ΑΡΝΟΣ βιβλία με στόχο!

Μαζί μας η Εκπαίδευση γίνεται παιχνίδι

Μαθηματικά

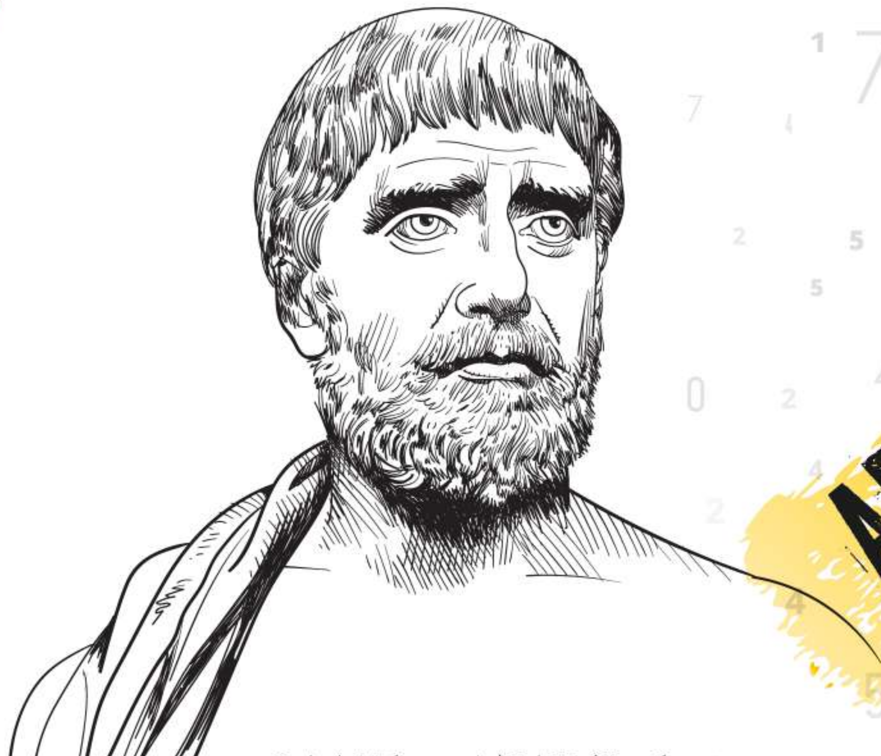
Τετράδιο Σπουδής

γ τεύχος

Γ' Γυμνασίου

ΑΡΝΟΣ Online Education

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ & ΑΣΚΗΣΕΩΝ



ΘΑΛΗΣ Ο ΜΙΛΗΣΙΟΣ
630/635-543 ΠΧ

100% επιτυχία Μέθοδος ΑΡΝΟΣ

Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο για Διδασκαλία & Μελέτη

Τετράδιο Σπουδής - Γιατί;

Το Τετράδιο Σπουδής ΑΡΝΟΣ είναι βασισμένο στη Μέθοδο ΑΡΝΟΣ, ένα σύστημα μάθησης με Στόχους – Υλοποίηση – Πιστοποίηση.
Βοηθάει το μαθητή να οικοδομήσει τη σκέψη του βήμα-βήμα, απλά και κατανοητά. Είναι Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο βάσει του οποίου γίνεται η διδασκαλία στο online μάθημα με «φυσικό» τρόπο. Ο δάσκαλος γράφει και υπογραμμίζει παράλληλα με το μαθητή.

Το Τετράδιο Σπουδής αποτελείται από:

- Οπτικοποιημένη Θεωρία με ροή & συνέχεια
- Ασκήσεις για Διδασκαλία και Εξάσκηση
- Συνδυαστικές και Επαναληπτικές Ασκήσεις
- Θέματα Προσομοίωσης Εξετάσεων

Πιστοποίηση Γνώσεων

Σε προγραμματισμένες ημερομηνίες διεξάγονται online ή/και δια ζώσης **Επαναληπτικά Τεστ Αξιολόγησης** στα οποία ο μαθητής πιστοποιεί και επαληθεύει τις γνώσεις του.

Για τους Γονείς

Πώς ο γονέας μπορεί να έχει εικόνα και εποπτεία στην πρόοδο του παιδιού του;
Το Τετράδιο Σπουδής είναι σχεδιασμένο με τέτοιον τρόπο για τη βήμα – βήμα εξάσκηση του μαθητή, μεταβαίνοντας με ασφάλεια από τα πιο απλά στα πιο σύνθετα. Επίσης, είναι ένας φυσικός τρόπος ο Γονέας να ελέγχει την πρόοδο του παιδιού του.

Πώς γίνεται η εποπτεία από το γονέα;

Σε κάθε μάθημα ελέγχει την ορθότητα των λύσεων, την κατανόηση και τη συμμετοχή του παιδιού στα μαθήματα.

Διδασκαλία στον ΑΡΝΟ σημαίνει:

- Απεριόριστη μελέτη με video lessons
- Αυτομάθηση στο App Arnos Learn
- Coaching εξατομικευμένο
- Μοτίβα Μάθησης και Εξάσκησης
- Κάθε Απορία για εμάς είναι Πρόκληση!

Μέθοδος ΑΡΝΟΣ

Η **Μέθοδος ΑΡΝΟΣ** οδηγεί κάθε μαθητή, ανεξαρτήτως γνώσεων ή επιπέδου, να μελετά από το επίπεδο όπου αισθάνεται άνετα, ώστε να διαμορφώσει γερές βάσεις για μάθηση.

Live Διδασκαλία Το online μάθημα γίνεται με φυσικό τρόπο, γιατί συνδυάζει την Τεχνολογία, το Πνεύμα, την Οργάνωση και την Εμπειρία.

Τετράδιο Σπουδής Είναι ο οδηγός για τη διδασκαλία του μαθήματος, την εξάσκηση του μαθητή και την πραγματοποίηση της online διδασκαλίας με Λόγο, Εικόνα και Παρατήρηση.

Καθηγητής Είναι ο σκηνοθέτης της διδακτικής πράξης, ο οποίος δρα σε ένα οργανωμένο εκπαιδευτικό οικοσύστημα με Στόχους, Μαθησιακό Πλάνο και Ευθύνη.

«Μέθοδος ΑΡΝΟΣ... το καταστάλαγμα μιας πορείας 35 ετών με εκπαιδευτικές και εκδοτικές επιτυχίες, με ταξίδια πολιτισμού, συμμετοχή σε Διεθνείς Εκθέσεις και αποτυχίες... μα, κυρίως, η παρακαταθήκη του ζευγολάτη πατέρα - Αρνού.»

Γιάννης Π. Κρόκος

ΑΡΝΟΣ Online Education

Σολωμού 29, Αθήνα 210 38 22 157 | 210 38 22 495

arnos.gr | info@arnos.gr

Τετράδιο Σπουδής

3ο Τεύχος

Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου

ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- Οδηγός για τη Διδασκαλία του Καθηγητή
- Οδηγός για τη Μελέτη του Μαθητή
- Διδασκαλία Online με φυσικό τρόπο
- Τόπος Εποπτείας Προόδου από το Γονέα
- Διδασκαλία με Πιστοποιημένους Καθηγητές ΑΡΝΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2022

ΑΡΝΟΣ
Online Education

Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου – Λύσεις 3^{ου} Τετραδίου Σπουδής

Συντακτική Ομάδα Κέντρου ΑΡΝΟΣ

Διευθυντής σειράς: Ιωάννης Π. Κρόκος

Συνεργάστηκαν: Σταυρούλα Εκουτσίδου

Βασίλειος Κ. Τσιλιβής

ΑΡΝΟΣ ONLINE EDUCATION

ΑΡΝΟΣ

Online Education

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

Μέρος Β΄: Γεωμετρία – Τριγωνομετρία

1ο Κεφάλαιο: Γεωμετρία

2ο Κεφάλαιο: Τριγωνομετρία

Κεφάλαιο 1 : Γεωμετρία

1.1 Ισότητα Τριγώνων

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

α. Λ

β. Σ

γ. Σ

δ. Σ

ε. Σ

στ. Λ

Ερώτηση Κατανόησης 2 - Απάντηση

α. Λάθος

β. Λάθος

γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Σωστό

στ. Σωστό

Ερώτηση Κατανόησης 3 - Απάντηση

α. iii

β. ii

γ. iii

δ. iii

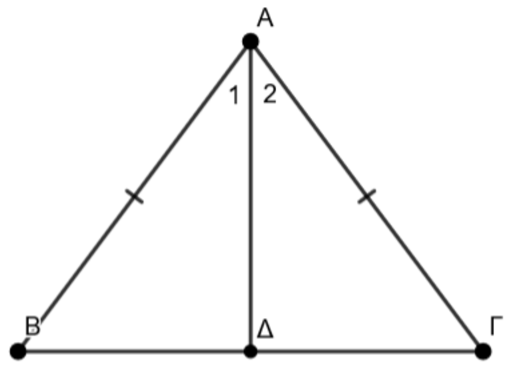
ε. iv

Ερώτηση Κατανόησης 4 - Απάντηση

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι $180°$. Μία ορθή γωνία είναι ίση με $90°$ άρα οι άλλες δύο γωνίες θα πρέπει να έχουν μαζί άθροισμα 90°. Αν επομένως μία από αυτές τις δύο είναι ορθή δεν σχηματίζεται τρίγωνο. Αντίστοιχα μία αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερη από $90°$, άρα το άθροισμα δύο αμβλειών γωνιών είναι μεγαλύτερο από $180°$.

Ερώτηση Κατανόησης 5 - Απάντηση

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και την διχοτόμο του ΑΔ.
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΔΓ$.

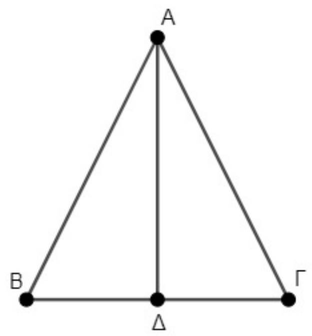


- $ΑΔ$ (κοινή πλευρά)
- $ΑΒ = ΑΓ$ (δεδομένα)
- $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ ($ΑΔ$ διχοτόμος)

Άρα από κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα και άρα θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα, οπότε:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma}$$

Ερώτηση Κατανόησης 6 - Απάντηση



$ΑΒΓ$ ισοσκελές ($ΑΒ = ΑΓ$) και $ΑΔ$ διάμεσος ($ΒΔ = ΓΔ$)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΔ$, $ΑΔΓ$ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$ (γιατί $ΑΒΓ$ ισοσκελές)
- $\hat{Β} = \hat{Γ}$ (γιατί $ΑΒΓ$ ισοσκελές)
- $ΒΔ = ΓΔ$ ($ΑΔ$ διάμεσος)

Από Κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα.

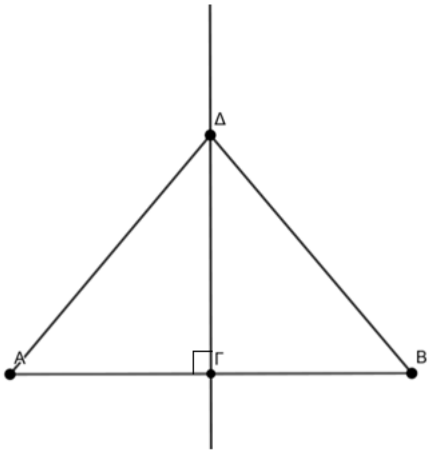
Από την ισότητα αυτή προκύπτει επίσης ότι:

- $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ δηλαδή $ΑΔ$ διχοτόμος της $\hat{Α}$
- $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$ και $\hat{Δ}_1 + \hat{Δ}_2 = 180°$ άρα $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2 = 90°$ δηλαδή $ΑΔ$ ύψος του $ΑΒΓ$.

Τελικά η διάμεσος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι και διχοτόμος και ύψος.

Στην περίπτωση των ισόπλευρων τριγώνων, η διάμεσος διχοτομεί οποιαδήποτε γωνία και είναι ύψος σε κάθε πλευρά.

Ερώτηση Κατανόησης 7 - Απάντηση

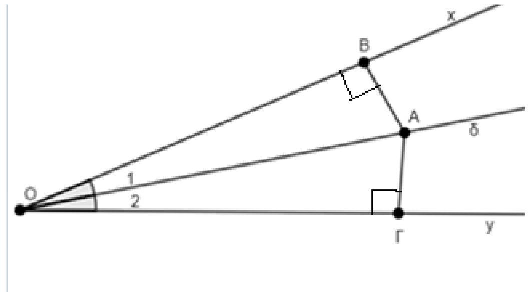


Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB και την μεσοκάθετό του ε που τέμνει το AB στο σημείο Γ. Έστω Δ ένα τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου και $A\Delta$ και $B\Delta$ οι αποστάσεις του σημείου Δ από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος. Θα δείξουμε ότι $A\Delta = B\Delta$. Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $AB\Delta$ τα οποία έχουν:

- Ορθογώνια
- $\Delta\Gamma$ κοινή πλευρά
- $A\Gamma = B\Gamma$ (Γ μέσο του ΑΒ)

Άρα από κριτήριο ΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα και άρα $A\Delta = B\Delta$.

Ερώτηση Κατανόησης 8 - Απάντηση



Φέρνουμε τη διχοτόμο Oz της γωνίας $x\hat{O}y$ και πάνω σ΄ αυτήν παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο A. Αν AB, $AΓ$ είναι οι αποστάσεις του σημείου A από τις πλευρές της γωνίας, θα αποδείξουμε ότι $AB = AΓ$. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα OAB, $OAΓ$ και παρατηρούμε ότι έχουν:

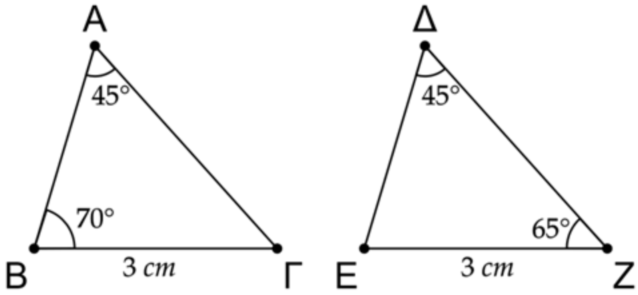
- $OA = OA$ κοινή πλευρά και
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, αφού η Oz είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

Άρα από κριτήριο ΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $AB = AΓ$.

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση



Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει ότι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = 180^o$$

$$45^o + 70^o + \hat{Γ} = 180^o$$

$$\hat{Γ} = 65^o$$

Στο τρίγωνο $ΔΕΖ$ ισχύει ότι:

$$\hat{Δ} + \hat{Z} + \hat{E} = 180^o$$

$$45^o + 65^o + \hat{E} = 180^o$$

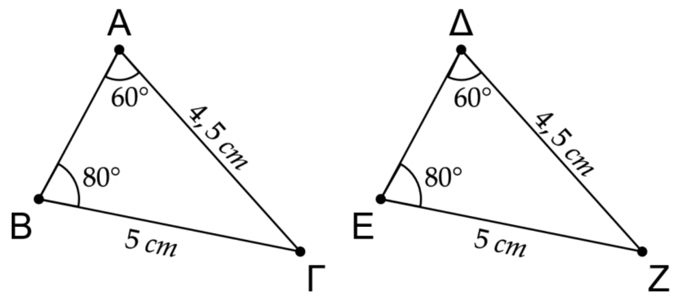
$$\hat{E} = 70^o$$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ τα οποία έχουν:

- $\hat{B} = \hat{E}$
- $ΒΓ = ΕΖ$
- $\hat{Γ} = \hat{Z}$

Άρα από κριτήριο $ΠΓΠ$ τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

Άσκηση 2-Λύση



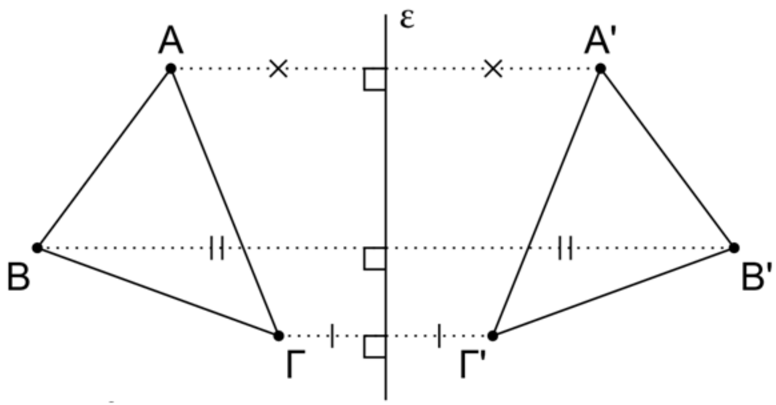
Στο $ΑΒΓ$ έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° \Rightarrow 60° + 80° + \hat{\Gamma} = 180° \Rightarrow \hat{\Gamma} = 40°$

Αντίστοιχα στο $ΔΕΖ$ έχουμε $\hat{Z} = 40°$

Από Κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι ίσα:

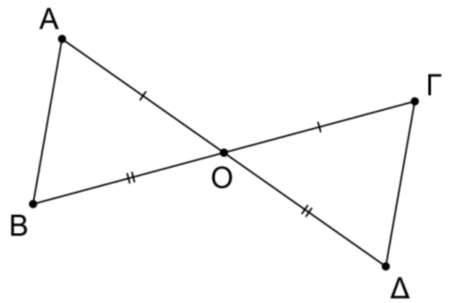
- $ΑΓ = ΔΖ$
- $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$
- $ΒΓ = ΕΖ$

Άσκηση 3-Λύση



Οι κορυφές A', B' και Γ' είναι τα συμμετρικά σημεία των κορυφών A, B και Γ ως προς την ευθεία ε. Επομένως και οι πλευρές $A'B'$, $A'\Gamma'$ και $B'\Gamma'$ είναι τα συμμετρικά ευθύγραμμα τμήματα των AB, $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα και άρα θα είναι και ίσα με αυτά. Επομένως, τα δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές του ίσες και από το κριτήριο ΠΠΠ θα είναι ίσα μεταξύ τους.

Άσκηση 4-Λύση



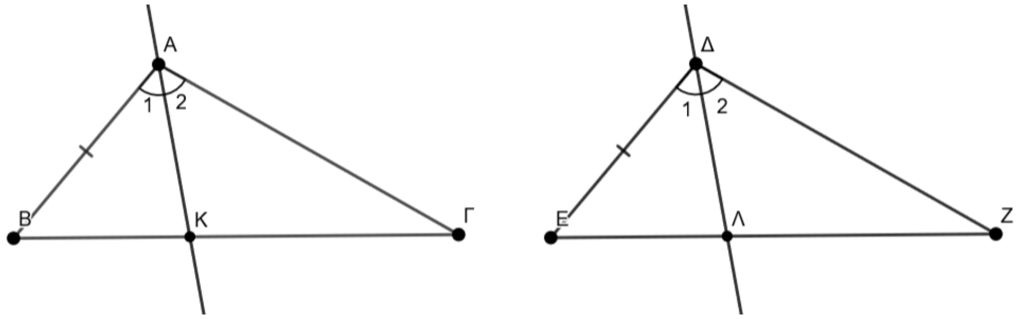
1. Συγκρίνω OAB και $O\Delta\Gamma$:

   - $OA = O\Gamma$ (δεδομένα)
   - $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (ως κατακορυφήν)
   - $OB = O\Delta$ (δεδομένα)

   Από Κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

2. Το τρίγωνο $OA\Gamma$ είναι ισοσκελές καθώς $OA = O\Gamma$. Όμοια το $OB\Delta$ είναι ισοσκελές γιατί $OB = O\Delta$.

Άσκηση 5-Λύση



1. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΚ$ και $ΑΕΛ$:
    - $ΑΒ = ΔΕ$ (δεδομένα)
    - $\widehat{A_1} = \widehat{Δ_1}$ (ως μισά ίσων γωνιών)
    - $ΑΚ = ΔΛ$ (δεδομένα)

    Άρα από κριτήριο $ΠΓΠ$ τα τρίγωνα είναι ίσα.

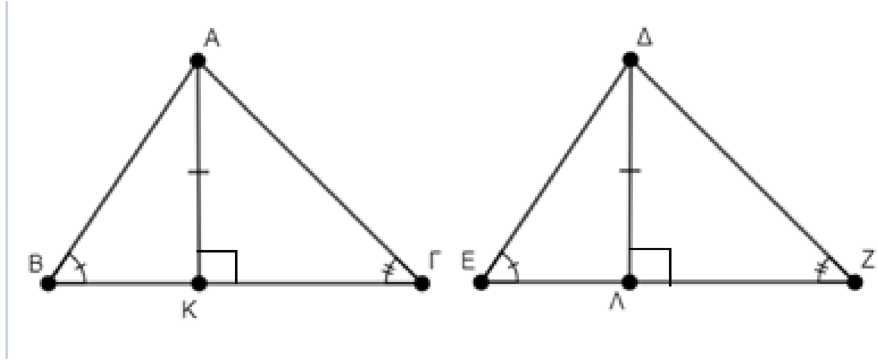
2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$
    - $ΑΒ = ΔΕ$ (δεδομένο)
    - $\hat{A} = \hat{Δ}$ (δεδομένο)
    - $\hat{B} = \hat{E}$ ($ΑΒΚ = ΑΕΛ$ από ερώτημα 1)

   Άρα από κριτήριο $ΓΠΓ$ τα τρίγωνα είναι ίσα.

3. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΚΓ$ και $ΔΛΖ$
    - $\widehat{A_2} = \widehat{Δ_2}$ (ως μισά ίσων γωνιών)
    - $ΑΓ = ΔΖ$ ($ΑΒΓ = ΔΕΖ$ από ερώτημα 2)
    - $\hat{Γ} = \hat{Z}$ ($ΑΒΓ = ΔΕΖ$ από ερώτημα 2)

   Άρα από ερώτημα $ΓΠΓ$ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Άσκηση 6-Λύση



1. Συγκρίνω ABK και $EΔΛ$:
    - Ορθογώνια $\widehat{K} = \hat{Λ} = 90°$
    - $\hat{B} = \hat{E}$ (δεδομένα)
    - $AK = ΔΛ$ (δεδομένα)

Από Κριτήριο ορθογωνίων τριγώνων τα ABK και $EΔΛ$ είναι ίσα.

Επίσης προκύπτει $BK = EΛ$ και $AB = ΔE$.

2. Συγκρίνω $AKΓ$ και $ΔΛZ$:
    - Ορθογώνια $\widehat{K} = \hat{Λ} = 90°$
    - $\hat{Γ} = \hat{Z}$ (δεδομένα)
    - $AK = ΔΛ$ (δεδομένα)

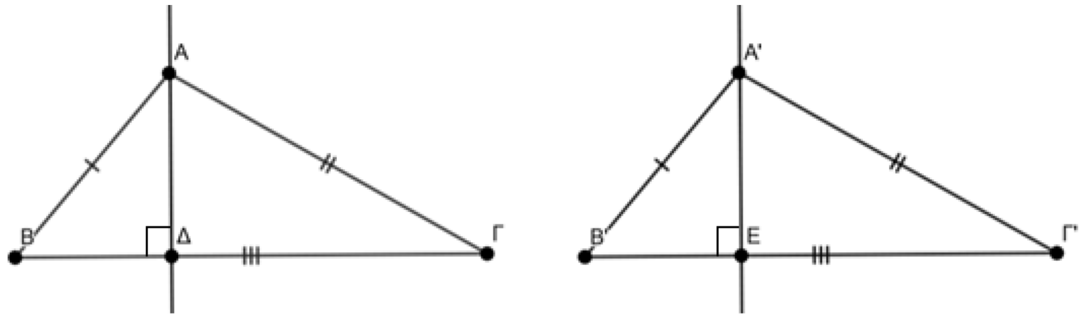
Από Κριτήριο ορθογωνίων τριγώνων τα $AKΓ$ και $ΔΛZ$ είναι ίσα.

Επίσης προκύπτει $KΓ = ΛZ$ και $AΓ = ΔZ$.

3. Συγκρίνω $ABΓ$ και $ΔEZ$:
    - $\hat{B} = \hat{E}$ (δεδομένα)
    - $BΓ = EZ$ (ως άθροισμα ίσων πλευρών: ΒΚ+ΚΓ=ΕΛ+ΛΖ)
    - $\hat{Γ} = \hat{Z}$ (δεδομένα)

Από Κριτήριο Γ-Π-Γ τα τρίγωνα $ABΓ$ και $ΔEZ$ είναι ίσα.

Άσκηση 7-Λύση



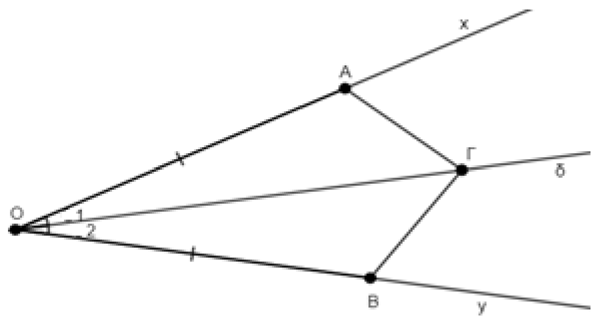
1. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AB\Delta$
   - $AB = A'B'$
   - $\hat{B} = \widehat{B}'$

   Άρα από κριτήριο $\Pi\Gamma$ για ορθογώνια $AB\Delta = AB\Delta$.

2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΔΓ
   - $A\Gamma = A\Gamma$
   - $\hat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$

   Άρα από κριτήριο $\Pi\Gamma$ για ορθογώνια $A\Delta\Gamma = A\Delta\Gamma$

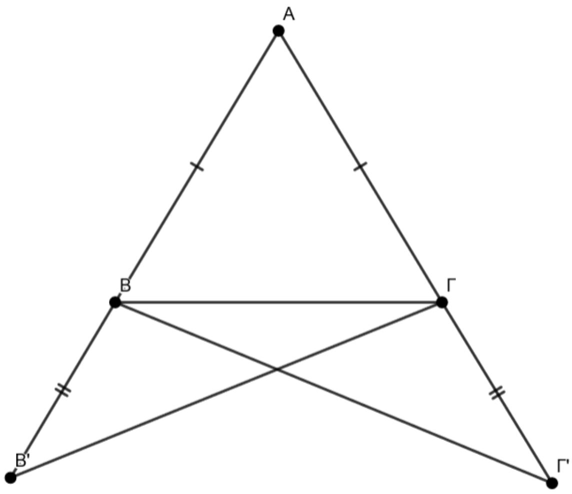
Άσκηση 8-Λύση



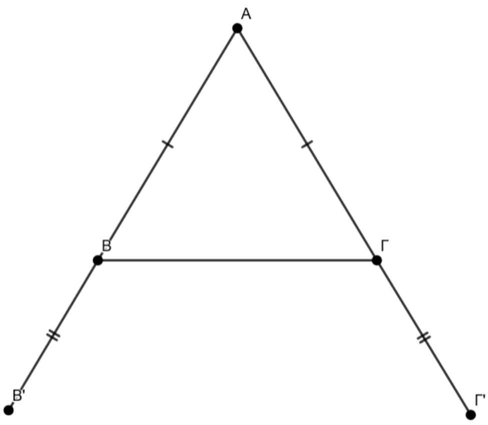
Συγκρίνω τα τρίγωνα $ΑΟΓ$ και $ΒΟΓ$:

- $ΟΑ = ΟΒ$ (δεδομένα)
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ($Οδ$ διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$)
- $Οδ$ κοινή πλευρά

Άρα από Κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα $ΑΟΓ$ και $ΒΟΓ$ είναι ίσα και άρα $ΑΓ = ΒΓ$.



Άσκηση 9-Λύση



1. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒ'Γ$ και $ΑΓ'Β$
   - $ΑΒ' = ΑΓ'$ (ως αθροίσματα ίσων τμημάτων $ΑΒ' = ΑΒ + ΒΒ'$ και $ΑΓ' = ΑΓ + ΓΓ'$)
   - $\hat{A}$
   - $ΑΒ = ΑΓ$ (δεδομένα)

   Άρα από κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

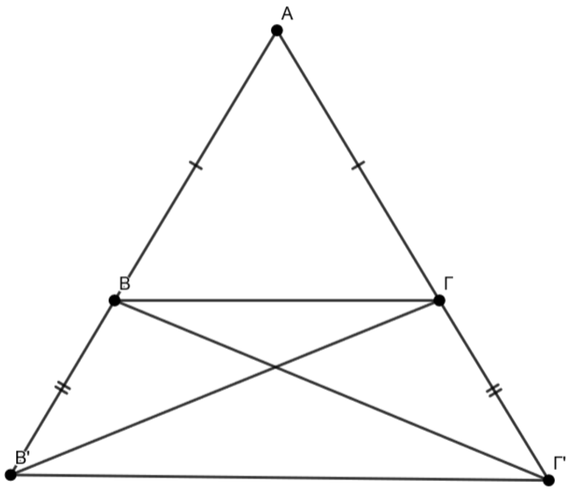
2. $AB = A\Gamma$ (δεδομένα)

   $BB' = \Gamma\Gamma'$ (δεδομένα)

   Επίσης

   $AB' = AB + BB'$ και $A\Gamma' = A\Gamma + \Gamma\Gamma'$

   Άρα $AB' = A\Gamma'$ ως αθροίσματα ίσως τμημάτων και άρα το τρίγωνο $AB'\Gamma'$ είναι ισοσκελές.

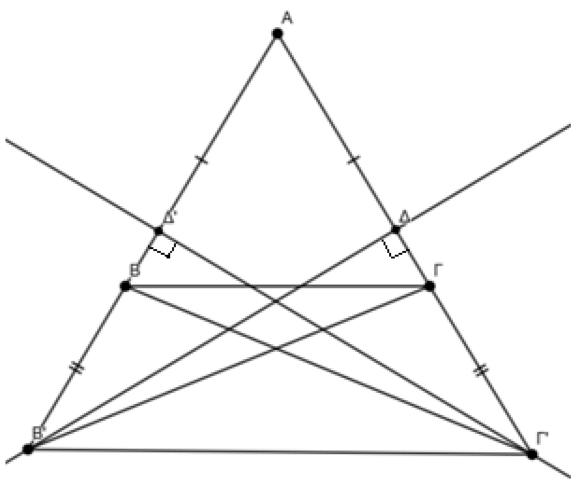


3. Φέρουμε κάθετες από τα σημεία B' και Γ' προς τις πλευρές $A\Gamma'$ και AB' που τις τέμνουν στα σημεία Δ και Δ' αντίστοιχα.

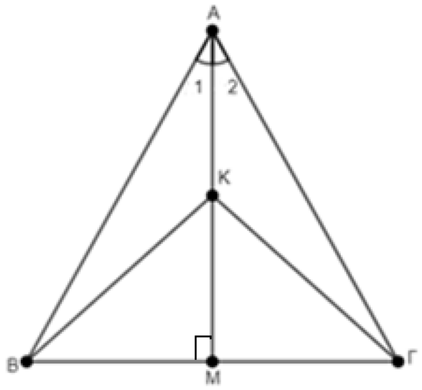
   Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $B'\Gamma'\Delta$ και $\Gamma'B'\Delta'$:

   - $B'\Gamma'$ (κοινή πλευρά)
   - $\widehat{B'} = \widehat{\Gamma'}$ (το τρίγωνο $AB'\Gamma'$ είναι ισοσκελές)

   Άρα από κριτήριο ΠΓ για ορθογώνια τρίγωνα $B'\Gamma'\Delta' = \Gamma'B'\Delta$ και άρα $B'\Delta = \Gamma'\Delta'$.



Άσκηση 10-Λύση



$AB\Gamma$ ισοσκελές και AM διάμεσος, άρα AM και διχοτόμος ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$) και ύψος ($\widehat{M} = 90°$)

1. Συγκρίνω BKM και $MK\Gamma$:
   - Ορθογώνια $\widehat{M} = 90°$
   - $BM = M\Gamma$ (AM διάμεσος)
   - KM κοινή πλευρά

   Από Κριτήριο ορθογωνίων ΠΠ τριγώνων τα BKM και $MK\Gamma$ είναι ίσα.

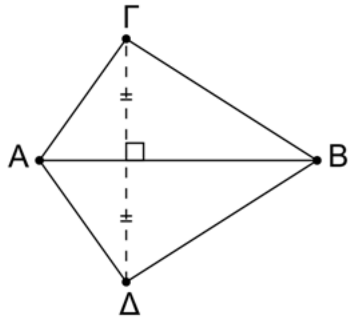
2. Συγκρίνω ABK και $AK\Gamma$:
   - $AB = A\Gamma$ (ΑΒΓ ισοσκελές)
   - $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΑΜ διχοτόμος)
   - AK κοινή πλευρά

   Από Κριτήριο Π-Γ-Π τα ABK και $AK\Gamma$ ίσα.

3. Από τις προηγούμενες ισότητες τριγώνων προκύπτει ότι $BK = K\Gamma$ άρα $BK\Gamma$ ισοσκελές.

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση



Έστω E το σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος AB και του $\Gamma\Delta$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\Gamma E$ και $A\Delta E$

- $\Gamma E = \Delta E$ (δεδομένα)
- AE (κοινή πλευρά)

Άρα από κριτήριο $\Pi\Pi$ για ορθογώνια τρίγωνα $A\Gamma E = A\Delta E$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $B\Gamma E$ και $B\Delta E$

- $\Gamma E = \Delta E$ (δεδομένα)
- BE (κοινή πλευρά)

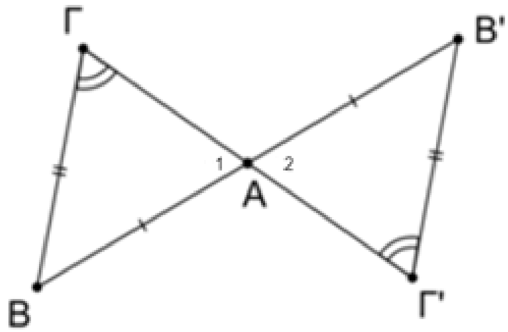
Άρα από κριτήριο $\Pi\Pi$ για ορθογώνια τρίγωνα $B\Gamma E = B\Delta E$

Προσθέτουμε κατά μέλη τα τρίγωνα και παίρνουμε ότι

$$A\Gamma E + B\Gamma E = A\Delta E + B\Delta E$$

$$AB\Gamma = AB\Delta$$

Άσκηση 2-Λύση



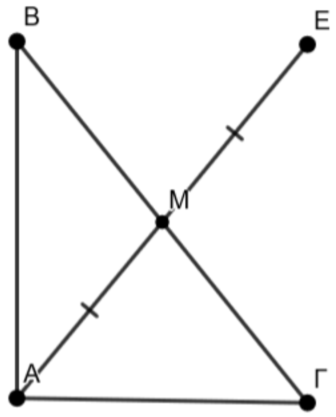
Από το σχήμα παίρνω ότι $AB = AB'$, $BΓ = B'Γ'$. Επίσης $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ως κατακορυφήν) και $\hat{Γ} = \widehat{Γ'}$. Από τις τελευταίες ισότητες γωνιών προκύπτει ότι και $\hat{B} = \widehat{B'}$.

