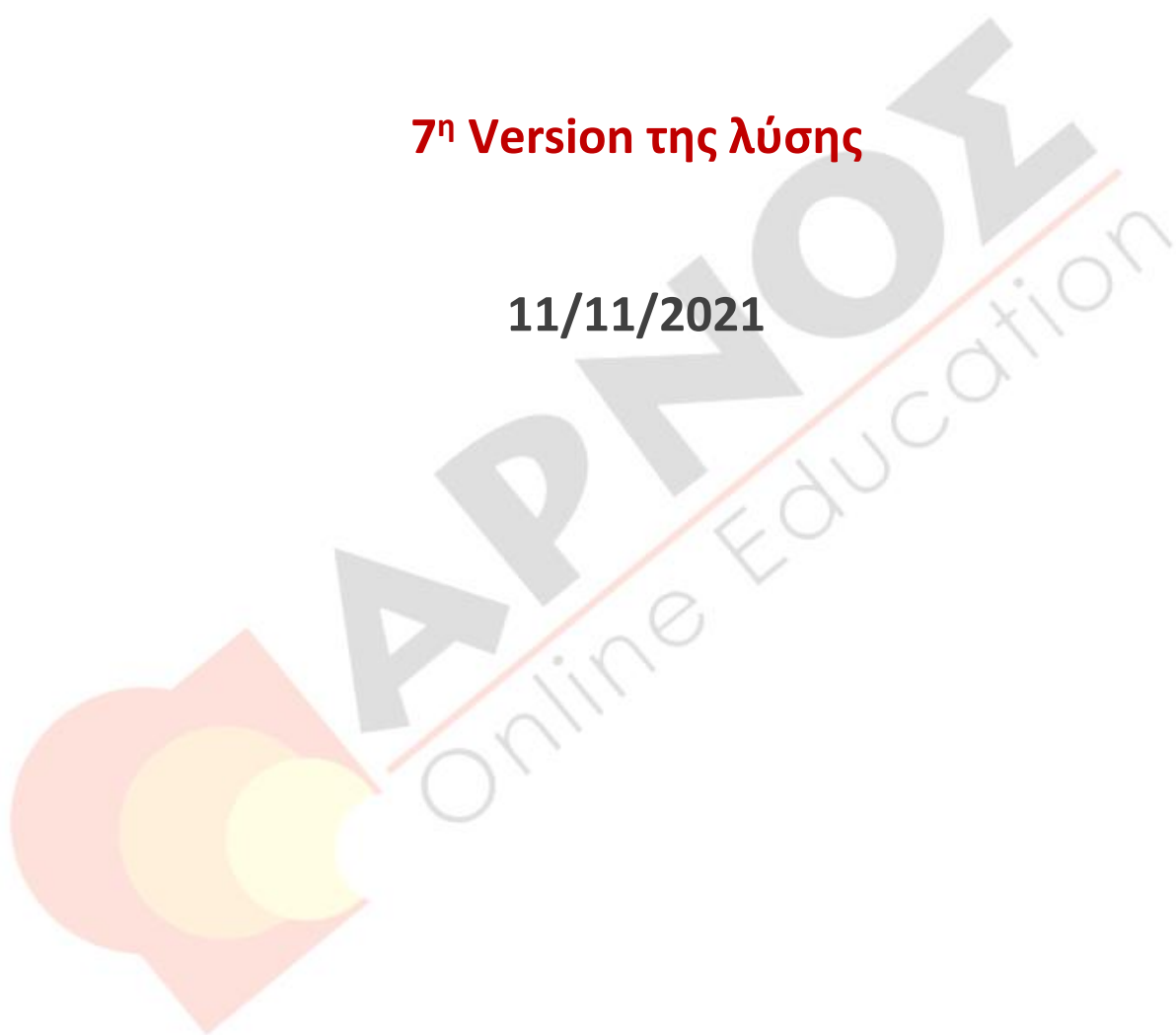


7^η Version της λύσης

11/11/2021



1η Γραπτή Εργασία 2021-2022
Συνδυαστική

Ενδεικτικές Απαντήσεις

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ερωτημα 1	2
Ερωτημα 2 α	5
Ερωτημα 2 β	6
Ερωτημα 2 γ	7
Ερωτημα 2 δ	8
Ερωτημα 3 α	9
Ερωτημα 3 β	11
Ερωτημα 4 α	12
Ερωτημα 4 β	14
Ερωτημα 4 γ	17
Ερωτημα 5Α	20
Ερωτημα 5Β	22

ΕΡΩΤΗΜΑ 1

Το PIN του κινητού είναι ένας τετραψήφιος αριθμός της μορφής ABCD. Να υπολογιστεί πόσα διαφορετικά PIN μπορούν να σχηματιστούν με χρήση ψηφίων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, εάν επιπλέον:

(1α) Πρέπει όλα τα ψηφία του PIN να είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

(1β) Το ψηφίο 3 πρέπει να εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές.

