

 ΑΡΝΟΣ βιβλία με στόχο!

Άλγεβρα

Τετράδιο Σπουδής

Προετοιμασία για Πανελλήνιες - Πανεπιστήμιο

α' Λυκείου



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ
1646-1716 ΜΧ

 **ΑΡΝΟΣ**
Online Education

★ **100%** ★
ΕΠΙΤΥΧΙΑ
Μέθοδος
ΑΡΝΟΣ

Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο για Διδασκαλία & Μελέτη

Τετράδιο Σπουδής - Γιατί;

Το Τετράδιο Σπουδής ΑΡΝΟΣ είναι βασισμένο στη Μέθοδο ΑΡΝΟΣ, ένα σύστημα μάθησης με Στόχους – Υλοποίηση – Πιστοποίηση.

Βοηθάει το μαθητή να οικοδομήσει τη σκέψη του βήμα-βήμα, απλά και κατανοητά. Είναι Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο βάσει του οποίου γίνεται η διδασκαλία στο online μάθημα με «φυσικό» τρόπο. Ο δάσκαλος γράφει και υπογραμμίζει παράλληλα με το μαθητή.

Το Τετράδιο Σπουδής αποτελείται από:

- ★ Οπτικοποιημένη Θεωρία με ροή & συνέχεια
- ★ Ασκήσεις για Διδασκαλία και Εξάσκηση
- ★ Συνδυαστικές και Επαναληπτικές Ασκήσεις
- ★ Θέματα Προσομοίωσης Εξετάσεων

Πιστοποίηση Γνώσεων

Σε προγραμματισμένες ημερομηνίες διεξάγονται online ή/και δια ζώσης **Επαναληπτικά Τεστ Αξιολόγησης** στα οποία ο μαθητής πιστοποιεί και επαληθεύει τις γνώσεις του.

Για τους Γονείς

Πώς ο γονέας μπορεί να έχει εικόνα και εποπτεία στην πρόοδο του παιδιού του;

Το Τετράδιο Σπουδής είναι σχεδιασμένο με τέτοιον τρόπο για τη βήμα – βήμα εξάσκηση του μαθητή, μεταβαίνοντας με ασφάλεια από τα πιο απλά στα πιο σύνθετα. Επίσης, είναι ένας φυσικός τρόπος ο Γονέας να ελέγχει την πρόοδο του παιδιού του.

Πώς γίνεται η εποπτεία από το γονέα;

Σε κάθε μάθημα ελέγχει την ορθότητα των λύσεων, την κατανόηση και τη συμμετοχή του παιδιού στα μαθήματα.

Διδασκαλία στον ΑΡΝΟ σημαίνει:

- ★ Απεριόριστη μελέτη με video lessons
- ★ Αυτομάθηση στο App Arnos Learn
- ★ Coaching εξατομικευμένο
- ★ Μοτίβα Μάθησης και Εξάσκησης
- ★ Κάθε Απορία για εμάς είναι Πρόκληση!

★ Μέθοδος ΑΡΝΟΣ

Η **Μέθοδος ΑΡΝΟΣ** οδηγεί κάθε μαθητή, ανεξαρτήτως γνώσεων ή επιπέδου, να μελετά από το επίπεδο όπου αισθάνεται άνετα, ώστε να διαμορφώσει γερές βάσεις για μάθηση.

Live Διδασκαλία Το online μάθημα γίνεται με φυσικό τρόπο, γιατί συνδυάζει την Τεχνολογία, το Πνεύμα, την Οργάνωση και την Εμπειρία.

Τετράδιο Σπουδής Είναι ο οδηγός για τη διδασκαλία του μαθήματος, την εξάσκηση του μαθητή και την πραγματοποίηση της online διδασκαλίας με Λόγο, Εικόνα και Παρατήρηση.

Καθηγητής Είναι ο σκηνοθέτης της διδακτικής πράξης, ο οποίος δρα σε ένα οργανωμένο εκπαιδευτικό οικοσύστημα με Στόχους, Μαθησιακό Πλάνο και Ευθύνη.

«Μέθοδος ΑΡΝΟΣ... το καταστάλαγμα μιας πορείας 35 ετών με εκπαιδευτικές και εκδοτικές επιτυχίες, με ταξίδια πολιτισμού, συμμετοχή σε Διεθνείς Εκθέσεις και αποτυχίες... μα, κυρίως, η παρακαταθήκη του ζευγολάτη πατέρα - Αρνού.»