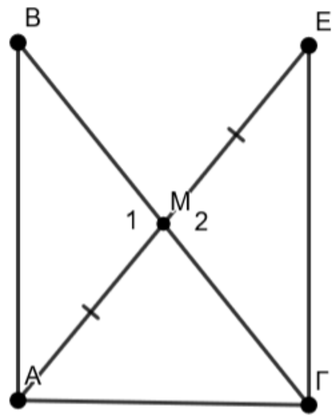
Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ'Γ':

- $AB = AB'$
- $\hat{B} = \widehat{B'}$
- $BΓ = B'Γ'$

Από Κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα $ABΓ$ και $AB'Γ'$ είναι ίσα.

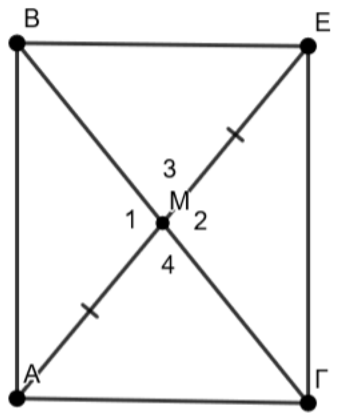
Άσκηση 3-Λύση





1. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AMB = M\Gamma E$
   - $AM = ME$ (δεδομένα)
   - $BM = M\Gamma$ (AM διάμεσος)
   - $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (ως κατακορυφήν)

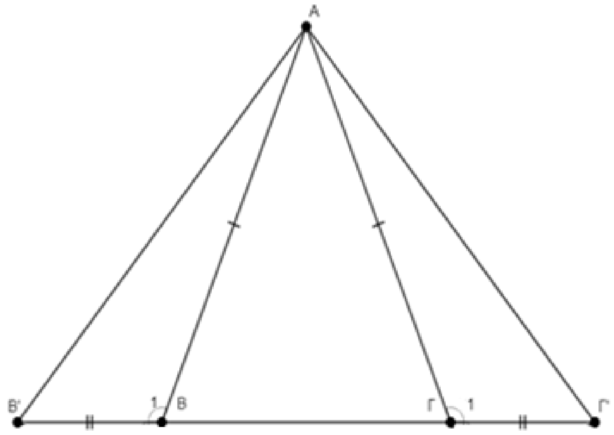
   Άρα από κριτήριο ΠΓΠ $AMB = M\Gamma E$.



2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα BME και $AM\Gamma$
   - $AM = ME$ (δεδομένα)
   - $BM = M\Gamma$ (AM διάμεσος)
   - $\widehat{M_3} = \widehat{M_4}$ (ως κατακορυφήν)

   Άρα από κριτήριο ΠΓΠ $BME = AM\Gamma$.

Άσκηση 4-Λύση



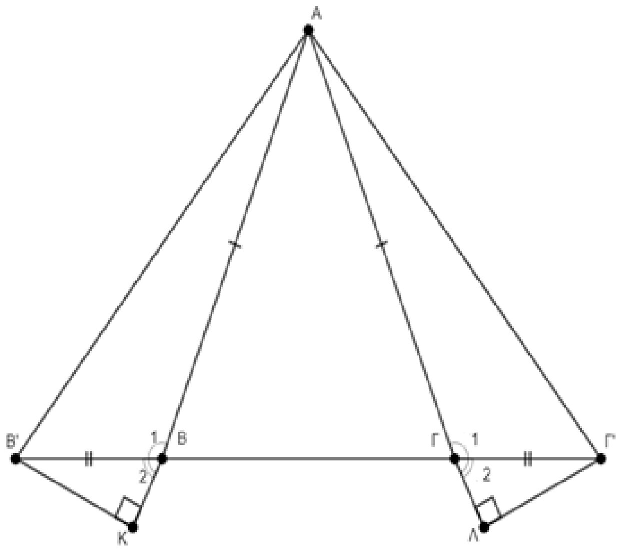
$AB\Gamma$ ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

1. Συγκρίνω τα τρίγωνα ABB' και $A\Gamma\Gamma'$:
    - $AB = A\Gamma$ (δεδομένα)
    - $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών)
    - $BB' = \Gamma\Gamma'$ (δεδομένα)

    Από Κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα ABB' και $A\Gamma\Gamma'$ είναι ίσα.

2. Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι $AB' = A\Gamma'$ άρα $AB'\Gamma'$ ισοσκελές.

3.

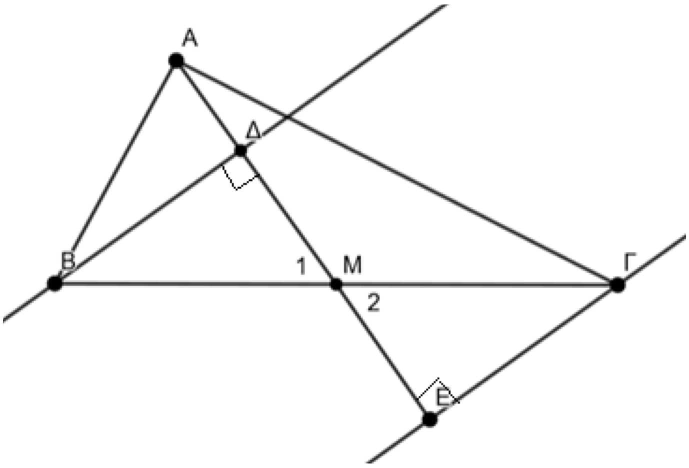


Φέρνω τις αποστάσεις των B' και Γ' στην AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα και συγκρίνω τα τρίγωνα $BB'K$ και $\Gamma\Gamma'\Lambda$:

- $\widehat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$
- $BB' = \Gamma\Gamma'$ (δεδομένα)
- $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$ (ως κατακορυφήν ίσων γωνιών $\hat{B} = \hat{\Gamma}$)

Από Κριτήριο ορθογωνίων τριγώνων τα τρίγωνα $BB'K$ και $\Gamma\Gamma'\Lambda$ είναι ίσα άρα και $B'K = \Gamma'\Lambda$.

Άσκηση 5-Λύση

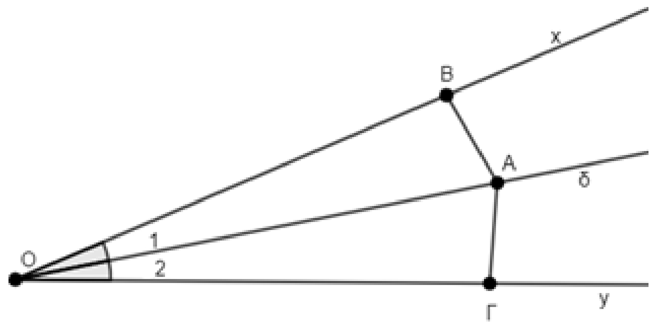


1. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $Β\Delta Μ$ και $\Gamma ΕΜ$
    - Ορθογώνια τρίγωνα
    - $ΒΜ = Β\Gamma$ ($ΑΜ$ διάμεσος)
    - $\widehat{M_1 = }\widehat{M_2}$

   Άρα από κριτήριο ισότητα $\Upsilon - \Gamma$ για ορθογώνια τρίγωνα $Β\Delta Μ = \Gamma ΕΜ$.

2. Τα τμήματα $Β\Delta$ και $\Gamma Ε$ επειδή είναι απέναντι από ίσες γωνίες σε ίσα τρίγωνα.

Άσκηση 6-Λύση

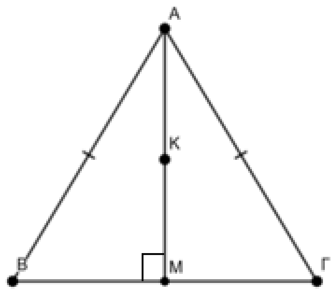


Συγκρίνω τα τρίγωνα $OAB = OA\Gamma$:

- $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90°$
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ($O\delta$ διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$)
- OA κοινή πλευρά

Από Κριτήριο ορθογωνίων τριγώνων τα OAB και $OA\Gamma$ είναι ίσα.

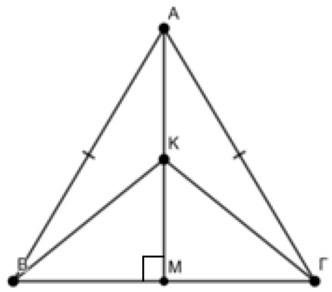
Άσκηση 7-Λύση



1. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα BKM και ΓKM.

   Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια, καθώς το AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση ισοσκελούς τριγώνου, άρα είναι και ύψος. Επίσης, τα τρίγωνα έχουν:

   - $BM = B\Gamma$ (AM διάμεσος)
   - KM (κοινή πλευρά)

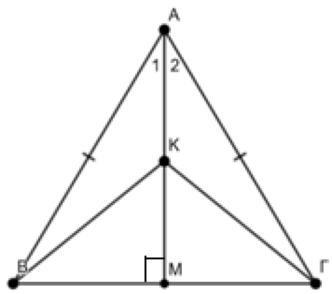


Άρα από κριτήριο $\Pi\Gamma$ σε ορθογώνια τρίγωνα $BKM = \Gamma KM$.

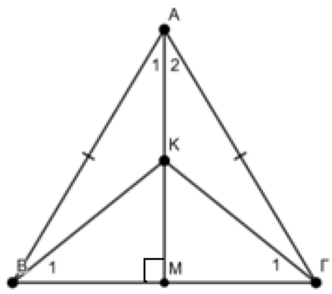
2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABK και $A\Gamma K$

   - $AB = A\Gamma$ (δεδομένα)
   - AK (κοινή πλευρά)
   - $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

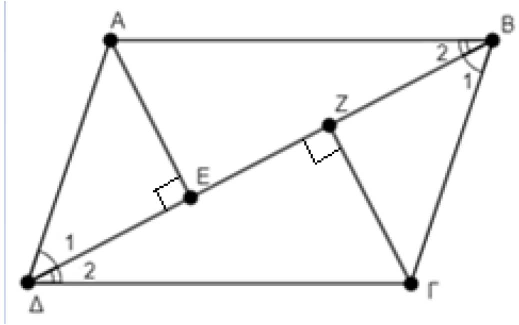
   Άρα από κριτήριο $\Pi\Gamma\Pi$ $ABK = A\Gamma K$.



3. $BKM = \Gamma KM$ από ερώτημα 1 και άρα $\widehat{B_1} = \widehat{\Gamma_1}$. Άρα το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές.



Άσκηση 8-Λύση



$ΑΒΓΔ$ παραλληλόγραμμο και γνωρίζω ότι $AB = ΓΔ$ και $AΔ = BΓ$ καθώς και $\hat{A} = \hat{Γ}$ και $\hat{B} = \hat{Δ}$. Συγκρίνω τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΒΓΔ$:

- $AB = ΓΔ$
- $AΔ = BΓ$
- $BΔ$ κοινή πλευρά

Από Κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΒΓΔ$ είναι ίσα

Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει επίσης $\hat{Δ}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{Δ}_2 = \hat{B}_2$.

1. Συγκρίνω τα τρίγωνα $AΔE$ και $ΓBZ$:
   - Ορθογώνια τρίγωνα
   - $AΔ = BΓ$
   - $\hat{Δ}_1 = \hat{B}_1$

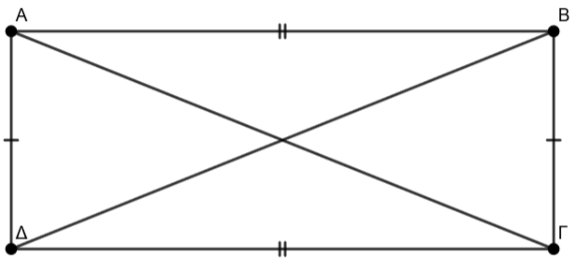
   Από Κριτήριο ΠΓ τα $AΔE$ και $ΓBZ$ είναι ίσα.

2. Συγκρίνω τα τρίγωνα AEB και $ΓZΔ$:
   - Ορθογώνια τρίγωνα
   - $AB = ΓΔ$
   - $\hat{Δ}_2 = \hat{B}_2$

   Από Κριτήριο ορθογωνίων τριγώνων τα AEB και $ΓZΔ$ είναι ίσα.

3. Από τις ισότητες τριγώνων στα προηγούμενα ερωτήματα προκύπτει ότι $AE = ΓZ$.

Άσκηση 9-Λύση



Έστω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και οι διαγώνιοί του $ΑΓ$ και $ΒΔ$.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΓΔ$ και $ΒΓΔ$:

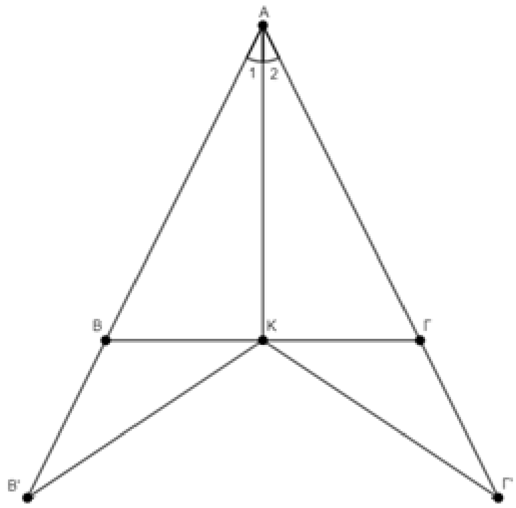
- $ΑΔ = ΒΓ$
- $ΔΓ$ (κοινή πλευρά)

Άρα από κριτήριο $ΠΠ$ για ορθογώνια τρίγωνα $ΑΓΔ = ΒΓΔ$ και άρα $ΑΓ = ΒΔ$ επειδή βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες και ίσα τρίγωνα.

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

Άσκηση 10-Λύση

Το K είναι το μέσον της $B\Gamma$ άρα AK διάμεσος του $AB\Gamma$ το οποίο είναι ισοσκελές. Επομένως AK και διχοτόμος της $\hat{A}$ και ύψος του $AB\Gamma$.



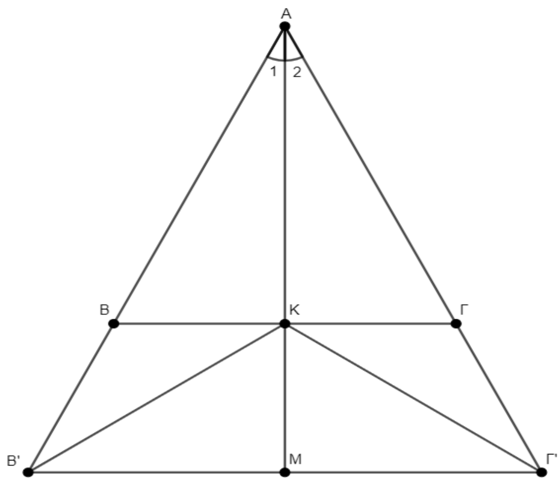
1. Συγκρίνω τα τρίγωνα AKB' και $AK\Gamma'$:
   - $AB' = A\Gamma'$ (δεδομένα)
   - $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (AK διχοτόμος της $\hat{A}$)
   - AK κοινή πλευρά

   Από Κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα AKB' και $AK\Gamma'$ είναι ίσα.

2.

Συγκρίνω τα τρίγωνα $AB'M$ και $A\Gamma'M$:

- $AB' = A\Gamma'$ (δεδομένα)
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (AM ως προέκταση της AK διχοτόμος της $\hat{A}$)
- AM κοινή πλευρά



Από Κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα $AB'M$ και $A\Gamma'M$ είναι ίσα.

Άρα και $B'M = \Gamma'M$. Επίσης από προηγούμενο ερώτημα γνωρίζω ότι $KB' = K\Gamma'$ άρα το $KB'\Gamma'$ είναι ισοσκελές.

Επομένως KM είναι διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $KB'\Gamma'$ άρα και διχοτόμος της γωνίας $B'\widehat{K}\Gamma'$.

1.2. Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Λάθος. Είναι μόνο αν έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

στ. Σωστό

ζ. Λάθος. Μπορεί με την χρήση κανόνα και διαβήτη.

η. Σωστό

θ. Σωστό

ι. Λάθος. Αντιπαράδειγμα: Μπορεί $AB = 9cm$ και $\Gamma\Delta = 15cm$

Ερώτηση Κατανόησης 2 - Απάντηση

α. i.

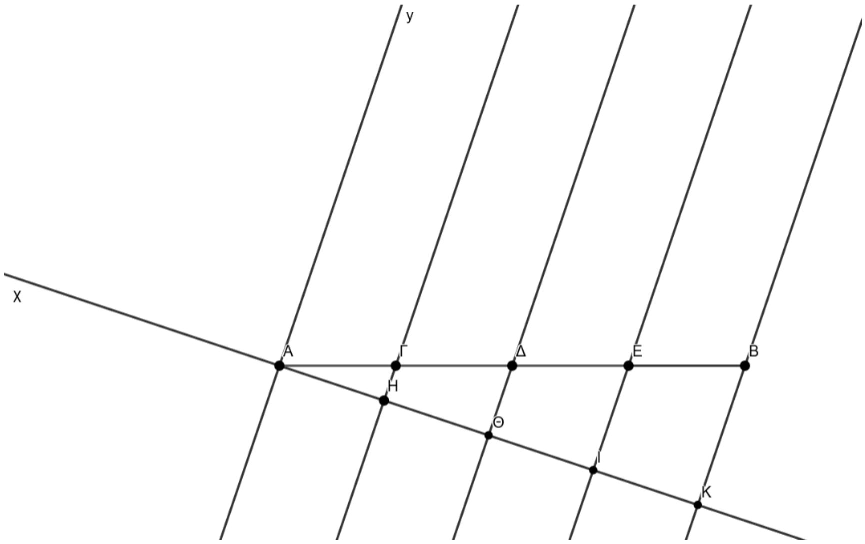
β. iii.

γ. i.

δ. ii.

Ερώτηση Κατανόησης 3 - Απάντηση

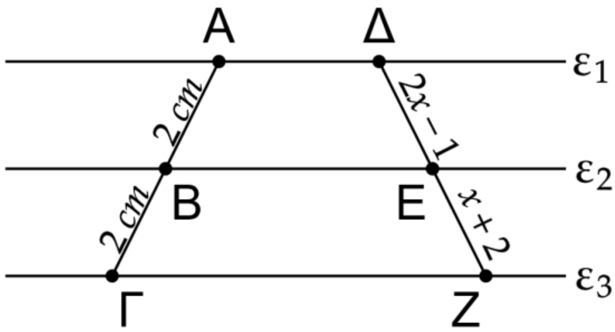
Σχεδιάζουμε το τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα AB. Από το σημείο Α φέρουμε μία τυχαία ημιευθεία $A\chi$ και πάνω σε αυτή παίρνουμε με τον διαβήτη 4 διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα AH, $H\Theta$, ΘI , IK.



Ενώνουμε το σημείο B με το σημείο K. Στη συνέχεια από τα σημεία I , Θ και H φέρνουμε IE , $\Theta\Delta$, $H\Gamma$ και Ay παράλληλες προς την BK.

Οι παράλληλες αυτές ορίζουν ίσα τμήματα στην $A\chi$ και έτσι θα ορίζουν και στην AB. Επομένως, έχουμε $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E = EB$.

Ερώτηση Κατανόησης 4 - Απάντηση



Οι παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 ορίζουν ίσα τμήματα στην ευθεία $A\Gamma$ ($AB = B\Gamma = 2cm$). Άρα θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην άλλη ευθεία που τις τέμνει, την ΔE. Έτσι προκύπτει:

$\Delta E = EZ \Rightarrow$

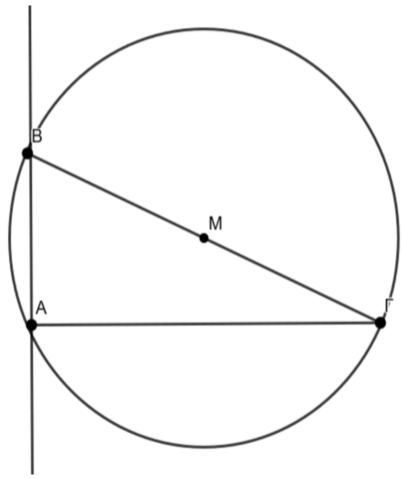
$2x - 1 = x + 2 \Rightarrow$

$2x - x = 2 + 1 \Rightarrow$

$x = 3$

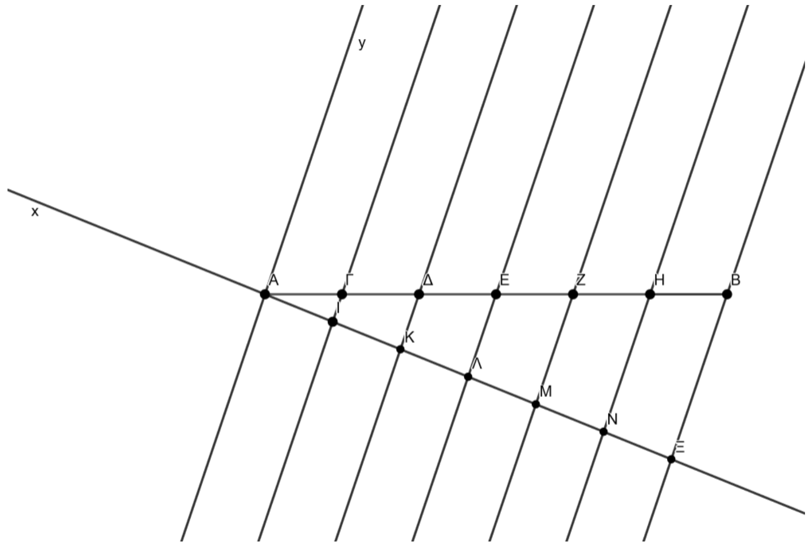
Ερώτηση Κατανόησης 5 - Απάντηση

Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι η κορυφή A του τριγώνου ανήκει πάνω στην περιφέρεια του κύκλου.



Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση



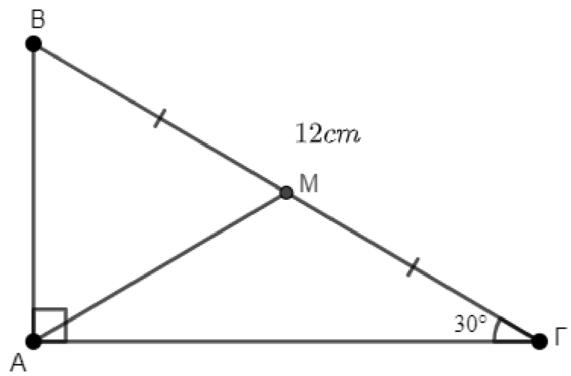
1. Παίρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα $AB = 10cm$. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε μία ημιευθεία $A\chi$ και με τον διαβήτη παίρνουμε 6 διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα AI , IK , $K\Lambda$, ΛM , MN, $N\Xi$. Στην συνέχεια φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα $B\Xi$. Μετά φέρνουμε ευθύγραμμα τμήματα $I\Gamma$, $K\Delta$, $\Lambda\Xi$, MZ , NH , Ay παράλληλα προς το $B\Lambda$. Οι παράλληλες αυτές ορίζουν ίσα τμήματα στην $A\chi$ και άρα θα ορίζουν ίσα τμήματα και στο AB. Επομένως:

$$A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E = EZ = ZH = HB.$$

2. 

3. $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{\frac{1}{6}AB}{AB} = \frac{1}{6}$, $\frac{\Delta Z}{\Gamma\Delta} = \frac{\frac{5}{6}AB}{\frac{1}{6}AB} = 5$, $\frac{ZE}{\Gamma\Delta} = \frac{\frac{3}{7}AB}{\frac{1}{6}AB} = \frac{18}{7}$

Άσκηση 2-Λύση



$AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο. Γνωρίζουμε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με $\mathbf{30}°$, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $\boldsymbol{AB} = \frac{\boldsymbol{B\Gamma}}{2} = \frac{12}{2} = 6cm$.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

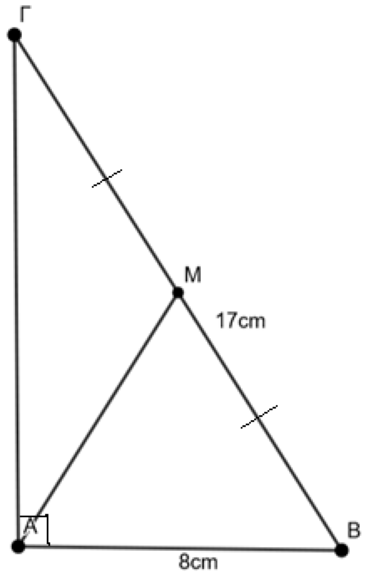
$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Rightarrow \ 12^2 = 6^2 + A\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$A\Gamma^2 = 144 - 36 = 108 \Rightarrow A\Gamma = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $AM = \frac{BM}{2} = \frac{12}{2} = 6cm$.

1. $\frac{AM}{A\Gamma} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
2. $\frac{AM}{B\Gamma} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
3. $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Άσκηση 3-Λύση



Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$A\Gamma^2 + AB^2 = B\Gamma^2$$

$$A\Gamma^2 + 8^2 = 17^2$$

$$A\Gamma^2 = 289 - 64$$

$$A\Gamma^2 = 225$$

$$A\Gamma = 15$$

1. $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{8}{15}$

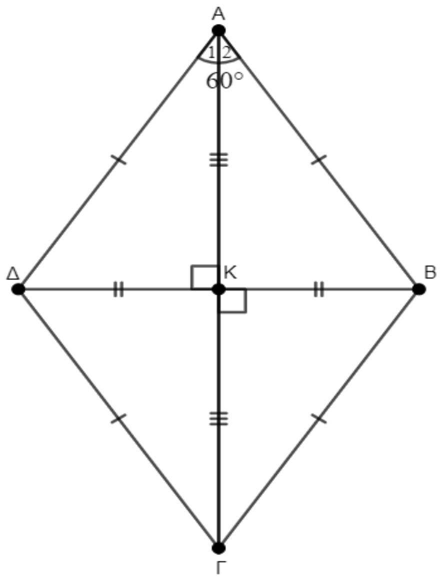
2. Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Άρα:

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{17}{2} = 8.5 \quad \text{οπότε:} \quad \frac{AM}{A\Gamma} = \frac{8.5}{15}$$

3. Το M είναι μέσο της $B\Gamma$, άρα:

$$BM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{17}{2} = 8.5 \quad \text{άρα} \quad \frac{BM}{AB} = \frac{8.5}{8}$$

Άσκηση 4-Λύση



$ΑΒΓΔ$ ρόμβος και γνωρίζουμε ότι:

- Οι διαγώνιες είναι κάθετες και διχοτομούνται, δηλαδή $ΑΚ = ΓΚ$ και $ΒΚ = ΔΚ$ και $\widehat{K} = 90°$.
- Οι διαγώνιές του είναι και διχοτόμοι των γωνιών του, δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$.
- $ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΑΔ$.

1. Το τρίγωνο $ΑΔΚ$ είναι ορθογώνιο με $\widehat{K} = 90°$.
   Επίσης $\hat{A}_1 = 30°$ άρα $ΔΚ = \frac{ΑΔ}{2}$.
   Έτσι:
$$\frac{ΔΚ}{ΑΔ} = \frac{\frac{ΑΔ}{2}}{ΑΔ} = \frac{1}{2}$$

2. Το τρίγωνο $ΑΒΚ$ είναι ορθογώνιο με $\widehat{K} = 90°$.
   Επίσης $\hat{A}_2 = 30°$ άρα $ΒΚ = \frac{ΑΒ}{2}$. Έτσι:
$$\frac{ΒΚ}{ΑΒ} = \frac{\frac{ΑΒ}{2}}{ΑΒ} = \frac{1}{2}$$

3. Θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $ΑΒΚ$:

$$ΑΒ^2 = ΑΚ^2 + ΒΚ^2$$

$$ΑΒ^2 = ΑΚ^2 + \left(\frac{ΑΒ}{2}\right)^2 = ΑΚ^2 + \frac{ΑΒ^2}{4}$$

$$4ΑΒ^2 = 4ΑΚ^2 + ΑΒ^2$$

$$3ΑΒ^2 = 4ΑΚ^2$$

$$ΑΒ^2 = \frac{4}{3}ΑΚ^2$$

$$ΑΒ = \frac{2}{\sqrt{3}}ΑΚ \text{ άρα: } \frac{ΑΚ}{ΑΒ} = \frac{ΑΚ}{\frac{2}{\sqrt{3}}ΑΚ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. Θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $ΑΔΚ$:

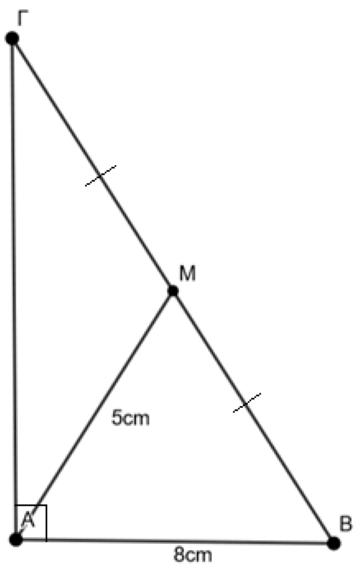
$$ΑΔ^2 = ΑΚ^2 + ΔΚ^2$$
$$(2ΔΚ)^2 = ΑΚ^2 + ΔΚ^2$$
$$4ΔΚ^2 = ΑΚ^2 + ΔΚ^2$$
$$3ΔΚ^2 = ΑΚ^2$$
$$ΑΚ = \sqrt{3}ΔΚ$$

Έτσι:

$$\frac{ΑΚ}{ΔΚ} = \frac{\sqrt{3}ΔΚ}{ΔΚ} = \sqrt{3}$$

Άσκηση 5-Λύση

Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Άρα:



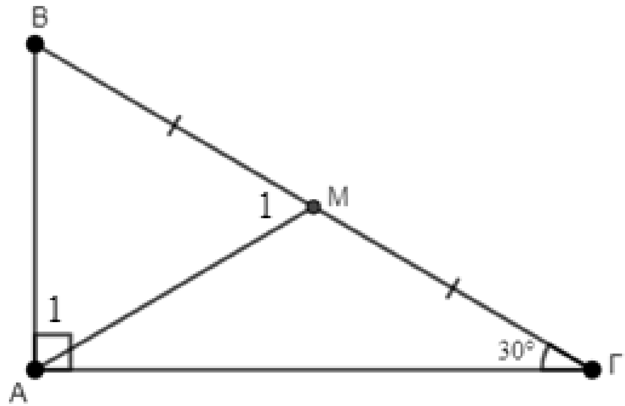
$$ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} \text{ άρα } 5 = \frac{ΒΓ}{2} \text{ άρα } ΒΓ = 10$$

Επίσης, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$ΑΓ^2 + ΑΒ^2 = ΒΓ^2$$
$$ΑΓ^2 + 8^2 = 10^2$$
$$ΑΓ^2 = 100 - 64$$
$$ΑΓ^2 = 36 \text{ άρα } ΑΓ = 6$$

1. $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
2. $\frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
3. $\frac{ΑΜ}{ΒΓ} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Άσκηση 6-Λύση



Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{Γ} = 30°$.

Θα αποδείξουμε ότι $AB = \frac{BΓ}{2}$.

Επειδή $\hat{Γ} = 30°$, είναι:

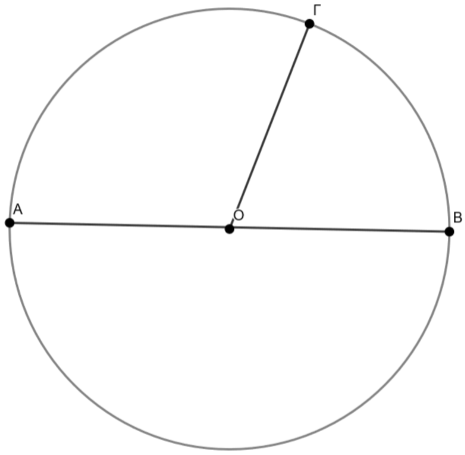
$$\hat{B} = 90° - 30° = 60°.$$

Φέρουμε τη διάμεσο AM οπότε σύμφωνα με γνωστό θεώρημα είναι $AM = \frac{BΓ}{2} = MB$. ηλαδή το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με βάση AB, οπότε όπως γνωρίζουμε οι προσκείμενες γωνίες στην βάση θα είναι ίσες δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{B} = 60°$.

Επειδή το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι $180°$, θα είναι και $\widehat{M}_1 = 60°$ οπότε το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.

Επομένως $AB = MB = \frac{BΓ}{2}$.

Άσκηση 7-Λύση



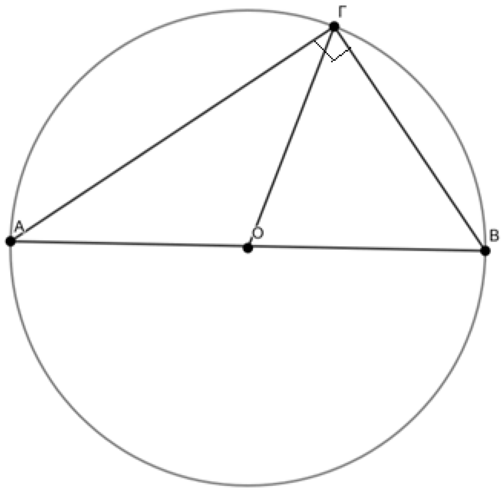
1ος τρόπος:

AB διάμετρος άρα $AB = 2\rho$

$O\Gamma$ ακτίνα άρα $O\Gamma = \rho$

Επομένως, $\frac{O\Gamma}{AB} = \frac{\rho}{2\rho} = \frac{1}{2}$

2ος τρόπος:



Δημιουργούμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ το οποίο είναι ορθογώνιο με ορθή την γωνία $\hat{\Gamma}$, καθώς η γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ίση με 90^o.