(1γ) Στο PIN πρέπει τουλάχιστον ένα ψηφίο να είναι πρώτος αριθμός.

(1δ) Το τελευταίο ψηφίο δεν επιτρέπεται να είναι το 0, ενώ επίσης δεν επιτρέπονται δυο διαδοχικές εμφανίσεις του 0.

Υπόδειξη: Για το (1γ), υπενθυμίζεται ότι ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται **πρώτος** αν είναι τουλάχιστον ίσος με το 2 και διαιρείται ακέραια μόνο από τον εαυτό του και τη μονάδα. Για το (1δ), προτείνεται να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για την εμφάνιση του ψηφίου 0 στο PIN.

(1α) Προσέγγιση 1^η έχουμε 4 παύλες, όπου για την 1^η παύλα έχουμε 10 επιλογές, για την 2^η παύλα έχουμε 9 επιλογές, για την 3^η παύλα έχουμε 8 επιλογές και για την 4^η παύλα έχουμε 7 επιλογές.

Από τον κανόνα του γινομένου, αφού οι επιλογές για κάθε παύλα γίνονται ανεξάρτητα, έχουμε συνολικά $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ διαφορετικά PIN που μπορούν να προκύψουν

(1α) Προσέγγιση 2^η έχουμε ένα πρόβλημα διατάξεων χωρίς επανάληψη: από τα 10 διαθέσιμα σύμβολα θέλουμε να βάλουμε στην σειρά τα 4. Αυτό πραγματοποιείται με

$$P(10,4) = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040 \text{ τρόπους.}$$

(1β) Ξεκινάμε με την ικανοποίηση του περιορισμού:

Στάδιο 1^ο: επιλέγουμε με $C(4,2)$ τρόπους τις θέσεις στις οποίες θα μπουν τα «3»

Στάδιο 2^ο: τοποθετούμε τα «3» με 1 τρόπο στις επιλεγμένες θέσεις

Στάδιο 3^ο: τοποθετούμε 2 ψηφία στις υπόλοιπες δύο θέσεις με $9 \cdot 9 = 9^2$ (το «3» δεν επιτρέπεται να ξαναχρησιμοποιηθεί)

Άρα από τον κανόνα του γινομένου έχουμε συνολικά $C(4,2) \cdot 9^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot 81 = 6 \cdot 81 = 486$ επιλογές

(1γ) Έχουμε τα ψηφία $\{0, 1, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, 8, 9\}$ όπου με κόκκινο χρώμα έχουν σημειωθεί οι πρώτοι

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 1 – ΠΙΟ ΣΥΝΤΟΜΗ:

Από όλες τις δυνατές συμβολοσειρές αφαιρούμε εκείνες που δεν περιέχουν καθόλου πρώτους. Έχουμε δηλαδή:

Ω = όλες οι δυνατές συμβολοσειρές που κατασκευάζονται από το σύνολο $\{0, 1, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, 8, 9\}$ χωρίς περιορισμούς.

$$\text{Είναι } |\Omega| = 10^4 = 10000$$

Θεωρούμε A το ενδεχόμενο μια συμβολοσειρά να μην περιέχει καθόλου πρώτους αριθμούς.

Είναι $|A| = 6^4 = 1296$ (αφού τα PIN που ανήκουν στο A κατασκευάζονται μόνο από τα στοιχεία $\{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$)

Άρα οι συμβολοσειρές που περιέχουν τουλάχιστον 1 πρώτο είναι

$$|A^c| = 10000 - 1296 = \mathbf{8704}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 2 – ΕΚΤΕΝΗΣ – ΞΕΚΑΘΑΡΙΖΕΙ ΠΩΣ ΔΟΥΛΕΥΕΙ ΤΟ «ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ»

Η αντιμετώπιση των περιπτώσεων με περιορισμό του τύπου «τουλάχιστον τόσα» είναι ο εξής:

Χωρίζουμε σε περιπτώσεις ανάλογα με τα επιτρεπτά πλήθη και έπειτα προσθέτουμε. Έτσι εξαλείφεται ο κίνδυνος διπλομέτρησης. **Δείτε [εδώ](#) πως διαχειριζόμαστε το «τουλάχιστον»**

