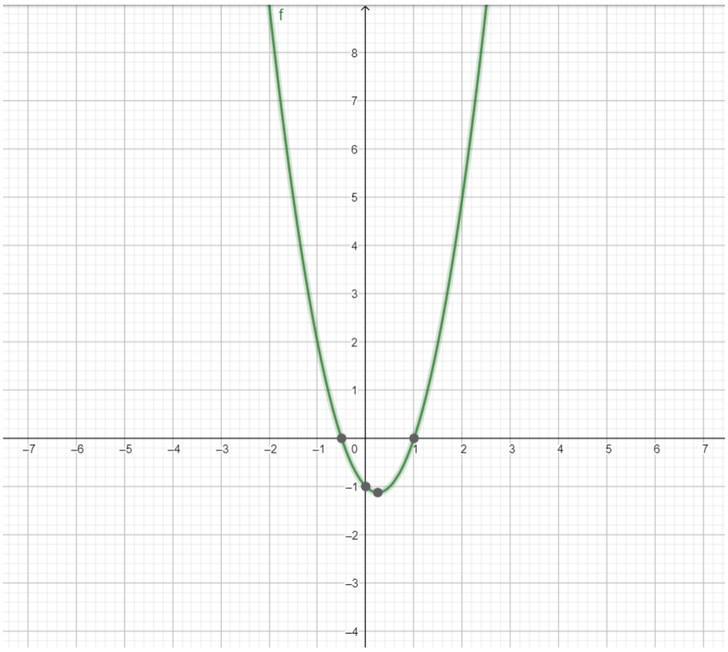
Η παραβολή έχει τα κοίλα προς τα άνω, άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στην κορυφή της $(-2, -5)$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -2)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-2, +\infty)$. Το πεδίο τιμών της είναι το $[-5, +\infty)$.

δ) $f(x) = -2x^2 + 3x - 5 \Rightarrow . -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{3}{4} \;\; \kappa\alpha\iota - \frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{-31}{-8} = -\frac{31}{8} \Rightarrow$

Η παραβολή έχει τα κοίλα προς τα κάτω, άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο στην κορυφή της $\left(\frac{3}{4}, -\frac{31}{8}\right)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$. Το πεδίο τιμών της είναι το $\left(-\infty, -\frac{31}{8}\right]$.

Άσκηση 14

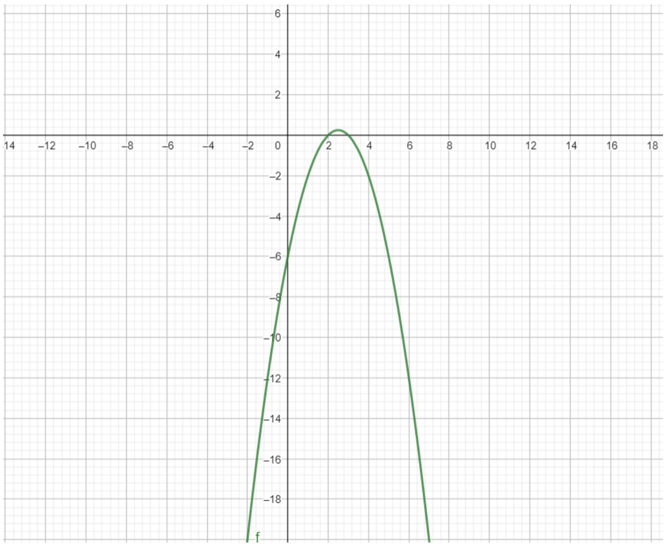
α)



Προφανώς, η παραβολή έχει τα κοίλα προς τα άνω, αφού ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι θετικός και άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στην κορυφή της, δηλαδή στο σημείο $A\left(\frac{1}{4},-\frac{9}{8}\right)$.

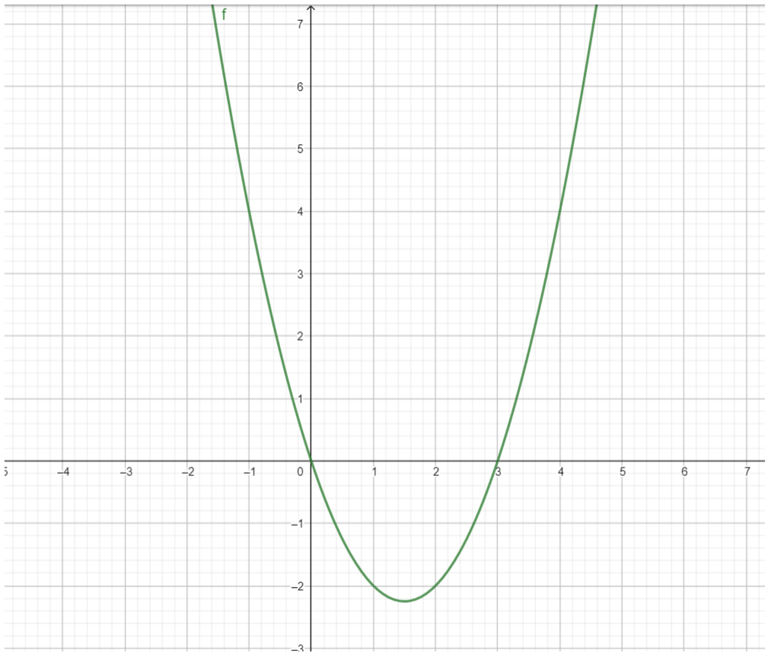
Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