Γιάννης Π. Κρόκος



Τετράδιο Σπουδής

Άλγεβρα Α' Λυκείου

Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο
για Διδασκαλία και Μελέτη

- Οδηγός για τη Διδασκαλία του Καθηγητή
- Οδηγός για τη Μελέτη του Μαθητή
- Διδασκαλία Online με φυσικό τρόπο
- Τόπος Εποπτείας Προόδου από το Γονέα
- Διδασκαλία με Πιστοποιημένους Καθηγητές ΑΡΝΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2021

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου – Τετράδιο Σπουδής

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η ολική, μερική ή περιληπτική αναπαραγωγή και μετάδοση έστω και μιας σελίδας του παρόντος βιβλίου κατά παράφραση ή διασκευή με οποιονδήποτε τρόπο (μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό κ.λπ. – Ν. 2121/93, άρθρο 51).

Η απαγόρευση αυτή ισχύει και για τις δημόσιες υπηρεσίες, βιβλιοθήκες, οργανισμούς κ.λπ. (άρθρο 18). Οι παραβάτες διώκονται (άρθρο 13) και τους επιβάλλονται κατάσχεση, αστικές και ποινικές κυρώσεις σύμφωνα με το νόμο (άρθρο 64-66).

Συντακτική Ομάδα Κέντρου ΑΡΝΟΣ

Διευθυντής σειράς: Ιωάννης Π. Κρόκος
Συνεργάστηκαν: Σταύρος Παπαδόπουλος
Βασίλειος Στέριος

ΑΡΝΟΣ ONLINE EDUCATION



Περιεχόμενα

Εισαγωγικό Κεφάλαιο

E.1 Το Λεξιλόγιο της Λογικής	4
E.2 Σύνολα	6

Κεφάλαιο 2: Οι Πραγματικοί Αριθμοί

2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους	10
2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών	17
2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού	23
2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών	30

Κεφάλαιο 3: Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού	38
3.2 Η Εξίσωση $x^y = a$	45
3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού	48

Κεφάλαιο 4: Ανισώσεις

4.1 Ανισώσεις 1ου Βαθμού	57
4.2 Ανισώσεις 2ου Βαθμού	64
4.3 Ανισώσεις Γινόμενο & Ανισώσεις Πηλίκο	72

Κεφάλαιο 5: Πρόοδοι

5.1 Ακολουθίες	75
5.2 Αριθμητική Πρόοδος	79
5.3 Γεωμετρική Πρόοδος	88
5.4 Ανατοκισμός - Ίσες Καταθέσεις	98

Κεφάλαιο 6: Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης	99
6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης	107
6.3 Η Συνάρτηση $f(x) = ax + b$	119
6.4 Κατακόρυφη - Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης	132
6.5 Μονοτονία - Ακρότατα - Συμμετρίες Συνάρτησης	135

Κεφάλαιο 7: Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

7.1 Μελέτη της Συνάρτησης $f(x) = ax^2$	141
7.2 Μελέτη της Συνάρτησης $f(x) = \frac{a}{x}$	151
7.3 Μελέτη της Συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$	158

Εισαγωγικό Κεφάλαιο

Ε.1 Το Λεξιλόγιο της Λογικής

Στόχοι της παραγράφου:

- Κατανόηση της έννοιας της συνεπαγωγής.
- Κατανόηση της έννοιας της ισοδυναμίας.
- Κατανόηση της έννοιας της διάζευξης.
- Κατανόηση της έννοιας της σύζευξης.

Συνοπτική θεωρία:

Λεξιλόγιο της λογικής

Ισχυρισμός	Περιγραφή
Συνεπαγωγή $P \Rightarrow Q$	Αν αληθεύει ο P, τότε αληθεύει και ο Q. Για παράδειγμα, $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$
Ισοδυναμία $P \Leftrightarrow Q$	Ο P αληθεύει αν και μόνο αν αληθεύει ο Q. Για παράδειγμα, $\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 0$
Διάζευξη $P \text{ ή } Q$	Τουλάχιστον ένα από τους P και Q είναι αληθές. Για παράδειγμα, $5 = 3 \text{ ή } 1 = 1$
Σύζευξη $P \text{ και } Q$	Αληθεύει και ο P και ο Q. Για παράδειγμα, $5 = 5 \text{ και } 1 = 1$

Άσκηση 1: Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι αληθείς.