Το O είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB και άρα ΓO είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

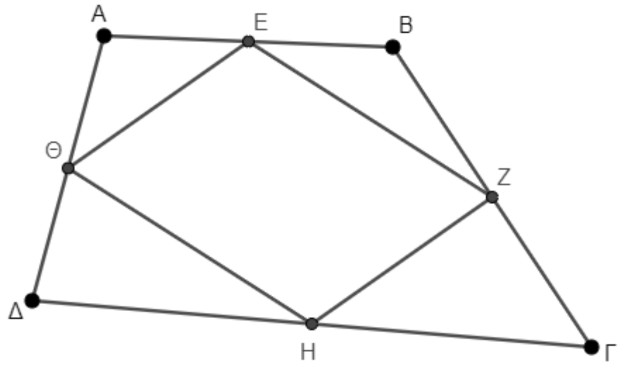
Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα:

$$\Gamma O = \frac{AB}{2}$$

Και τελικά

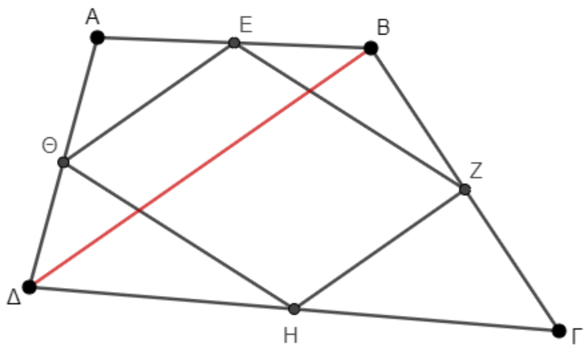
$$\frac{O\Gamma}{AB} = \frac{\frac{AB}{2}}{AB} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 8-Λύση



Θεωρούμε τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ και τα μέσα $Ε, Ζ, Η, Θ$ των $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ$ αντίστοιχα.

Θα αποδείξουμε ότι το $ΕΖΗΘ$ είναι παραλληλόγραμμο.



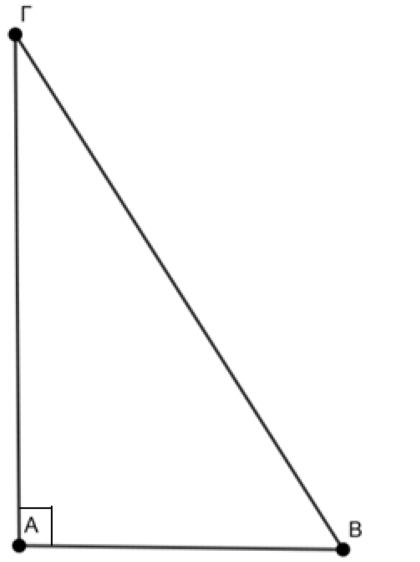
Φέρουμε τη διαγώνιο $ΒΔ$. Παρατηρούμε ότι τα $Ε$ και $Θ$ είναι τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $ΑΒΔ$.

Γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της, δηλαδή: $ΕΘ || ΒΔ$ και $ΕΘ = \frac{ΒΔ}{2}$.

Όμοια από το τρίγωνο ΒΓΔ προκύπτει ότι $ΖΗ || ΒΔ$ και $ΖΗ = \frac{ΒΔ}{2}$.

Έτσι προκύπτει ότι $ΕΘ = ΖΗ$ και $ΕΘ || ΖΗ$, οπότε το $ΕΖΗΘ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 9-Λύση



Αφού η υποτείνουσα AB είναι διπλάσια από την πλευρά $B\Gamma$, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά $B\Gamma$ θα είναι 30^o. Επομένως,

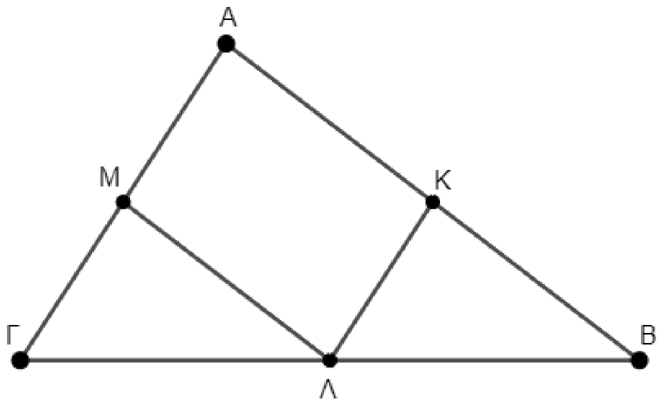
$\hat{\Gamma} = 30^o$ άρα:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$ δηλαδή:

$90^o + \hat{B} + 30^o = 180^o$ άρα:

$\hat{B} = 60^o$

Άσκηση 10-Λύση



Το ευθύγραμμο τμήμα $K\Lambda$ συνδέει τα μέσα των AB και $B\Gamma$ οπότε:

$$K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$$

Αντίστοιχα για το ευθύγραμμο τμήμα ΛM προκύπτει:

$$\Lambda M = \frac{AB}{2}$$

Η περίμετρος του τριγώνου $BK\Lambda$ είναι:

$$BK + K\Lambda + \Lambda B$$

Η περίμετρος του τριγώνου $\Lambda M\Gamma$ είναι: $\Gamma\Lambda + \Lambda M + M\Gamma$

Αθροίζοντας τις περιμέτρους των δύο τριγώνων παίρνουμε:

$$BK + K\Lambda + \Lambda B + \Gamma\Lambda + \Lambda M + M\Gamma =$$

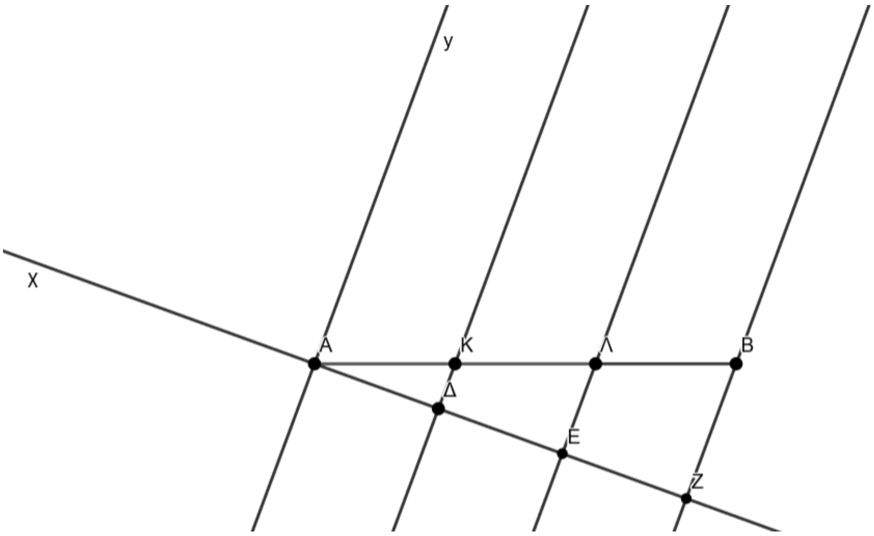
$$\frac{AB}{2} + \frac{A\Gamma}{2} + B\Gamma + \frac{AB}{2} + \frac{A\Gamma}{2} =$$

$$AB + A\Gamma + B\Gamma$$

Όπου είναι η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$.

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση



1. Παίρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα $AB = 7cm$. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε μία ημιευθεία $A\chi$ και με τον διαβήτη παίρνουμε 3 διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$, ΔE , EZ.

   Στην συνέχεια φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα BZ. Μετά φέρνουμε ευθύγραμμα τμήματα ΔK , $E\Lambda$, Ay παράλληλα προς το BZ.

   Οι παράλληλες αυτές ορίζουν ίσα τμήματα στην $A\chi$ και άρα θα ορίζουν ίσα τμήματα και στο AB και άρα $AK = K\Lambda = \Lambda B$.

2. Ισχύει ότι $K\Lambda = \frac{AB}{3}$ και $B\Lambda = \frac{AB}{3}$, άρα:

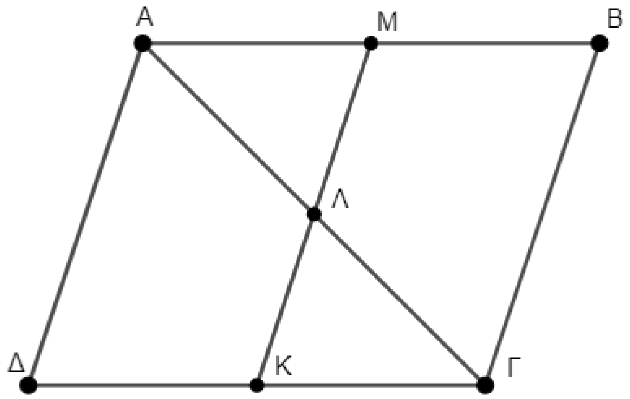
$$\frac{K\Lambda}{B\Lambda} = \frac{\frac{AB}{3}}{\frac{AB}{3}} = 1$$

$$\frac{K\Lambda}{AB}=\frac{\frac{AB}{3}}{AB}=\frac{1}{3}$$

Επίσης ισχύει ότι $AK=\frac{AB}{3}$ και $A\Lambda=\frac{2AB}{3}$, άρα:

$$\frac{AK+B\Lambda}{A\Lambda}=\frac{\frac{AB}{3}+\frac{AB}{3}}{\frac{2AB}{3}}=\frac{\frac{2AB}{3}}{\frac{2AB}{3}}=1$$

Άσκηση 2-Λύση



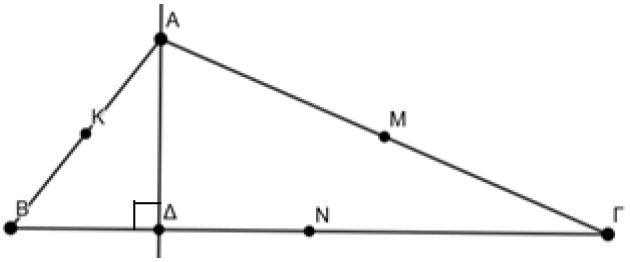
1. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε M μέσο της AB και $M\Lambda||\mathrm{B\Gamma}$ ($MK||\mathrm{B\Gamma}$). Επομένως Λ μέσο της $A\Gamma$.

   Όμοια στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε Λ μέσο της $A\Gamma$ και $\Lambda K||\mathrm{A\Delta}$ ($MK||\mathrm{A\Delta}$). Επομένως K μέσο της $\Delta\Gamma$.

2. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $BM=AM$ (M μέσο της AB) και $\Gamma\Lambda=A\Lambda$ (Λ μέσο της $A\Gamma$). Έτσι:

$$\frac{BM}{AM}=\frac{\Gamma\Lambda}{A\Lambda}=1$$

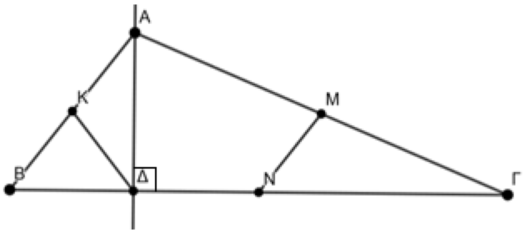
Άσκηση 3-Λύση



1. Για το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$:

   Η διάμεσος ΔK που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα:

   $$\Delta K = \frac{AB}{2}$$

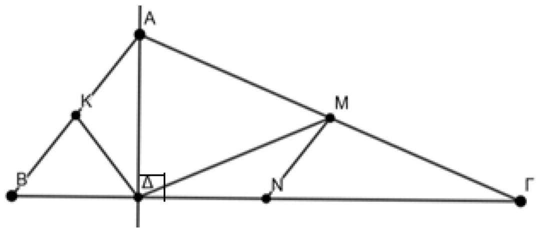
   Για το τρίγωνο $AB\Gamma$:

   Το ευθύγραμμο τμήμα MN που ενώνει τα μέσα των πλευρών $A\Gamma$ και $B\Gamma$ θα είναι ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς του AB, άρα:

   $$MN = \frac{AB}{2}$$

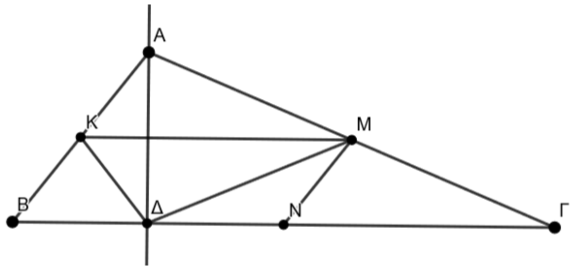
   Επομένως: $\Delta K = MN$

2. Στο **ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$** η διάμεσος ΔM που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $A\Gamma$ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα:

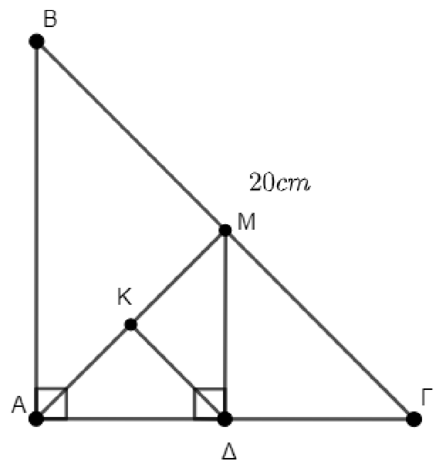
   $$\Delta M = \frac{A\Gamma}{2}$$

3. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ το ευθύγραμμο τμήμα $ΚΜ$ που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών του $ΑΒ$ και $ΑΓ$ θα είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του $ΒΓ$, άρα:



$$MN||ΒΓ$$

Άσκηση 4-Λύση



Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90°$) και η $ΑΜ$ διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $ΒΓ$. Έτσι:

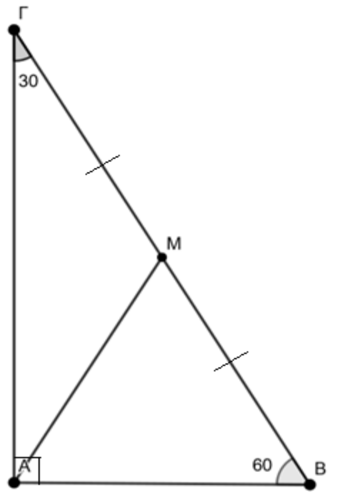
$$AM = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{20}{2} = 10cm.$$

Το τρίγωνο $ΑΜΔ$ είναι ορθογώνιο ($\hat{Δ} = 90°$) και η $ΔΚ$ διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $ΑΜ$.

Έτσι:

$$ΔK = \frac{AM}{2} = \frac{10}{2} = 5cm.$$

Άσκηση 5-Λύση



$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o$ άρα:

$90^o+60^o+\hat{\Gamma}=180^o$ άρα:

$\hat{\Gamma}=30^o$

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο με μία οξεία γωνία 30^o, η πλευρά που είναι απέναντι από την γωνία 30^o είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Επομένως, θα ισχύει ότι:

$$AB=\frac{B\Gamma}{2}$$

Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Άρα:

$$AM=\frac{B\Gamma}{2}$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$A\Gamma^2+AB^2=B\Gamma^2$ άρα $A\Gamma^2+\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2=B\Gamma^2$ δηλαδή:

$A\Gamma^2=B\Gamma^2-\frac{B\Gamma^2}{4}=\frac{3B\Gamma^2}{4}$ άρα: $A\Gamma=\frac{\sqrt{3}B\Gamma}{2}$

Έχουμε λοιπόν τα ακόλουθα:

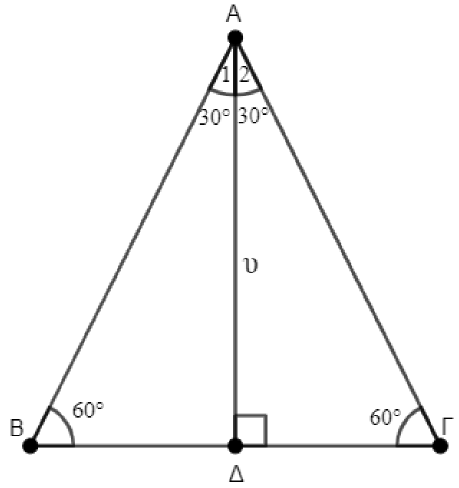
1. $\frac{AM}{A\Gamma}=\frac{\frac{B\Gamma}{2}}{\frac{\sqrt{3}B\Gamma}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. $\frac{AM}{B\Gamma}=\frac{\frac{B\Gamma}{2}}{B\Gamma}=\frac{1}{2}$

3. $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{\frac{B\Gamma}{2}}{\frac{\sqrt{3}B\Gamma}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Άσκηση 6-Λύση

Έχουμε το $ΑΒΓ$ ισόπλευρο τρίγωνο και $ΑΔ = υ$ το ύψος του στην $ΒΓ = α = ΑΒ = ΑΓ$. Γνωρίζουμε ότι στα ισόπλευρα τρίγωνα το ύψος είναι επίσης διάμεσος και διχοτόμος. Έτσι:



$$ΒΔ = ΔΓ = \frac{α}{2} \text{ και } \hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$$

Το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ορθογώνιο ($\hat{Δ} = 90°$).

Κάνοντας χρήση Πυθαγόρειου Θεωρήματος στο $ΑΒΔ$ προκύπτει:

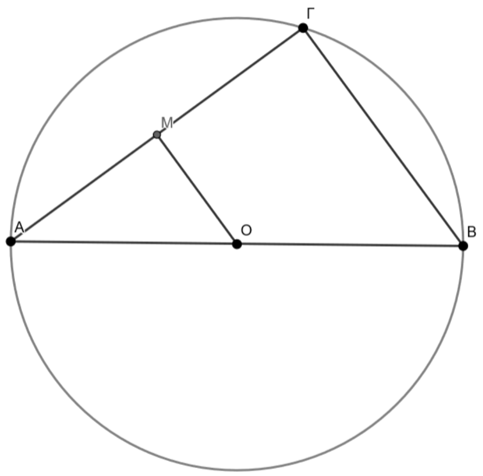
$$ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2$$

$$ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2 \text{ άρα } υ^2 = α^2 - \frac{α^2}{4} = \frac{3α^2}{4}$$

Οπότε:

$$\frac{υ^2}{α^2} = \frac{3}{4} \quad \text{άρα} \quad \frac{υ}{α} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

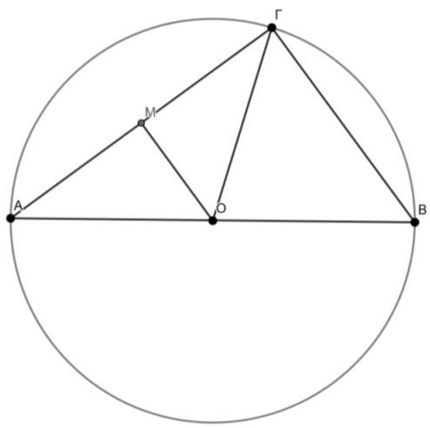
Άσκηση 7-Λύση



1. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ που δημιουργείται, το σημείο O είναι το μέσο της πλευράς AB και το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $A\Gamma$. Γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου, είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του. Επομένως:

$$OM || B\Gamma$$

2.



Ισχύει ότι:

$$\frac{OB}{\Gamma M} = \frac{OA}{AM}$$

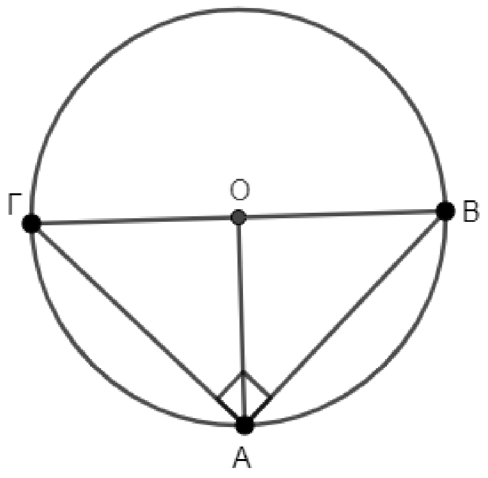
Επίσης $AM = M\Gamma$ αφού το σημείο M είναι μέσο του $A\Gamma$. Άρα:

$$\frac{OB}{AM} = \frac{OA}{\Gamma M}$$

Επίσης, $OA = O\Gamma = \rho$. Επομένως:

$$\frac{OB}{AM} = \frac{O\Gamma}{\Gamma M}$$

Άσκηση 8-Λύση



Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{A} = 90°)$ και $ΒΓ$ η διάμετρος ενός κύκλου.

Φέρνω $ΑΟ$ η οποία είναι διάμεσος του $ΑΒΓ$ καθώς $Ο$ μέσο της διαμέτρου $ΒΓ$ ως κέντρο του κύκλου.

Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Έτσι:

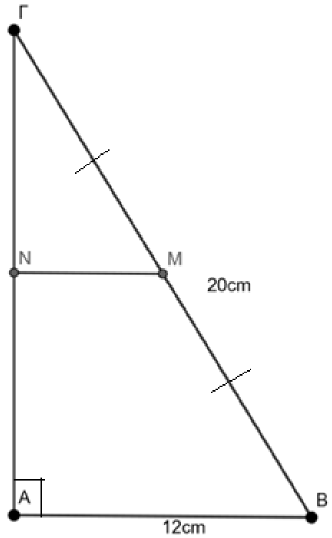
$$ΑΟ = \frac{ΒΓ}{2}$$

δηλαδή είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

Επομένως ο κύκλος διέρχεται από το σημείο $Α$.

Άσκηση 9-Λύση

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:



$$A\Gamma^2 + AB^2 = B\Gamma^2$$

$$A\Gamma^2 + 12^2 = 20^2$$

$$A\Gamma^2 = 400 - 144$$

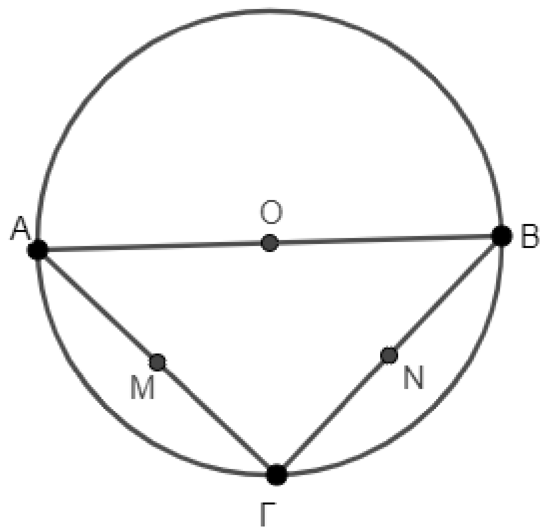
$$A\Gamma^2 = 256$$

$$A\Gamma = 16cm$$

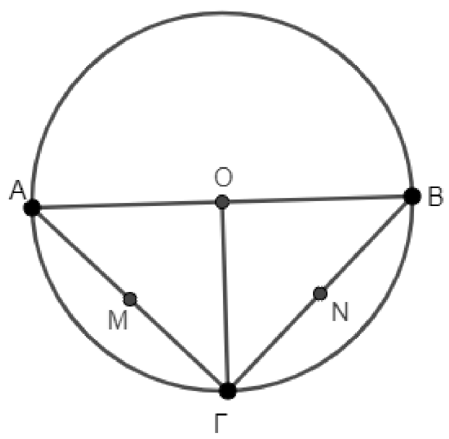
Γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς του. Επομένως,

$$MN = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6cm$$

Άσκηση 10-Λύση

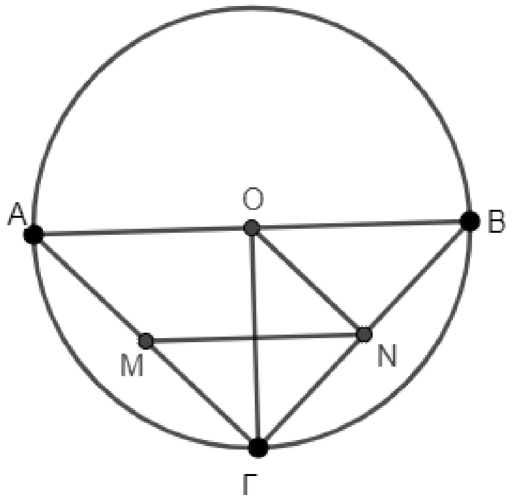


1. $ΑΒΓ$ ισοσκελές ($ΑΓ = ΒΓ$) και φέρω $ΟΓ$:



$ΟΓ$ διάμεσος του $ΑΒΓ$ γιατί $ΟΑ = ΟΒ$ ως ακτίνες του κύκλου και εφόσον $ΑΒΓ$ ισοσκελές προκύπτει ότι $ΟΓ$ είναι και ύψος του τριγώνου, δηλαδή η $ΟΓ$ τέμνει κάθετα την $ΑΒ$.

2.



Από γνωστό θεώρημα το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της. Έτσι προκύπτει ότι:

$$MN = \frac{AB}{2} \text{ και } MN||AB.$$

Επομένως $MN = OA$ και $MN||OA$ άρα $AMNO$ παραλληλόγραμμο.

Γνωρίζω ότι:

$$OA = OB = O\Gamma = \rho \text{ και ότι } MN = OA = \rho.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $OB\Gamma$, ON διάμεσος άρα $ON = \frac{B\Gamma}{2}$.

Κάνοντας χρήση Πυθαγόρειου Θεωρήματος προκύπτει:

$$B\Gamma^2 = OB^2 + O\Gamma^2 = \rho^2 + \rho^2 = 2\rho^2$$

Άρα: $B\Gamma = \sqrt{2}\rho$ και τελικά $ON = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho$

Εφόσον $AMNO$ παραλληλόγραμμο, άρα ισχύει το ακόλουθο:

$$AM = ON = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho$$

1.3. Θεώρημα του Θαλή

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1-Απάντηση

1. Λάθος. Ισχύει ότι $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$.
2. Σωστό.
3. Λάθος. Αν ήταν παράλληλες θα έπρεπε να ισχύει $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$ δηλαδή $\frac{3}{6} = \frac{5}{8}$ που είναι άτοπο.
4. Λάθος. $ΕΓ = 4cm$
5. Λάθος. Ισχύει ότι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΔΖ}$

Ερώτηση Κατανόησης 2-Απάντηση

1. i.
2. i.

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

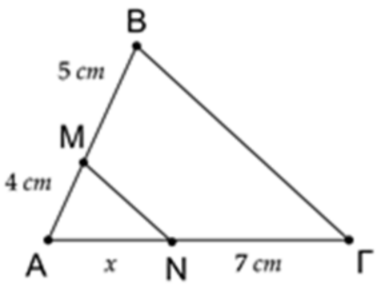
Για το πρώτο σχήμα: $MN||B\Gamma$

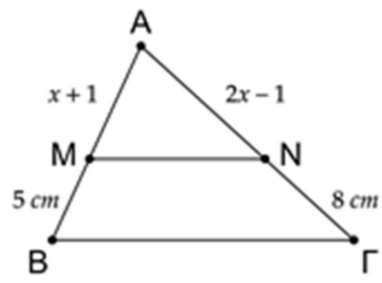
Από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει: $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{N\Gamma}$

Άρα

$\frac{4}{5}=\frac{x}{7}\Rightarrow 5x=28\ \Rightarrow$

$x=\dfrac{28}{5}$





Για το δεύτερο σχήμα:

$MN||B\Gamma$

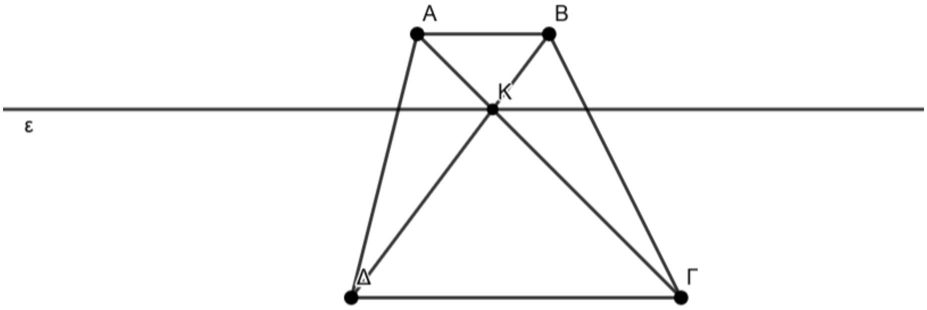
Από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{N\Gamma}$$

Άρα:

$$\frac{x+1}{5}=\frac{2x-1}{8}\Rightarrow 8x+8=10x-5\Rightarrow\ 2x=13\Rightarrow x=\frac{13}{2}$$

Άσκηση 2-Λύση



Φέρουμε μία ευθεία ε έτσι ώστε $\varepsilon||AB||\Gamma\Delta$.

1. Οι 3 παράλληλες ευθείς τέμνουν τις ευθείες που ορίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$. Επομένως, από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι:.

$$\frac{AK}{BK}=\frac{K\Delta}{K\Gamma} \text{ και άρα } \frac{AK}{K\Gamma}=\frac{BK}{\Delta K}.$$

2. Με το ίδιο επιχείρημα του ερωτήματος 1 προκύπτει ότι $\frac{AK}{A\Gamma}=\frac{BK}{B\Delta}$.

Άσκηση 3-Λύση

$AK+K\Delta=12$ άρα $AK=12-K\Delta$

Επίσης, $AB||K\Lambda||\Delta\Gamma$ και άρα από το Θέωρημα του Θαλή προκύπτει ότι:

$$\frac{AK}{B\Lambda}=\frac{K\Delta}{\Lambda\Gamma}$$

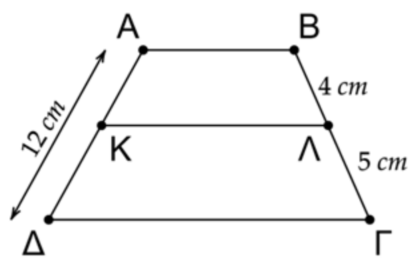
Άρα:

$\frac{12-K\Delta}{4}=\frac{K\Delta}{5}\Rightarrow$

$60-5K\Delta=4K\Delta$

$60=9K\Delta\Rightarrow$

$K\Delta=\frac{60}{9}=\frac{20}{3}$



Επομένως, $AK=12-\frac{20}{3}=\frac{16}{3}$

Άσκηση 4-Λύση

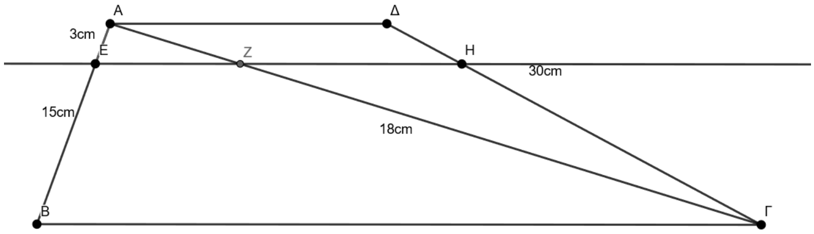
1. $A\Delta||EZ||B\Gamma$ άρα από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AZ}{Z\Gamma} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{15}=\frac{AZ}{18} \Rightarrow$$

$$15AZ = 44$$

$$AZ=\frac{44}{15}$$



2. Επίσης, προκύπτει ότι:

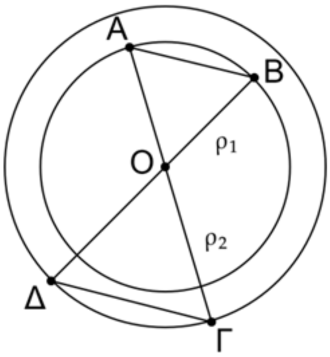
$$\frac{AE}{AB}=\frac{\Delta H}{\Delta\Gamma}\Rightarrow$$

$$\frac{3}{15}=\frac{\Delta H}{30} \Rightarrow$$

$$15\Delta H = 90 \Rightarrow$$

$$\Delta H = 6$$

Άσκηση 5-Λύση



Ισχύει ότι $OA=\rho_1$ και $O\Delta=\rho_2$.

Επίσης, $\frac{OB}{O\Delta}=\frac{\rho_1}{\rho_2}$ και $\frac{OA}{O\Gamma}=\frac{\rho_1}{\rho_2}$

Επομένως, $\frac{OB}{O\Delta}=\frac{OA}{O\Gamma}$ και άρα από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι $AB||\Gamma\Delta$.