β)



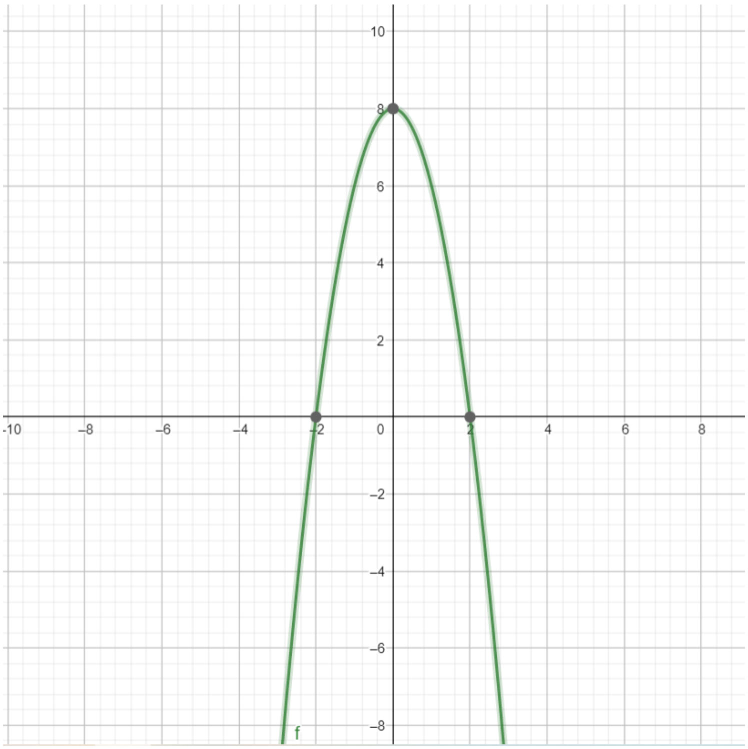
Προφανώς, η παραβολή έχει τα κοίλα προς τα κάτω, αφού ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι αρνητικός και άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο στην κορυφή της, δηλαδή στο σημείο $A\left(\frac{5}{2},\frac{1}{4}\right)$. Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

γ)



Προφανώς, η παραβολή έχει τα κοίλα προς τα άνω, αφού ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι θετικός και άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στην κορυφή της, δηλαδή στο σημείο $A\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{4}\right)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$. Επίσης, αναμέναμε να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αφού ο συντελεστής του τριωνύμου $\gamma=0$.

δ)



Προφανώς, η παραβολή έχει τα κοίλα προς τα κάτω, αφού ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι αρνητικός και άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο στην κορυφή της, δηλαδή στο σημείο $A(0,8)$.

Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Αναμέναμε να είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y, αφού ο συντελεστής του τριωνύμου $\beta=0$.

Άσκηση 15

α) $f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow$ Η παραβολή έχει συντελεστή $\alpha > 0$, άρα έχει τα κοίλα προς τα άνω και συνεπώς παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, το οποίο είναι η κορυφή της.

$-\frac{\beta}{2\alpha} = 1 \;\; \kappa\alpha\iota \; -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{16}{4} = -4 \Rightarrow$ Ολικό ελάχιστο στο $A(1, -4)$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1)$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

β) $f(x) = -x^2 + 5x - 6 \Rightarrow$ Η παραβολή έχει συντελεστή $\alpha < 0$, άρα έχει τα κοίλα προς τα κάτω και συνεπώς παρουσιάζει ολικό μέγιστο, το οποίο είναι η κορυφή της.

$-\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{5}{2} \;\; \kappa\alpha\iota \; -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Ολικό μέγιστο στο $A\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$ και

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο

$\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

γ) $f(x) = 2x^2 - 5x \Rightarrow$ Η παραβολή έχει συντελεστή $\alpha > 0$, άρα έχει τα κοίλα προς τα άνω και συνεπώς παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, το οποίο είναι η κορυφή της.

$-\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{5}{4} \;\; \kappa\alpha\iota \; -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{25}{8} \Rightarrow$ Ολικό ελάχιστο $A\left(\frac{5}{4}, -\frac{25}{8}\right)$ και είναι

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{4}, +\infty\right)$.