Περίπτωση 1: ακριβώς 1 πρώτος

Περίπτωση 2: ακριβώς 2 πρώτοι

Περίπτωση 3: ακριβώς 3 πρώτοι

Περίπτωση 4: ακριβώς 4 πρώτοι

$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Περίπτωση 1: ακριβώς 1 πρώτος

Στάδιο 1: επιλέγουμε με $C(4,1) = 4$ τρόπους που θα μπει ο πρώτος

Στάδιο 2: Στην επιλεγμένη θέση τοποθετούμε με 4^1 τρόπους 1 από τα 4 στοιχεία του συνόλου $\{2,3,5,7\}$

Στάδιο 3: τοποθετούμε 3 από τα 6 διαθέσιμα στοιχεία του συνόλου $\{0,1,4,6,8,9\}$ στις 3 θέσεις που μένουν κενές με 6^3 τρόπους

Η **Περίπτωση 1** πραγματοποιείται με $4 \cdot 4 \cdot 6^3 = 3456$ τρόπους

Περίπτωση 2: ακριβώς 2 πρώτοι

Στάδιο 1: επιλέγουμε με $C(4,2) = \frac{4!}{2!2!} = 6$ τρόπους που θα μπει ο πρώτος

Στάδιο 2: στις δύο επιλεγμένες θέσεις τοποθετούμε με 4^2 τρόπους 2 από τα 4 στοιχεία του συνόλου $\{2,3,5,7\}$

Στάδιο 3: τοποθετούμε 2 από τα 6 διαθέσιμα στοιχεία του συνόλου $\{0,1,4,6,8,9\}$ στις 2 θέσεις που μένουν κενές με 6^2 τρόπους

Η **Περίπτωση 2** πραγματοποιείται με $6 \cdot 4^2 \cdot 6^2 = 3456$ τρόπους

Περίπτωση 3: ακριβώς 3 πρώτοι

Στάδιο 1: επιλέγουμε με $C(4,3) = \frac{4!}{3!1!} = 4$ τρόπους που θα μπει ο πρώτος

Στάδιο 2: στις τρεις επιλεγμένες θέσεις τοποθετούμε με 4^3 τρόπους 3 από τα 4 στοιχεία του συνόλου $\{2,3,5,7\}$

Στάδιο 3: τοποθετούμε 1 από τα 6 διαθέσιμα στοιχεία του συνόλου $\{0,1,4,6,8,9\}$ στην 1 θέση που μένει κενή με 6^1 τρόπους

Η **Περίπτωση 3** πραγματοποιείται με $4 \cdot 4^3 \cdot 6^1 = 1536$ τρόπους

Περίπτωση 4: ακριβώς 4 πρώτοι

Εδώ όλες οι θέσεις θα γεμίσουν με πρώτο, άρα έχουμε 4 παύλες, όπου για κάθε παύλα έχουμε 4 επιλογές (αφού μπορούμε σε κάθε παύλα να επιλέξουμε οποιοδήποτε από τα 4 στοιχεία του συνόλου $\{2,3,5,7\}$)

Άρα η **Περίπτωση 4** πραγματοποιείται με $4^4 = 256$ τρόπους

Από τον κανόνα του αθροίσματος υπάρχουν $3456 + 3456 + 1536 + 256 = 8704$ διαφορετικοί κωδικοί με τουλάχιστον 1 πρώτο.

(16) Το τελευταίο ψηφίο δεν επιτρέπεται να είναι το 0, ενώ επίσης δεν επιτρέπονται δυο διαδοχικές εμφανίσεις του 0.

Στάδιο 1: Ικανοποίηση του 1^{ου} περιορισμού

Αρχικά τοποθετούμε στην τελευταία θέση κάποιο από τα ψηφία $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ με 9 τρόπους.

Στάδιο 2: Ικανοποίηση του 2^{ου} περιορισμού

Ενδεχόμενο 1: δεν υπάρχουν καθόλου μηδενικά $\rightarrow$ δηλαδή έχουμε να γεμίσουμε 3 θέσεις με τα στοιχεία του συνόλου $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, το οποίο γίνεται με $9^3 = 729$ τρόπους

Ενδεχόμενο 2: υπάρχει μηδενικό στην 1^η θέση. Τότε η 1^η θέση καταλαμβάνεται με 1 τρόπο, έχουμε 9 επιλογές για την 2^η θέση (όλα εκτός του 0) και 10 επιλογές για την 3^η θέση.