Άσκηση 6-Λύση

Υπολογισμός του KM:

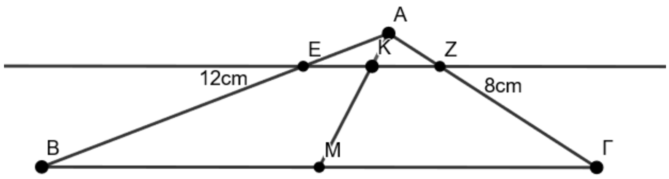
$KZ||M\Gamma$ και άρα από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι:

$\frac{AK}{KM} = \frac{AZ}{Z\Gamma} = \frac{1}{3}\,(1)$

επίσης:

$A\Gamma = AZ + Z\Gamma = 8$ ή αλλιώς

$Z\Gamma = 8 - AZ\ (2)$



Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$\frac{AZ}{8-AZ} = \frac{1}{3}$ και άρα

$$3AZ = 8 - AZ \Rightarrow 4AZ = 8 \Rightarrow AZ = 2cm$$

Υπολογισμός του ΑΕ:

$EZ||B\Gamma$ και άρα από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι:

$\frac{AZ}{A\Gamma} = \frac{AE}{AB}$ δηλαδή:

$$\frac{2}{8} = \frac{AE}{12} \Rightarrow 24 = 8AE \Rightarrow AE = 3cm$$

Άσκηση 7-Λύση

Υπολογισμός του $\boldsymbol{A\Delta}$:

Ισχύει ότι $\frac{A\Delta}{B\Delta}=\frac{1}{4}$ άρα:

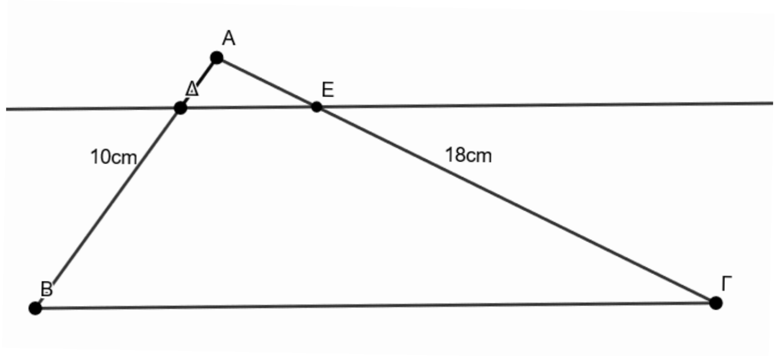
$$4A\Delta = B\Delta \ (1)$$

Επίσης, $B\Delta = AB - A\Delta$ δηλαδή:

$$B\Delta = 10 - A\Delta \ (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε το εξής:

$$4A\Delta = 10 - A\Delta \Rightarrow \ 5A\Delta = 10 \Rightarrow$$
$$A\Delta = 2cm$$



Υπολογισμός του $\boldsymbol{B\Delta}$:

$A\Delta = 2$ και $B\Delta = 10 - A\Delta$ άρα $B\Delta = 8cm$

Υπολογισμός του $\boldsymbol{AE}$:

$\Delta E || B\Gamma$ και άρα από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι:

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}\Rightarrow$$

$$\frac{2}{10}=\frac{AE}{18} \ \Rightarrow \ \ 36 = 10AE \Rightarrow$$

$$AE = 3.6cm$$

Υπολογισμός του $\boldsymbol{E\Gamma}$:

$\Delta E || B\Gamma$ και άρα από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι

$$\frac{A\Delta}{\Delta B}=\frac{AE}{E\Gamma}\Rightarrow \frac{2}{8}=\frac{3.6}{E\Gamma} \ \Rightarrow$$

$$2E\Gamma = 28.8 \ \Rightarrow E\Gamma = 14.4cm$$

Άσκηση 8-Λύση

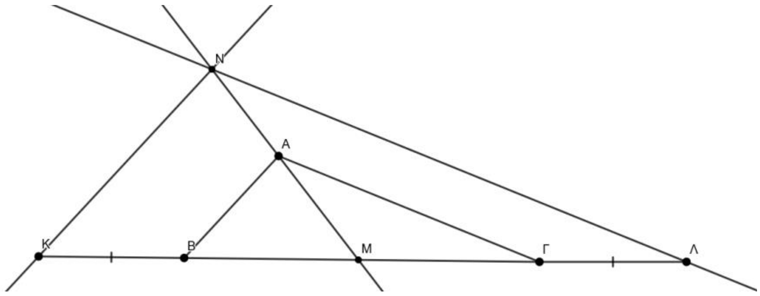
1. $AB||KN$ και οι ευθείες MN και KM που τις τέμνουν, τέμνονται στο Μ. Επομένως, οι AB και KN θα ορίζουν τμήματα ανάλογα στις MN και KM,

   άρα $\frac{BM}{BK}=\frac{AM}{AN}$.

2. $A\Gamma||N\Lambda$ και οι ευθείες $M\Lambda$ και MN που τις τέμνουν, τέμνονται στο M.

   Επομένως, οι $A\Gamma$ και $N\Lambda$ θα ορίζουν τμήματα ανάλογα στις $M\Lambda$ και MN,

   άρα $\frac{\Gamma M}{\Gamma\Lambda}=\frac{AM}{AN}$.



3. Από τα δύο προηγούμενα ερωτήματα ισχύει ότι:

$$\frac{BM}{BK}=\frac{AM}{AN} \quad \text{και} \quad \frac{\Gamma M}{\Gamma\Lambda}=\frac{AM}{AN}$$

Άρα

$$\frac{BM}{BK}=\frac{\Gamma M}{\Gamma\Lambda}\Rightarrow$$

$$BM\cdot\Gamma\Lambda=BK\cdot\Gamma M$$

Όμως $BK=\Gamma\Lambda$ και άρα $BM=\Gamma M$ που σημαίνει ότι το M είναι το μέσο της $B\Gamma$.

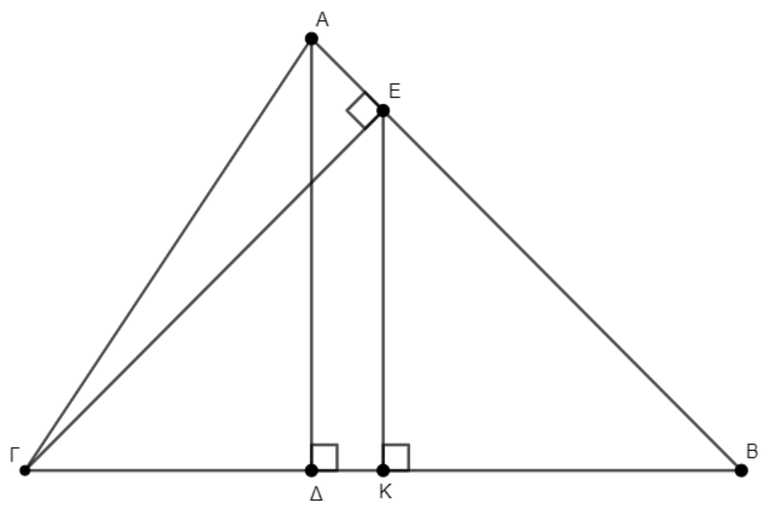
Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

1. Γνωρίζουμε ότι $ΑΔ$ κάθετη στην $ΒΓ$ καθώς $ΑΔ$ ύψος. Επίσης $ΕΚ$ κάθετη στην $ΒΓ$ ως ύψος. Από γνωστό θεώρημα δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.
   Επομένως $ΕΚ \parallel ΑΔ$.

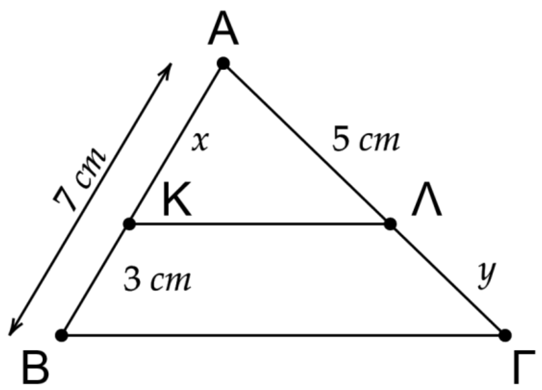
2. Στο τρίγωνο $ΑΒΔ$ ισχύει ότι $ΕΚ \parallel ΑΔ$. Από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει:

$$\frac{ΒΕ}{ΑΕ} = \frac{ΒΚ}{ΔΚ}$$



Άσκηση 2-Λύση

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει ότι $ΚΛ \parallel ΒΓ$. Επομένως από το Θεώρημα του Θαλή ισχύει ότι:



$$\frac{ΒΚ}{ΑΒ} = \frac{ΛΓ}{ΑΓ} \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{y}{y+5} \Rightarrow$$

$$3(y+5) = 7y \Rightarrow$$

$$3y + 15 = 7y \Rightarrow$$

$$4y = 15 \Rightarrow y = \frac{15}{4}$$

Επίσης:

$$\frac{ΑΚ}{ΒΚ} = \frac{ΑΛ}{ΛΓ} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{5}{\frac{15}{4}} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{3} = \frac{20}{15} \Rightarrow x = \frac{60}{15} \Rightarrow$$

$$x = 4$$

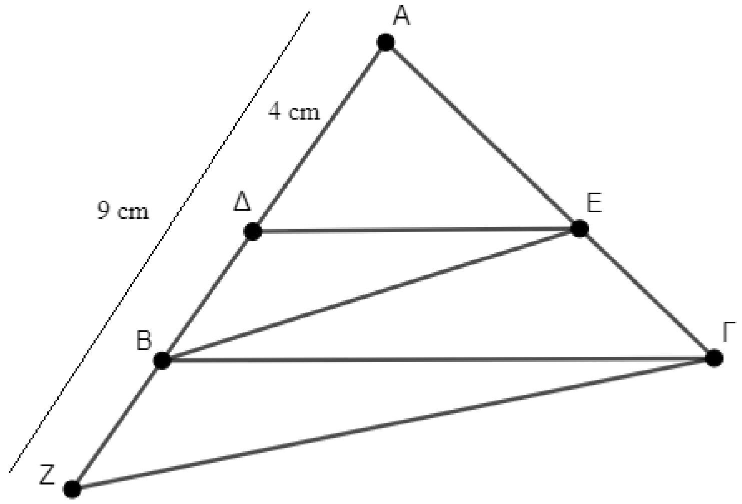
Άσκηση 3-Λύση

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει ότι $ΔΕ \parallel ΒΓ$ άρα σύμφωνα με το Θεώρημα του Θαλή:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$$

Αντίστοιχα στο τρίγωνο $ΑΖΓ$, $ΒΕ \parallel ΖΓ$ άρα:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΖ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$$



Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

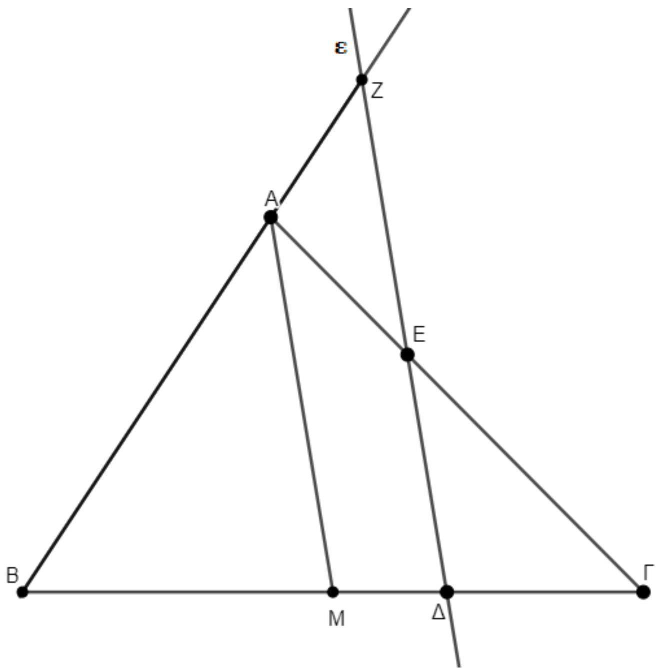
$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΒ}{ΑΖ} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{ΑΒ} = \frac{ΑΒ}{9} \Rightarrow$$

$$ΑΒ^2 = 36 \Rightarrow$$

$$ΑΒ = 6cm$$

Άσκηση 4-Λύση



1. Στο τρίγωνο $ΑΓΜ$ έχουμε ότι $ΕΔ \parallel ΑΜ$ άρα από το Θεώρημα του Θαλή:

$$\frac{ΓΔ}{ΔΜ} = \frac{ΓΕ}{ΑΕ} \Rightarrow$$
$$\frac{ΑΕ}{ΔΜ} = \frac{ΓΕ}{ΓΔ}$$

2. Στο τρίγωνο $ΖΒΔ$ έχουμε ότι $ΑΜ \parallel ΖΔ$ άρα σύμφωνα με το Θεώρημα του Θαλή:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΖ} = \frac{ΒΜ}{ΔΜ}$$

Γνωρίζουμε ότι $Μ$ μέσο της $ΒΓ$ άρα $ΒΜ = \frac{ΒΓ}{2}$

Έτσι προκύπτει ότι:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΖ} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{ΔΜ} \Rightarrow \frac{ΑΒ}{ΑΖ} = \frac{ΒΓ}{2ΔΜ} \Rightarrow \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΑΖ}{2ΔΜ}$$

Άσκηση 5-Λύση

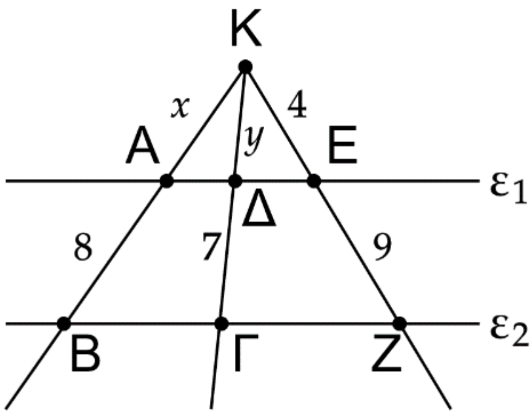
Γνωρίζουμε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ επομένως από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{EK}{EZ} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{8} = \frac{4}{9} \Rightarrow$$

$$9x = 32 \Rightarrow$$

$$x = \frac{32}{9}$$



Με όμοιο τρόπο:

$$\frac{\Delta K}{\Delta \Gamma} = \frac{EK}{EZ} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{7} = \frac{4}{9} \Rightarrow$$

$$9y = 28 \Rightarrow$$

$$y = \frac{28}{9}$$

Άσκηση 6-Λύση

Έχουμε ότι:

$$\frac{A\Delta}{B\Delta}=\frac{2}{5}\Rightarrow$$

$$\frac{A\Delta}{AB-A\Delta}=\frac{2}{5}\Rightarrow$$

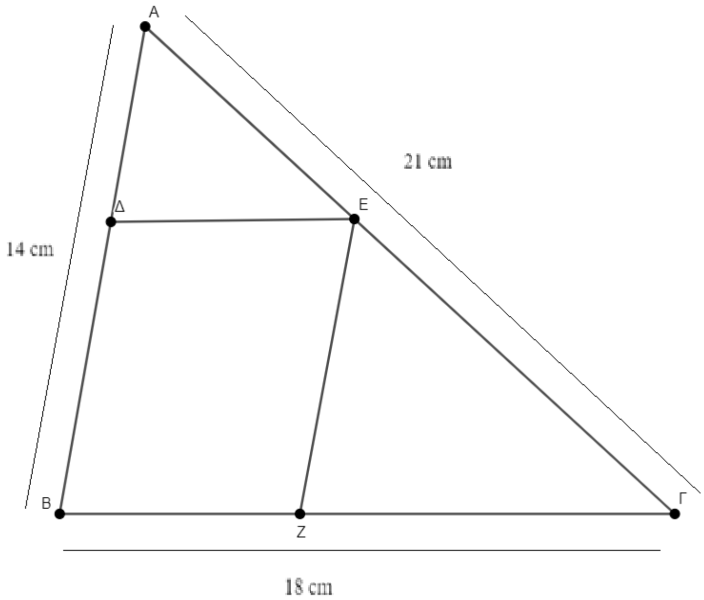
$$A\Delta=\frac{2}{5}(AB-A\Delta)\Rightarrow$$

$$A\Delta=\frac{2}{5}AB-\frac{2}{5}A\Delta\Rightarrow$$

$$A\Delta+\frac{2}{5}A\Delta=\frac{2}{5}AB\Rightarrow$$

$$\frac{7}{5}A\Delta=\frac{2}{5}AB\Rightarrow$$

$$A\Delta=\frac{2}{7}AB=\frac{2}{7}\cdot 14\Rightarrow A\Delta=4cm$$



Επειδή $\Delta E \parallel B\Gamma$ από Θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι:

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}\Rightarrow\frac{4}{14}=\frac{AE}{21}\Rightarrow AE=\frac{84}{14}\Rightarrow AE=6cm$$

Για την $E\Gamma$ ισχύει:

$$E\Gamma=A\Gamma-AE=21-6=15cm$$

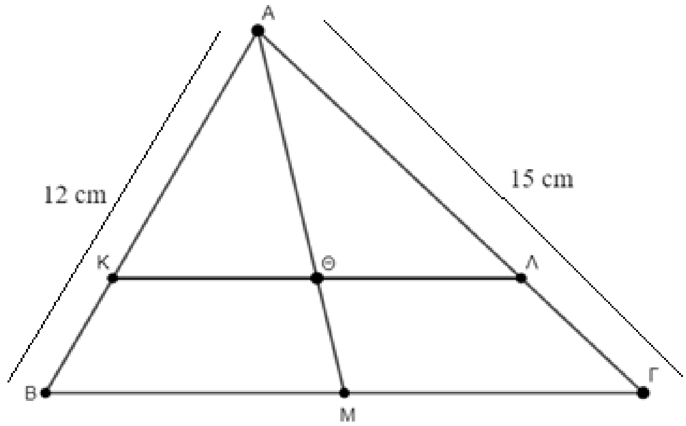
Επειδή $EZ \parallel AB$ από Θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι:

$$\frac{\Gamma Z}{B\Gamma}=\frac{E\Gamma}{A\Gamma}\Rightarrow\frac{\Gamma Z}{18}=\frac{15}{21}\Rightarrow\Gamma Z=\frac{18\cdot 15}{21}\Rightarrow\ \Gamma Z=\frac{90}{7}cm$$

Άσκηση 7-Λύση

Έχουμε ότι:

$$A\Theta = \frac{2}{3}AM \Rightarrow \frac{A\Theta}{AM} = \frac{2}{3}$$



Επίσης:

$$\Theta M = AM - A\Theta =$$

$$= AM - \frac{2}{3}AM = \frac{1}{3}AM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Theta M}{AM} = \frac{1}{3}$$

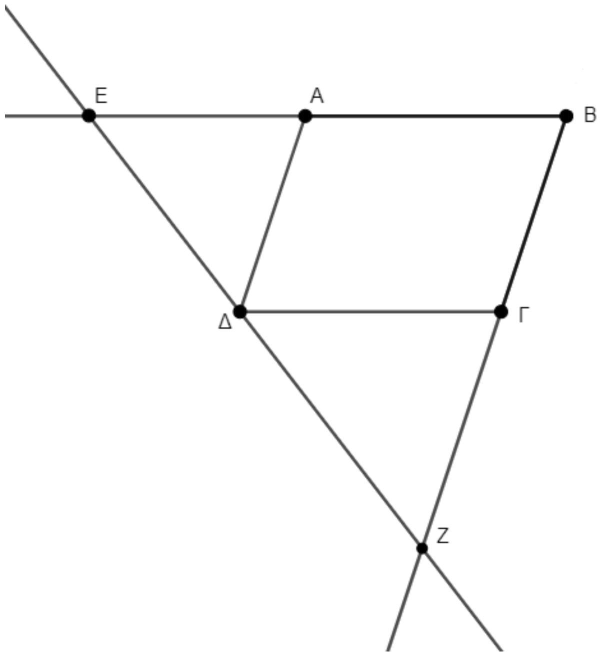
Ισχύει ότι $K\Lambda \parallel B\Gamma \Rightarrow K\Theta \parallel BM$ και από το Θεώρημα του Θαλή:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{A\Theta}{AM} \Rightarrow \frac{AK}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow AK = \frac{24}{3} \Rightarrow AK = 8cm$$

Αντίστοιχα $K\Lambda \parallel B\Gamma \Rightarrow \Theta\Lambda \parallel M\Gamma$ και από το Θεώρημα του Θαλή:

$$\frac{\Gamma\Lambda}{A\Gamma} = \frac{\Theta M}{AM} \Rightarrow \frac{\Gamma\Lambda}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow \Gamma\Lambda = \frac{15}{3} \Rightarrow \Gamma\Lambda = 5cm$$

Άσκηση 8-Λύση



Στο τρίγωνο EZB η $A\Delta \parallel BZ$, καθώς $A\Delta \parallel B\Gamma$ ($AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο) και ΓZ προέκταση της $B\Gamma$. Από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει:

$$\frac{E\Delta}{\Delta Z} = \frac{EA}{AB}$$

Στο τρίγωνο ZEB η $\Delta\Gamma \parallel EB$, καθώς $AB \parallel \Delta\Gamma$ ($AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο) και EA προέκταση της AB. Από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει:

$$\frac{\Gamma Z}{B\Gamma} = \frac{Z\Delta}{\Delta E}$$

Αντιστρέφουμε τα παραπάνω κλάσματα:

$$\frac{B\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{E\Delta}{\Delta Z}$$

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{B\Gamma}{\Gamma Z}$$

1.5 Ομοιότητα

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

1. Σωστό
2. Λάθος
3. Λάθος
4. Σωστό
5. Σωστό
6. Σωστό
7. Σωστό
8. Λάθος. Για να είναι όμοια θα πρέπει να έχουν και το ίδιο πλήθος πλευρών.
9. Λάθος. Θα πρέπει να έχουν τις πλευρές του ανάλογες.
10. Σωστό

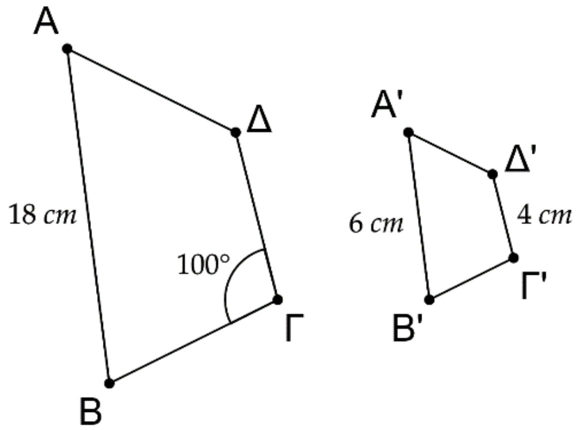
Ερώτηση Κατανόησης 2 - Απάντηση

1. Σωστό
2. Σωστό
3. Σωστό
4. Λάθος . Αντιπαράδειγμα: Σε όμοια τετράγωνα $ΑΒΓΔ$ και $Α΄Β΄Γ΄Δ΄$ θα ήταν:
$$\frac{AB\cdot B\Gamma}{A'B'\cdot B'\Gamma'}=\lambda\cdot\lambda=\lambda^2$$
5. Σωστό
6. Σωστό

Ερώτηση Κατανόησης 3 - Απάντηση

1. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{18}{6} = 3$

2. Εφόσον τα τετράπλευρα είναι όμοια θα ισχύει: $\widehat{\Gamma'} = \hat{\Gamma} = 100°$



3. Από γνωστό θεώρημα ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους, επομένως:
   $$\frac{\Pi_{AB\Gamma\Delta}}{\Pi_{A'B'\Gamma'\Delta'}} = \frac{AB}{A'B'} = 3$$

4. $\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{3}$

5. $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = 3 \Rightarrow$

   $\Gamma\Delta = 3\Gamma'\Delta' \Rightarrow$

   $\Gamma\Delta = 3 \cdot 4 \Rightarrow$

   $\Gamma\Delta = 12\ cm$

Ερώτηση Κατανόησης 4 - Απάντηση

1. i.
2. i.
3. ii.

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

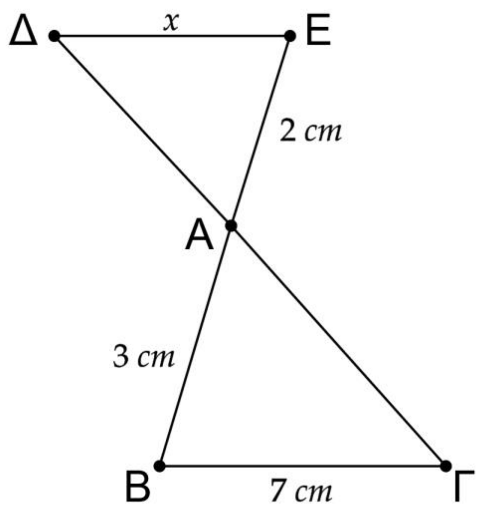
1ο Ζεύγος Τριγώνων

Γνωρίζουμε ότι $ΔΕ \parallel ΒΓ$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

$\hat{Δ} = \hat{Γ}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΔΕ$ και $ΒΓ$.

Επίσης $Ε\hat{Α}Δ = Β\hat{Α}Γ$ ως κατακορυφήν.

Έτσι προκύπτει ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ είναι όμοια.



Εφόσον τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ είναι όμοια ισχύει:

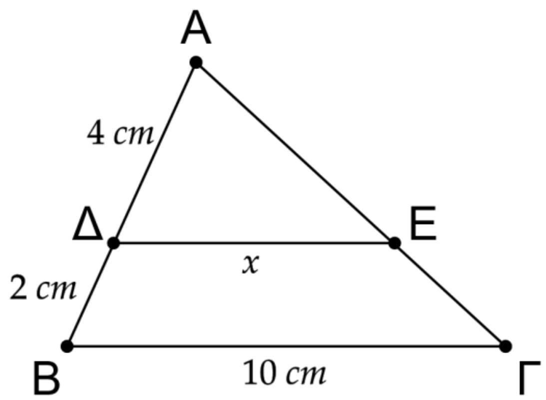
$$\frac{ΔΕ}{ΒΓ} = \frac{ΕΑ}{ΑΒ} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{14}{3} cm$$

2ο Ζεύγος Τριγώνων

Γνωρίζουμε ότι $ΔΕ \parallel ΒΓ$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

$\hat{Ε} = \hat{Γ}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $ΔΕ$ και $ΒΓ$.

Επίσης $\hat{Α}$ κοινή γωνία. Έτσι προκύπτει ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ είναι όμοια.



Από την ομοιότητα των τριγώνων παίρνουμε:

$$\frac{ΔΕ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{4}{6} \Rightarrow x = \frac{40}{6} \Rightarrow x = \frac{20}{3} cm$$

Άσκηση 2-Λύση

Από την ομοιότητα των τετραπλεύρων προκύπτει:

$\frac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \frac{ΑΒ}{Α'Β'} \Rightarrow$

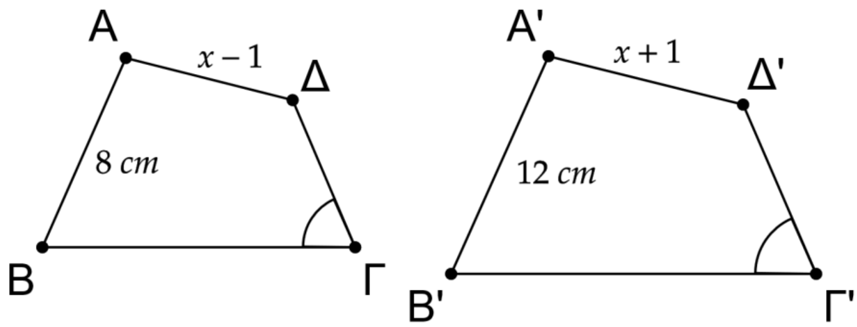
$\frac{x-1}{x+1} = \frac{8}{12} \Rightarrow$

$12(x-1) = 8(x+1) \Rightarrow$

$12x - 12 = 8x + 8 \Rightarrow$

$12x - 8x = 8 + 12 \Rightarrow$

$4x = 20 \Rightarrow x = 5\ cm$



Άσκηση 3-Λύση

Ο χάρτης έχει κλίμακα $1: 10.000.000$, αυτό σημαίνει ότι $1cm$ στο χάρτη αντιστοιχεί σε $10.000.000cm$ στην πραγματικότητα.

Άρα για τα ανάλογα ποσά «απόσταση στο χάρτη» - «πραγματική απόσταση», έχουμε:

1. $\frac{1}{10.000.000} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = 150.000.000cm$

   $150.000.000\ cm = 150.000.000 : 100\ m = 1.500.000\ m = 1.500\ km.$

2. $\frac{1}{10.000.000} = \frac{1,2}{x} \Rightarrow x = 12.000.000cm$

   $12.000.000\ cm = 12.000.000 : 100\ m = 120.000\ m = 120\ km.$

3. $\frac{1}{10.000.000} = \frac{3,02}{x} \Rightarrow x = 30.200.000dm$

   $30.200.000\ dm = 30.200.000 : 10\ m = 3.020.000\ m = 3.020\ km$

Άσκηση 4-Λύση

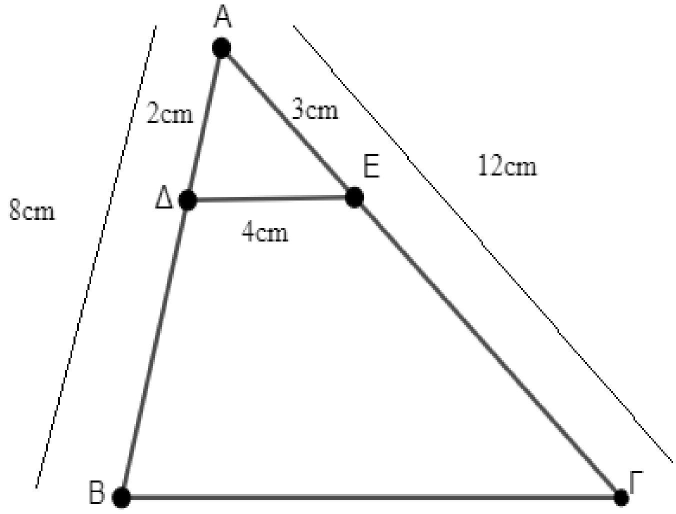
1. Για να δείξω παραλληλία αρκεί να δείξω ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ έχουν ίσους λόγους πλευρών:

   $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} \Rightarrow$

   $\frac{2}{8} = \frac{3}{12} \Rightarrow$

   $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

   Επομένως $ΔΕ \parallel ΒΓ$.



2. Αποδείξαμε ότι $ΔΕ \parallel ΒΓ$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

   $Α\hat{Ε}Δ = Α\hat{Γ}Β$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $ΔΕ$ και $ΒΓ$.

   Επίσης $\hat{Α}$ κοινή γωνία.

   Έτσι προκύπτει ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ είναι όμοια.

3. Αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ είναι όμοια, επομένως:

   $\frac{ΔΕ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \Rightarrow$

   $\frac{4}{ΒΓ} = \frac{2}{8} \Rightarrow$

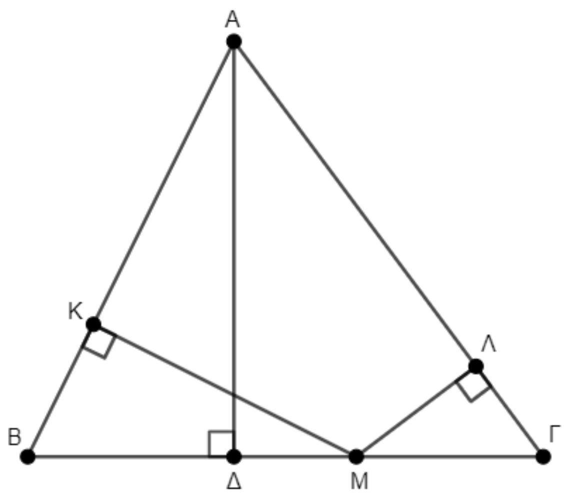
   $ΒΓ = \frac{32}{2} \Rightarrow$

   $ΒΓ = 16cm$

Άσκηση 5-Λύση

1. Τα τρίγωνα $ΒΜΚ$ και $ΑΒΔ$ έχουν $\widehat{K} = \hat{Δ} = 90°$ και $\hat{B}$ κοινή γωνία. Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια και ισχύει:

$$\frac{ΑΔ}{ΚΜ} = \frac{ΑΒ}{ΒΜ}$$



2. Τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΜΛΓ$ έχουν $\hat{Λ} = \hat{Δ} = 90°$ και $\widehat{Γ}$ κοινή γωνία. Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια και ισχύει:

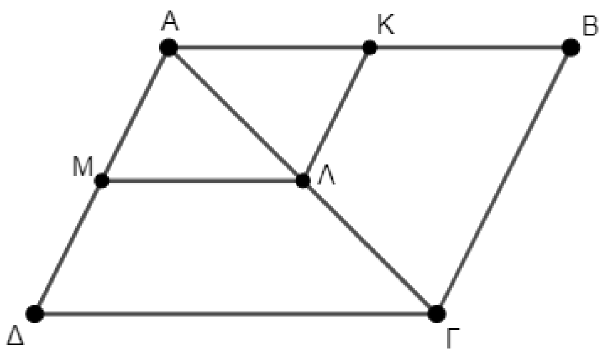
$$\frac{ΑΔ}{ΛΜ} = \frac{ΑΓ}{ΓΜ}$$

Άσκηση 6-Λύση

$ΑΒΓΔ$ παραλληλόγραμμο και ισχύουν $ΑΒ = ΔΓ$, $ΑΔ = ΒΓ$ και $\hat{A} = \widehat{Γ}$, $\hat{B} = \hat{Δ}$.
Γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τρίγωνου είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά και ίση με το μισό της.

Έτσι στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει ότι $ΚΛ \parallel ΒΓ$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $Α\widehat{Κ}Λ = Α\hat{Β}Γ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά και $ΚΛ = \frac{ΒΓ}{2}$. Επίσης προκύπτει ότι $ΑΜ \parallel ΚΛ$.

Έτσι $ΑΚΛΜ$ παραλληλόγραμμο όπου $ΑΚ = ΜΛ$, $ΑΜ = ΚΛ$ και $Β\hat{Α}Δ = Κ\hat{Λ}Μ$, $Α\widehat{Κ}Λ = Α\widehat{Μ}Λ$



Αντίστοιχα στο τρίγωνο $ΑΓΔ$ ισχύει
$ΜΛ \parallel ΔΓ$ και $ΜΛ = \frac{ΔΓ}{2}$.

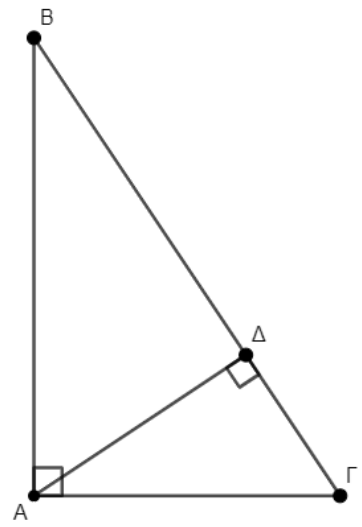
Τελικά ισχύει: $B\hat{A}\Delta = K\hat{\Lambda}M = B\hat{\Gamma}\Delta$ και $A\hat{B}\Gamma = A\hat{K}\Lambda = A\hat{M}\Lambda = A\hat{\Delta}\Gamma$.

Για τα τετράπλευρα ισχύει:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{K\Lambda}{B\Gamma} = \frac{M\Lambda}{\Delta\Gamma} = \frac{AM}{A\Delta} = \frac{1}{2}$$

Τα δύο πολύγωνα είναι όμοια διότι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Άσκηση 7-Λύση



Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια καθώς

$\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$ και $\hat{\Gamma}$ κοινή γωνία.

