



# Μαθηματικά

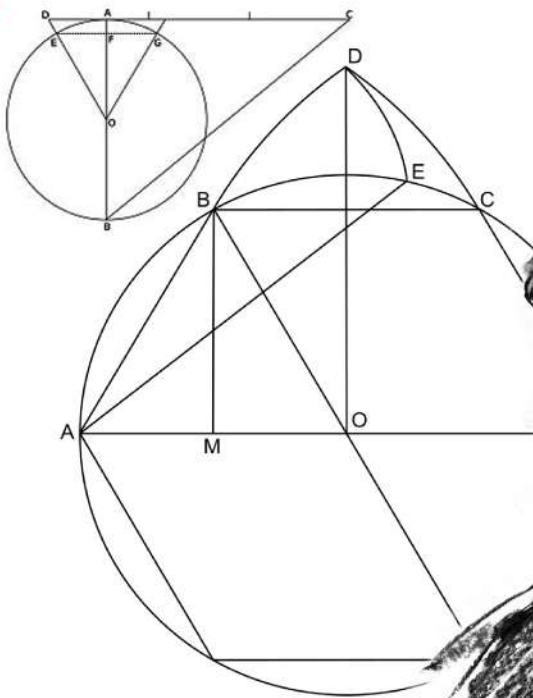
Τετράδιο Σπουδής

γ τεύχος

Α'

Γυμνασίου

 **ΑΡΝΟΣ**  
Online Education



ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ  
325-270 ΠΧ

★ **100%** ★  
επιτυχία  
**Μέθοδος**  
**ΑΡΝΟΣ**

## Τετράδιο Σπουδής - Γιατί;

Το Τετράδιο Σπουδής ΑΡΝΟΣ είναι βασισμένο στη Μέθοδο ΑΡΝΟΣ, ένα σύστημα μάθησης με Στόχους – Υλοποίηση – Πιστοποίηση.

Βοηθάει το μαθητή να οικοδομήσει τη σκέψη του βήμα-βήμα, απλά και κατανοητά. Είναι Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο βάσει του οποίου γίνεται η διδασκαλία στο online μάθημα με «φυσικό» τρόπο. Ο δάσκαλος γράφει και υπογραμμίζει παράλληλα με το μαθητή.

Το Τετράδιο Σπουδής αποτελείται από:

- ★ Οπτικοποιημένη Θεωρία με ροή & συνέχεια
- ★ Ασκήσεις για Διδασκαλία και Εξάσκηση
- ★ Συνδυαστικές και Επαναληπτικές Ασκήσεις
- ★ Θέματα Προσομοίωσης Εξετάσεων

### Πιστοποίηση Γνώσεων

Σε προγραμματισμένες ημερομηνίες διεξάγονται online ή/και δια ζώσης **Επαναληπτικά Τεστ Αξιολόγησης** στα οποία ο μαθητής πιστοποιεί και επαληθεύει τις γνώσεις του.

## Για τους Γονείς

### Πώς ο γονέας μπορεί να έχει εικόνα και εποπτεία στην πρόοδο του παιδιού του;

Το Τετράδιο Σπουδής είναι σχεδιασμένο με τέτοιον τρόπο για τη βήμα – βήμα εξάσκηση του μαθητή, μεταβαίνοντας με ασφάλεια από τα πιο απλά στα πιο σύνθετα. Επίσης, είναι ένας φυσικός τρόπος ο Γονέας να ελέγχει την πρόοδο του παιδιού του.

### Πώς γίνεται η εποπτεία από το γονέα;

Σε κάθε μάθημα ελέγχει την ορθότητα των λύσεων, την κατανόηση και τη συμμετοχή του παιδιού στα μαθήματα.

### Διδασκαλία στον ΑΡΝΟ σημαίνει:

- ★ Απεριόριστη μελέτη με video lessons
- ★ Αυτομάθηση στο App Arnos Learn
- ★ Coaching εξατομικευμένο
- ★ Μοτίβα Μάθησης και Εξάσκησης
- ★ Κάθε Απορία για εμάς είναι Πρόκληση!

