Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Πρόγραμμα: Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά
Θεματική ενότητα: ΜΣΜ60/71

Ημερομηνία παράδοσης: 17 – 11 – 2021

ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ: 1η

Σημείωση: *Το πρώτο θέμα της εργασίας σας έχει σκοπό να σας βοηθήσει να θυμηθείτε σημαντικές έννοιες από την ύλη των προπτυχιακών σας σπουδών, οι οποίες αφορούν Σ.Δ.Ε. και αποτελούν ουσιώδες υπόβαθρο στην ύλη της ΘΕ ΜΣΜ60/71.*
Βοηθητικό υλικό για να ανταποκριθείτε στο θέμα αυτό περιλαμβάνεται στον τόμο Α, αν και όχι κατ΄ ανάγκην στα κεφάλαια της διδακτέας/εξεταστέας ύλης της ΘΕ.

ΘΕΜΑ 1 (*15 μονάδες*)

i) Να λύσετε το ΠΑΤ

$$y'(t) + y(t) = 0, \ t > 0, \tag{1}$$

$$y(0) = a, \ a \in \mathbb{R} \tag{2}$$

και να βρείτε το $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

ii) α) Να λύσετε το ΠΑΤ

$$y' + y = y^2, \ t > 0, \tag{3}$$

$$y(0) = a, \ a \in \mathbb{R} \tag{4}$$

και να βρείτε το $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

β) Να δείξετε ότι η γραμμικοποιημένη ΣΔΕ της (3) στο σημείο $y_0 = a$, είναι η ΣΔΕ

$$y' + (1 - 2a)y = -a^2. \tag{5}$$

Στη συνέχεια να λύσετε το ΠΑΤ

$$y' + (1 - 2a)y = -a^2, \ t > 0, \tag{6}$$

$$y(0) = a \tag{7}$$

και να βρείτε το $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

ΘΕΜΑ 2 (*15 μονάδες*)
Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος

$$x' = y, \tag{1}$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right). \tag{2}$$

Στη συνέχεια, να βρείτε το γραμμικοποιημένο σύστημα που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο ισορροπίας και να το χαρακτηρίσετε ως προς την ευστάθειά του. Τι συμπεραίνετε για την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας στο αρχικό σύστημα (1), (2);

ΘΕΜΑ 3 (*20 μονάδες*)
Δίνεται η γραμμική ΣΔΕ δεύτερης τάξης

$$4y''(t) + 4\mu y'(t) + 81y(t) = 0,\ t > 0,\ \mu \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

α) Να μετατρέψετε την (1) σε σύστημα ΣΔΕ πρώτης τάξης και να βρείτε τα σημεία ισορροπίας του.

β) Να εξετάσετε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας για κάθε τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ και να σχεδιάσετε ποιοτικό διάγραμμα φάσης σε κάθε περίπτωση.

γ) Να βρείτε τις τιμές διακλάδωσης του συστήματος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Να λύσετε το σύστημα για $\mu = 0$ και αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 0$ και να επιβεβαιώσετε την αντίστοιχη ποιοτική συμπεριφορά της λύσης.

ΘΕΜΑ 4 (*15 μονάδες*)
Δίνεται το σύστημα ΣΔΕ

$$x' = -x + f_1(y), \tag{1}$$

$$y' = -y + f_2(x), \tag{2}$$

με $f_j \in C(\mathbb{R})$, $|f_j(z)| \leq \frac{|z|}{2}$ για $j = 1, 2$. Να δείξετε ότι το $(0, 0)$ είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος και επιπλέον ότι είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ακόλουθο
Θεώρημα: *Έστω ότι υπάρχει θετικά ορισμένη συνάρτηση V και σταθερά $\gamma > 0$ τέτοια ώστε,*

$$\frac{dV}{dt}(\mathbf{x}) \leq -\gamma V(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \tag{3}$$

Τότε, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε κάθε τροχιά του συστήματος

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|\mathbf{x}\| \leq M e^{-\frac{\gamma t}{2}} \|\mathbf{x}(0)\|, \tag{4}$$

όπου $\mathbf{x} = (x, y)$ και $\|\cdot\|$ είναι η Ευκλείδεια νορμ.

ΘΕΜΑ 5 (*15 μονάδες*)
Έστω $x = x(t), p = p(t)$ λύση του Χαμιλτονιανού συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial p} H(x, p),\ x(0) = y \tag{1}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} H(x, p),\ p(0) = \xi. \tag{2}$$

Έστω ότι η H είναι επαρκώς ομαλή και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\left|\frac{\partial H}{\partial x}(x,p)\right| \leq c\,\sqrt{|p|^2+1}\,, \tag{3}$$

$$\left|\frac{\partial H}{\partial p}(x,p)\right| \leq c\,. \tag{4}$$

Να αποδείξετε ότι η λύση $x(t), p(t)$ του συστήματος είναι πεπερασμένη για $t \in \mathbb{R}$. **Υπόδειξη:** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ολοκληρωτική μορφή της **ανισότητας του Gronwall**:

Θεώρημα: *Έστω $I = [t_0, \infty)$ ή $I = [t_0, T]$, ή $I = [t_0, T)$, με $t_0 < T$. Υπενθυμίζουμε πως το αρνητικό μέρος μιας συνάρτησης ορίζεται ως:*

$$h^-(t) := \max\{-h(t), 0\} = -\min\{-h(t), 0\} = \begin{cases} -h(t), & h(t) < 0, \\ 0, & h(t) \geq 0. \end{cases}$$

Έστω $u, v, w : I \to \mathbb{R}$ με $u, v \in C(I)$ και ότι η w^- είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I.

- *Αν $v \geq 0$ και*

  $$u(t) \leq w(t) + \int_{t_0}^{t} v(s)\,u(s)\,ds, \ \ \forall t \in I,$$

  τότε

  $$u(t) \leq w(t) + \int_{t_0}^{t} w(s)\,v(s)\exp\left\{\int_{s}^{t} v(\tau)\,d\tau\right\} ds, \ \ \forall t \in I. \tag{5}$$

- *Αν, επιπλέον, η w είναι αύξουσα, τότε*

  $$u(t) \leq w(t)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds\right\}, \ \ \forall t \in I. \tag{6}$$

ΘΕΜΑ 6 (*20 μονάδες*)

Έστω $x(t)$ ο πληθυσμός μικρών ποντικών και $y(t)$ ο πληθυσμός των γατών σε ένα κλειστό οικοσύστημα, όπου δεν υπάρχουν άλλοι θηρευτές, ούτε θηράματα, ούτε ανταγωνιστές τροφής. Έστω ότι η δυναμική των πληθυσμών αυτών περιγράφεται από το σύστημα ΣΔΕ:

$$x' = kx - \lambda x^2 - \mu xy, \tag{1}$$

$$y' = \nu y - \xi y^2 + \rho xy, \tag{2}$$

όπου $k, \lambda, \mu, \nu, \xi, \rho$ θετικές σταθερές, με $k\xi < \mu\nu$.

α) Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (1)-(2).

β) Να χαρακτηρίσετε τα σημεία ισορροπίας ως προς την ιδιότητα της ευστάθειάς τους και να ερμηνεύσετε τους χαρακτηρισμούς με όρους των δύο πληθυσμών στο υπό μελέτη οικοσύστημα.

γ) Εάν $k\xi > \mu\nu$ να ελέγξετε αν είναι εφικτή και ευσταθής η κατάσταση όπου οι γάτες και τα ποντίκια ζουν σε ισορροπία.