Επίσης τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta B$ είναι όμοια γιατί

$\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$ και $\hat{B}$ κοινή γωνία.

Έτσι τα $AB\Gamma, A\Gamma\Delta, A\Delta B$ είναι όμοια.

Άσκηση 8-Λύση

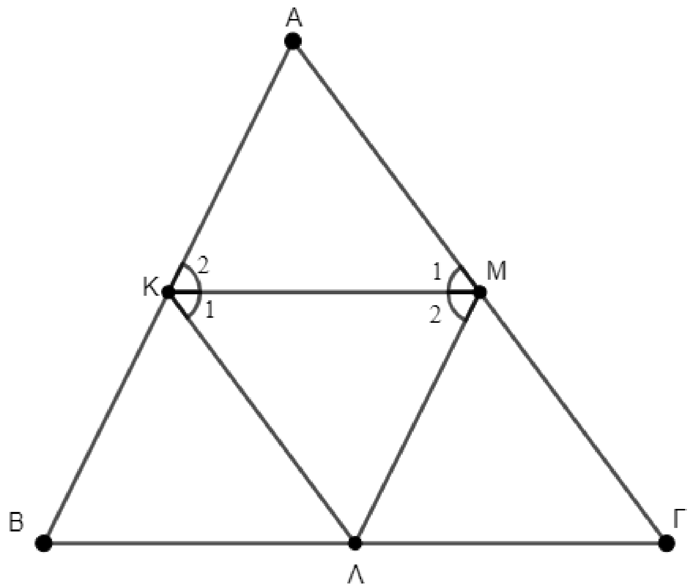
Από γνωστό θεώρημα το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά. Έτσι:

$KM \parallel B\Gamma,\ K\Lambda \parallel A\Gamma,\ M\Lambda \parallel AB.$

Από τις παραπάνω παραλληλίες προκύπτει ότι $\widehat{M}_1 = \widehat{\Gamma}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $KM, B\Gamma$.

Επίσης $\widehat{M}_1 = \widehat{K}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $K\Lambda, A\Gamma$.

Έτσι προκύπτει ότι $\widehat{K}_1 = \widehat{\Gamma}$.



Αντίστοιχα $\widehat{K}_2 = \widehat{B}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $KM, B\Gamma$.

Επίσης $\widehat{K}_2 = \widehat{M}_2$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $M\Lambda, AB$.

Έτσι προκύπτει ότι $\widehat{M}_2 = \widehat{B}$.

Τελικά τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $K\Lambda M$ είναι όμοια και ισχύει:

$$\frac{A\Gamma}{K\Lambda} = \frac{AB}{M\Lambda}$$

Άσκηση 9-Λύση

1. $\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$

2. Η περίμετρος του $AB\Gamma$ είναι $AB + B\Gamma + A\Gamma = 10 + 8 + 12 = 30\ cm$.

   Επίσης ισχύει ότι:

   $$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{\Pi_{AB\Gamma}}{\Pi_{\Delta EZ}} = \frac{30}{15} = 2$$

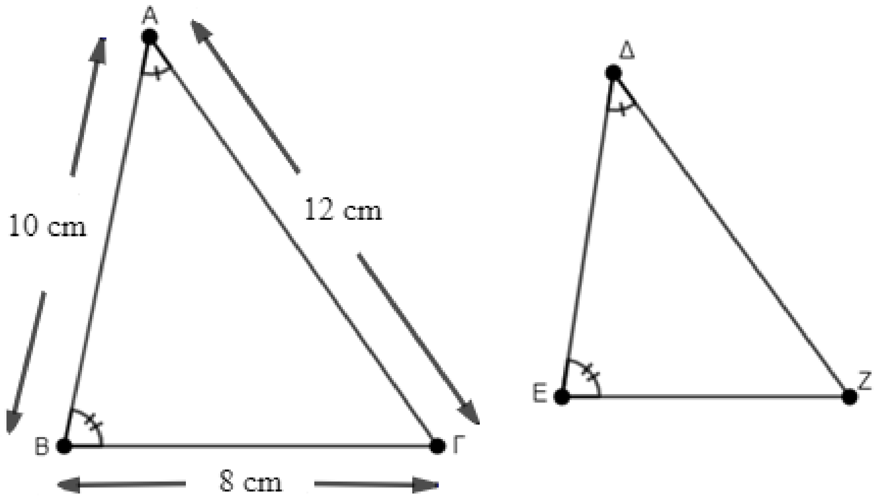
   Έτσι προκύπτει ότι:

   $\frac{AB}{\Delta E} = 2 \Rightarrow$

   $\frac{10}{\Delta E} = 2 \Rightarrow$

   $\Delta E = \frac{10}{2} \Rightarrow$

   $\Delta E = 5\ cm$



   $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = 2 \Rightarrow$

   $\frac{12}{\Delta Z} = 2 \Rightarrow$

   $\Delta Z = \frac{12}{2} \Rightarrow$

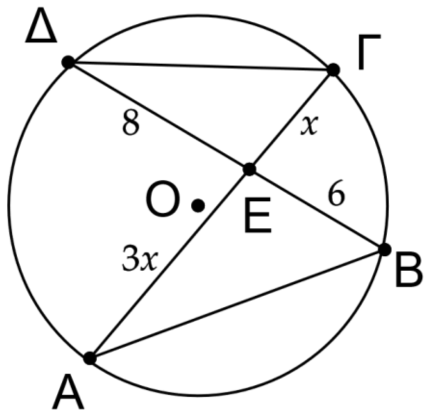
   $\Delta Z = 6\ cm$

   $\frac{B\Gamma}{EZ} = 2 \Rightarrow$

   $\frac{8}{EZ} = 2 \Rightarrow EZ = \frac{8}{2} \Rightarrow EZ = 4\ cm$

Άσκηση 10-Λύση

1. Τα τρίγωνα ABE και $ΓΔE$ είναι όμοια καθώς έχουν $\hat{A} = \hat{Δ}$ ως εγγεγραμμένες γωνίες στο ίδιο τόξο $BΓ$ και $\hat{B} = \hat{Γ}$ ως εγγεγραμμένες γωνίες στο τόξο $AΔ$.



2. $\frac{AE}{EΔ} = \frac{EB}{EΓ} \Rightarrow$

$\frac{3x}{8} = \frac{6}{x} \Rightarrow$

$3x^2 = 48 \Rightarrow$

$x^2 = 16 \Rightarrow$

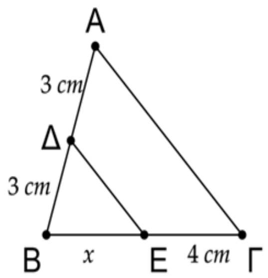
$x = 4$

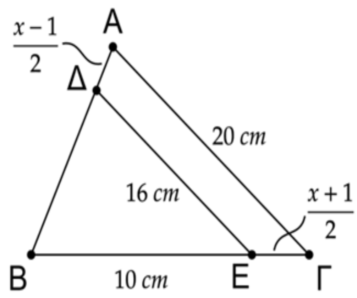
Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

1. Για τα δύο σχήματα έχουμε:

   Για να δείξουμε ότι είναι όμοια τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΔΕ$ θα δείξουμε ότι οι ομόλογες γωνίες τους είναι ίσες.





   Έχουν:

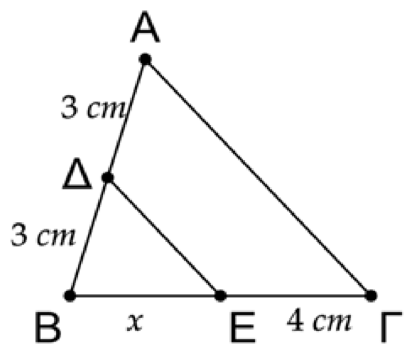
   - $\hat{B}$ κοινή
   - $B\hat{E}Δ = E\hat{Γ}A$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες
   - $B\hat{Δ}E = Δ\hat{A}Γ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες

   Επομένως, τα δύο τρίγωνα έχουν όλες τις ομόλογες γωνίες τους ίσες, άρα είναι όμοια.

2. **Για το πρώτο σχήμα έχουμε τα ακόλουθα:**

   Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΔΕ$ είναι όμοια και αρα έχουν τις ομόλογες πλευρές του ανάλογες, δηλαδή:

   $$\frac{AB}{BΔ} = \frac{BΓ}{BE} \Rightarrow$$
   $$\frac{6}{3} = \frac{x+4}{x} \Rightarrow$$
   $$6x = 3x + 12$$
   $$3x = 12$$
   $$x = 4cm$$



Για το δεύτερο σχήμα έχουμε τα ακόλουθα:

Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΔΕ$ είναι όμοια και άρα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή:

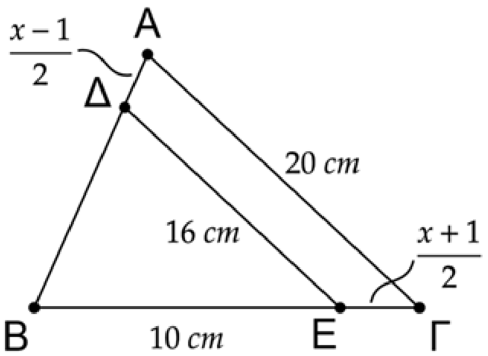
$$\frac{20}{16} = \frac{\frac{x+1}{2} + 10}{10} \Rightarrow$$

$$200 = 16\left(\frac{x+1}{2} + 10\right) \Rightarrow$$

$$200 = 8x + 8 + 160 \Rightarrow$$

$$8x = 32 \Rightarrow$$

$$x = 4cm$$



Άσκηση 2-Λύση

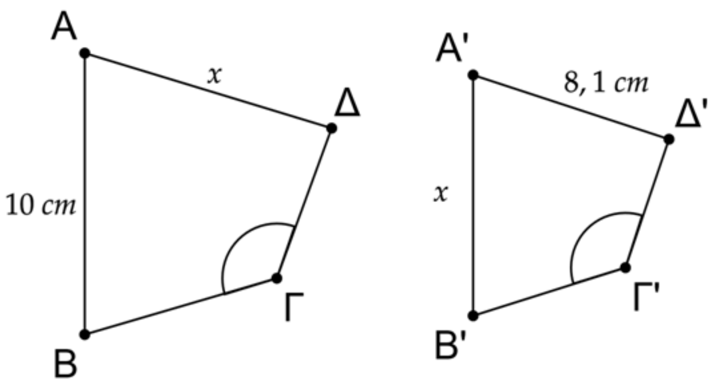
Τα τετράπλευρα είναι όμοια, άρα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AΔ}{A'Δ'} \Rightarrow$$

$$\frac{10}{x} = \frac{x}{8.1} \Rightarrow$$

$$x^2 = 81 \Rightarrow$$

$$x = 9cm$$



Άσκηση 3-Λύση

1. Ο χάρτης έχει κλίμακα $1:100.000$, αυτό σημαίνει ότι $1cm$ στο χάρτη αντιστοιχεί σε 100.000 στην πραγματικότητα.

   Αν θεωρήσουμε ότι x είναι τα εκατοστά στα οποία αντιστοιχεί στο χάρτη η απόσταση Αθήνα - Λαμία που είναι περίπου ίση με $200km$ ή αλλιώς ίση με $200 \cdot 100.000cm$, τότε για τα ανάλογα ποσά «απόσταση στο χάρτη» - «πραγματική απόσταση», έχουμε:

$$\frac{1}{100.000} = \frac{x}{20000000} \Rightarrow 20.000.000 = 100.000x \Rightarrow x = 200cm$$

2. Ο χάρτης έχει κλίμακα $1:10.000.000$, αυτό σημαίνει ότι $1cm$ στο χάρτη αντιστοιχεί σε $10.000.000$ στην πραγματικότητα.

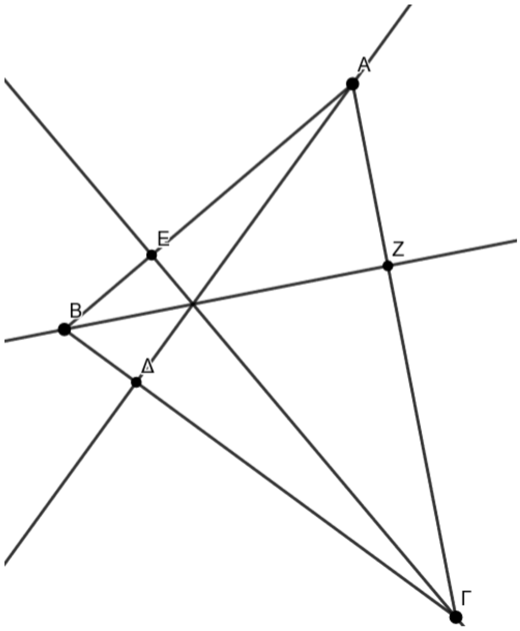
   Αν θεωρήσουμε ότι x είναι τα εκατοστά στα οποία αντιστοιχεί στο χάρτη η απόσταση Αθήνα - Λαμία που είναι περίπου ίση με $200km$ ή αλλιώς ίση με $200 \cdot 100.000cm$, τότε για τα ανάλογα ποσά «απόσταση στο χάρτη» - «πραγματική απόσταση», έχουμε:

$$\frac{1}{10.000.000} = \frac{x}{20000000} \Rightarrow 20.000.000 = 10.000.000x \Rightarrow x = 2cm$$

Άσκηση 4-Λύση

1. Για να δείξουμε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΕΒΓ$ είναι όμοια, αρκεί να δείξουμε ότι έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες. Έχουν:
    - $\hat{B}$ κοινή
    - $B\hat{\Delta}A = B\hat{E}\Gamma = 90^o$
    - $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Gamma}E$ αφού $B\hat{A}\Delta = 180^o - \hat{B} - 90^o$ και $B\hat{\Gamma}E = 180^o - \hat{B} - 90^o$

    Άρα τα δύο τρίγωνα είναι όμοια.

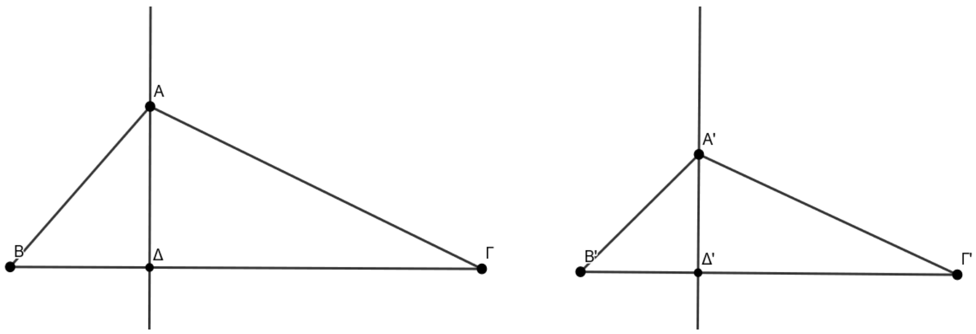


2. Για να δείξουμε ότι τα τρίγωνα $ΑΕΓ$ και $ΑΒΖ$ είναι όμοια, αρκεί να δείξουμε ότι έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες. Έχουν:
    - $\hat{A}$ κοινή
    - $A\hat{E}\Gamma = A\hat{Z}B = 90^o$
    - $A\hat{\Gamma}E = A\hat{B}Z$ αφού $A\hat{\Gamma}E = 180^o - \hat{A} - 90^o$ και $A\hat{B}Z = 180^o - \hat{A} - 90^o$

    Άρα τα δύο τρίγωνα είναι όμοια.

Άσκηση 5-Λύση

Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ είναι όμοια άρα έχουν τις ομόλογες πλευρές του ίσες.



Στα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $Α'Β'Δ$ ισχύει ότι:

$$\hat{B} = \hat{B}' \quad \text{και} \quad B\hat{Δ}A = B'\hat{Δ}'A = 90^o$$

Και επειδή πρέπει:

$$B\hat{A}Δ + \hat{B} + B\hat{Δ}A = 180^o$$

και

$$B'\hat{A}'Δ' + \hat{B}' + B'\hat{Δ}'A' = 180^o$$

Προκύπτει ότι $B\hat{A}Δ = B'\hat{A}'Δ'$.

Επομένως, τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $Α'Β'Δ'$ έχουν όλες τους τις γωνίες ίσες, άρα είναι όμοια. Άρα, έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

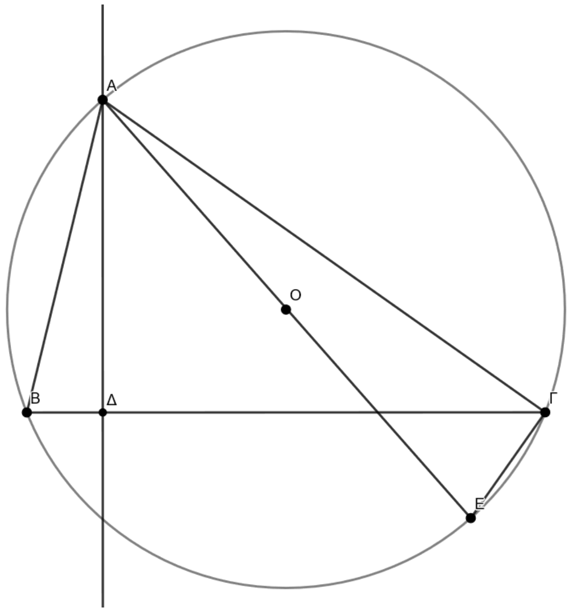
Δηλαδή:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AΔ}{A'Δ'}$$

Άσκηση 6-Λύση

Ισχύει ότι η $A\hat{\Gamma}E$ βαίνει σε ημικύκλιο, καθώς AE διάμετρος του κύκλου. Επομένως, $A\hat{\Gamma}E = 90^o$.

Επίσης, η γωνία $A\hat{B}\Delta$ βαίνει στο τόξο $A\Gamma$ και η γωνία $A\hat{E}\Gamma$ βαίνει στο τόξο $A\Gamma$. Επομένως, $A\hat{B}\Delta = A\hat{E}\Gamma$.



Τέλος, έχουμε ότι:

$B\hat{A}\Delta + A\hat{B}\Delta + A\hat{\Delta}E = 180^o \Rightarrow$

$B\hat{A}\Delta = 180^o - A\hat{B}\Delta - 90^o$

και

$E\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}E + A\hat{E}\Gamma = 180^o \Rightarrow$

$E\hat{A}\Gamma = 180^o - A\hat{E}\Gamma - 90^o$

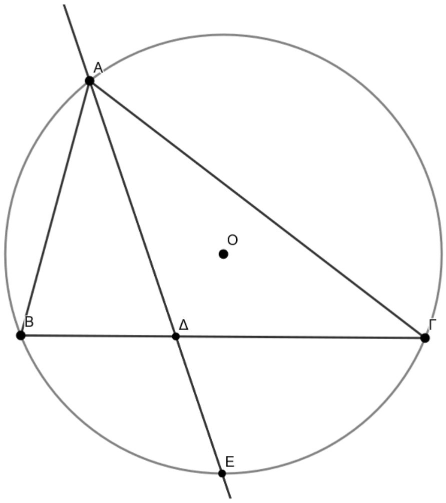
Και άρα $B\hat{A}\Delta = E\hat{A}\Gamma$

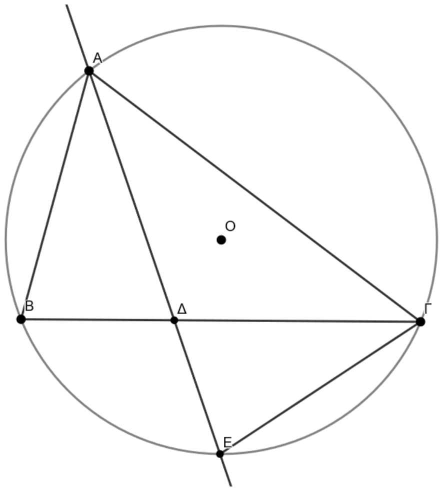
Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Gamma$ έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες και άρα είναι όμοια.

Λόγοι ομοιότητας:

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Gamma E} = \frac{AB}{AE}$$

Άσκηση 7-Λύση

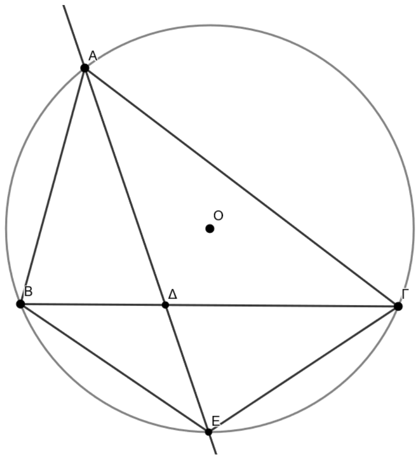




1. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Delta E\Gamma$ έχουν:

- $A\hat{\Delta}B = \Gamma\hat{\Delta}E$ ως κατακορυφήν
- $A\hat{B}\Delta = A\hat{E}\Gamma$ αφού βαίνουν στο ίδιο τόξο $A\Gamma$.
- $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}E$ αφού βαίνουν στο ίδιο τόξο BE.

Τα τρίγωνα έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες και άρα είναι όμοια.



2. Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $B\Delta E$ έχουν:

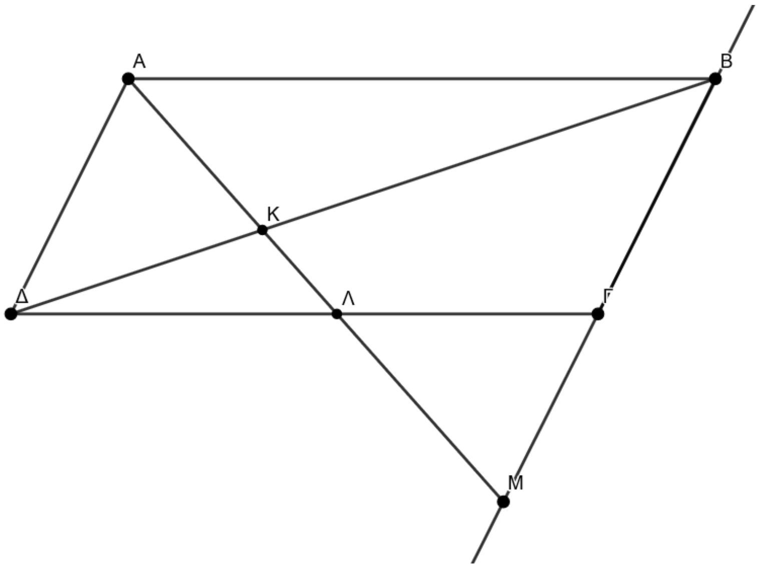
- $A\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{\Delta}E$ ως κατακορυφήν.
- $\Delta\hat{B}E = \Gamma\hat{A}\Delta$ αφού βαίνουν στο ίδιο τόξο ΓE.
- $B\hat{E}\Delta = A\hat{\Gamma}\Delta$ αφού βαίνουν στο ίδιο τόξο AB.

Τα τρίγωνα έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες και άρα είναι όμοια.

Άσκηση 8-Λύση

1. Για να δείξουμε ότι τα τρίγωνα $ΑΔΚ$ και $ΚΒΜ$ είναι όμοια, αρκεί να δείξουμε ότι έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες. Έχουν:
    - $Α\widehat{Κ}Δ = Β\widehat{Κ}Μ$ ως κατακορυφήν
    - $Δ\hat{Α}Κ = Β\widehat{Μ}Κ$ ως εντός εναλλάξ
    - $Α\hat{Δ}Κ = Κ\hat{Β}Μ$ ως εντός εναλλάξ

    Επομένως, τα δύο τρίγωνα είναι όμοια.



2. Για να δείξουμε ότι τα τρίγωνα $ΔΚΛ$ και $ΑΚΒ$ είναι όμοια, αρκεί να δείξουμε ότι έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες. Έχουν:
    - $Α\widehat{Κ}Β = Δ\widehat{Κ}Λ$ ως κατακορυφήν
    - $Κ\hat{Δ}Λ = Α\hat{Β}Κ$ ως εντός εναλλάξ
    - $Κ\hat{Λ}Δ = Κ\hat{Α}Β$ ως εντός εναλλάξ

    Επομένως, τα δύο τρίγωνα είναι όμοια.

Άσκηση 9-Λύση

Για να δείξουμε ότι τα τρίγωνα HBE και $E\Theta\Gamma$ είναι όμοια, θα πρέπει να δείξουμε ότι έχουν τις ομόλογες γωνίες του ίσες.

Τα τρίγωνα έχουν:

- $B\hat{E}H = E\hat{\Gamma}\Theta$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες των παραλλήλων $ZE||\Delta\Gamma$
- $H\hat{B}E = \Theta\hat{E}\Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες των παραλλήλων $BH||E\Theta$
- $B\hat{H}E = E\hat{\Theta}\Gamma$ αφού $B\hat{H}E = 180^o - B\hat{E}H - H\hat{B}E$

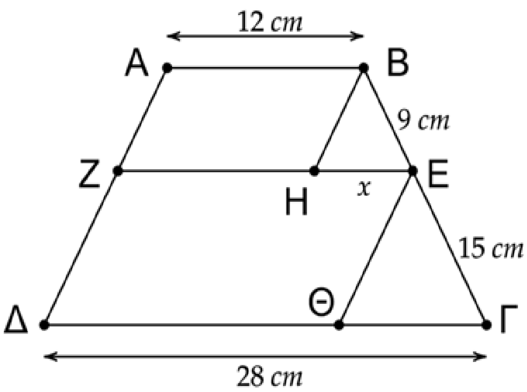
  και $E\hat{\Theta}\Gamma = 180^o - E\hat{\Gamma}\Theta - \Theta\hat{E}\Gamma$

Επομένως, τα τρίγωνα έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες και άρα είναι όμοια.

Εύρεση του x:

Το τετράπλευρο $ABHZ$ είναι παραλληλόγραμμο, καθώς έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Επομένως:

$$AB = ZH = 12cm$$



Επίσης, το τετράπλευρο $ZE\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, καθώς έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Επομένως:

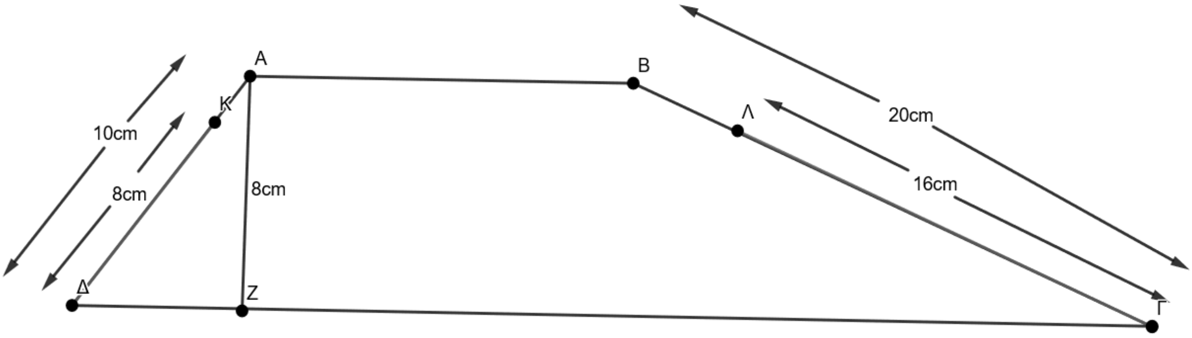
$$\Delta\Theta = ZH + x = (12 + x)cm.$$

Ακόμη, $\Theta\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta\Theta = 28 - (12 + x) = 28 - 12 - x = (16 - x)cm$

Τα τρίγωνα HBE και $E\Theta\Gamma$ είναι όμοια, άρα:

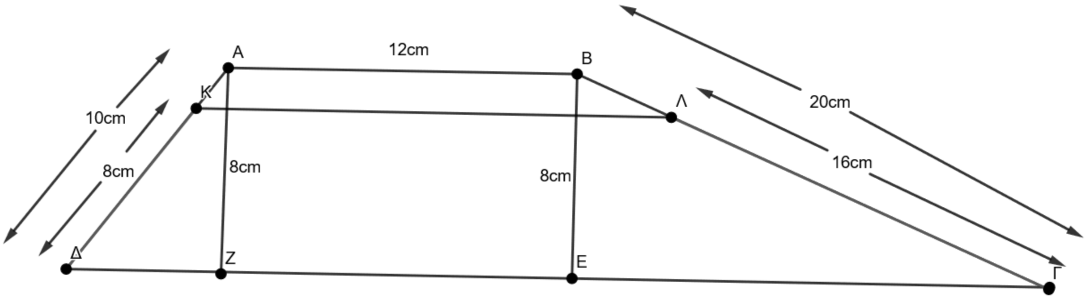
$$\frac{BE}{E\Gamma} = \frac{x}{\Theta\Gamma} \Rightarrow \frac{9}{15} = \frac{x}{16 - x} \Rightarrow 144 - 9x = 15x \Rightarrow 144 = 16x \Rightarrow x = 9cm$$

Άσκηση 10-Λύση



1. Ισχύει ότι $AK = A\Delta - K\Delta$ δηλαδή $AK = 10 - 8 = 2cm$

   Επίσης, $B\Lambda = B\Gamma - \Lambda\Gamma$, δηλαδή $B\Lambda = 20 - 16 = 4cm$



Λαμβάνουμε τους ακόλουθους λόγους:

$$\frac{AK}{K\Delta} = \frac{B\Lambda}{\Lambda\Gamma} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{4}{16} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

και άρα από το Θεώρημα του Θαλή θα ισχύει $AB||K\Lambda$.

2. Στο τρίγωνο $ΑΔΖ$ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$ΑΖ^2 + ΔΖ^2 = ΑΔ^2 \Rightarrow ΔΖ^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow$

$ΔΖ^2 = 100 - 64 \ \Rightarrow ΔΖ^2 = 36 \Rightarrow ΔΖ = 6cm$

Στο τρίγωνο $ΒΕΓ$ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$ΒΕ^2 + ΓΕ^2 = ΒΓ^2 \Rightarrow ΓΕ^2 = 20^2 - 8^2 \Rightarrow$

$ΓΕ^2 = 400 - 64 \ \Rightarrow ΓΕ^2 = 336 \Rightarrow ΓΕ = 4\sqrt{21}cm$

Επίσης, $ΑΒ = ΖΕ = 12cm$

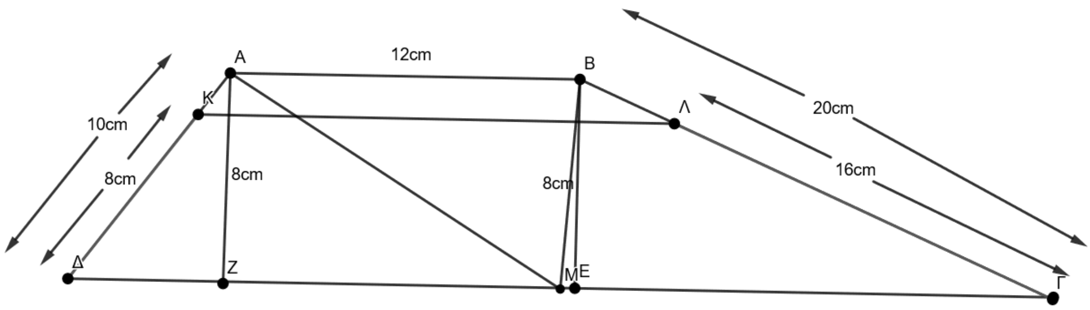
Επομένως, η περίμετρος του τραπεζίου θα είναι με :

$Π = ΑΒ + ΒΓ + ΓΕ + ΕΖ + ΖΔ + ΔΑ \ \Rightarrow$

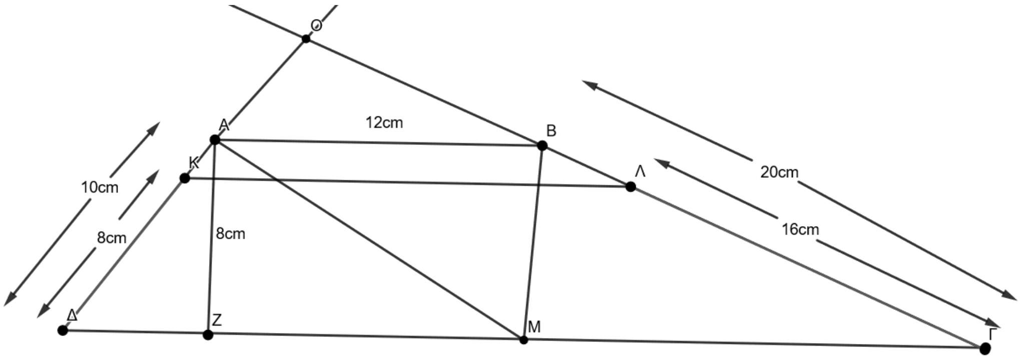
$Π = 12 + 20 + 4\sqrt{21} + 12 + 6 + 10 \ \Rightarrow$

$Π = (60 + 4\sqrt{21})cm$

3. Για τα τρίγωνα $ΑΔΜ$ και $ΜΒΓ$ δεν παρατηρούμε κάτι ιδιαίτερο, δεν είναι ούτε όμοια αλλά ούτε και ίσα.



4. Για να διερευνήσουμε αν τα τρίγωνα $ΟΔΓ$ και $ΒΜΓ$ είναι όμοια, θα πρέπει να ελέγξουμε αν έχουν ίσες τις ομόλογες γωνίες τους.



Τα τρίγωνα έχουν κοινή την γωνία $\hat{Γ}$ αλλά οι υπόλοιπες γωνίες τους δεν είναι ίσες. Επομένως, συμπεραίνουμε πως τα δύο τρίγωνα δεν είναι όμοια.