## ★ Μέθοδος ΑΡΝΟΣ

Η **Μέθοδος ΑΡΝΟΣ** οδηγεί κάθε μαθητή, ανεξαρτήτως γνώσεων ή επιπέδου, να μελετά από το επίπεδο όπου αισθάνεται άνετα, ώστε να διαμορφώσει γερές βάσεις για μάθηση.

**Live Διδασκαλία** Το online μάθημα γίνεται με φυσικό τρόπο, γιατί συνδυάζει την Τεχνολογία, το Πνεύμα, την Οργάνωση και την Εμπειρία.

**Τετράδιο Σπουδής** Είναι ο οδηγός για τη διδασκαλία του μαθήματος, την εξάσκηση του μαθητή και την πραγματοποίηση της online διδασκαλίας με Λόγο, Εικόνα και Παρατήρηση.

**Καθηγητής** Είναι ο σκηνοθέτης της διδακτικής πράξης, ο οποίος δρα σε ένα οργανωμένο εκπαιδευτικό οικοσύστημα με Στόχους, Μαθησιακό Πλάνο και Ευθύνη.

*«Μέθοδος ΑΡΝΟΣ... το καταστάλαγμα μιας πορείας 35 ετών με εκπαιδευτικές και εκδοτικές επιτυχίες, με ταξίδια πολιτισμού, συμμετοχή σε Διεθνείς Εκθέσεις και αποτυχίες... μα, κυρίως, η παρακαταθήκη του ζευγολάτη πατέρα - Αρνού.»*

Γιάννης Π. Κρόκος



# Τετράδιο Σπουδής

3<sup>ο</sup> Τεύχος

## Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου

Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο  
για Διδασκαλία και Μελέτη

- Οδηγός για τη Διδασκαλία του Καθηγητή
- Οδηγός για τη Μελέτη του Μαθητή
- Διδασκαλία Online με φυσικό τρόπο
- Τόπος Εποπτείας Προόδου από το Γονέα
- Διδασκαλία με Πιστοποιημένους Καθηγητές ΑΡΝΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2021



## Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου – 3<sup>ο</sup> Τετράδιο Σπουδής

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η ολική, μερική ή περιληπτική αναπαραγωγή και μετάδοση έστω και μιας σελίδας του παρόντος βιβλίου κατά παράφραση ή διασκευή με οποιονδήποτε τρόπο (μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό κ.λπ. – Ν. 2121/93, άρθρο 51).

Η απαγόρευση αυτή ισχύει και για τις δημόσιες υπηρεσίες, βιβλιοθήκες, οργανισμούς κ.λπ. (άρθρο 18). Οι παραβάτες διώκονται (άρθρο 13) και τους επιβάλλονται κατάσχεση, αστικές και ποινικές κυρώσεις σύμφωνα με το νόμο (άρθρο 64-66).

### Συντακτική Ομάδα Κέντρου ΑΡΝΟΣ

**Διευθυντής σειράς:** Ιωάννης Π. Κρόκος  
**Συνεργάστηκαν:** Γεώργιος Καραχάλιας  
Βασίλειος Κ. Τσιλιβής

ΑΡΝΟΣ ONLINE EDUCATION



# Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

---

---

## Μέρος Β΄: Γεωμετρία

### 1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο: Βασικές γεωμετρικές έννοιες

1.1.	Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Επίπεδο - Ημιεπίπεδο.....	5
1.2.	Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα .....	13
1.3.	Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθύγραμμου τμήματος .....	20
1.4.	Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων.....	28
1.5.	Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας.....	33
1.6.	Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες.....	38
1.7.	Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών.....	44
1.8.	Παραπληρωματικές και συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες.....	49
1.9.	Θέσεις ευθειών στο επίπεδο.....	55
1.10.	Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παραλλήλων .....	61
1.11.	Κύκλος και στοιχεία του κύκλου.....	67
1.12.	Επίκεντρο γωνία – Σχέση επίκεντρος γωνίας και του αντίστοιχου τόξου – Μέτρηση τόξου.....	74
1.13.	Θέσεις ευθείας και κύκλου.....	79