- (α) $\alpha = 2 \Rightarrow \alpha^2 - 5\alpha + 3 = -1$
- (β) $\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4$
- (γ) $5 > 8$ ή $5 \geq 5$
- (δ) $5 > 8$ και $5 \leq 5$
- (ε) $\alpha \geq 0$ και $\alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha = 0$
- (στ) $\alpha \neq 1 \Rightarrow \alpha^2 \neq 1$
- (ζ) $\alpha^2 \neq 1 \Rightarrow \alpha \neq 1$
- (η) $\alpha^2 \neq 25 \Leftrightarrow \alpha \neq 5$ και $\alpha \neq -5$
- (θ) $\alpha^2 = 9$ και $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha = 3$
- (ι) $\alpha^2 > 1 \Rightarrow \alpha > 1$
- (ια) $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha^2 > 1$
- (ιβ) $\alpha^2 > 1 \Rightarrow \alpha > 1$ ή $\alpha < -1$
- (ιγ) $\alpha \geq 0$ ή $\alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha = 0$
- (ιδ) $\alpha = 1$ ή $\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 2$
- (ιε) $\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$ ή $\alpha = 2$

Άσκηση 2: Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι αληθείς.

- (α) $x(x-5) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 5$
- (β) $x^2 = 16$ και $x < 0 \Leftrightarrow x = -4$
- (γ) $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 5$
- (δ) $x(x-1) = 0$ και $(x-3)(x-1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1$
- (ε) $x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq 2$
- (στ) $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

Ε.2 Σύνολα

Στόχοι της παραγράφου:

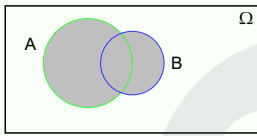
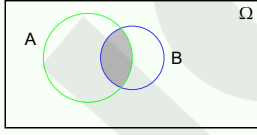

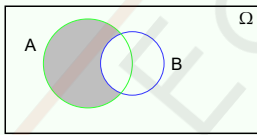
- Κατανόηση της έννοιας του συνόλου.
- Τα βασικά σύνολα αριθμών: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
- Εμπέδωση των πράξεων μεταξύ συνόλων.
- Κατασκευή διαγράμματος Venn.

Συνοπτική θεωρία:

Πράξεις συνόλων

Πράξη	Περιγραφή
Ένωση $A \cup B$	Τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή στο B (ή και στα δύο).
Τομή $A \cap B$	Τα στοιχεία που ανήκουν και στο A και στο B.
Συμπλήρωμα $A' \text{ ή } \Omega \setminus A$	Τα στοιχεία που δεν ανήκουν στο A.
Διαφορά $A - B \text{ ή } A \setminus B$	Τα στοιχεία που ανήκουν στο A και δεν ανήκουν στο B.

Πράξεις συνόλων και διάγραμμα Venn

Πράξη	Διάγραμμα Venn
Ένωση $A \cup B$	
Τομή $A \cap B$	
Συμπλήρωμα $A' \text{ ή } \Omega \setminus A$	
Διαφορά $A - B \text{ ή } A \setminus B$	

Άσκηση 1: Να παραστήσετε με αναγραφή τα παρακάτω σύνολα.

- (α) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 20 \leq x < 29\}$
- (β) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ περιττός και } 10 \leq x \leq 20\}$
- (γ) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 9\}$
- (δ) $\Delta = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -5\}$

Άσκηση 2: Δίνονται τα σύνολα $A = \{\alpha, \beta, \zeta\}$,
 $B = \{\beta, \gamma, \eta, \theta\}$ και το βασικό σύνολο
 $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta\}$.

(α) Να παραστήσετε τα σύνολα Ω, A και B σε διάγραμμα Venn.

(β) Να βρεθούν τα σύνολα

- | | | |
|-----------------|------------|----------------------|
| (i) $A \cup B$ | (iii) A' | (v) $A \setminus B$ |
| (ii) $A \cap B$ | (iv) B' | (vi) $B \setminus A$ |

Άσκηση 3: Δίνονται τα σύνολα

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 12\}$$

και

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 18\}.$$

Να βρεθούν τα σύνολα

- | | |
|----------------|----------------|
| (α) $A \cup B$ | (β) $A \cap B$ |
|----------------|----------------|

Άσκηση 4: Να βρεθεί ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων είναι ξένα μεταξύ τους.