Κεφάλαιο 2 : Τριγωνομετρία

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0° < \omega < 180°$

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

1. Λάθος
2. Σωστό
3. Λάθος
4. Σωστό
5. Σωστό
6. Λάθος

Ερώτηση Κατανόησης 2 - Απάντηση

1. Από τον πίνακα τριγωνομετρικών γωνιών συμπεραίνουμε ότι

$\sigma\upsilon\nu 85° = 0{,}0872$ και $\sigma\upsilon\nu 75° = 0{,}2588$

Παρατηρούμε ότι $\sigma\upsilon\nu 85° < \sigma\upsilon\nu 75°$ άρα θα ισχύει:

$A = \sigma\upsilon\nu 85° - \sigma\upsilon\nu 75° < 0$

2. $\varepsilon\varphi 150° < 0$, $\varepsilon\varphi 20° > 0$ άρα θα ισχύει:

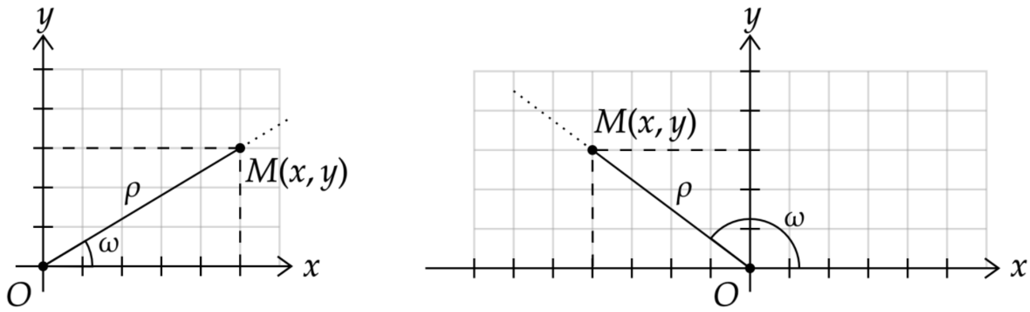
$B = \varepsilon\varphi 150° - \varepsilon\varphi 20° < 0$

3. $\eta\mu 45° > 0$, $\sigma\upsilon\nu 152° < 0$ άρα θα ισχύει:

$\Gamma = \text{ημ}45° \cdot \text{συν}152° < 0$

Ερώτηση Κατανόησης 3 - Απάντηση

Έχουμε μία γωνία ω μεταξύ $0°$και $180°$.



1. Ισχύει ότι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Αν θεωρήσουμε πως $x = 0$ δηλαδή το σημείο M βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$ τότε:

   $\rho = \sqrt{0^2 + y^2} = \sqrt{y^2} = y$ καθώς η γωνία είναι μεταξύ $0°$και $180°$ και σε αυτό το διάστημα ο άξονας των y παίρνει θετικές τιμές.

   Δηλαδή, η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το y είναι το ρ και η μικρότερη το 0.

   Άρα:

   $$0 \leq y \leq \rho \Rightarrow \frac{0}{\rho} \leq \frac{y}{\rho} \leq \frac{\rho}{\rho} \Rightarrow 0 \leq \eta\mu\omega \leq 1$$

2. Ισχύει ότι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Αν θεωρήσουμε πως $y = 0$ δηλαδή το σημείο M βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$ τότε:

   $$\rho = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

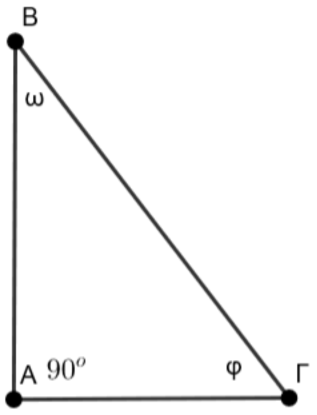
   Δηλαδή, η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι $-\rho$ και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει είναι ρ.

   Άρα:

   $$-\rho \leq x \leq \rho \Rightarrow \frac{-\rho}{\rho} \leq \frac{x}{\rho} \leq \frac{\rho}{\rho} \Rightarrow -1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$$

Ερώτηση Κατανόησης 4 - Απάντηση

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A} = 90^o)$ οι γωνίες ω και φ είναι συμπληρωματικές , δηλαδή $\omega + \varphi = 90^o$.



1. Ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ και $\eta\mu\omega = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$.

   Επομένως, $\sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu\omega$.

2. Ισχύει ότι $\eta\mu\varphi = \frac{AB}{B\Gamma}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{AB}{B\Gamma}$.

   Επομένως, $\eta\mu\varphi = \sigma\upsilon\nu\omega$.

3. $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{AB}{A\Gamma}$ και $\varepsilon\varphi\omega = \frac{A\Gamma}{AB}$

   Επομένως, $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}$.

Ασκήσεις για Διδασκαλία

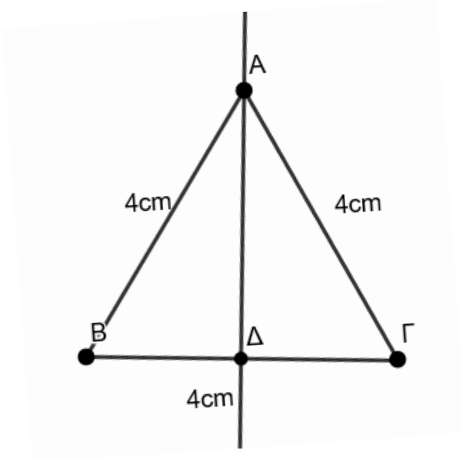
Άσκηση 1-Λύση

Στα ισόπλευρα τρίγωνα το ύψος είναι και διάμεσος και διχοτόμος. Επομένως, το $ΑΔ$ διχοτομεί την γωνία $\hat{A}$ και ισχύει ότι $Β\hat{Α}Δ = Γ\hat{Α}Δ$.

Επίσης, στα ισόπλευρα τρίγωνα όλες οι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους και επειδή πρέπει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = 180^o$, θα ισχύει $\hat{A} = \hat{B} = \hat{Γ} = 60^o$.

Άρα $Β\hat{Α}Δ = Γ\hat{Α}Δ = \frac{60^o}{2} = 30^o$.

Ακόμη, επειδή το $ΑΔ$ είναι και διάμεσος θα ισχύει:



$$ΔΓ = \frac{4}{2} = 2cm$$

Στο τρίγωνο $ΑΓΔ$ θα έχουμε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$ΑΔ^2 + ΓΔ^2 = ΑΓ^2 \Rightarrow$

$ΑΔ^2 = 16 - 4 \Rightarrow$

$ΑΔ^2 = 12 \Rightarrow ΑΔ = 2\sqrt{3}cm$

Υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας 30^o:

Ημίτονο:

$$ημΓ\hat{Α}Δ = \frac{ΓΔ}{ΑΓ} \Rightarrow ημ30^o = \frac{2}{4} \Rightarrow ημ30^o = \frac{1}{2}$$

Συνημίτονο:

$$συνΓ\hat{Α}Δ = \frac{ΑΔ}{ΑΓ} \Rightarrow συν30^o = \frac{2\sqrt{3}}{4} συν30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Εφαπτομένη:

$$εφΓ\hat{Α}Δ = \frac{ΓΔ}{ΑΔ} \Rightarrow εφ30^o = \frac{2}{2\sqrt{3}} εφ30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας 60^o:

Ημίτονο:

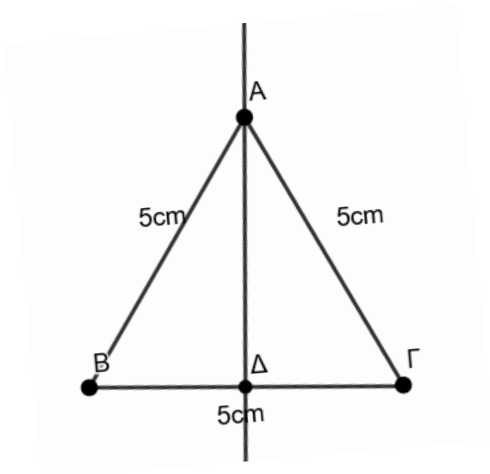
$$\eta\mu A\hat{\Gamma}\Delta = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow \eta\mu 60^o = \frac{2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \eta\mu 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Συνημίτονο:

$$\sigma\upsilon\nu A\hat{\Gamma}\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 60^o = \frac{2}{4} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 60^o = \frac{1}{2}$$

Εφαπτομένη:

$$\varepsilon\varphi A\hat{\Gamma}\Delta = \frac{A\Delta}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \varepsilon\varphi 60^o = \frac{2\sqrt{3}}{2} \varepsilon\varphi 60^o = \sqrt{3}$$



Στην περίπτωση που η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου είναι 5cm:

Όμοια με το προηγούμενο, και σε αυτή την περίπτωση θα ισχύει $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^o$.

Επίσης, επειδή το $A\Delta$ είναι και διάμεσος θα ισχύει $\Delta\Gamma = \frac{5}{2} = 2.5cm$

Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ θα έχουμε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Gamma^2 \Rightarrow$

$A\Delta^2 = 16 - 4 \Rightarrow A\Delta^2 = 12 \Rightarrow A\Delta = 2\sqrt{3}cm$

Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ θα έχουμε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Gamma^2 \Rightarrow A\Delta^2 = 25 - 6.25 \Rightarrow$

$$A\Delta^2 = 18.75 \Rightarrow A\Delta^2 = \frac{1875}{100} \Rightarrow A\Delta = \frac{25\sqrt{3}}{10} \Rightarrow A\Delta = 2.5\sqrt{3}cm$$

Υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας 30^o:

Ημίτονο:

$$\eta\mu\Gamma\hat{A}\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow \eta\mu 30^o = \frac{2.5}{5} \Rightarrow \eta\mu 30^o = \frac{1}{2}$$

Συνημίτονο:

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma\hat{A}\Delta = \frac{2.5\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Εφαπτομένη:

$$\varepsilon\varphi\Gamma\hat{A}\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{A\Delta} \Rightarrow \varepsilon\varphi 30^o = \frac{2.5}{2.5\sqrt{3}}\varepsilon\varphi 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας 60^o:

Ημίτονο:

$$\eta\mu A\hat{\Gamma}\Delta = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow \eta\mu 60^o = \frac{2.5\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \eta\mu 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Συνημίτονο:

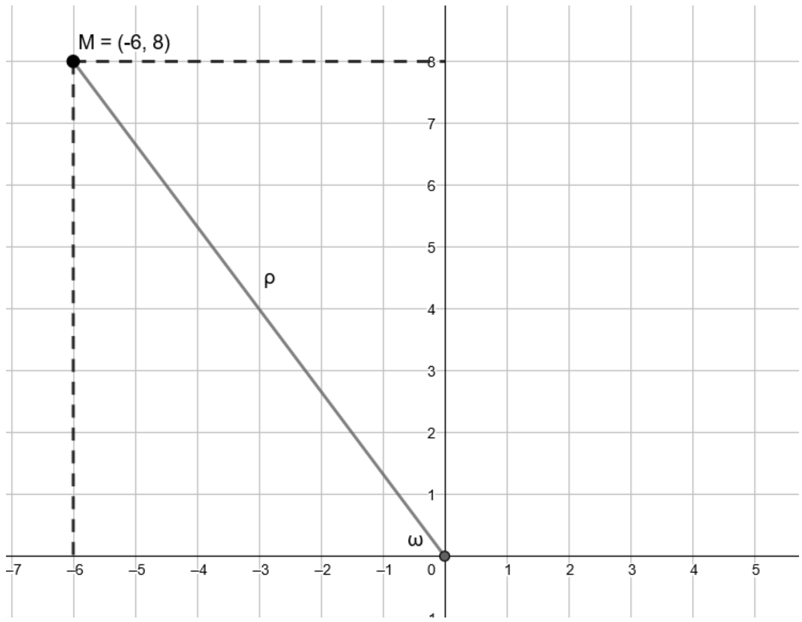
$$\sigma\upsilon\nu A\hat{\Gamma}\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 60^o = \frac{2.5}{5} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 60^o = \frac{1}{2}$$

Εφαπτομένη:

$$\varepsilon\varphi A\hat{\Gamma}\Delta = \frac{A\Delta}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \varepsilon\varphi 60^o = \frac{2.5\sqrt{3}}{2.5}\varepsilon\varphi 60^o = \sqrt{3}$$

Παρατηρούμε, πως οποιοδήποτε ισόπλευρο τρίγωνο και να χρησιμοποιήσουμε, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών δεν αλλάζουν.

Άσκηση 2-Λύση



1. $M(-6{,}8)$

   Ισχύει ότι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ και άρα για $x = -6$ και $y = 8$ θα έχουμε:

   $\rho = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} \Rightarrow$

   $\rho = \sqrt{36 + 84} \;\Rightarrow$

   $\rho = \sqrt{100} \Rightarrow \rho = 10$

Ημίτονο:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} \Rightarrow \eta\mu\omega = \frac{8}{10} \Rightarrow \eta\mu\omega = \frac{4}{5}$$

Συνημίτονο:

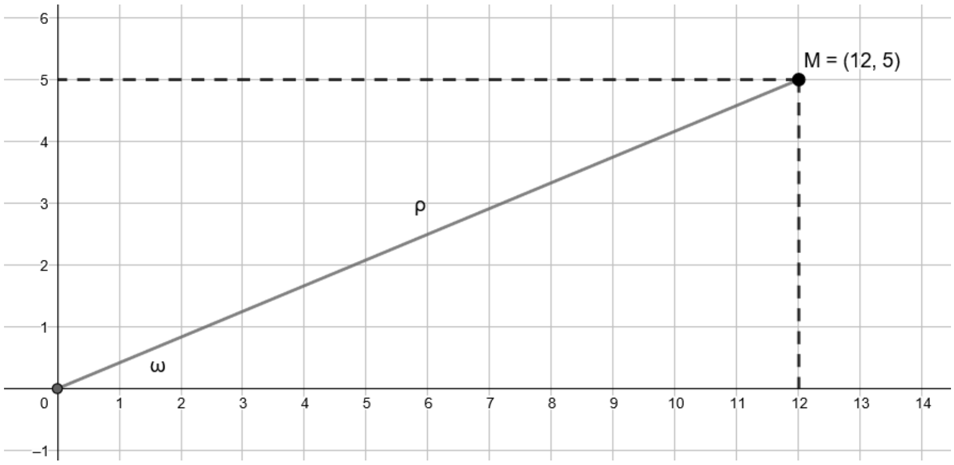
$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{-6}{10} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$$

Εφαπτομένη:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{8}{-6} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = -\frac{4}{3}$$

2. Ισχύει ότι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ και άρα για $x = 12$ και $y = 5$ θα έχουμε:

$$\rho = \sqrt{12^2 + 5^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{144 + 25} \Rightarrow \rho = \sqrt{169} \Rightarrow \rho = 13$$



Ημίτονο:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} \Rightarrow \eta\mu\omega = \frac{5}{13}$$

Συνημίτονο:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{12}{13}$$

Εφαπτομένη:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{5}{12}$$

Άσκηση 3-Λύση

1. Από τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών παίρνουμε ότι:

- $\eta\mu 17^o = 0.2924$
- $\eta\mu 35^o = 0.5736$
- $\sigma\upsilon\nu 73^o = 0.2924$
- $\sigma\upsilon\nu 55^o = 0.5736$

Επομένως,

$$A = \eta\mu 17^o + \eta\mu 35^o - \sigma\upsilon\nu 73^o - \sigma\upsilon\nu 55^o$$

$$= 0.2924 + 0.5736 - 0.2924 - 0.5736 = 0$$

2. Από τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών παίρνουμε ότι:

- $\sigma\upsilon\nu 56^o = 0.5592$
- $\eta\mu 34^o = 0.5592$
- $\eta\mu 50^o = 0.7660$
- $\sigma\upsilon\nu 40^o = 0.7660$

Επομένως,

$$B = \frac{\sigma\upsilon\nu 56^o}{\eta\mu 34^o} + \frac{\eta\mu 50^o}{\sigma\upsilon\nu 40^o} - 4 = \frac{0.5592}{0.5592} + \frac{0.7660}{0.7660} - 4 = 1 + 1 - 4 = -2$$

Άσκηση 4-Λύση

1. $0^o < \omega < 180^o \Rightarrow$

$0 < \eta\mu\omega < 1 \Rightarrow$

$0 < 3\eta\mu\omega < 3 \Rightarrow$

$5 < 3\eta\mu\omega + 5 < 3 + 5 \Rightarrow$

$5 < 3\eta\mu\omega + 5 < 8 \Rightarrow 5 < A < 8$

2. $0^o < \omega < 180^o \Rightarrow 0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1 \Rightarrow$

$0 < 2\sigma\upsilon\nu\omega < 2 \Rightarrow$

$-2 < -2\sigma\upsilon\nu\omega < 0 \Rightarrow$

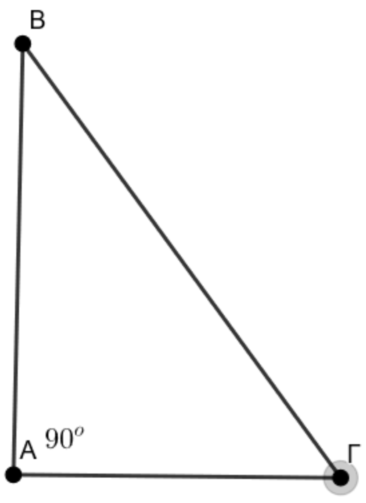
$4 - 2 < 4 - 2\sigma\upsilon\nu\omega < 4 \Rightarrow$

$2 < 4 - 2\sigma\upsilon\nu\omega < 4 \Rightarrow 2 < B < 4$

Άσκηση 5-Λύση

1. Ισχύει ότι $\eta\mu\hat{B} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ και $\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{AB}{B\Gamma}$

Επίσης, $\eta\mu\hat{\Gamma} = \frac{AB}{\Gamma B}$ και $\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$



Επομένως,

$$\eta\mu\hat{B} + \eta\mu\hat{\Gamma} = \sigma\upsilon\nu\hat{B} + \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$$

$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma} + \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AB}{B\Gamma} + \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

$\frac{AB+A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{AB+A\Gamma}{B\Gamma}$ που ισχύει.

2. $\eta\mu\hat{B} \cdot \eta\mu\hat{\Gamma} = \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B}$

$\frac{A\Gamma}{B\Gamma} \cdot \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \cdot \frac{AB}{B\Gamma}$ που ισχύει.

Άσκηση 6-Λύση

1. Γνωρίζουμε ότι $A\hat{O}x = 135°$. Άρα $A\hat{O}B = 180° - 135° = 45°$

   Φέρνω το ύψος $AΔ$ το οποίο είναι και διάμεσος. Για το ορθογώνιο τρίγωνο $AΔO$ ισχύει:

   $$ημ45° = \frac{AΔ}{AO} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AΔ}{3} \Rightarrow AΔ = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

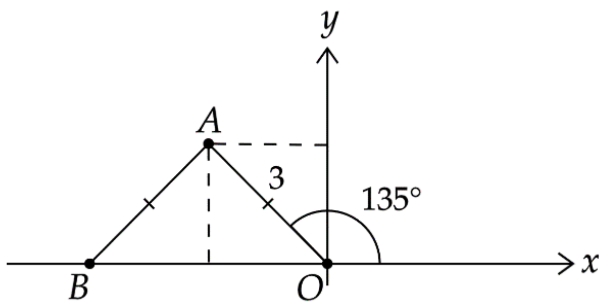
   Άρα, η τεταγμένη του A είναι $y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

   Επίσης,

   $$συν45° = \frac{OΔ}{AO} \Rightarrow$$

   $$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{OΔ}{3} \Rightarrow OΔ = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

   Άρα, η τετμημένη του A είναι $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$



2. Δείξαμε ότι $A(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$

   Επίσης $ρ = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{4} + \frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \frac{6}{2} = 3$

   Έτσι:

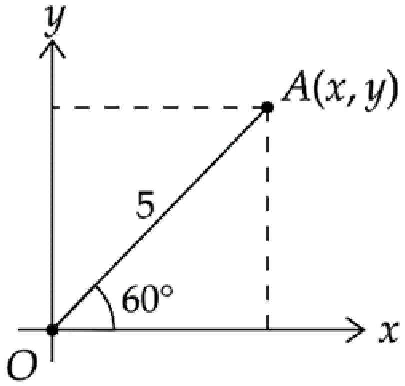
   - $ημ135° = \frac{y}{ρ} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   - $συν135° = \frac{x}{ρ} = \frac{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} = -\frac{3\sqrt{2}}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
   - $εφ135° = \frac{y}{x} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{-\frac{3\sqrt{2}}{2}} = -1$

Άσκηση 7-Λύση

Ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu 60^0 = \frac{x}{OA}$, δηλαδή

$\frac{1}{2} = \frac{x}{OA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{5} \Rightarrow$

$2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$



Επίσης, $\eta\mu 60^0 = \frac{y}{x}$, δηλαδή

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{\frac{5}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2y}{5} \Rightarrow 5\sqrt{3} = 4y \Rightarrow y = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

Άσκηση 8-Λύση

Ισχύει ότι $\eta\mu x\widehat{O}M = \frac{y}{OM}$ δηλαδή,

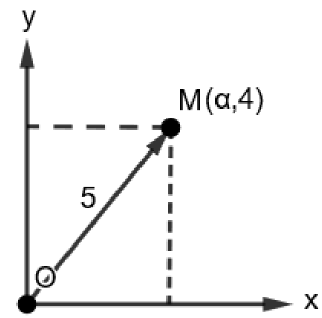
$$\eta\mu x\widehat{O}M = \frac{4}{5}$$

Επίσης, έχουμε:

$OM = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow$

$5 = \sqrt{a^2 + 4^2} \Rightarrow$

$5^2 = a^2 + 16 \Rightarrow a^2 = 9a = 3$



Άρα

$$\eta\mu x\hat{O}M = \frac{x}{OM} \Rightarrow \eta\mu x\hat{O}M = \frac{a}{5} \Rightarrow \eta\mu x\hat{O}M = \frac{3}{5}$$

και

$$\varepsilon\varphi x\hat{O}M = \frac{y}{a} \Rightarrow \varepsilon\varphi x\hat{O}M = \frac{4}{3}$$

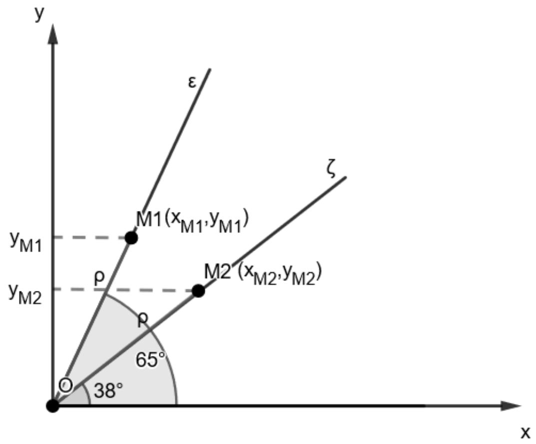
Άσκηση 9-Λύση

1. Δημιουργούμε τις δύο γωνίες και πάνω στις τελικές πλευρές τους, ε και ζ παίρνουμε σημεία $M1$ και $M2$ τέτοια ώστε να απέχουν την ίδια απόσταση ρ από την αρχή των αξόνων. Βλέπουμε πως, η τεταγμένη y_{M1} του σημείο $M1$ είναι μεγαλύτερη από την τεταγμένη y_{M2} του σημείου $M2$.

Για τα ημίτονα των γωνιών έχουμε τα εξής:

$$\eta\mu 65^o = \frac{y_{M1}}{\rho} \quad \text{και} \quad \eta\mu 38^o = \frac{y_{M2}}{\rho}$$

Επειδή $y_{M1} > y_{M2}$ θα ισχύει ότι $\eta\mu 65^o > \eta\mu 38^o$.



Το ίδιο συμπέρασμα παίρνουμε και από τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών:

Αφού $\eta\mu 38^o = 0.6157$ και $\eta\mu 65^o = 0.9063$

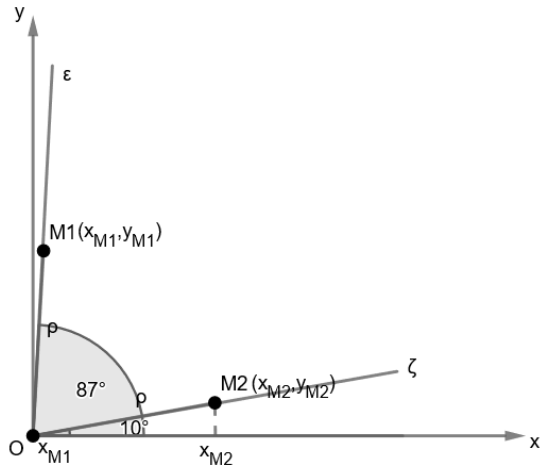
Άρα $\eta\mu 38^o < \eta\mu 65^o$.

2. Δημιουργούμε τις δύο γωνίες και πάνω στις τελικές πλευρές τους, ε και ζ παίρνουμε σημεία $M1$ και $M2$ τέτοια ώστε να απέχουν την ίδια απόσταση ρ από την αρχή των αξόνων. Βλέπουμε πως, η τετμημένη x_{M1} του σημείο $M1$ είναι μικρότερη από την τετμημένη x_{M2} του σημείου $M2$.

   Για τα συνημίτονα των γωνιών έχουμε τα εξής:

$$\sigma\upsilon\nu 87^o = \frac{x_{M1}}{\rho} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu 10^o = \frac{x_{M2}}{\rho}$$

   Επειδή $x_{M1} < x_{M2}$ θα ισχύει ότι:



$$\sigma\upsilon\nu 87^o < \sigma\upsilon\nu 10^o$$

   Το ίδιο συμπέρασμα παίρνουμε και από τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών

   $\sigma\upsilon\nu 87^o = 0.0523$

   Και

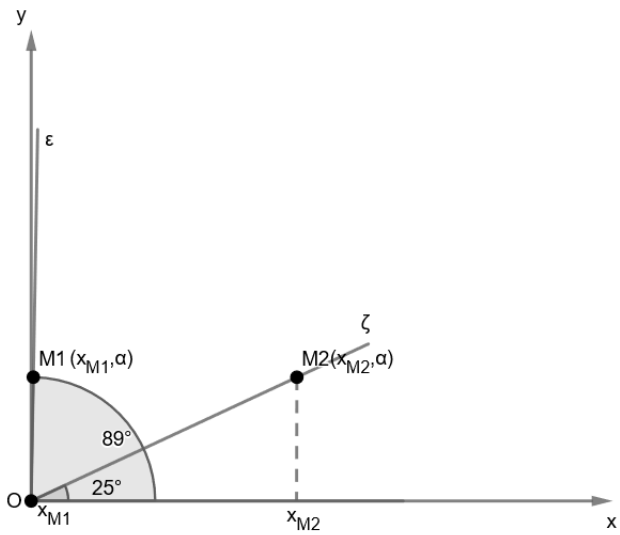
   $\sigma\upsilon\nu 10^o = 0.9848$

   Άρα $\sigma\upsilon\nu 87^o < \sigma\upsilon\nu 10^o$.

3. Δημιουργούμε τις δύο γωνίες και πάνω στις τελικές πλευρές τους, ε και ζ παίρνουμε σημεία $M1$ και $M2$ τέτοια ώστε να έχουν την ίδια τεταγμένη α. Παρατηρούμε πως η τετμημένη x_{M1} του σημείου $M1$ είναι μικρότερη από την τετμημένη x_{M2} του σημείο $M2$.

Για τις εφαπτόμενες των δύο γωνιών έχουμε:

$\varepsilon\varphi 25^o \frac{\alpha}{x_{M2}}$ και $\varepsilon\varphi 89^o = \frac{\alpha}{x_{M1}}$



Επειδή $x_{M1} < x_{M2}$ θα ισχύει ότι:

$$\varepsilon\varphi 89^o > \varepsilon\varphi 25^o$$

Το ίδιο παίρνουμε και από τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών:

$\varepsilon\varphi 25^o = 0.4663$

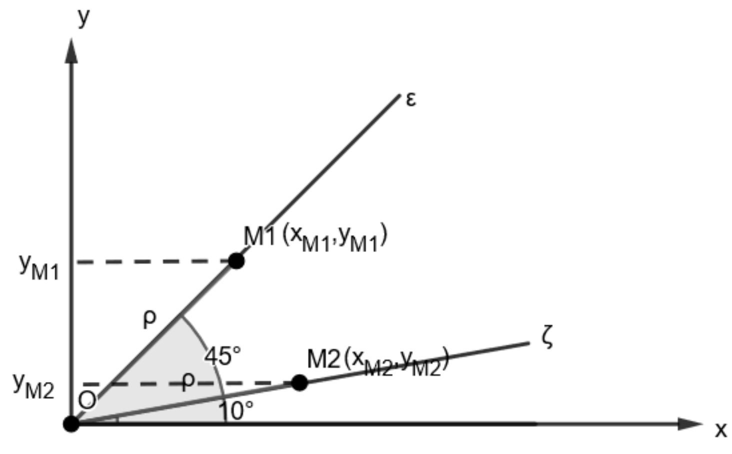
Και

$\varepsilon\varphi 89^o = 57.2900$

Άρα $\varepsilon\varphi 25^o < \varepsilon\varphi 89^o$

4. Η σύγκριση των αριθμών $ημ10^o$ και $συν60^o$ δεν μπορεί να γίνει άμεσα. Πρώτα, θα συγκρίνουμε τους αριθμούς $ημ10^o$ με $ημ45^o$ και τους αριθμούς $συν60^o$ με $συν45^o$.

Σύγκριση των αριθμών $ημ10^o$ με $ημ45^o$:



Δημιουργούμε τις δύο γωνίες και πάνω στις τελικές πλευρές τους, ε και ζ παίρνουμε σημεία $M1$ και $M2$ τέτοια ώστε να απέχουν την ίδια απόσταση $ρ$ από την αρχή των αξόνων. Βλέπουμε πως, η τεταγμένη y_{M1} του σημείο $M1$ είναι μεγαλύτερη από την τεταγμένη y_{M2} του σημείου $M2$.

$$ημ45^o = \frac{y_{M1}}{ρ} \quad \text{και} \quad ημ10^o = \frac{y_{M2}}{ρ}$$

Επειδή $y_{M1} > y_{M2}$ θα ισχύει ότι $ημ45^o > ημ10^o$, δηλαδή $ημ10^o < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Σύγκριση των αριθμών $συν60^o$ με $συν45^o$:

Γνωρίζουμε ότι $συν30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $συν45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και άρα $συν30^o > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Αφού $ημ10^o < \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $συν30^o > \frac{\sqrt{2}}{2}$, τότεQ

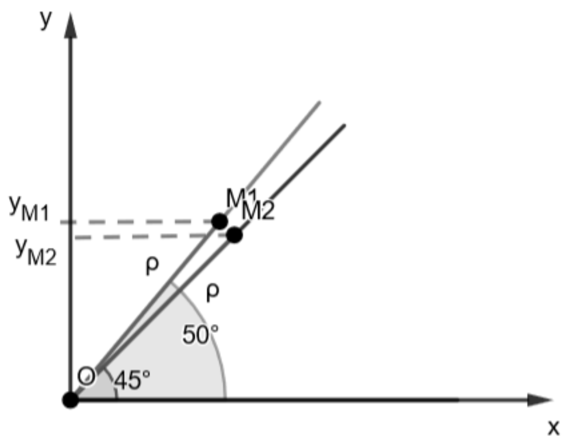
$$ημ10^o < συν30^o$$

5. Η σύγκριση των αριθμών $\frac{1}{ημ30^o}$ και $\frac{2}{ημ50^o}$ δεν μπορεί να γίνει άμεσα. Για αυτό θα προηγηθούν δύο συγκρίσεις με αριθμούς που περιέχουν το $ημ45^o$.

Γνωρίζουμε ότι $ημ30^o = \frac{1}{2}$ και $ημ45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και άρα:

$$ημ30^o < ημ45^o \Rightarrow ημ30^o < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{ημ30^o} > \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{ημ30^o} > \sqrt{2}$$

Επίσης, σχεδιάζουμε τις γωνίες 50^o και 45^o και πάνω στις τελικές πλευρές τους, ε και ζ παίρνουμε σημεία $M1$ και $M2$ τέτοια ώστε να απέχουν την ίδια απόσταση $ρ$ από την αρχή των αξόνων. Βλέπουμε πως, η τεταγμένη y_{M1} του σημείο $M1$ είναι μεγαλύτερη από την τεταγμένη y_{M2} του σημείου $M2$.



$$ημ50^o = \frac{y_{M1}}{ρ} \quad \text{και} \quad ημ45^o = \frac{y_{M2}}{ρ}$$

Επειδή $y_{M1} > y_{M2}$ θα ισχύει ότι $ημ50^o > ημ45^o$, δηλαδή $ημ50^o > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα:

$$ημ50^o > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{ημ50^o} < \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2}{ημ50^o} < \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2}{ημ50^o} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Τελικά, αφού $\frac{1}{ημ30^o} > \sqrt{2}$ και $\frac{2}{ημ50^o} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, θα ισχύει ότι:

$$\frac{2}{ημ50^o} < \frac{1}{ημ30^o}$$

Άσκηση 10-Λύση

1. Θέτω $x = 0$ και παίρνω για την ευθεία:

   $2 \cdot 0 + 3y = 6$

   $3y = 6$

   $y = 2$

   Άρα, το πρώτο σημείο που ανήκει στην ευθεία είναι το $A(0,2)$

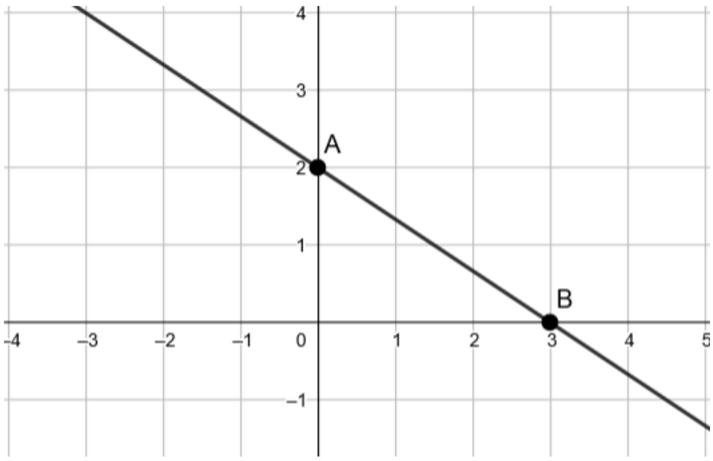
   Θέτω $y = 0$ και παίρνω για την ευθεία:

   $2x + 3 \cdot 0 = 6$

   $2x = 6$ άρα $x = 3$

   Άρα, το δεύτερο σημείο που ανήκει στην ευθεία είναι το $B(3,0)$

2. Για να σχεδιάσουμε την ευθεία, τοποθετούμε τα σημεία $A(0,2)$ και $B(3,0)$ πάνω στους άξονες και στην συνέχεια τα ενώνουμε. Παίρνουμε την παρακάτω ευθεία.