Πχ η συμβολοσειρά 0408 είναι αποδεκτή

Άρα το **ενδεχόμενο 2** πραγματοποιείται με $1 \cdot 10 \cdot 9 = 90$ τρόπους

Ενδεχόμενο 3: υπάρχει μηδενικό στην 2^η θέση. Τότε για την 1^η θέση έχουμε 9 επιλογές και για την 3^η θέση έχουμε 9 επιλογές. Άρα η περίπτωση 3 πραγματοποιείται με $9^2 \cdot 1 = 81$ τρόπους

Ενδεχόμενο 4: υπάρχει μηδενικό στην 3^η θέση. Τότε η 3^η θέση καταλαμβάνεται με 1 τρόπο, έχουμε 9 επιλογές για την 2^η θέση (όλα εκτός του 0) και 10 επιλογές για την 1^η θέση.

Πχ η συμβολοσειρά 0903 είναι αποδεκτή

Άρα το **ενδεχόμενο 4** πραγματοποιείται με $1 \cdot 10 \cdot 9 = 90$ τρόπους

ΔΙΟΡΘΩΣΗ στην v.4: Όμως έχουμε διπλομετρήσει τις συμβολοσειρές που έχουν μηδενικό και στην 1^η και στην 3^η θέση. Οι συμβολοσειρές είναι το πλήθος $1 \cdot 9 \cdot 1 = 9$

Άρα έχουμε συνολικά $9 \cdot (729 + 90 + 81 + 90 - 9) = 8829$ επιλογές

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Α

Σε μια εταιρεία εργάζονται 11 άντρες και 9 γυναίκες, από τους οποίους οι 7 άντρες και οι 8 γυναίκες γνωρίζουν αγγλικά. Επιπλέον, 3 από τους άντρες βρίσκονται σε δικαστική διαμάχη μεταξύ τους και 2 από τις γυναίκες έχουν συγγενική σχέση.

(2α) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια πενταμελής ομάδα εργασίας με ισότιμα μέλη, εάν:

(2α1) Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

(2α2) Πρέπει να συμμετέχουν ακριβώς 3 γυναίκες και τουλάχιστον ένας από τους άντρες να γνωρίζει αγγλικά.

(2α3) Μπορεί να συμμετέχει το πολύ ένας από τους εργαζόμενους που βρίσκονται σε δικαστική διαμάχη.

(2α1) Πρόκειται για την επιλογή 5 ανθρώπων από 20 συνολικά διακεκριμένους ανθρώπους χωρίς περιορισμούς. Προφανώς δεν μας ενδιαφέρει η σειρά (αφού τα μέλη καταλαμβάνουν ισότιμες θέσεις) και δεν επιτρέπεται η επανάληψη. Άρα η επιλογή γίνεται με $\binom{20}{5} = \frac{20!}{5!15!}$ τρόπους

(2α2) έχουμε τις εξής περιπτώσεις

Περίπτωση 1: ακριβώς 3 γυναίκες και ακριβώς 1 από τους άντρες που γνωρίζουν αγγλικά

→ Επιλέγουμε με $\binom{9}{3}$ τρόπους τις γυναίκες και με $\binom{7}{1}$ τρόπους έναν από τους 7 άντρες που γνωρίζουν αγγλικά. Τέλος επιλέγουμε με $\binom{4}{1}$ τρόπους 1 από τους $11 - 7 = 4$ άντρες που δεν γνωρίζουν αγγλικά.

Δηλαδή η περίπτωση 1 πραγματοποιείται με $\binom{9}{3} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{4}{1}$ τρόπους

Περίπτωση 2: ακριβώς 3 γυναίκες και ακριβώς 2 από τους άντρες που γνωρίζουν αγγλικά

→ Επιλέγουμε με $\binom{9}{3}$ τρόπους τις γυναίκες και με $\binom{7}{2}$ τρόπους δύο από τους 7 άντρες που γνωρίζουν αγγλικά. Δηλαδή η περίπτωση 2 πραγματοποιείται με $\binom{9}{3} \cdot \binom{7}{2}$

Από τον κανόνα του αθροίσματος έχουμε $\binom{9}{3} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{4}{1} + \binom{9}{3} \cdot \binom{7}{2}$ τρόπους.

(2α3) Έστω A_1, A_2, A_3 οι άντρες που βρίσκονται σε δικαστική διαμάχη.

Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις

Περίπτωση 1: Συμμετέχει μόνο ο A_1 και όχι οι A_2, A_3 → Επιλέγουμε τον A_1 με 1 τρόπο και έπειτα επιλέγουμε τα υπόλοιπα 4 μέλη της επιτροπής από τα υπόλοιπα $20 - 3 = 17$ άτομα με $\binom{17}{4}$ τρόπους

Περίπτωση 2: Συμμετέχει μόνο ο A_2 και όχι οι A_1, A_3 → Επιλέγουμε τον A_2 με 1 τρόπο και έπειτα επιλέγουμε τα υπόλοιπα 4 μέλη της επιτροπής από τα υπόλοιπα $20 - 3 = 17$ άτομα με $\binom{17}{4}$ τρόπους

Περίπτωση 3: Συμμετέχει μόνο ο A_3 και όχι οι A_1, A_2 → Επιλέγουμε τον A_3 με 1 τρόπο και έπειτα επιλέγουμε τα υπόλοιπα 4 μέλη της επιτροπής από τα υπόλοιπα $20 - 3 = 17$ άτομα με $\binom{17}{4}$ τρόπους

Περίπτωση 4: Δεν συμμετέχει κανένας από τους A_1, A_2, A_3 → Επιλέγουμε τα 5 μέλη της επιτροπής από τα υπόλοιπα $20 - 3 = 17$ άτομα με $\binom{17}{5}$ τρόπους

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Β

(2β) Ποια είναι η πιθανότητα σε μια ομάδα εργασίας που σχηματίστηκε εντελώς τυχαία, να συμμετέχουν οι δύο γυναίκες που έχουν συγγενική σχέση μεταξύ τους;

*ΕΚΦΩΝΗΣΗ: 11 άντρες και 9 γυναίκες, από τους οποίους οι 7 άντρες και οι 8 γυναίκες γνωρίζουν αγγλικά. Επιπλέον, 3 από τους άντρες βρίσκονται σε δικαστική διαμάχη μεταξύ τους και 2 από τις γυναίκες έχουν συγγενική σχέση. Έπειτα από **διευκρίνηση** οι επιτροπές παραμένουν πενταμελείς*

Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλες τις πενταμελείς επιτροπές και είναι $|\Omega| = \binom{20}{5}$

Έστω Σ το ενδεχόμενο να συμμετέχουν δυο γυναίκες που έχουν συγγενική σχέση μεταξύ τους

Στάδιο 1: επιλέγουμε 2 από τις 2 γυναίκες που έχουν συγγενική σχέση με $\binom{2}{2} = 1$ τρόπο και

Στάδιο 2: επιλέγουμε 3 από τους υπόλοιπους $20-2=18$ ανθρώπους με $\binom{18}{3}$ τρόπους.

Άρα είναι $|\Sigma| = \binom{18}{3}$

Άρα

$$P(\Sigma) = \frac{|\Sigma|}{|\Omega|} = \frac{\binom{18}{3}}{\binom{20}{5}} = \frac{\frac{18!}{3!15!}}{\frac{20!}{5!15!}}$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Γ

(2γ) Ποια είναι η πιθανότητα, σε μια ομάδα εργασίας στην οποία συμμετέχουν το πολύ δύο γυναίκες, όλοι οι συμμετέχοντες να γνωρίζουν αγγλικά;

ΕΚΦΩΝΗΣΗ: 11 άντρες και 9 γυναίκες, από τους οποίους οι 7 άντρες και οι 8 γυναίκες γνωρίζουν αγγλικά. Επιπλέον, 3 από τους άντρες βρίσκονται σε δικαστική διαμάχη μεταξύ τους και 2 από τις γυναίκες έχουν συγγενική σχέση. Έπειτα από **διευκρίνιση** οι επιτροπές παραμένουν πενταμελείς

Εδώ ο δειγματικός μας χώρος είναι το σύνολο των επιτροπών που αποτελούνται από το πολύ 2 γυναίκες

Για το Ω λοιπόν είναι:

Περίπτωση 1: Καμία γυναίκα → Μόνο άντρες δηλαδή $\binom{11}{5}$ επιτροπές

Περίπτωση 2: Μία ακριβώς γυναίκα → Επιλέγω με $\binom{9}{1}$ τρόπους μια γυναίκα και με $\binom{11}{4}$ τρόπους 4 άντρες

Περίπτωση 3: Δύο ακριβώς γυναίκες → Επιλέγω με $\binom{9}{2}$ τρόπους δύο γυναίκες με $\binom{11}{3}$ τρόπους 3 άντρες

$$\text{Άρα } |\Omega| = \binom{11}{5} + \binom{9}{1} \cdot \binom{11}{4} + \binom{9}{2} \cdot \binom{11}{3}$$

Έστω A το ενδεχόμενο μια επιτροπή που αποτελείται από το πολύ δυο γυναίκες να αποτελείται μόνο από συμμετέχοντες που γνωρίζουν αγγλικά.