## 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο: Συμμετρία

2.1. Συμμετρία ως προς άξονα.....	84
2.2. Άξονας συμμετρίας.....	89
2.3. Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος.....	95
2.4. Συμμετρία ως προς σημείο.....	102
2.5. Κέντρο συμμετρίας.....	102
2.6. Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία.....	109

## 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο: Τρίγωνα – Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία

3.1. Στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων.....	118
3.2. Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου.....	130
3.3. Παραλληλόγραμμο – Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο – Τραπεζίο – Ισοσκελές τραπέζιο.....	144
3.4. Ιδιότητες παραλληλογράμμου – Ορθογωνίου - Ρόμβου – Τετραγώνου – Τραπεζίου – Ισοσκελούς τραπεζίου.....	144

## Κεφάλαιο 1 : Γεωμετρία

### 1.1. Σημείο - Ευθύγραμμο τμήμα - Ευθεία - Ημιευθεία - Επίπεδο - Ημιεπίπεδο

#### Στόχοι Διδακτικής Ενότητας

- ✓ Τι ονομάζεται σημείο και τι ευθύγραμμο τμήμα;
- ✓ Τι ορίζουμε ως ευθεία και τι ως ημιευθεία;
- ✓ Τι ορίζουμε ως επίπεδο και τι ως ημιεπίπεδο;

## Σύντομη Θεωρία

### Ορισμοί

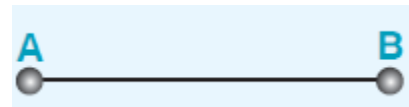
#### Το σημείο

Η άκρη του μολυβιού μας, οι κορυφές ενός σχήματος, η μύτη μιας βελόνας, μας δίνουν την έννοια του **σημείου**.



#### Το ευθύγραμμο τμήμα

Μία τεντωμένη κλωστή με άκρα A και B μας δίνει μια εικόνα της έννοιας του **ευθύγραμμου τμήματος AB**.

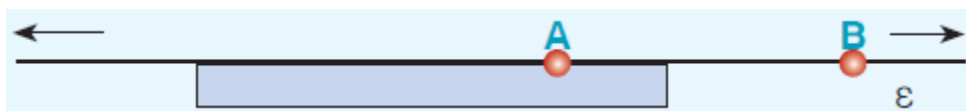


Τα σημεία A και B είναι τα **άκρα** του ευθύγραμμου τμήματος.

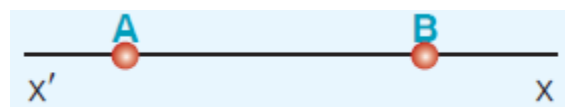
Λέμε ότι τα σημεία A και B ορίζουν το ευθύγραμμο τμήμα AB.

#### Η ευθεία

Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα AB, τότε το νέο σχήμα, που δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος, λέγεται **ευθεία**.



Συμβολίζουμε μια ευθεία με ένα μικρό γράμμα από τα αρχικά του αλφαβήτου, π.χ. (ε), ή με δύο μικρά γράμματα από τα τελευταία του αλφαβήτου π.χ. x'x, γ'γ.



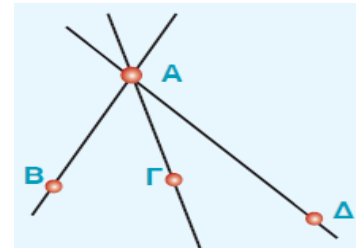
*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*



**Σημείωση :**

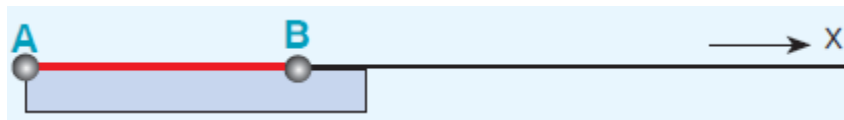
- ✚ Από ένα σημείο διέρχονται **άπειρες** ευθείες.
- ✚ Από δύο σημεία διέρχεται μια **μόνο** ευθεία.

Δηλαδή, από το σημείο A διέρχονται άπειρες ευθείες, ενώ από τα σημεία A, B διέρχεται μία μόνο ευθεία.