3. Στην ευθεία, αντικαθιστούμε $y = 4$ και λύνουμε ως προς x.

   $2x + 3 \cdot 4 = 6$

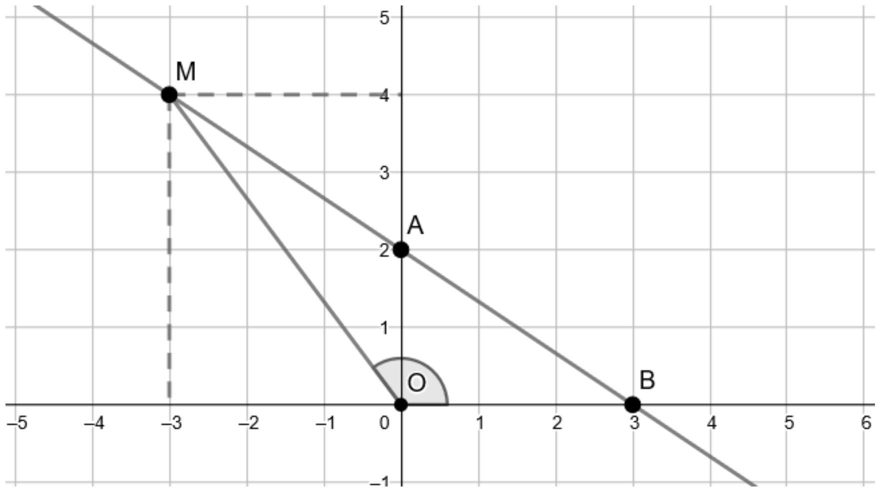
   $2x = 6 - 12$

   $2x = -6$ άρα $x = -3$

   Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το $M(-3,4)$

4. Τοποθετούμε το σημείο $M(-3,4)$ πάνω την ευθεία.

   Η απόσταση $\rho = OM = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.



Επομένως:

- $\eta\mu x\hat{O}M = \frac{4}{5}$
- $\sigma\upsilon\nu x\hat{O}M = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$
- $\varepsilon\varphi x\hat{O}M = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

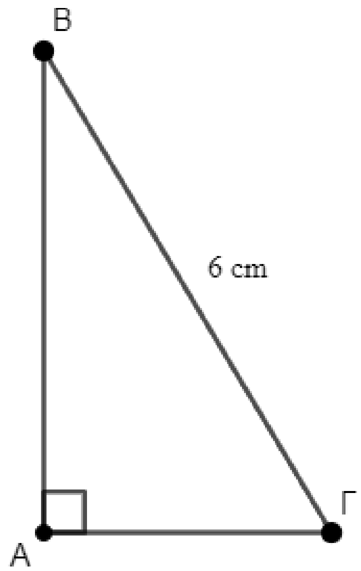
$\eta\mu\hat{B} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Rightarrow$

$\frac{3}{5} = \frac{6}{B\Gamma} \Rightarrow$

$B\Gamma = \frac{5 \cdot 6}{3} \Rightarrow$

$B\Gamma = \frac{30}{3} \Rightarrow$

$B\Gamma = 10\ cm$



Κάνοντας χρήση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος προκύπτει:

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Rightarrow$

$AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2 \Rightarrow$

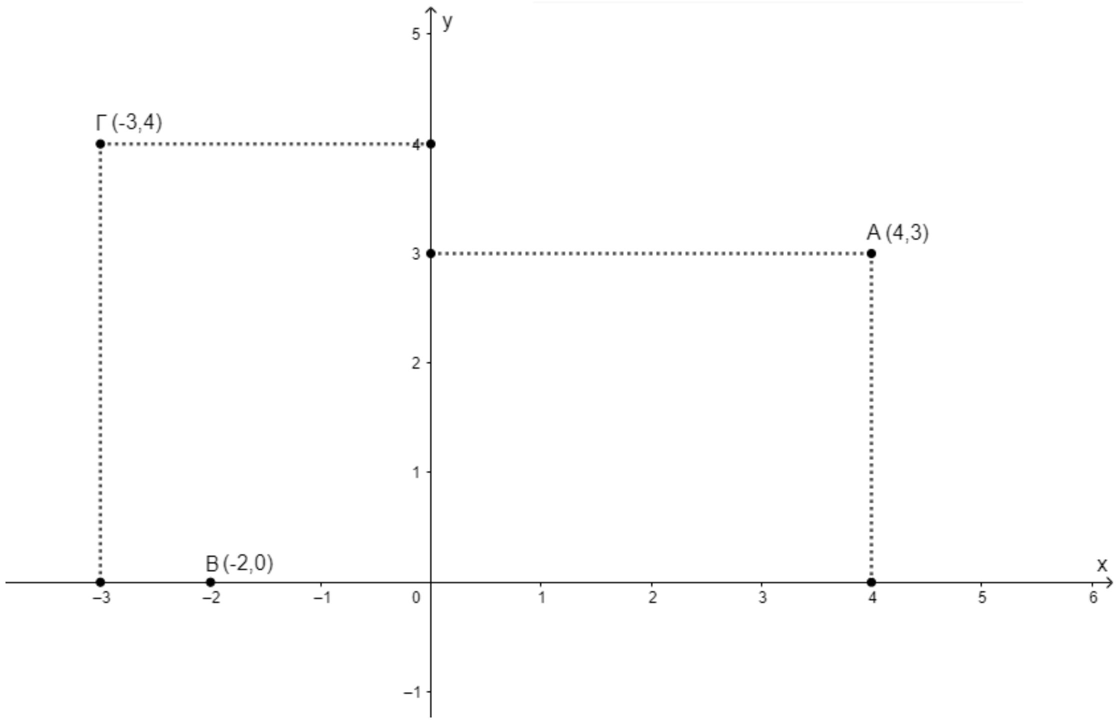
$AB^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow$

$AB^2 = 100 - 36 \Rightarrow$

$AB^2 = 64 \Rightarrow$

$AB = 8\ cm$

Άσκηση 2-Λύση



1. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$$\eta\mu x\hat{O}A = \frac{y}{\rho} = \frac{3}{5}$$

2. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0} = \sqrt{4} = 2$

$$\sigma\upsilon\nu x\hat{O}B = \frac{x}{\rho} = \frac{-2}{2} = -1$$

3. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$$\varepsilon\varphi x\hat{O}\Gamma = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

Άσκηση 3-Λύση

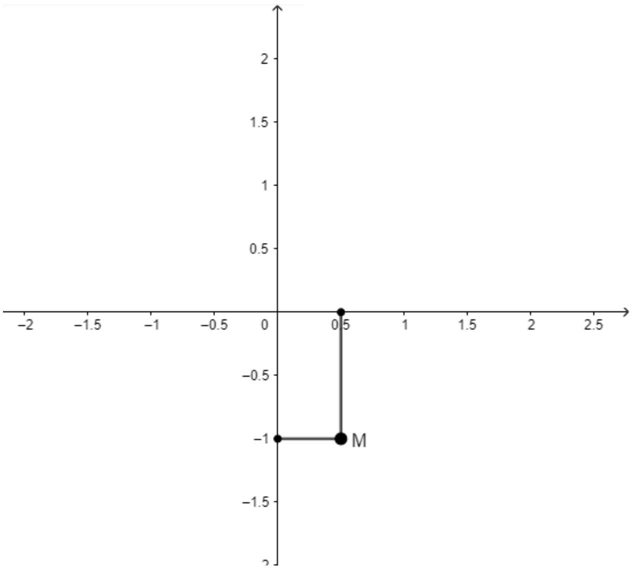
1. $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}=$

$\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\eta\mu x\hat{O}M=\frac{y}{\rho}=\frac{-1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sigma\upsilon\nu x\hat{O}M=\frac{x}{\rho}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\varepsilon\varphi x\hat{O}M=\frac{y}{x}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$

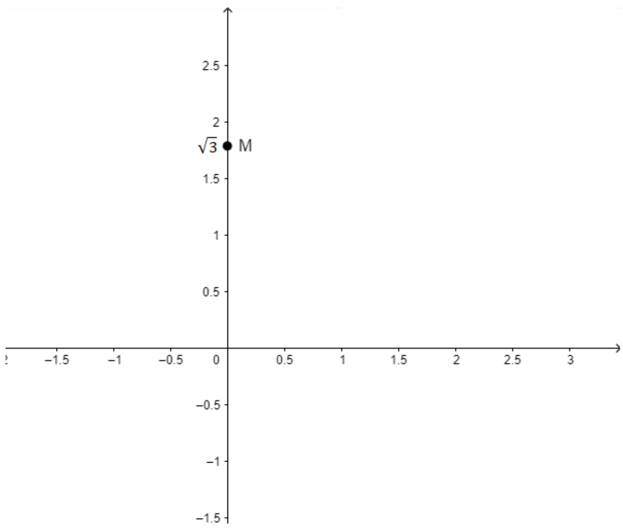


2. $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{3}$

$\eta\mu x\hat{O}M=\frac{y}{\rho}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$

$\sigma\upsilon\nu x\hat{O}M=\frac{x}{\rho}=\frac{0}{\sqrt{3}}=0$

$\varepsilon\varphi x\hat{O}M=\frac{y}{x}$ δεν ορίζεται



Άσκηση 4-Λύση

1. Έχουμε ότι:
   - $\varepsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{AB}$
   - $\eta\mu B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$

   Οπότε:

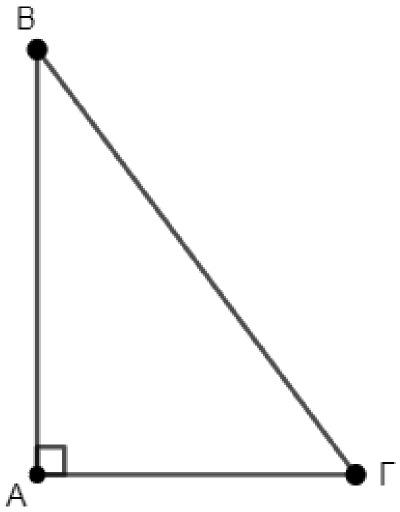
   $\varepsilon\varphi B > \eta\mu B \Rightarrow$

   $\frac{A\Gamma}{AB} > \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Rightarrow$

   $A\Gamma \cdot B\Gamma > A\Gamma \cdot AB \Rightarrow$

   $$B\Gamma > A\Gamma$$

   που ισχύει καθώς $B\Gamma$ υποτείνουσα του τριγώνου $AB\Gamma$.



2. Γνωρίζουμε ότι $\beta = A\Gamma$ και $\gamma = AB$

$$\frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma} = \frac{\frac{A\Gamma}{B\Gamma}}{\frac{AB}{B\Gamma}} = \frac{A\Gamma \cdot B\Gamma}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{\beta}{\gamma}$$

Άσκηση 5-Λύση

1. Γνωρίζουμε ότι για γωνία $0° < \omega < 180°$ ισχύει $0 \leq \eta\mu\omega \leq 1$.

   Από τη σχέση αυτή παίρνουμε:

   $$0 \leq 4\eta\mu\omega \leq 4 \Rightarrow\ 3 \leq 4\eta\mu\omega + 3 \leq 4 + 3 \Rightarrow\ 3 \leq 4\eta\mu\omega + 3 \leq 7$$

2. Αντίστοιχα $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$.

   Έτσι:

   $3 \geq -3\sigma\upsilon\nu\omega \geq -3 \Rightarrow$

   $-3 \leq -3\sigma\upsilon\nu\omega \leq 3$

   $2 - 3 \leq 2 - 3\sigma\upsilon\nu\omega \leq 2 + 3 \Rightarrow$

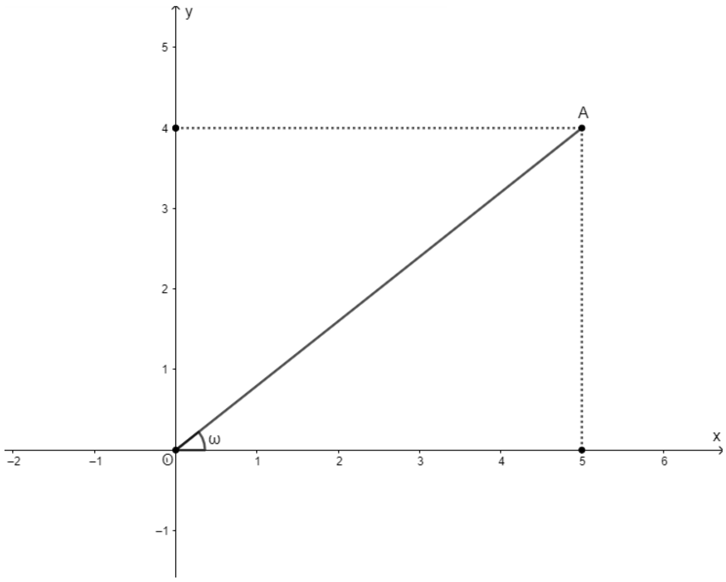
   $-1 \leq 2 - 3\sigma\upsilon\nu\omega \leq 5$

Άσκηση 6-Λύση

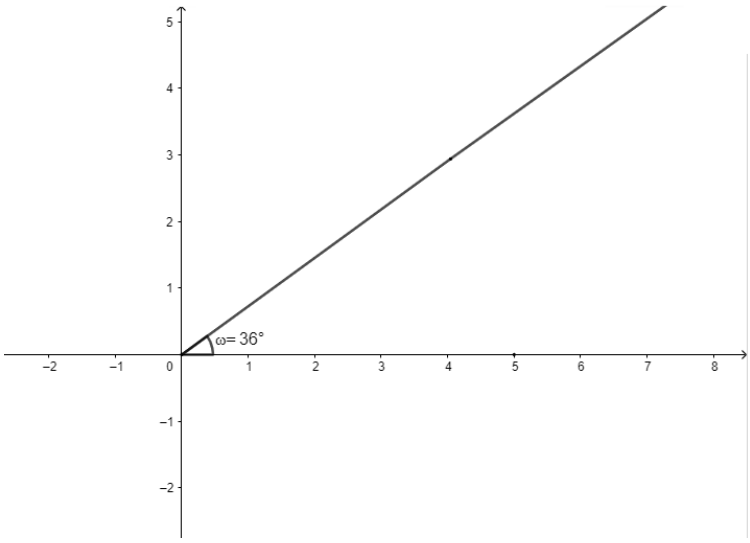
1. $εφω = \frac{4}{5} \Rightarrow$
   $\frac{y}{x} = \frac{4}{5}$

   Έτσι συμπεραίνουμε ότι
   $x = 5$ και $y = 4$ και $A(5,4)$.

   Επίσης $εφω = \frac{4}{5} = 0{,}8$. Από τον πίνακα με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών συμπεραίνουμε ότι $ω = 39°$.



2. $ημ(90° - ω) = 0{,}8$
   Έστω $φ = 90° - ω$. Από τον πίνακα με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών συμπεραίνουμε ότι:
   $φ = 54° \Rightarrow$
   $90° - ω = 54° \Rightarrow$
   $ω = 36°$



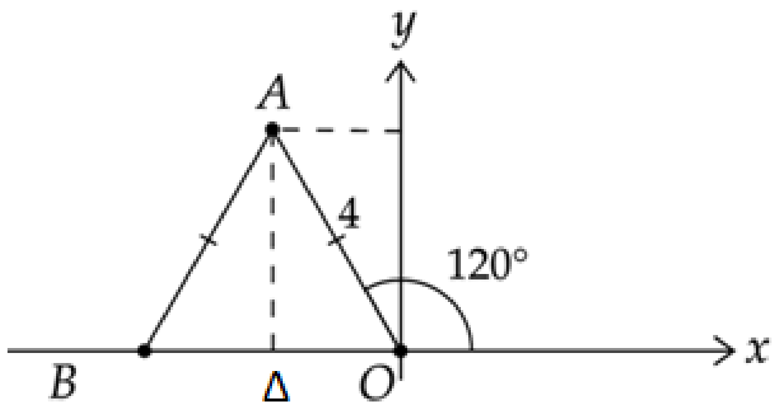
Άσκηση 7-Λύση

1 .Γνωρίζουμε ότι $A\hat{O}x = 120°$. Άρα $A\hat{O}B = 180° - 120° = 60°$

Φέρνω το ύψος $A\Delta$ το οποίο είναι και διάμεσος. Για το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta O$ ισχύει:

$$\eta\mu 60° = \frac{A\Delta}{AO} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{A\Delta}{4} \Rightarrow A\Delta = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A\Delta = 2\sqrt{3}$$

Άρα, η τεταγμένη του A είναι $y = 2\sqrt{3}$



$$\sigma\upsilon\nu 60° = \frac{O\Delta}{AO} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{O\Delta}{4} \Rightarrow O\Delta = \frac{4}{2} \Rightarrow O\Delta = 2$$

Άρα, η τετμημένη του A είναι $x = -2$. Επομένως, $A(-2{,}2\sqrt{3})$

Για το B γνωρίζουμε ότι η τεταγμένη είναι $y = 0$

Επίσης εφόσον $O\Delta = 2$ και $A\Delta$ διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ABO προκύπτει ότι $OB = 4$.

Άρα, η τετμημένη του B είναι $x = -4$.

Επομένως, $B(-4{,}0)$.

2. Δείξαμε ότι $A(-2,2\sqrt{3})$

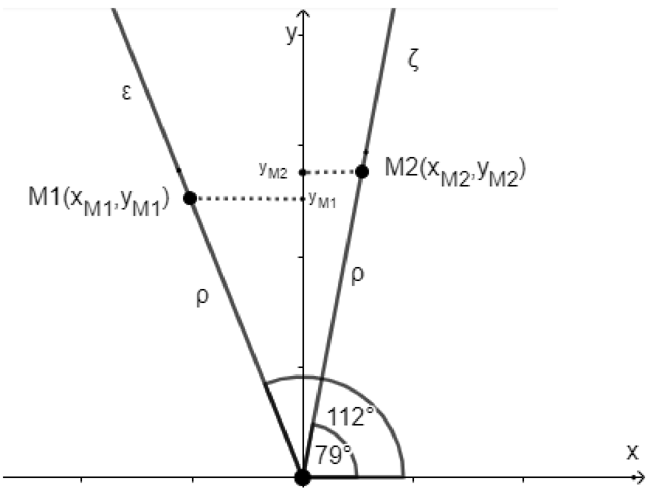
Επίσης $\rho = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4 = OA$

Έτσι:

- $\eta\mu 120° = \frac{y}{\rho} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu 120° = \frac{x}{\rho} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$
- $\varepsilon\varphi 120° = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$

Άσκηση 8-Λύση

1. Δημιουργούμε τις δύο γωνίες και πάνω στις τελικές πλευρές τους ε και ζ, παίρνουμε σημεία $M1$ και $M2$ τέτοια ώστε να απέχουν την ίδια απόσταση ρ από την αρχή των αξόνων. Βλέπουμε πως η τεταγμένη y_{M1} του σημείου $M1$ είναι μικρότερη από την τεταγμένη y_{M2} του σημείου $M2$.

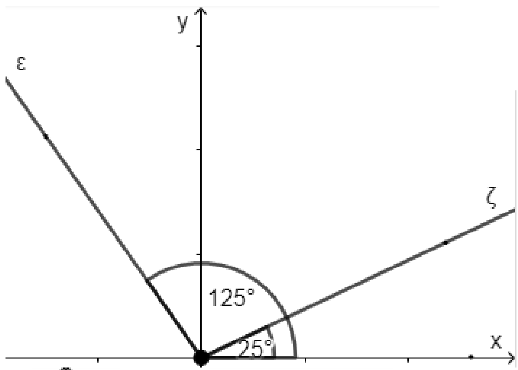


   Για τα ημίτονα των γωνιών ισχύει:
   $\eta\mu 112° = \frac{y_{M1}}{\rho}$ και $\eta\mu 79° = \frac{y_{M2}}{\rho}$

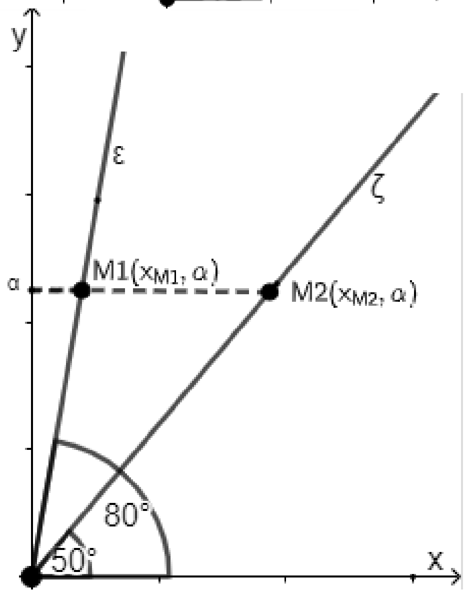
   Επειδή $y_{M1} < y_{M2}$ θα ισχύει $\eta\mu 112° < \eta\mu 79°$.

$\sigma\upsilon\nu 25° > 0\,, \sigma\upsilon\nu 125° < 0$ και ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu 25° > \sigma\upsilon\nu 125°$$



2. Δημιουργούμε τις δύο γωνίες και πάνω στις τελικές πλευρές τους ε και ζ, παίρνουμε σημεία $M1$ και $M2$ τέτοια ώστε να έχουν ίδια τεταγμένη α. Βλέπουμε πως η τετμημένη x_{M1} του σημείου $M1$ είναι μικρότερη από την τετμημένη x_{M2} του σημείου $M2$.



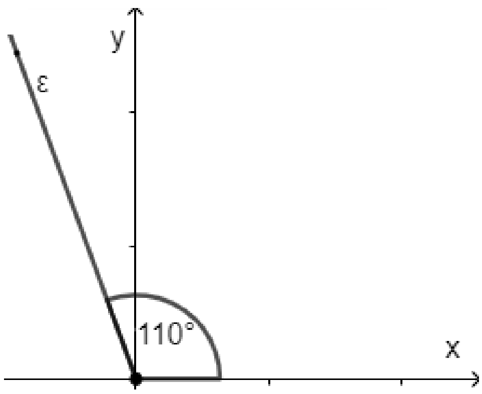
Για τις εφαπτομένες των γωνιών ισχύει:

$\varepsilon\varphi 80° = \frac{\alpha}{x_{M1}}$ και $\varepsilon\varphi 50° = \frac{\alpha}{x_{M2}}$

Επειδή $x_{M1} < x_{M2}$ θα ισχύει $\varepsilon\varphi 80° > \varepsilon\varphi 50°$.

3. $\eta\mu 110° > 0\,,\ \sigma\upsilon\nu 110° < 0$ και ισχύει:

$$\eta\mu 110° > \sigma\upsilon\nu 110°$$



Άσκηση 9-Λύση

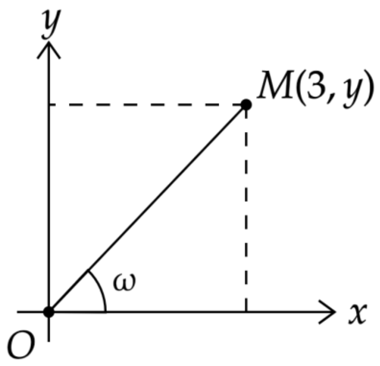
1. Γνωρίζουμε ότι $M(3, y)$, επομένως τετμημένη του M είναι $x = 3$.

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x}{\rho} = \frac{3}{4} \Rightarrow \rho = 4$$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$

$4^2 = 3^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 16 - 9 \Rightarrow$

$y^2 = 7 \Rightarrow y = \sqrt{7}$

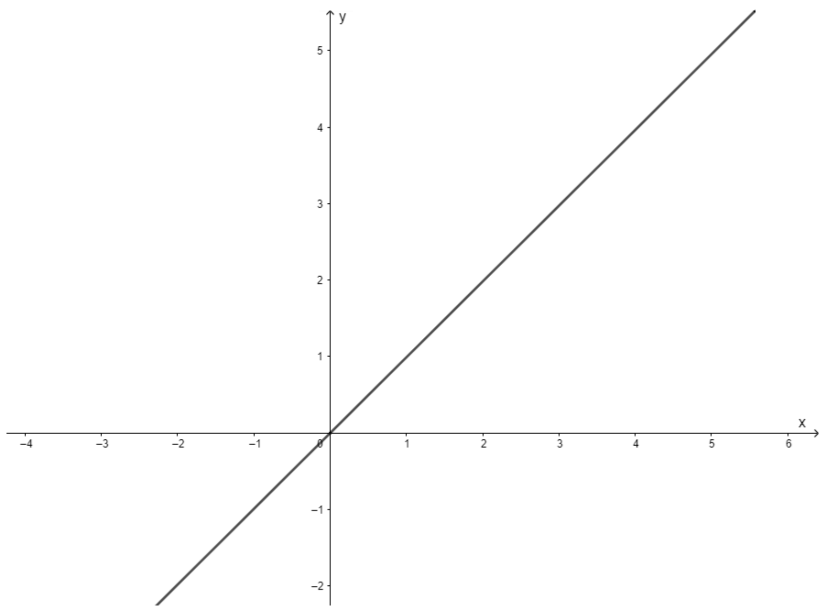


Άρα $M(3, \sqrt{7})$

2. $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ και $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

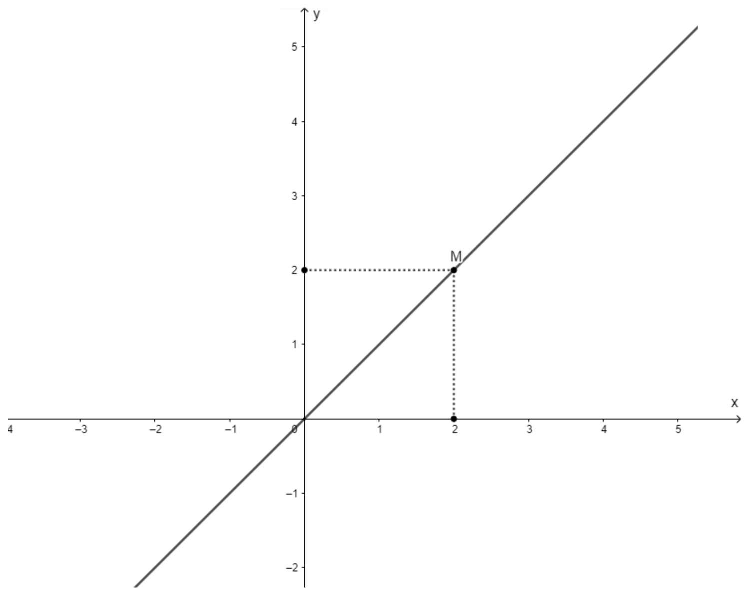
Άσκηση 10-Λύση

1.



2. Εφόσον η ευθεία έχει εξίσωση $x = y$ προκύπτει ότι για $x = 2$ παίρνουμε $y = 2$

   Άρα $M(2,2)$



3. Για το σημείο $M(2,2)$ ισχύει ότι:

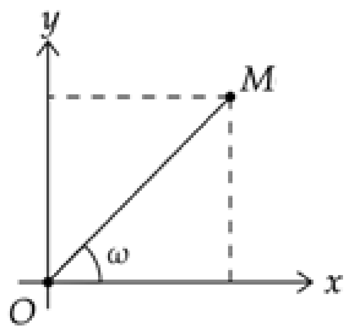
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

   Έτσι παίρνουμε:

$$\eta\mu x\hat{O}M = \frac{y}{\rho} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu x\hat{O}M = \frac{x}{\rho} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi x\hat{O}M = \frac{y}{x} = \frac{2}{2} = 1$$



4. Από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συμπεραίνουμε ότι η γωνία $x\hat{O}M = 45°$.

2.2. Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

1. Λάθος
2. Σωστό
3. Σωστό
4. Λάθος
5. Σωστό
6. Σωστό

Ερώτηση Κατανόησης 2 - Απάντηση

1. iii.
2. i.
3. iv.
4. ii.

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

1. $4\eta\mu^2 x = 3 \Rightarrow \eta\mu^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow |\eta\mu x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   Γνωρίζουμε ότι το $\eta\mu x$ για $0° \leq x \leq 180°$ είναι θετικό, επομένως:

   $$\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

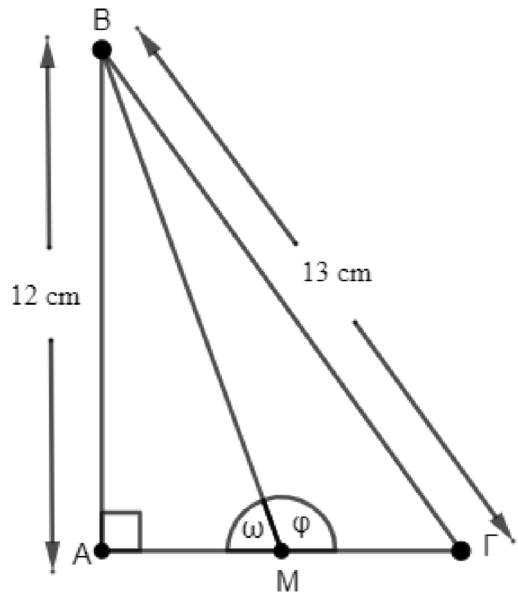
   Έτσι συμπεραίνουμε ότι $x = 60°$ ή $x = 120°$.

2. $2\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow |\sigma\upsilon\nu x| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\sigma\upsilon\nu x| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

   $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

   Επομένως $x = 45°$ ή $x = 135°$.

Άσκηση 2-Λύση



Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ με χρήση Πυθαγορείου Θεωρήματος παίρνουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 \Rightarrow$$

$$A\Gamma^2 = 25 \Rightarrow A\Gamma = 5cm$$

Επίσης εφόσον BM διάμεσος έχουμε ότι:

$$AM = M\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{5}{2}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABM με χρήση Πυθαγορείου Θεωρήματος παίρνουμε:

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 = 12^2 + (\frac{5}{2})^2 = 144 + \frac{25}{4} = \frac{576}{4} + \frac{25}{4} = \frac{601}{4} \Rightarrow$$

$$BM = \frac{\sqrt{601}}{2}$$

Για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ισχύει:

$$\eta\mu\omega = \frac{AB}{BM} = \frac{12}{\frac{\sqrt{601}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{601}} = \frac{24\sqrt{601}}{601}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{AM}{BM} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{601}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{601}} = \frac{5\sqrt{601}}{601}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AB}{AM} = \frac{12}{\frac{5}{2}} = \frac{24}{5}$$

Παρατηρούμε ότι $\omega + \varphi = 180°$. Άρα οι γωνίες ω, φ είναι παραπληρωματικές.

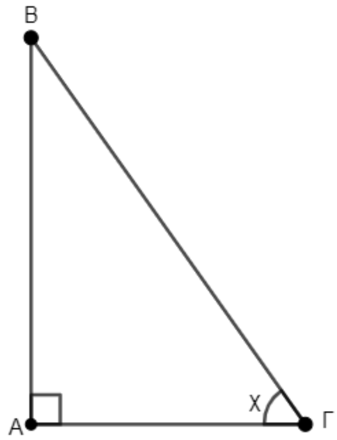
Έτσι:

$$\eta\mu\varphi = \eta\mu\omega = \frac{24\sqrt{601}}{601}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = -\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{5\sqrt{601}}{601}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = -\varepsilon\varphi\omega = -\frac{24}{5}$$

Άσκηση 3-Λύση



Έχουμε $ΑΒΓ$ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90°$.

Ορίζουμε $\hat{Γ} = x$ και $\hat{B} = 180° - (90° + x)$.

1. Γνωρίζουμε ότι: $ημ\big(180° - (90° + x)\big) = ημ(90° + x)$

   Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει:

   $$ημ\big(180° - (90° + x)\big) = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} \quad \text{και} \quad συνx = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

   Άρα:

   $$ημ\big(180° - (90° + x)\big) = συνx \Rightarrow ημ(90° + x) = συνx.$$

2. Γνωρίζουμε ότι: $συν\big(180° - (90° + x)\big) = -συν(90° + x)$

   Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει:

   $$συν\big(180° - (90° + x)\big) = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} \quad \text{και} \quad ημx = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

   Άρα:

   $$συν\big(180° - (90° + x)\big) = ημx \Rightarrow -συν(90° + x) = ημx \Rightarrow συν(90° + x) = -ημx$$

3. Γνωρίζουμε ότι: $εφ\big(180° - (90° + x)\big) = -εφ(90° + x)$

   Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει:

   $$εφ\big(180° - (90° + x)\big) = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} \quad \text{και} \quad σφx = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

   Άρα:

   $$εφ\big(180° - (90° + x)\big) = σφx \Rightarrow -εφ(90° + x) = σδx \Rightarrow εφ(90° + x) = -σφx$$

Άσκηση 4-Λύση

Θέτω $συνx = y$. Έτσι προκύπτει: $y^2 - \frac{3}{2}y - 1 = 0$

Κάνοντας παραγοντοποίηση παίρνουμε: $(y-2)\left(y+\frac{1}{2}\right) = 0$

Έτσι

$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow συνx = 2$ η οποία απορρίπτεται γιατί $-1 \leq συνx \leq 1$

ή

$y + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow συνx = -\frac{1}{2}$

Άρα $συνx = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 120°$

Άσκηση 5-Λύση

Θέτω $ημx = y$. Έτσι προκύπτει: $6y^2 = y + 1 \Rightarrow 6y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y^2 - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6} = 0$

Κάνοντας παραγοντοποίηση παίρνουμε: $\left(y+\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right) = 0$

Έτσι:

$y + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \Rightarrow ημx = -\frac{1}{3}$ η οποία απορρίπτεται γιατί για $90° \leq x \leq 180°$ ισχύει ότι $ημx \geq 0$.