(α) $A = \{7, 9, 13\}$ και $B = \{5, 8, 10\}$

(β) \mathbb{N} και \mathbb{Q}

(γ) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

(δ) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

(ε) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)(x-2) = 0\}$ και
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x+2) = 0\}$

Άσκηση 5:

(α) Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς ανήκουν στο \mathbb{N} .

- | | | |
|--------|----------|-------------------|
| (i) 7 | (iii) -5 | (v) $\frac{2}{3}$ |
| (ii) 0 | (iv) 4,2 | |

(β) Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς ανήκουν στο \mathbb{Z} .

- | | | |
|----------|---------------------|-------------------|
| (i) 8 | (iii) $\frac{8}{3}$ | (v) $\frac{9}{3}$ |
| (ii) -13 | (iv) 7,43 | |

(γ) Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς ανήκουν στο \mathbb{Q} .

- | | | |
|------------|------------------|--------------------|
| (i) 6,17 | (iii) $\sqrt{2}$ | (v) $\sqrt{9}$ |
| (ii) -8,23 | (iv) π | (vi) $\frac{8}{7}$ |

(δ) Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς ανήκουν στο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- | | |
|------------|--------------------|
| (i) 5 | (iii) $\sqrt{3}$ |
| (ii) -3,17 | (iv) $\frac{1}{3}$ |

Κεφάλαιο 2: Οι Πραγματικοί Αριθμοί

2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους

Στόχοι της παραγράφου:

- Προσδιορισμός αριθμητικής τιμής μίας παράστασης.
- Απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων.

Συνοπτική θεωρία:

Ιδιότητες δυνάμεων

- $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$
- $(a^k)^l = a^{kl}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$
- $\frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$
- $(ab)^k = a^k b^k$

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

- $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ **Τετράγωνο αθροίσματος**
- $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ **Τετράγωνο διαφοράς**
- $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ **Διαφορά τετραγώνων**
- $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ **Κύβος αθροίσματος**
- $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ **Κύβος διαφοράς**
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ **Άθροισμα κύβων**
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ **Διαφορά κύβων**
- $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

Μέθοδοι παραγοντοποίησης

- $\alpha x + \beta x = (\alpha + \beta)x$ **Κοινός παράγοντας**
- $\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y =$
 $\alpha(x + y) + \beta(x + y) = (\alpha + \beta)(x + y)$ **Ομαδοποίηση**
- $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$ **Παραγοντοποίηση τριωνύμου**
- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ **Διαφορά τετραγώνων**
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ **Διαφορά κύβων**
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ **Άθροισμα κύβων**
- $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$
 $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$ **Τέλειο τετράγωνο**

Οπτικοποίηση με Geogebra

Εφαρμογή 1: Μία δυναμική γεωμετρική εφαρμογή, απόδειξης της ταυτότητας τετραγώνου αθροίσματος δύο αριθμών $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$



Εφαρμογή 2: Τρεις αποκαλυπτικές διαδραστικές εφαρμογές, γεωμετρικής αποδόμησης της ταυτότητας διαφοράς τετραγώνων $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

Μέρος Α.



Μέρος Β.



Μέρος Γ.



Εφαρμογή 3: Μία αποκαλυπτική διαδραστική εφαρμογή απόδειξης της ταυτότητας τετραγώνου αθροίσματος τριών αριθμών $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$



Εφαρμογή 4: Η γεωμετρική απόδειξη της ταυτότητας κύβου αθροίσματος δύο αριθμών $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ είναι εδώ και μας καλεί να την ανακαλύψουμε μέσα από την οπτικοποίηση του Geogebra:



Εφαρμογή 5: Μία δυναμική εφαρμογή απόδειξης της ταυτότητας διαφοράς κύβων δύο αριθμών $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$



Εφαρμογή 6: Μία δυναμική εφαρμογή απόδειξης ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι ίση με το άθροισμά τους:



Άσκηση 1: Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{(x^3y^{-7})^2 : (xy)^{-4}}{\left(\frac{x}{y}\right)^5}$$

(α) Να αποδείξετε ότι $A = \left(\frac{x}{y}\right)^5$.