Για το A είναι:

Περίπτωση 1: Καμία γυναίκα → Μόνο άντρες που γνωρίζουν αγγλικά δηλαδή $\binom{7}{5}$ επιτροπές

Περίπτωση 2: Μία ακριβώς γυναίκα → Επιλέγω με $\binom{8}{1}$ τρόπους μια γυναίκα που γνωρίζει αγγλικά και με $\binom{7}{4}$ τρόπους 4 άντρες που γνωρίζουν αγγλικά

Περίπτωση 3: Δύο ακριβώς γυναίκες → Επιλέγω με $\binom{8}{2}$ τρόπους δύο γυναίκες που γνωρίζουν αγγλικά και με $\binom{7}{3}$ τρόπους 3 άντρες που γνωρίζουν αγγλικά

$$\text{Άρα } |A| = \binom{7}{5} + \binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} + \binom{8}{2} \cdot \binom{7}{3}$$

Άρα

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{7}{5} + \binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} + \binom{8}{2} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{11}{5} + \binom{9}{1} \cdot \binom{11}{4} + \binom{9}{2} \cdot \binom{11}{3}}$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Δ

(2δ) Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν όλοι οι άνδρες και όλες οι γυναίκες σε μια στρογγυλή τράπεζα, εάν καθένας / καθεμιά ενδιαφέρεται ποιος/ποια κάθεται στα δεξιά και ποιος/ποια κάθεται αριστερά του/της, και δεν επιτρέπεται να καθίσουν δυο γυναίκες σε διαδοχικές θέσεις;

Υπόδειξη: Για το (2δ), προτείνεται να τοποθετήστε πρώτα τους 11 άνδρες στο τραπέζι. Τοποθετήστε στη συνέχεια στο τραπέζι τις 9 γυναίκες, ώστε να μην εμφανιστούν περισσότερες από μία γυναίκες ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς άνδρες.

Έχουμε 11 άντρες και 9 γυναίκες.

Στάδιο 1: Τοποθετούμε τους άντρες στο τραπέζι με $\frac{11!}{11} = 10!$ τρόπους

Στάδιο 2: Ανάμεσα στους άντρες έχουν δημιουργηθεί 11 διακεκριμένα κενά. Τοποθετούμε τις 9 γυναίκες στα 11 διακεκριμένα κενά με $P(11,9) = \frac{11!}{2!}$ τρόπους

Από την πολλαπλασιαστική αρχή η διαδικασία γίνεται με $\frac{11!}{2!} \cdot 10!$ τρόπους

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Α

Στην ΠΛΗ20 υπάρχουν 400 φοιτητές και έχουν δημιουργηθεί 12 τμήματα. Από τους φοιτητές, οι 320 παρακολουθούν τη θεματική ενότητα για πρώτη φορά και έχουν υποχρέωση υποβολής εργασιών, ενώ οι υπόλοιποι 80 έχουν κατοχυρώσει εργασίες.

(3α) Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση που βρίσκει τους τρόπους κατανομής των φοιτητών στα τμήματα και να προσδιοριστεί ο όρος του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο, όταν:

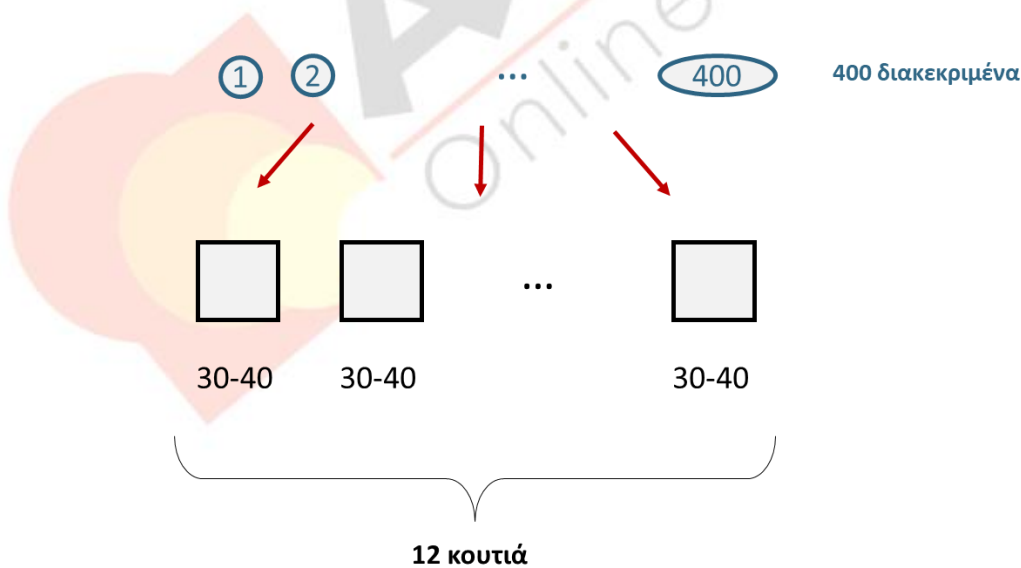
(3α1) Απαιτείται όλα τα τμήματα να έχουν από 30 έως 40 φοιτητές και δεν έχει σημασία η σειρά κατανομής των φοιτητών σε κάθε τμήμα.