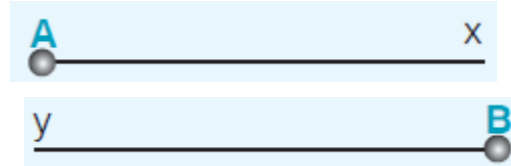


**Η ημιευθεία**

Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα AB πέρα από το ένα μόνο άκρο του, π.χ. το B, τότε το νέο σχήμα, που έχει αρχή το A αλλά δεν έχει τέλος, λέγεται **ημιευθεία**.

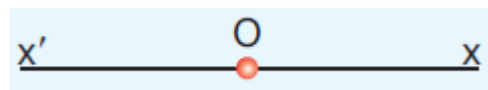


Η ημιευθεία συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα που δηλώνει την αρχή της και ένα μικρό από τα τελευταία γράμματα π.χ. Ax, By κ.λπ.



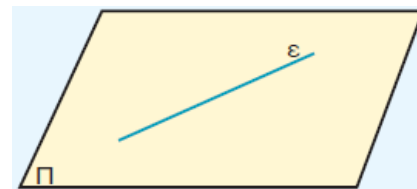
**Αντικείμενες ημιευθείες**

Εάν O είναι ένα σημείο της ευθείας x'x, τότε με αρχή το O ορίζονται δύο ημιευθείες, οι Ox και Ox', οι οποίες λέγονται **αντικείμενες ημιευθείες**.



**Το επίπεδο**

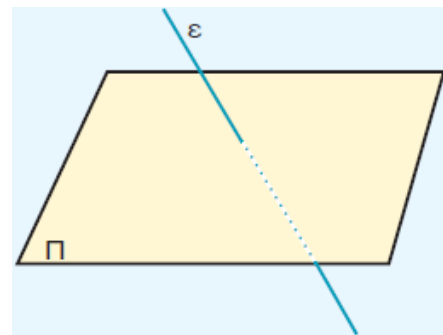
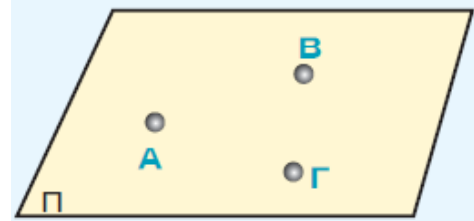
**Επίπεδο** είναι μια επιφάνεια, πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή.



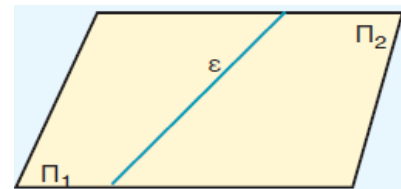
*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*

**Σημείωση :**

- ✚ Ένα επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα.
- ✚ Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μοναδικό επίπεδο, ενώ από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα.
- ✚ Κάθε επίπεδο χωρίζει τον χώρο σε δύο μέρη, ώστε, αν θέλουμε να περάσουμε από το ένα μέρος του χώρου στο άλλο, πρέπει να διαπεράσουμε το επίπεδο.
- ✚ Η ονομασία του επιπέδου δίνεται με ένα κεφαλαίο γράμμα του αλφάβητου π.χ. Π, Ρ, Σ κ.λπ.

**Το ημιεπίπεδο**

Κάθε ευθεία ενός επιπέδου το χωρίζει σε δύο **ημιεπίπεδα**.



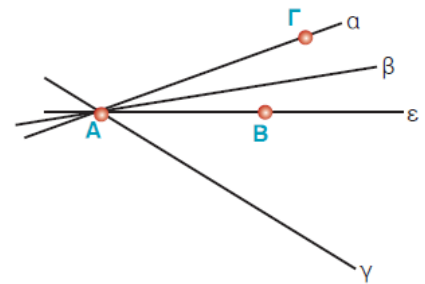
### Ερωτήσεις Κατανόησης

#### Ερώτηση 1 :

Κατασκευάστε ένα 6-γωνο με κορυφές A,B,Γ,Δ,Ε,Ζ και ονοματίστε τα ευθύγραμμα τμήματα που δημιουργούνται.