δ) $f(x) = -3x^2 + 6 \Rightarrow$ Η παραβολή έχει συντελεστή $\alpha < 0$, άρα έχει τα κοίλα προς τα κάτω και συνεπώς παρουσιάζει ολικό μέγιστο, το οποίο είναι η κορυφή της.

$-\frac{\beta}{2\alpha} = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \; -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{72}{-12} = 6 \Rightarrow$ Ολικό μέγιστο στο $A(0, 6)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

ε) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1 \Rightarrow$ Η παραβολή έχει συντελεστή $\alpha < 0$, άρα έχει τα κοίλα προς τα κάτω και συνεπώς παρουσιάζει ολικό μέγιστο, το οποίο είναι η κορυφή της.

$-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{4}{-8} = \frac{1}{2}$ $\kappa\alpha\iota$ $-\frac{\Delta}{4\alpha} = 0 \Rightarrow$ Ολικό μέγιστο στο $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ και είναι

γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

στ) $f(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow$ Η παραβολή έχει συντελεστή $\alpha > 0$, άρα έχει τα κοίλα

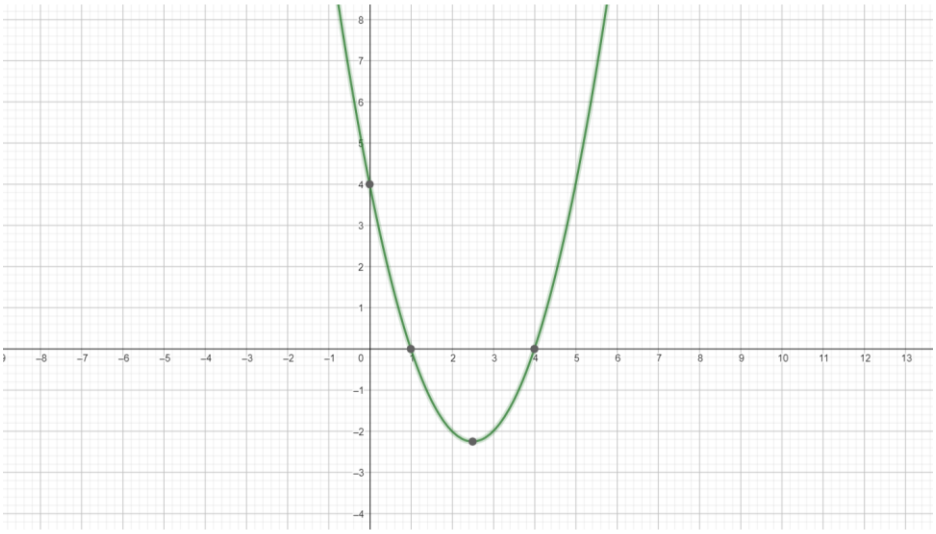
προς τα άνω και συνεπώς παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, το οποίο είναι η κορυφή της.

$-\frac{\beta}{2\alpha} = 0$ $\kappa\alpha\iota$ $-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{8}{8} = -1 \Rightarrow$ Ολικό ελάχιστο στο $A(0, -1)$ και είναι

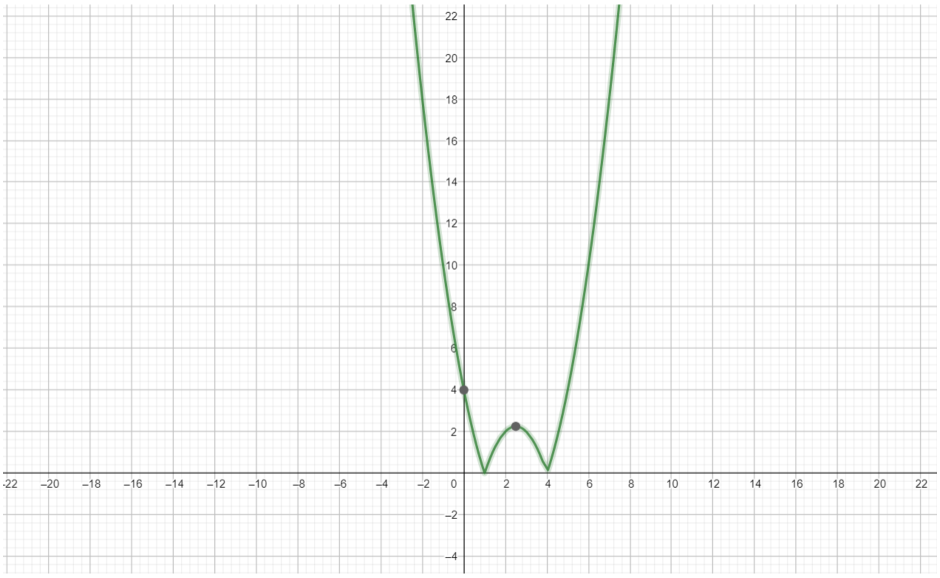
γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Άσκηση 16