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 10$ και $y = -5$.

Άσκηση 2 (Δ): Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \left[(x^3 : y^{-9}) \cdot (x^2y^{-5})^2 \right]^2 \cdot (x^{-1}y)^8$$

για $x = 5$ και $y = 0,2$.

Άσκηση 3: Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{(xy)^2 \cdot \left(\frac{x}{y^2}\right)^{-1}}{y^5} : \left(\frac{x}{y}\right)^5$$

για $x = 5$ και $y = -1,48$.

Άσκηση 4: Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{x^{10}y^{-2} + 2x^5y^3 + y^8}{y^{-2}}$$

για $x = 5$ και $y = -4$.

Άσκηση 5 (Δ): Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις.

(α) $51^2 - 49^2$

(γ) $999 \cdot 1.001$

(β) $\frac{5,29^2 - 2,29^2}{7,58}$

(δ) $55 \cdot 45$

Άσκηση 6:

(α) Να αποδείξετε ότι

$$(\alpha + 2\beta)^2 - (2\alpha + \beta)^2 = 3(\beta - \alpha)(\beta + \alpha).$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$(1,34 + 4,68)^2 - (2,68 + 2,34)^2.$$

Άσκηση 7 (Δ) :

(α) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{(\alpha + 3)^3 - (\alpha - 3)^3}{18} = \alpha^2 + 3.$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\frac{103^3 - 97^3}{18}.$$

Άσκηση 8:

(α) Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το άθροισμα τους.

(β) Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών που διαφέρουν κατά 2 μονάδες ισούται με το διπλάσιο του αθροίσματός τους.

Άσκηση 9: Αν n φυσικό αριθμός, να αποδείξετε ότι

(α) ο αριθμός $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ διαιρείται με το 13,

(β) ο αριθμός $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3}$ διαιρείται με το 5.

Άσκηση 10: Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις.

(α) $\frac{\alpha^3 + 4\alpha^2 + 4\alpha}{\alpha^2 + 2\alpha}$ (β) $\frac{\alpha^2 - 5\alpha + 6}{\alpha^2 - 4}$

Άσκηση 11 (Δ): Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις.

$$(α) \frac{\alpha^3 - 8}{\alpha^4 - 4\alpha^3 + 4\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^5 - 4\alpha^3}{\alpha^2 + 2\alpha + 4}$$

$$(β) \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha + 1} \right) \cdot \frac{\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1}{\alpha^4 - 1}$$

Άσκηση 12: Να απλοποιήσετε τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις.

$$(α) \frac{(\alpha - 1)^{-1} - (\alpha + 1)^{-1}}{(\alpha - 1)^{-1}(\alpha + 1)^{-1}}$$

$$(β) \frac{(\alpha^{-1} - \beta^{-1})^2}{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2} : \frac{(\alpha\beta)^{-2}}{\alpha + \beta}$$

Άσκηση 13 (Δ): Να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{x}{x - y} - \frac{y}{x + y} \right) : \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - xy + y^2)}{(x - y)(x^3 + y^3)} = 1.$$

Άσκηση 14: Να δείξετε ότι αν

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha + 1}{\beta + 1}, \quad \text{όπου } \beta \neq 0 \text{ και } \beta \neq -1,$$

τότε $\alpha = \beta$

Άσκηση 15: Να δείξετε ότι αν

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 0,$$

τότε $\alpha = \beta$.

Άσκηση 16: Να εξετάσετε αν ισχύει η ισότητα

$$(\alpha + 2\beta)^2 - \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 17: Έστω α, β ακέραιοι αριθμοί.

(α) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α και β είναι πολλαπλάσια του 3, τότε και ο $\alpha + \beta$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

(Υπόδειξη: Ένας ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 3 αν γράφεται στη μορφή $3 \cdot k$ για κάποιον ακέραιο k .)

(β) Να αποδείξετε ότι αν ο α είναι πολλαπλάσιο του 3 και ο β όχι, τότε ο $\alpha + \beta$ δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.

Άσκηση 18:

(α) Να δείξετε ότι αν α είναι ρητός και ο β είναι άρρητος, τότε ο $\alpha + \beta$ είναι άρρητος.