(3α2) Απαιτείται όλα τα τμήματα να έχουν τουλάχιστον 25 φοιτητές και όσα έχουν άρτιο αριθμό (δηλ. το 2^ο, το 4^ο, το 6^ο ... τμήμα) να έχουν άρτιο πλήθος φοιτητών.

(3α3) Μας ενδιαφέρει μόνο η κατανομή των φοιτητών που παρακολουθούν το μάθημα για πρώτη φορά, οι οποίοι απαιτείται να κατανεμηθούν στα πρώτα 10 τμήματα ώστε κανένα τμήμα να μην είναι κενό και να μην περιέχει περισσότερους από 35 φοιτητές, αλλά να έχει σημασία η σειρά τοποθέτησής τους σε κάθε τμήμα.

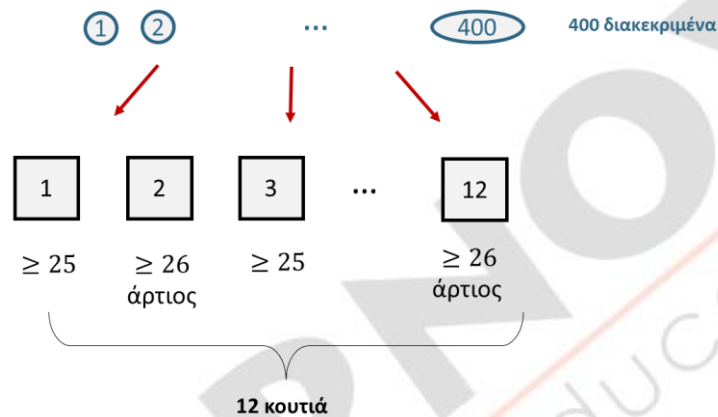
(3α1) Πρόκειται για την διανομή 400 διακεκριμένων αντικειμένων σε 12 διακεκριμένες υποδοχές υπό τον περιορισμό κάθε υποδοχή να δεχτεί από 30 έως 40 αντικείμενα.

Η γεννήτρια συνάρτηση είναι η $\left(\frac{x^{30}}{30!} + \frac{x^{31}}{31!} + \dots + \frac{x^{40}}{40!}\right)^{12}$ και ζητούμενος συντελεστής είναι αυτός του $\frac{x^{400}}{400!}$



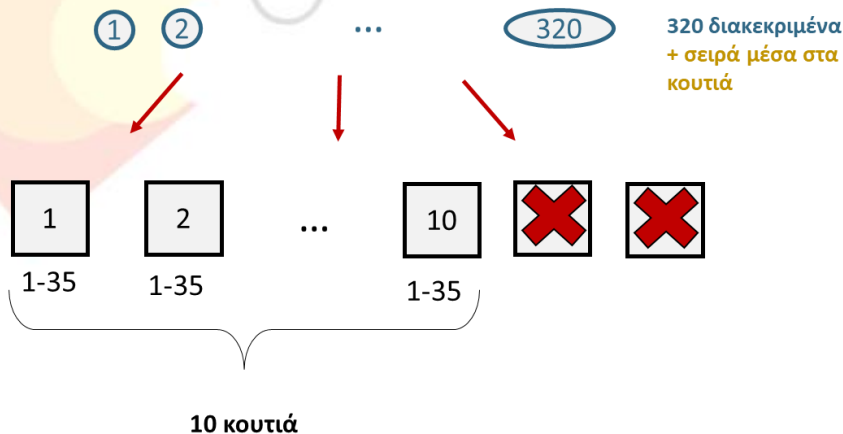
(3α2) Πρόκειται για την διανομή 400 διακεκριμένων αντικειμένων σε 12 διακεκριμένες υποδοχές υπό τον περιορισμό κάθε υποδοχή με περιττή ετικέτα πρέπει να δεχτεί τουλάχιστον 25 αντικείμενα ενώ κάθε υποδοχή με άρτια ετικέτα πρέπει να δεχτεί άρτιο πλήθος αντικειμένων και τουλάχιστον 25 αντικείμενα