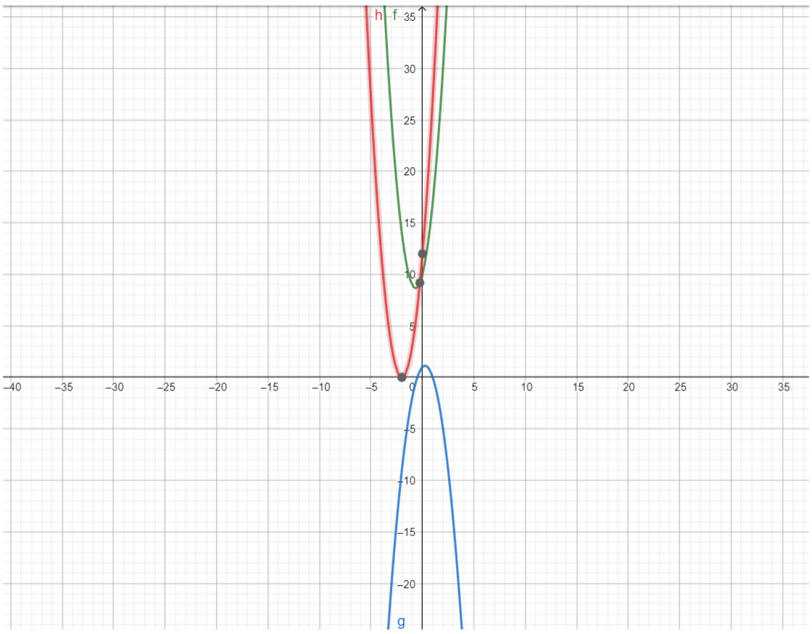
α)



β)



Άσκηση 17



Όπως φαίνεται και σχηματικά η f δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον άξονα των x, η g έχει δύο, τα $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ $και$ $B(1,0)$ και τέλος η h έχει ένα, το $\Gamma(-2,0)$.

Μπορούμε φυσικά να τα υπολογίσουμε και αλγεβρικά με τη χρήση της διακρίνουσας. Στην περίπτωση της f η διακρίνουσα θα είναι αρνητική.

Πρακτικά, αυτό σημαίνει αρνητική διακρίνουσα και πάντα θετικό ή αντίστοιχα αρνητικό πρόσημο για ένα τριώνυμο. Η συνθήκη αυτή μας περιγράφει τη σχετική θέση της γραφικής παράστασης του τριωνύμου σε σχέση με τον άξονα των x.

Άσκηση 18

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \overset{A(0,1)\in f}{\Longleftrightarrow} \gamma = 1$

Παρουσιάζει ελάχιστο στο $B(2,-3) \Rightarrow -3 = -\frac{\Delta}{4\alpha} \Leftrightarrow 12\alpha = \Delta \Leftrightarrow$

$$\beta^2 - 4\alpha = 12\alpha \Leftrightarrow 16\alpha = \beta^2$$

Το ελάχιστο ανήκει στην παραβολή, άρα την επαληθεύει. Οπότε:

$4\alpha + 2\beta + 1 = -3 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{-2\beta - 4}{4} = -\dfrac{\beta + 2}{2} \Rightarrow \beta^2 = -8(\beta + 2) \Leftrightarrow$

$\beta^2 + 8\beta + 16 = 0 \Leftrightarrow (\beta + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = -4 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow$

Συνολικά, προκύπτει: $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

Άσκηση 19

$f(x) = (1 - \lambda)x^2 - \lambda x + 5 \Rightarrow$ Για να παρουσιάζει μέγιστο η παραβολή πρέπει να έχει τα κοίλα προς τα κάτω. Άρα, ο συντελεστής τους δευτεροβάθμιου όρου πρέπει να είναι αρνητικός. Άρα: $1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$.

Γιατί επιλέγω Τετράδιο Σπουδής;

- Είναι απαραίτητο διδακτικό εργαλείο βασισμένο στους στόχους του μαθήματος και τον τρόπο Υλοποίησής του.
- Σε αυτό βρίσκεται το υλικό Διδασκαλίας για τον Καθηγητή και Μελέτης για το Μαθητή.
- Το Τετράδιο Σπουδής σε συνδυασμό με το course οδηγούν το **Μαθητή** στην **Αυτομάθηση**.
- Είναι το Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο πραγματοποίησης της **online διδασκαλίας με φυσικό τρόπο**.
- Με αυτό **ενημερώνονται** άμεσα **οι γονείς** και **ελέγχουν την πρόοδο** του παιδιού τους.

Τετράδια Σπουδής για:

Λύκειο

Μαθηματικά

Αρχαία

Γλωσσα

Χημεία

16-18 ετών

arnos.gr | info@arnos.gr