(β) Να δείξετε ότι αν ο α είναι ρητός με $\alpha \neq 0$ και ο β είναι άρρητος, τότε ο $\alpha \cdot \beta$ είναι άρρητος.

Άσκηση 19 (Δ): Αν $\alpha + \beta = 1$ και $\alpha\beta = -5$, να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις.

(α) $\alpha^2 + \beta^2$

(γ) $(\alpha - \beta)^2$

(β) $\alpha^3 + \beta^3$

(δ) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

Άσκηση 20: Αν ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = -24$ και $\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4}$, να βρείτε τους α, β, γ .

Άσκηση 21: Αν $\frac{x}{2y} = \frac{2y}{3z} = \frac{3z}{x}$, να δείξετε ότι $x = 2y = 3z$.

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

Στόχοι της παραγράφου:

- Απόδειξη ανισοτήτων με ή χωρίς συνθήκη.
- Απόδειξη διπλής ανισότητας.
- Σύγκριση αριθμών.
- Εύρεση ελάχιστης και μέγιστης τιμής παραστάσεων.

Συνοπτική θεωρία:

Ιδιότητες ανισοτήτων	
	$\left. \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \text{και} \\ \beta > \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha > \gamma$
	$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
Αν $\gamma > 0$, τότε:	$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
Αν $\gamma < 0$, τότε:	$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
Αν $\gamma > 0$, τότε:	$\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$
Αν $\gamma < 0$, τότε:	$\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$
Για δύο ομόσημους αριθμούς α και β ισχύει	$\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$
	$\left. \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \text{και} \\ \gamma > \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι θετικοί αριθμοί τότε	$\left. \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \text{και} \\ \gamma > \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Διαστήματα

Διάστημα	Ανισότητα	Συμβολισμός
	$\alpha \leq x \leq \beta$	$[\alpha, \beta]$
	$\alpha < x < \beta$	(α, β)
	$\alpha \leq x < \beta$	$[\alpha, \beta)$
	$\alpha < x \leq \beta$	$(\alpha, \beta]$
	$x \geq \alpha$	$[\alpha, +\infty)$
	$x > \alpha$	$(\alpha, +\infty)$
	$x \leq \alpha$	$(-\infty, \alpha]$
	$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$

Οπτικοποίηση με Geogebra

Εφαρμογή 1: Πώς βρίσκουμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της περιμέτρου και του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, γνωρίζοντας την αντίστοιχη μέγιστη και ελάχιστη τιμή των διαστάσεων του;



Εφαρμογή 2: Η γεωμετρική απόδειξη 4 κομβικών ανισοτήτων οπτικοποιείται με πληρότητα και στόχευση στο γραφικό περιβάλλον της ακόλουθης δυναμικής εφαρμογής του Geogebra:

Μέρος Α. Γεωμετρική απόδειξη της ανισότητας

$$a^2 + \beta^2 + \gamma^2 > \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$



Μέρος Β. Γεωμετρική απόδειξη της ανισότητας

$$4\alpha\beta \leq (\alpha + \beta)^2$$



Μέρος Γ. Γεωμετρική απόδειξη της ανισότητας

$$\alpha\beta \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;



Μέρος Δ. Γεωμετρική απόδειξη της ανισότητας

$$(\alpha + \beta)^2 \leq 2\alpha^2 + 2\beta^2$$



Άσκηση 1: Να αποδείξετε ότι

(α) $\alpha^2 + 16 \geq 8\alpha$ (β) $4\alpha\beta \leq (\alpha + \beta)^2$

Άσκηση 2:

(α) Να αποδείξετε ότι

$$4\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 1 \geq 0$$

(β) Για ποιες τιμές των α και β ισχύει η ισότητα;

Άσκηση 3 (Δ): Να βρεθούν οι τιμές των α και β σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

(α) $(\alpha + 2)^2 + (\beta - 3)^2 = 0$

(β) $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 10\beta + 26 = 0$

(γ) $2\alpha^2 + 4\beta^2 - 2\alpha - 4\alpha\beta + 1 = 0$

Άσκηση 4: Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 7$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται η τιμή των παρακάτω παραστάσεων.