ή

$y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow ημx = \frac{1}{2}$

Άρα $x = 30°$ ή $x = 150°$

Άσκηση 6-Λύση

1. Για τις γωνίες του τριγώνου ισχύει: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180°$. Άρα $\hat{A}+\hat{B}=180°-\hat{\Gamma}$.
   Έτσι: $\eta\mu(\hat{A}+\hat{B})=\eta\mu(180°-\hat{\Gamma})=\eta\mu\hat{\Gamma}$

2. Για τις γωνίες του τριγώνου ισχύει: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180°$. Άρα $\hat{A}+\hat{\Gamma}=180°-\hat{B}$.
   Έτσι: $\sigma\upsilon\nu(\hat{A}+\hat{\Gamma})+\sigma\upsilon\nu\hat{B}=\sigma\upsilon\nu(180°-\hat{B})+\sigma\upsilon\nu\hat{B}=-\sigma\upsilon\nu\hat{B}+\sigma\upsilon\nu\hat{B}=0$

3. Για τις γωνίες του τριγώνου ισχύει: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180°$. Άρα $\hat{A}+\hat{B}=180°-\hat{\Gamma}$.
   Έτσι: $\varepsilon\varphi(\hat{A}+\hat{B})=\varepsilon\varphi(180°-\hat{\Gamma})=-\varepsilon\varphi\hat{\Gamma}$

Άσκηση 7-Λύση

1. Έχουμε ότι $(150°+x)+(30°-x)=180°$, δηλαδή οι γωνίες είναι παραπληρωματικές και έτσι:
$$\eta\mu(150°+x)=\eta\mu(30°-x)$$

2. Έχουμε ότι $(140°+x)+(40°-x)=180°$, δηλαδή οι γωνίες είναι παραπληρωματικές και έτσι:
$$\sigma\upsilon\nu(140°+x)=-\sigma\upsilon\nu(40°-x)$$

3. Έχουμε ότι $(120°-x)+(60°+x)=180°$, δηλαδή οι γωνίες είναι παραπληρωματικές και έτσι:
$$\eta\mu(120°-x)=\eta\mu(60°+x)$$

4. Έχουμε ότι $(170°-x)+(10°+x)=180°$, δηλαδή οι γωνίες είναι παραπληρωματικές και έτσι:
$$\sigma\upsilon\nu(170°-x)=-\sigma\upsilon\nu(10°+x)$$

Άσκηση 8-Λύση

1. $\eta\mu 150° + \sigma\upsilon\nu 165° + \eta\mu 75° - \sigma\upsilon\nu 60° = 0 \Rightarrow$
   $\eta\mu(90° + 60°) + \sigma\upsilon\nu(90° + 75°) + \eta\mu 75° - \sigma\upsilon\nu 60° = 0 \Rightarrow$
   $\sigma\upsilon\nu 60° - \eta\mu 75° + \eta\mu 75° - \sigma\upsilon\nu 60° = 0$ που ισχύει.

2. $\eta\mu 89° + \eta\mu 91° - 2\sigma\upsilon\nu 1° = 0 \Rightarrow$
   $\eta\mu(180° - 91°) + \eta\mu 91° - 2\sigma\upsilon\nu 1° = 0 \Rightarrow$
   $\eta\mu 91° + \eta\mu 91° - 2\sigma\upsilon\nu 1° = 0 \Rightarrow$
   $2\eta\mu 91° - 2\sigma\upsilon\nu 1° = 0 \Rightarrow$
   $2\eta\mu(90° + 1°) - 2\sigma\upsilon\nu 1° = 0 \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu 1° - 2\sigma\upsilon\nu 1° = 0$ που ισχύει.

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

1. $2\eta\mu x = \sqrt{3} \Rightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 60^o$ ή $x = 120^o$

2. $\sigma\upsilon\nu x = 1 - \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu x = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60^o$

3. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 150^o$

4. $3\varepsilon\varphi^2(x) = 1 \Rightarrow \varepsilon\varphi^2(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ή $\varepsilon\varphi x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $\varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$
   $x = 30^o$ ή $x = 150^o$.

5. $1 - 2\eta\mu^2 x = 0 \Rightarrow 2\eta\mu^2 x = 1 \Rightarrow \eta\mu^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 45^o$

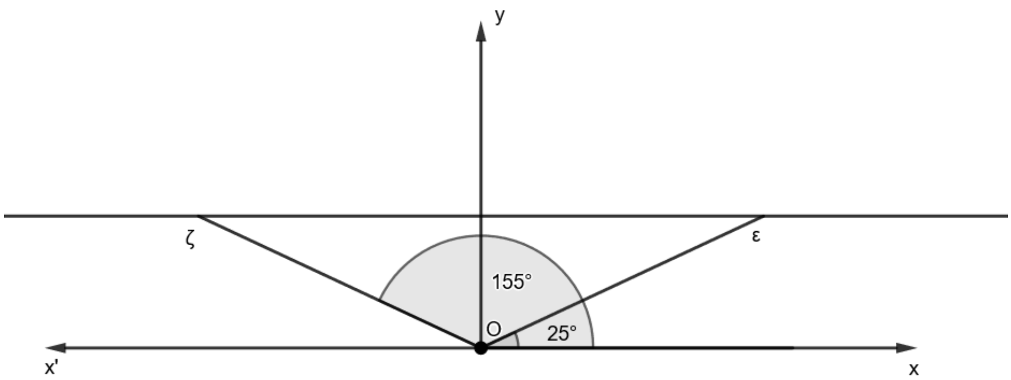
Άσκηση 2-Λύση

1. $\eta\mu(135° + 2x) = \eta\mu(45° - 2x)$

   Έχουμε ότι:

   $\eta\mu(135° + 2x) = \eta\mu(180^o - 45^o + 2x) = \eta\mu[180^o - (45^o - 2x)] = \eta\mu(45° - 2x)$

   Αν αντικαταστήσουμε $x = 10^o$, τότε θα πάρουμε τις γωνίες 25^o και 155^o όπως φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα:

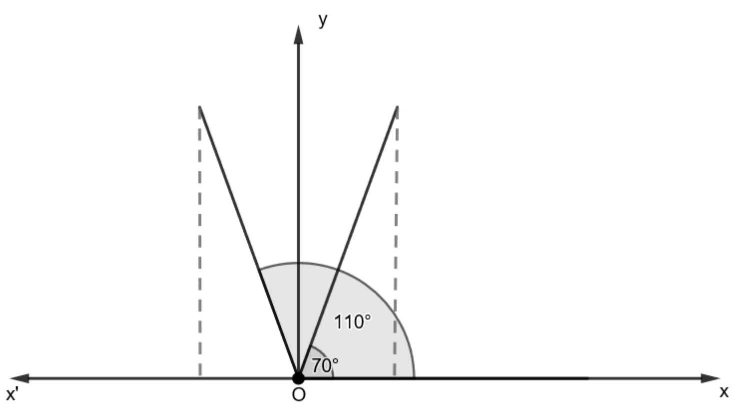


2. $\sigma\upsilon\nu(90° + x) = -\sigma\upsilon\nu(90° - x)$

   Έχουμε ότι:

   $\sigma\upsilon\nu(90° + x) = \sigma\upsilon\nu(180^o - 90^o + x) = \sigma\upsilon\nu[180^o - (90^o - x)] = -\sigma\upsilon\nu(90^o - x)$

   Αντικαθιστώντας για $x = 20^o$, τότε θα πάρουμε τις γωνίες 110^o και 70^o όπως φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα:



Άσκηση 3-Λύση

1. $4\eta\mu\omega = \frac{1}{\eta\mu\omega} \Rightarrow 4\eta\mu^2\omega = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{1}{4} \Rightarrow \eta\mu\omega = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega = 30^o$

2. $4\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{\sigma\upsilon\nu\omega} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{3}{4} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \omega = 30^o$

Άσκηση 4-Λύση

$$(\sigma\upsilon\nu x)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sigma\upsilon\nu x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Η παράσταση μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

$$(\sigma\upsilon\nu x + 1) \cdot \left(\sigma\upsilon\nu x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = -1 \Rightarrow x = 180^o$$

ή

$\sigma\upsilon\nu x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 30^o$ Δεκτή γίνεται η λύση $x = 180^o$

Άσκηση 5-Λύση

$$\eta\mu 137° + \sigma\upsilon\nu 29° - \eta\mu 43° + \sigma\upsilon\nu 151° = 0$$

Οι παραπληρωματικές γωνίες 137^o και 43^o έχουν το ίδιο ημίτονο, δηλαδή:

$$\eta\mu 137° = \eta\mu 43°$$

Οι παραπληρωματικές γωνίες 29^o και 151^o έχουν αντίθετα συνημίτονα, δηλαδή:

$$\sigma\upsilon\nu 29° = -\sigma\upsilon\nu 151°$$

Κάνουμε αντικατάσταση στην παράσταση και παίρνουμε:

$$\eta\mu 137° + \sigma\upsilon\nu 29° - \eta\mu 43° + \sigma\upsilon\nu 151° = 0 \Rightarrow$$
$$\eta\mu 137° - \sigma\upsilon\nu 151° - \eta\mu 137° + \sigma\upsilon\nu 151° = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Άσκηση 6-Λύση

1. $\sigma\upsilon\nu^2 30° + \sigma\upsilon\nu^2 120° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

2. $\varepsilon\varphi^2 135^o + \varepsilon\varphi^2 60^o + 3\varepsilon\varphi^2 120^o = (-1)^2 + \sqrt{3}^2 + 3(-\sqrt{3})^2 = 1 + 3 + 9 = 13$

Άσκηση 7-Λύση

$A = \eta\mu 120° \cdot \eta\mu 135° \cdot \sigma\upsilon\nu 150° \cdot \sigma\upsilon\nu 45° + \eta\mu 45° \cdot \sigma\upsilon\nu 135° \cdot \varepsilon\varphi 45°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 1 = -\frac{\sqrt{3}^2 \cdot \sqrt{2}^2}{16} - \frac{\sqrt{2}^2}{4} = -\frac{6}{16} - \frac{2}{4} = -\frac{6}{16} - \frac{8}{16} =$$

$$= -\frac{14}{16} = -\frac{7}{8}$$

Άσκηση 8-Λύση

1. $\sigma\upsilon\nu 0° + \sigma\upsilon\nu 20° + \sigma\upsilon\nu 40° + \sigma\upsilon\nu 60° + \sigma\upsilon\nu 80° + \sigma\upsilon\nu 100° + \sigma\upsilon\nu 120° + \sigma\upsilon\nu 140° + \sigma\upsilon\nu 160° + \sigma\upsilon\nu 180° = 0$

   Οι παραπληρωματικές γωνίες 20^o και 160^o έχουν αντίθετα συνημίτονα, δηλαδή:

   $$\sigma\upsilon\nu 20° = -\sigma\upsilon\nu 160°$$

   Οι παραπληρωματικές γωνίες 40^o και 140^o έχουν αντίθετα συνημίτονα, δηλαδή:

   $$\sigma\upsilon\nu 40° = -\sigma\upsilon\nu 140°$$

   Οι παραπληρωματικές γωνίες 80^o και 100^o έχουν αντίθετα συνημίτονα, δηλαδή:

   $$\sigma\upsilon\nu 80° = -\sigma\upsilon\nu 100°$$

   Κάνουμε τις αντικαταστάσεις στην παράσταση και παίρνουμε:

   $$1 - \sigma\upsilon\nu 160° - \sigma\upsilon\nu 140° + \frac{1}{2} - \sigma\upsilon\nu 100° + \sigma\upsilon\nu 100° - \frac{1}{2} + \sigma\upsilon\nu 140° + \sigma\upsilon\nu 160° - 1 = 0$$

2. $\sigma\upsilon\nu 0° + \sigma\upsilon\nu 1° + \sigma\upsilon\nu 2° + \cdots + \sigma\upsilon\nu 178° + \sigma\upsilon\nu 179° + \sigma\upsilon\nu 180° = 0$

Κάθε μία από τις οξείες γωνίες από 0^o μέχρι 89^o είναι παραπληρωματική μίας από τις αμβλείες γωνίες από 91^o μέχρι 180^o. Επομένως, θα έχουν αντίθετα συνημίτονα. Το άθροισμα θα πάρει την παρακάτω μορφή.

$$\sigma\upsilon\nu 0° + \sigma\upsilon\nu 1° + \sigma\upsilon\nu 2° + \cdots + \sigma\upsilon\nu 178° + \sigma\upsilon\nu 179° + \sigma\upsilon\nu 180°$$

$$= \sigma\upsilon\nu 0° + \sigma\upsilon\nu 1° + \sigma\upsilon\nu 2° + \cdots + \sigma\upsilon\nu 89^o + \sigma\upsilon\nu 90^o + \sigma\upsilon\nu 91^o + \cdots + \sigma\upsilon\nu 178° + \sigma\upsilon\nu 179° + \sigma\upsilon\nu 180°$$

$$= \sigma\upsilon\nu 0° + \sigma\upsilon\nu 1° + \sigma\upsilon\nu 2° + \cdots + \sigma\upsilon\nu 89^o + 0 - \sigma\upsilon\nu 89^o - \cdots - \sigma\upsilon\nu 2° - \sigma\upsilon\nu 1° - \sigma\upsilon\nu 0° = \mathbf{0}$$

2.3. Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

1. Λάθος
2. Σωστό
3. Σωστό
4. Σωστό
5. Λάθος
6. Σωστό

Ερώτηση Κατανόησης 2 - Απάντηση

1. – ii.
2. – ii.
3. – ii.

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

Ισχύει ότι $ημ^2ω + συν^2ω = 1$. Επομένως:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + συν^2ω = 1 \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} + συν^2ω = 1 \;\Rightarrow συν^2ω = 1 - \frac{1}{4} \;\Rightarrow συν^2ω = \frac{3}{4} \;\Rightarrow$$

$$συνω = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Επειδή $90° < ω < 180°$, θα δεχτούμε ότι $συνω = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Υπολογισμός της εφαπτομένης:

$$εφω = \frac{ημω}{συνω} \Rightarrow εφω = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow εφω = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow εφω = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άσκηση 2-Λύση

Ισχύει ότι $εφω = \frac{ημω}{συνω}$ και άρα

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{ημω}{συνω} \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{ημ^2ω}{συν^2ω} \Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{1 - συν^2ω}{συν^2ω} \Rightarrow$$

$$3συν^2ω = 9 - 9συν^2ω \Rightarrow 12συν^2ω = 9 \Rightarrow συν^2ω = \frac{9}{12}$$

$$συνω = \pm\frac{3}{\sqrt{12}} \Rightarrow συνω = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Επειδή η γωνία είναι αμβλεία, δεχόμαστε $συνω = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Υπολογισμός του ημιτόνου:

Επίσης, ισχύει ότι

$ημ^2ω + συν^2ω = 1$. Επομένως:

$$ημ^2ω + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow ημ^2ω + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow ημ^2ω = \frac{1}{4} \Rightarrow ημω = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 3-Λύση

1. $(2ημω - 3συνω)^2 + (3ημω + 2συνω)^2 = 13$

   $4ημ^2ω - 12ημω \cdot συνω + 9συν^2ω + 9ημ^2ω + 12ημω \cdot συνω + 4συν^2ω = 12$

   $13ημ^2ω + 13συν^2ω = 13$

   $13(ημ^2ω + συν^2ω) = 13$

   $13 = 13$

2. $ημ^4ω - συν^4ω = 2ημ^2ω - 1$

   $(ημ^2ω)^2 - (συν^2ω)^2 = 2ημ^2ω - 1$

   $(ημ^2ω - συν^2ω)(ημ^2ω + συν^2ω) = 2ημ^2ω - 1$

   $ημ^2ω - συν^2ω = 2ημ^2ω - 1$

   $ημ^2ω + συν^2ω = 1$

   $1 = 1$

3. $\frac{1+2ημω \cdot συνω}{ημω + συνω} = ημω + συνω$

   $1 + 2ημω \cdot συνω = (ημω + συνω)^2$

   $1 + 2ημω \cdot συνω = ημ^2ω + 2ημω \cdot συνω + συν^2ω$

   $1 = ημ^2ω + συν^2ω$

   $1 = 1$

Άσκηση 4-Λύση

1. $\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x$

$$(\eta\mu^2\omega)^2 - (\sigma\upsilon\nu^2\omega)^2 = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$(\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega)(\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega) = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$1 = 1$$

2. $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{1}{\eta\mu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}$

$$\frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$\frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$\frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}$$

3. $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$

$$\frac{\eta\mu^2 x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x} + \frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)^2}{(1-\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x} = \frac{2(1-\sigma\upsilon\nu x)}{(1-\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}$$

$$\frac{\eta\mu^2 x + 1 - 2\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x} = \frac{2 - 2\sigma\upsilon\nu x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}$$

$$\frac{2 - 2\sigma\upsilon\nu x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x} = \frac{2 - 2\sigma\upsilon\nu x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}$$

4. $\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{\varepsilon\varphi x}=\frac{1}{\eta\mu x}$

$$\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}=\frac{1}{\eta\mu x}$$

$$\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\frac{1}{\eta\mu x}$$

$$\frac{\eta\mu^2 x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}=\frac{(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}$$

$$\frac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}=\frac{(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}$$

$$\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}=\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}$$

Άσκηση 5-Λύση

1. Ισχύει ότι $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$. Επομένως:

$$\eta\mu^2\omega+\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1 \Rightarrow \eta\mu^2\omega+\frac{9}{25}=1 \Rightarrow \eta\mu^2\omega=1-\frac{9}{25} \Rightarrow \eta\mu^2\omega=\frac{16}{25} \Rightarrow \eta\mu\omega=\frac{4}{5}$$

2. $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega=-\frac{4}{3}$

Άσκηση 6-Λύση

3. Ισχύει ότι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$. Επομένως:

$$\eta\mu^2\omega + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\omega + \frac{25}{169} = 1 \Rightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{144}{169} \Rightarrow \eta\mu\omega = \frac{12}{13}$$

$$A = \frac{2\eta\mu\omega - 3\sigma\upsilon\nu\omega - (\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega)}{2\sigma\upsilon\nu\omega \cdot \eta\mu\omega}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{12}{13} - 3 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - \left[\left(\frac{12}{13}\right)^2 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2\right]}{2 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot \frac{12}{13}}$$

$$= \frac{\frac{24}{13} + \frac{15}{13} - \frac{144}{169} + \frac{25}{169}}{-\frac{120}{169}} = \frac{\frac{312}{169} + \frac{195}{169} - \frac{144}{169} + \frac{25}{169}}{-\frac{120}{169}} = -\frac{\frac{388}{169}}{\frac{120}{169}} = -\frac{388}{120} = -\frac{97}{30}$$

Άσκηση 7-Λύση

$$A = \sigma\upsilon\nu 120° \cdot \sigma\upsilon\nu^2 70° - \sigma\upsilon\nu 120° \cdot \sigma\upsilon\nu^2 110°$$

Ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu 110^o = \sigma\upsilon\nu(180^o - 70^o) = -\sigma\upsilon\nu 70^o$.

Επομένως, $\sigma\upsilon\nu^2 110° = (-\sigma\upsilon\nu 70^o)^2$ δηλαδή $\sigma\upsilon\nu^2 110° = \sigma\upsilon\nu^2 70°$

Κάνοντας αντικατάσταση στην παράσταση παίρνουμε:

$$A = \sigma\upsilon\nu 120° \cdot \sigma\upsilon\nu^2 70° - \sigma\upsilon\nu 120° \cdot \sigma\upsilon\nu^2 110°$$

$$= \sigma\upsilon\nu 120° \cdot \sigma\upsilon\nu^2 70° - \sigma\upsilon\nu 120° \cdot \sigma\upsilon\nu^2 70^o = 0$$

Άσκηση 8-Λύση

Ισχύει ότι $ημ^2ω + συν^2ω = 1$. Επομένως:

$(3συνω - 1)^2 + συν^2ω = 1 \Rightarrow$

$9συν^2ω - 6συνω + 1 + συν^2ω = 1 \Rightarrow$

$8συν^2ω - 6συνω = 0 \Rightarrow$

$συνω(8συνω - 6) = 0 \Rightarrow συνω = 0$

ή

$$8συνω - 6 = 0 \ \Rightarrow 8συνω = 6 \ \Rightarrow συνω = \frac{3}{4}$$

Για $συνω = 0$:

Θα ισχύει ότι $ημ^2ω + 0 = 1$ και άρα $ημω = 1$

Η εφαπτομένη δεν ορίζεται.

Για $συνω = \frac{3}{4}$:

Υπολογισμός ημιτόνου:

Ισχύει ότι $ημ^2ω + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \ \Rightarrow ημ^2ω = 1 - \frac{9}{16} \ \Rightarrow ημ^2ω = \frac{7}{16} \Rightarrow ημω = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Υπολογισμός εφαπτομένης:

$$εφω = \frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Άσκηση 9-Λύση

1. $\varepsilon\varphi 40° \cdot \sigma\upsilon\nu 40° - \varepsilon\varphi 140° \cdot \sigma\upsilon\nu 140° = 0$

   Για τις παραπληρωματικές γωνίες 40^o και 140^o ισχύει ότι:
   $$\varepsilon\varphi 140° = -\varepsilon\varphi 40° \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu 140° = -\sigma\upsilon\nu 40°$$

   Κάνοντας αντικατάσταση στην παράσταση παίρνουμε:
   $\varepsilon\varphi 40° \cdot \sigma\upsilon\nu 40° - \varepsilon\varphi 140° \cdot \sigma\upsilon\nu 140°$
   $= \varepsilon\varphi 40° \cdot \sigma\upsilon\nu 40° - (-\varepsilon\varphi 40°)(-\sigma\upsilon\nu 40°)$
   $= \varepsilon\varphi 40° \cdot \sigma\upsilon\nu 40° - \varepsilon\varphi 40° \cdot \sigma\upsilon\nu 40° = 0$

2. $\varepsilon\varphi^2 50° \cdot \sigma\upsilon\nu^2 50° = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 130° \Rightarrow \frac{\eta\mu^2 50°}{\sigma\upsilon\nu^2 50°} \cdot \sigma\upsilon\nu^2 50 = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 130° \Rightarrow$
   $\eta\mu^2 50° = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 130°$

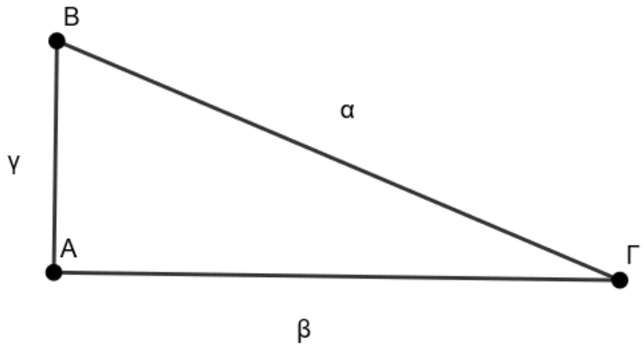
   Για τις παραπληρωματικές γωνίες $50°$ και $130°$ ισχύει ότι:
   $$\sigma\upsilon\nu 130^o = -\sigma\upsilon\nu 50^o \text{ και άρα } \sigma\upsilon\nu^2 50° = \sigma\upsilon\nu^2 130°$$

   Επομένως:
   $\eta\mu^2 50° + \sigma\upsilon\nu^2 130° = 1$
   $\eta\mu^2 50° + \sigma\upsilon\nu^2 50° = 1$

Άσκηση 10-Λύση

Ισχύει ότι $\gamma = \frac{5}{13}\alpha$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:



$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 \Rightarrow$$

$$\beta^2 + \left(\frac{5}{13}\alpha\right)^2 = \alpha^2 \Rightarrow$$

$$\beta^2 + \frac{25}{169}\alpha^2 = \alpha^2 \Rightarrow$$

$$\beta^2 = \alpha^2 - \frac{25}{169}\alpha^2 \Rightarrow$$

$$\beta^2 = \frac{144}{169}\alpha^2 \Rightarrow \beta = \frac{12}{13}\alpha$$

Άρα,

$$A = \frac{\eta\mu\hat{B} + \sigma\upsilon\nu\hat{B} + 5\varepsilon\varphi\hat{B}}{\eta\mu\hat{\Gamma} + \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} + 12\varepsilon\varphi\hat{\Gamma}} = \frac{\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} + 5\frac{\beta}{\gamma}}{\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} + 12\frac{\gamma}{\beta}} = \frac{\frac{\frac{12}{13}\alpha}{\alpha} + \frac{\frac{5}{13}\alpha}{\alpha} + 5\frac{\frac{12}{13}\alpha}{\frac{5}{13}\alpha}}{\frac{\frac{5}{13}\alpha}{\alpha} + \frac{\frac{12}{13}\alpha}{\alpha} + 12\frac{\frac{5}{13}\alpha}{\frac{12}{13}\alpha}}$$

$$= \frac{\frac{12}{13} + \frac{5}{13} + 5\frac{12\cdot 13}{5\cdot 13}}{\frac{5}{13} + \frac{12}{13} + 12\frac{5\cdot 13}{12\cdot 13}} = \frac{\frac{12}{13} + \frac{5}{13} + 12}{\frac{5}{13} + \frac{12}{13} + 5} = \frac{\frac{17}{13} + \frac{156}{13}}{\frac{17}{13} + \frac{65}{13}} = \frac{\frac{173}{13}}{\frac{82}{13}} = \frac{173}{82}$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

Από αυτή τη σχέση παίρνουμε:

$\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega \Rightarrow$

$\eta\mu^2\omega = 1 - \left(-\frac{5}{6}\right)^2 = 1 - \frac{25}{36} \Rightarrow$

$\eta\mu^2\omega = \frac{36}{36} - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \Rightarrow$

$\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{11}}{6}$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{\sqrt{11}}{6}}{-\frac{5}{6}} = -\frac{\sqrt{11}}{5}$$

Άσκηση 2-Λύση

1. $4\eta\mu^2x + 4\sigma\upsilon\nu^2x = 4$

   Βγάζουμε κοινό παράγοντα το 4 και έτσι:

   $4(\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x) = 4 \Rightarrow 4 \cdot 1 = 4$ που ισχύει.

2. $\sigma\upsilon\nu^2x = 1 - \eta\mu^2x \Rightarrow$

   $\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x = 1$ που ισχύει.

3. $\eta\mu^2x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2x \Rightarrow$

   $\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x = 1$ που ισχύει.

4. $1+\varepsilon\varphi^2x=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}\Rightarrow 1+\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}\Rightarrow$
$\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}+\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}\Rightarrow\frac{\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}\Rightarrow$
$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}$, καθώς $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$.

5. $\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x=1-2\sigma\upsilon\nu^2x$
Από τη σχέση $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$ παίρνουμε: $\eta\mu^2x=1-\sigma\upsilon\nu^2x$
$1-\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x=1-2\sigma\upsilon\nu^2x\Rightarrow$
$1-2\sigma\upsilon\nu^2x=1-2\sigma\upsilon\nu^2x$ που ισχύει.

Άσκηση 3-Λύση

1. $\frac{\eta\mu^3x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^5x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^3x\cdot\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu^5x\cdot\eta\mu x}=1\Rightarrow\frac{\eta\mu^3x\cdot\sigma\upsilon\nu x(1-\eta\mu^2x)}{\sigma\upsilon\nu^3x\cdot\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu^2x)}=1$ (καθώς $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$)
$\frac{\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu^2x}=1\Rightarrow 1=1$

2. $\varepsilon\varphi x\cdot(\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^3x)=\eta\mu^3x\Rightarrow$
$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\sigma\upsilon\nu x(1-\sigma\upsilon\nu^2x)=\eta\mu^3x\Rightarrow$
$\eta\mu x\cdot\eta\mu^2x=\eta\mu^3x,$ καθώς $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1\Rightarrow\eta\mu^2x=1-\sigma\upsilon\nu^2x$

Έτσι: $\eta\mu^3x=\eta\mu^3x$

Άσκηση 4-Λύση

1. $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} \Rightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}$$

Και εφόσον $\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x = 1$ προκύπτει:

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 x$$

2. $\frac{\varepsilon\varphi^2 x-1}{\varepsilon\varphi^2 x+1} = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x \Rightarrow \frac{\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-1}{\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+1} = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x \Rightarrow$

$$\frac{\frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x \Rightarrow$$

$$\frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x} = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x \Rightarrow$$

Και εφόσον $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ προκύπτει:

$$\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x$$

Άσκηση 5-Λύση

1. Έχουμε ότι $ημ^2ω + συν^2ω = 1$. Έτσι:

$$συν^2ω = 1 - ημ^2ω \Rightarrow συν^2ω = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 \Rightarrow$$

$$συν^2ω = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169}{169} - \frac{25}{169} \Rightarrow συν^2ω = \frac{144}{169} \Rightarrow$$

$$|συνω| = \frac{12}{13}$$

Επειδή $90° < ω < 180°$:

$$συνω = -\frac{12}{13}$$

2. $εφω = \frac{ημω}{συνω} \Rightarrow εφω = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} \Rightarrow εφω = -\frac{5}{12}$

3. $\frac{2εφω - 2συνω}{3ημω} =$

$$= \frac{2\frac{-5}{12} - 2\frac{-12}{13}}{3\frac{5}{13}} = \frac{-\frac{5}{6} + \frac{24}{13}}{\frac{15}{13}} = \frac{-\frac{65}{78} + \frac{144}{78}}{\frac{15}{13}} = \frac{\frac{79}{78}}{\frac{15}{13}} \frac{79 \cdot 13}{78 \cdot 15} = \frac{79}{90}$$

Άσκηση 6-Λύση

$$A = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega}$$

Γνωρίζουμε ότι $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.

Άρα $\eta\mu\omega = \varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην παράσταση A προκύπτει:

$$A = \frac{\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega - \varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega} \Rightarrow A = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega(\varepsilon\varphi\omega + 1)}{\sigma\upsilon\nu\omega(1 - \varepsilon\varphi\omega)} \Rightarrow A = \frac{\varepsilon\varphi\omega + 1}{1 - \varepsilon\varphi\omega} \Rightarrow A = \frac{2+1}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$$

Άσκηση 7-Λύση

1. $A = \eta\mu(180° - x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \varepsilon\varphi(180° - x) \Rightarrow$

   $A = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot (-\varepsilon\varphi x) \Rightarrow$

   $A = -\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Rightarrow$

   $A = -\eta\mu^2 x$

2. $B = \eta\mu(90° - x) \cdot \varepsilon\varphi(180° - x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow$

   $B = \sigma\upsilon\nu x \cdot (-\varepsilon\varphi\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow$

   $B = -\sigma\upsilon\nu x \cdot \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow$

   $B = -\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

Άσκηση 8-Λύση

1. $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = 1 - 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \Rightarrow$

   $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x + 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Rightarrow$

   $(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 = 1 \Rightarrow$

   $1^2 = 1 \Rightarrow$

   $1 = 1$

2. $\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \omega - \eta\mu^2 \omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu^2 x - \eta\mu^2 \omega \Rightarrow$

   $\eta\mu^2 x \cdot (1 - \eta\mu^2 \omega) - \eta\mu^2 \omega \cdot (1 - \eta\mu^2 x) = \eta\mu^2 x - \eta\mu^2 \omega \Rightarrow$

   $\eta\mu^2 x \cdot 1 - \eta\mu^2 x \cdot \eta\mu^2 \omega - \eta\mu^2 \omega \cdot 1 + \eta\mu^2 \omega \cdot \eta\mu^2 x = \eta\mu^2 x - \eta\mu^2 \omega \Rightarrow$

   $\eta\mu^2 x - \eta\mu^2 \omega = \eta\mu^2 x - \eta\mu^2 \omega$

3. $\varepsilon\varphi^2 x - \eta\mu^2 x = \frac{\eta\mu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Rightarrow$

   $$\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \eta\mu^2 x = \frac{\eta\mu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Rightarrow$$

   $$\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Rightarrow$$

   $$\frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Rightarrow$$

   $$\frac{\eta\mu^2 x(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Rightarrow$$

   $$\frac{\eta\mu^2 x \cdot \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Rightarrow$$

   $$\frac{\eta\mu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Άσκηση 9-Λύση

$\eta\mu^2 x + \eta\mu^2 y + 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y \leq 2 \Rightarrow$

$1 - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 y + 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y \leq 2 \Rightarrow$

$-\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 y + 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y \leq 2 - 1 - 1 \Rightarrow$

$-\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 y + 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y \leq 0 \Rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 y - 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y \geq 0 \Rightarrow$

$(\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu y)^2 \geq 0$, το οποίο ισχύει πάντα.

Άσκηση 10-Λύση

$A = \eta\mu^4 x(3 - 2\eta\mu^2 x) \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x(3 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x) \Rightarrow$

$A = (3\eta\mu^4 x - 2\eta\mu^6 x) \cdot (3\sigma\upsilon\nu^4 x - 2\sigma\upsilon\nu^6 x) \Rightarrow$

$A = 9\eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x - 6\eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^6 x - 6\eta\mu^6 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x + 4\eta\mu^6 x \cdot \sigma\upsilon\nu^6 x \Rightarrow$

$A = 9\eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x - 6\eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x \cdot (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) + 4\eta\mu^6 x \cdot \sigma\upsilon\nu^6 x \Rightarrow$

$A = 9\eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x - 6\eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x \cdot 1 + 4\eta\mu^6 x \cdot \sigma\upsilon\nu^6 x \Rightarrow$

$A = 9\eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x - 6\eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x + 4\eta\mu^6 x \cdot \sigma\upsilon\nu^6 x \Rightarrow$

$A = 3\eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x + 4\eta\mu^6 x \cdot \sigma\upsilon\nu^6 x$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η παράσταση A δεν είναι ανεξάρτητη της γωνίας x.

Γιατί επιλέγω Τετράδιο Σπουδής;

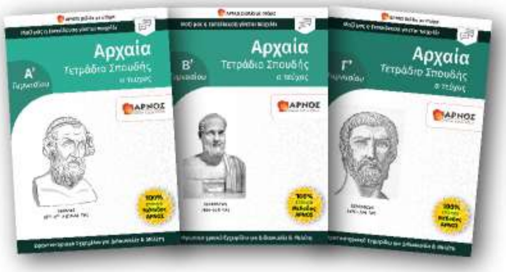
- Είναι απαραίτητο διδακτικό εργαλείο βασισμένο στους στόχους του μαθήματος και τον τρόπο Υλοποίησής του.
- Σε αυτό βρίσκεται το υλικό Διδασκαλίας για τον Καθηγητή και Μελέτης για το Μαθητή.
- Το Τετράδιο Σπουδής σε συνδυασμό με το course οδηγούν το **Μαθητή** στην **Αυτομάθηση**.
- Είναι το Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο πραγματοποίησης της **online διδασκαλίας με φυσικό τρόπο**.
- Με αυτό **ενημερώνονται** άμεσα **οι γονείς** και **ελέγχουν την πρόοδο** του παιδιού τους.

Τετράδια Σπουδής για:

Γυμνάσιο

Μαθηματικά

Αρχαία



Γλώσσα

Φυσικά

13-15 ετών

arnos.gr | info@arnos.gr