#### Ερώτηση 2 :

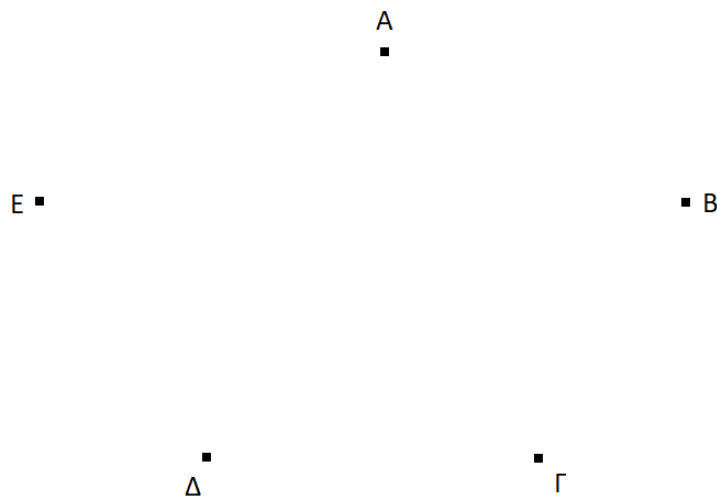
Έστω τρία σημεία A, B και Γ που δεν ανήκουν και τα τρία σε μια ευθεία. Πόσες ευθείες περνούν από το A; Πόσες από τις ευθείες αυτές περνούν από το B; Το Γ είναι σημείο της ευθείας AB;



### Ασκήσεις για Διδασκαλία

#### Άσκηση 1 :

Στο σχήμα φαίνονται πέντε σημεία, τα A, B, Γ, Δ και Ε. Να χαράξετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα, που έχουν άκρα τα σημεία αυτά. Πόσα διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα είναι;



Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!

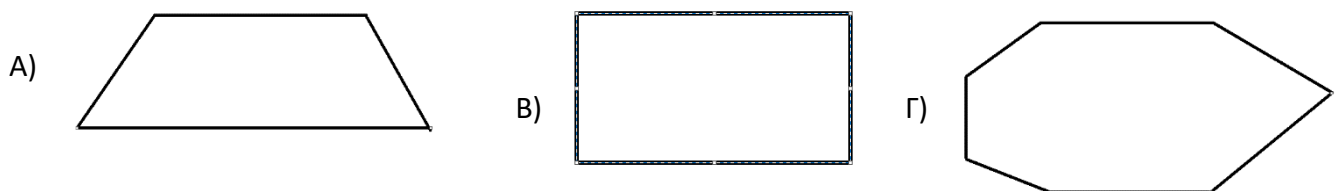
**Άσκηση 2 :**

Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

- (α) Μία τεντωμένη κλωστή με άκρα A και B μας δίνει την εικόνα της έννοιας του ..... .
- (β) Αν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα AB πέρα από τα δύο άκρα του, A και B, παίρνουμε το σχήμα που λέγεται ..... .
- (γ) Αν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα AB πέρα από το ένα μόνο άκρο του, π.χ. το B, παίρνουμε το σχήμα που λέγεται ..... .
- (δ) ..... λέγονται δύο ημιευθείες που έχουν κοινή αρχή και που οι δύο μαζί αποτελούν μία ευθεία.
- (ε) Η επιφάνεια, πάνω στην οποία η απεριόριστη ευθεία γραμμή εφαρμόζει παντού ολόκληρη είναι το ..... .

**Άσκηση 3 :**

Ονομάτισε τις κορυφές των σχημάτων και γράψε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που δημιουργούνται.



**Άσκηση 4 :**

Πάρε τα σημεία A, B, Γ, Δ πάνω σε μια ευθεία και ένα σημείο K που δεν βρίσκεται στην παραπάνω ευθεία.



Ένωσε το K με τα A, B, Γ, Δ και ονόμασε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα του σχήματος.

*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*

**Άσκηση 5 :**

Πάνω σε μια ευθεία  $x'x$  παίρνουμε δύο σημεία A και B. Ονόμασε τις αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το A και τις αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το B.