(α) $x + y^2$ (γ) $3x - y$

(β) $x \cdot y$ (δ) $\frac{x+1}{y}$

Άσκηση 5 (Δ): Αν $-1 < x < 2$ και $-3 < y < 1$,
να αποδείξετε ότι

(α) $0 \leq x^2 < 4$ και $0 \leq y^2 < 9$

(β) $-4 < y^2 - x^2 < 9$

(γ) $-6 < xy < 3$

(δ) $-1 < x^3 < 8$

Άσκηση 6 (Δ): Αν $1 < x < 2$ και $2 < y < 4$, να
αποδείξετε ότι

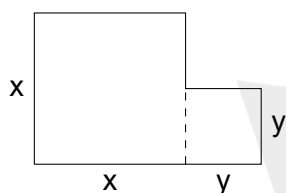
$$-3 < \frac{2x-y}{x} < 1$$

Άσκηση 7: Αν $1 < x < 2$ και $1 < y < 4$, να
βρείτε μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται

(α) η περίμετρος και

(β) το εμβαδόν

του παρακάτω σχήματος.



Άσκηση 8 (Δ): Να γράψετε με τη μορφή διαστή-
ματος τα παρακάτω σύνολα και να τα παραστήσετε
στον άξονα του \mathbb{R} .

(α) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 9\}$

(β) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq 11\}$

(γ) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 10\}$

(δ) $\Delta = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$

Άσκηση 9: Αν $0 \leq \alpha < \beta$, να δείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\alpha+1} < \frac{\beta^2}{\beta+1}$$

Άσκηση 10: Αν $0 \leq \alpha < \beta < 1$, να δείξετε ότι

$$\frac{\beta}{\beta-1} < \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

Άσκηση 11 (Δ): Αν $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$, να δείξετε ότι

$$(\alpha - \beta)^2 < \beta^2 - \alpha^2$$

Άσκηση 12: Αν $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$, να δείξετε ότι

$$\frac{\alpha}{\beta + \alpha} < \frac{1}{2}$$

Άσκηση 13 (Δ): Αν $2 < \alpha < \beta < 3$, να δείξετε ότι

$$\alpha\beta + 6 < 3\alpha + 2\beta$$

Άσκηση 14: Αν $\alpha\beta > 0$, να δείξετε ότι

$$(α) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \geq 2 \quad (β) \frac{4\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \geq 4$$

Άσκηση 15: Να δείξετε ότι

$$(α) \alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2 \geq 0$$

$$(β) \alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0$$

$$(γ) \alpha^2 - 3\alpha\beta + 3\beta^2 \geq 0$$

Άσκηση 16: Να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2.$$

Άσκηση 17: Αν οι α, β, x είναι θετικοί με $\alpha < \beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha+x}{\beta+x}.$$



Αξίες για μια ζωή!

- ✓ Εξυπνάδα
- ✓ Κριτική Σκέψη
- ✓ Αυτοπεποίθηση



Βρες τον Καθηγητή σου!
στο arnos.gr

Ο Καθηγητής - Δάσκαλος arnos.gr:

- ★ **Διδάσκει** μεθοδικά και οργανωμένα με το Τετράδιο Σπουδής.
- ★ **Καθοδηγεί** το Μαθητή να μαθαίνει βήμα - βήμα.
- ★ Οδηγεί στην **Αυτομάθηση**.
- ★ **Υλοποιεί** τους στόχους του μαθήματος.
- ★ **Πιστοποιεί** με διαγωνίσματα την πρόοδο του Μαθητή.

Γιατί επιλέγω Τετράδιο Σπουδής;

- ★ Είναι απαραίτητο διδακτικό εργαλείο βασισμένο στους στόχους του μαθήματος και τον τρόπο Υλοποίησής του.
- ★ Σε αυτό βρίσκεται το υλικό Διδασκαλίας για τον Καθηγητή και Μελέτης για το Μαθητή.
- ★ Το Τετράδιο Σπουδής σε συνδυασμό με το course οδηγούν το **Μαθητή** στην **Αυτομάθηση**.
- ★ Είναι το Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο πραγματοποίησης της **online διδασκαλίας με φυσικό τρόπο**.
- ★ Με αυτό **ενημερώνονται** άμεσα **οι γονείς** και **ελέγχουν την πρόοδο** του παιδιού τους.

Τετράδια Σπουδής για:

Λύκειο

Μαθηματικά



Αρχαία



Γλωσσα



Χημεία



16-18
ετών

