Θέμα 3ο

α)

Θέτωτε $y_1 = y$ και $y_2 = y'$.

Άρα,

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y' \\ y_2' = y'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4y' - \frac{81}{4}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4y_2 - \frac{81}{4}y_1 \end{cases}$$

Σημεία Ισορροπίας

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ -4y_2 - \frac{81}{4}y_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Άρα το σ.ι. είναι το $(0,0)$.

β) Ο πίνακας του συστήματος είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{81}{4} & -4 \end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμές:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{81}{4} & -\lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

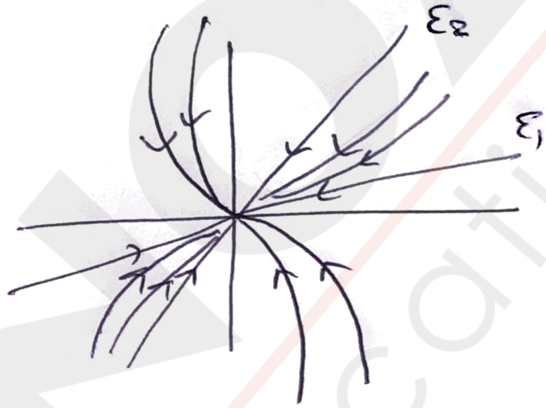
$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \mu\lambda + \frac{81}{4} = 0$$

$$\Delta = \mu^2 - 4\cdot\frac{81}{4} = \mu^2 - 81$$

• $\Delta > 0 \Leftrightarrow \mu \in (-\infty, -9) \cup (9, +\infty)$

– $\mu \in (9, +\infty)$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 81}}{2}$$



Άρα,

– $\lambda_1 = \dfrac{-\mu - \sqrt{\mu^2-81}}{2} < 0$

– $\lambda_2 = \dfrac{-\mu + \sqrt{\mu^2-81}}{2} < 0$

Άρα το σ.ι. είναι ευσταθής κόμβος

– $\mu \in (-\infty, -9)$, τότε $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, άρα έχουμε ασταθή κόμβο

• $\Delta = 0 \Leftrightarrow \mu = 9$ ή $\mu = -9$

– $\mu = 9$

Τότε $\lambda = -\frac{9}{2} < 0$, άρα νόθος ευσταθής κόμβος

(ίδιο σχήμα)

– $\mu = -9$

Τότε $\lambda = \frac{9}{2} > 0$, άρα ασταθής νόθος κόμβος

(ίδιο σχήμα)

• $\Delta < 0 \Leftrightarrow \mu \in (-9, 9)$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm i\sqrt{81-\mu^2}}{2}$$

– $\mu \in (-9, 0)$, τότε $Re(\lambda_{1,2}) > 0$, άρα είναι ασταθής εστία

(ίδιο σχήμα)

– $\mu \in (0, 9)$, τότε $Re(\lambda_{1,2}) < 0$, άρα είναι ευσταθής εστία.

(ίδιο σχήμα)

– $\mu = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm 9i$

Άρα το σημείο ισορροπίας είναι κέντρο

(ίδιο σχήμα)

"οικογένεια ελλείψεων"

(δ) Οι τιμές της διακλάδωσης είναι:

$\mu = -9$, $\mu = 0$, $\mu = 9$

(δ)

Για $t=0$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{81}{4} y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = y_2' \\ y_1' = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = -\frac{81}{4} y_1 \\ y_1' = y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1'' + \frac{81}{4} y_1 = 0 \\ y_1' = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = c_1 \cdot \cos(\frac{9}{2}t) + c_2 \sin(\frac{9}{2}t) \\ y_2 = -\frac{9}{2} c_1 \cdot \sin(\frac{9}{2}t) + \frac{9}{2} c_2 \cos(\frac{9}{2}t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Άρα

$$\begin{cases} y_1(t) = \cos(\frac{9}{2}t) \\ y_2(t) = -\frac{9}{2} \sin(\frac{9}{2}t) \end{cases}$$

Άρα

$$\frac{y_1^2}{1^2} + \frac{y_2^2}{(\frac{2}{9})^2} = 1$$

Οπότε έχουμε έλλειψη που επιβεβαιώνεται από την περίπτωση των μιγαδικών συναρτήσεων στο β ερώτημα.