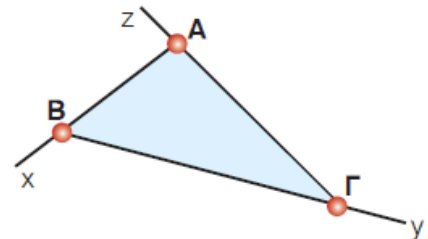


**Άσκηση 6 :**

Να κάνετε ένα τρίγωνο ABΓ και εν συνεχεία να χαράξετε τις αντικείμενες ημιευθείες των ημιευθειών BA , ΑΓ , ΓB.

**Άσκηση 7 :**

Στο διπλανό σχήμα να χαράξετε τις αντικείμενες ημιευθείες των ημιευθειών ABx, BΓy και ΓAz.



**Ασκήσεις για Μελέτη**

**Άσκηση 1 :**

Τι καλείται επίπεδο, ποια ιδιότητα έχει, πόσα επίπεδα διέρχονται από τρία μη συνευθειακά σημεία, πόσα επίπεδα διέρχονται από δύο σημεία πως χωρίζει ένα επίπεδο τον χώρο ,πως συμβολίζεται ένα επίπεδο και τι είναι το ημιεπίπεδο; Τι λέγεται ευθεία , πώς συμβολίζεται αυτή, πόσες ευθείες διέρχονται από ένα σημείο και πόσες ευθείες ορίζουν δύο σημεία;

*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*

**Άσκηση 2 :**

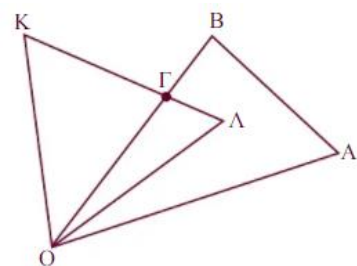
Πόσες ευθείες ορίζονται από τις 6 κορυφές ενός εξαγώνου και πόσες από 10 σημεία ενός κύκλου;

**Άσκηση 3 :**

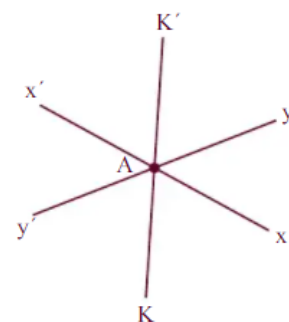
Εάν σε ένα κυκλικό τραπέζι κάθονται 10 άτομα και τσουγκρίζουν τα ποτήρια τους όλοι με όλους, πόσα τσουγκρίσματα θα ακουστούν;

**Άσκηση 4**

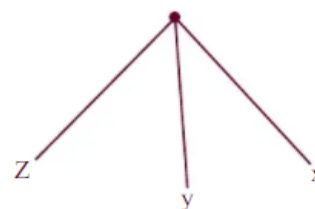
Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται απ' όλα τα σημεία του σχήματος.

**Άσκηση 5:**

Να γράψετε τρία σημεία που δεν είναι συνευθειακά και να χαράξετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν άκρα τα σημεία αυτά.

**Άσκηση 6:**

Να χαράξετε τις αντικείμενες ημιευθείες των ημιευθειών του σχήματος.

**Άσκηση 7:**

Να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να χαράξετε τις ευθείες χχ' και γγ' που περιέχουν τις πλευρές του ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα. Να γράψετε τα ζεύγη των ημιευθειών που σχηματίζονται. Οι ημιευθείες Αχ και Αγ είναι αντικείμενες.

*Έξυπνα και Εύκολα η Προετοιμασία!*



## 1.2. Γωνία - Γραμμή - Επίπεδα σχήματα - Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα

### Στόχοι Διδακτικής Ενότητας

- ✓ Τι ονομάζεται γωνία και πως βρίσκω τις γωνίες σε σχήματα;
- ✓ Τι είναι η κυρτή και η μη κυρτή γωνία;
- ✓ Ποια γραμμή ονομάζεται τεθλασμένη και τι είναι τα ευθύγραμμα σχήματα;
- ✓ Ποια σχήματα λέγονται ίσα και πώς τα εντοπίζω;