- Υποδοχές 1,3,5,7,9,11 $\rightarrow \left(\frac{x^{25}}{25!} + \frac{x^{26}}{26!} + \frac{x^{27}}{26!} \dots + \frac{x^{400}}{400!}\right)$ για 6 υποδοχές
- Υποδοχές 2,4,6,8,10,12 $\rightarrow \left(\frac{x^{26}}{26!} + \frac{x^{28}}{28!} \dots + \frac{x^{400}}{400!}\right)$ για 6 υποδοχές



Η γεννήτρια συνάρτηση είναι η $\left(\frac{x^{25}}{25!} + \frac{x^{26}}{26!} + \frac{x^{27}}{26!} \dots + \frac{x^{400}}{400!}\right)^6 \cdot \left(\frac{x^{26}}{26!} + \frac{x^{28}}{28!} \dots + \frac{x^{400}}{400!}\right)^6$ και ζητούμενος συντελεστής είναι αυτός του $\frac{x^{400}}{400!}$

(3α3) Πρόκειται για την διανομή 320 διακεκριμένων αντικειμένων σε 10 υποδοχές υπό το περιορισμό κάθε υποδοχή να δεχτεί από 1 έως 35 αντικείμενα και επιπρόσθετα μας ενδιαφέρει η σειρά στις υποδοχές.



Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να γίνει χρήση εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης όπου, για οποιαδήποτε k σφαιρίδια, υπάρχουν $k!$ διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησής τους στην ίδια υποδοχή. Κάθε υποδοχή έχει τον ίδιο (εκθετικό) απαριθμητή, που είναι ο εξής:

$$x + 2! \frac{x^2}{2!} + 3! \frac{x^3}{3!} + \dots + 35! \frac{x^{35}}{35!} = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{35}.$$

Η γεννήτρια συνάρτηση είναι η $(x + x^2 + x^3 + \dots + x^{35})^{10}$ και ζητούμενος συντελεστής είναι αυτός του $\frac{x^{320}}{320!}$

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Β

Δημιουργείται πιλοτικά **ένα** τμήμα επίλυσης αποριών στο οποίο ο καθηγητής υπολογίζεται ότι θα έχει φόρτο εργασίας 4 ώρες για κάθε φοιτητή που παρακολουθεί την ενότητα για πρώτη φορά και 1 ώρα για κάθε φοιτητή που έχει κατοχυρώσει εργασίες. Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση που βρίσκει τους τρόπους επιλογής διαφόρων συνδυασμών από νέους και παλιούς φοιτητές που θα συμμετάσχουν στο τμήμα επίλυσης αποριών, δίχως να ενδιαφέρει ακριβώς ποιοι είναι οι συγκεκριμένοι φοιτητές παρά μόνο πόσοι είναι οι φοιτητές από κάθε κατηγορία, ώστε ο καθηγητής που θα αναλάβει το συγκεκριμένο τμήμα να έχει συνολικό φόρτο εργασίας 250 ώρες. Να προσδιοριστεί επίσης ο όρος του οποίου ο συντελεστής δίνει τη ζητούμενη μέτρηση.

Πρόκειται για την διανομή 250 όμοιων αντικειμένων (οι 250 διαθέσιμες ώρες) σε 2 κουτιά:

Το πρώτο κουτί αντιστοιχεί στους 320 φοιτητές που παρακολουθούν την ενότητα 1^η φορά

Το δεύτερο κουτί αντιστοιχεί στους 80 φοιτητές που έχουν κατοχυρώσει εργασίες

Το πρώτο κουτί μπορεί να συνεισφέρει κατά 0 ή 4 ή 8 ή κ.λπ $4 \cdot 320 = 1280$ ώρες

Το δεύτερο κουτί μπορεί να συνεισφέρει κατά 0 ή 1 ή 2 ή κ.λπ 80 ώρες

Άρα η απάντηση δίνεται από το συντελεστή του x^{250} στην γεννήτρια συνάρτηση

$$(1 + x^4 + x^8 + \dots + x^{1280})(1 + x + x^2 + \dots + x^{80})$$

Στην απάντηση αυτή ΔΕΝ λαμβάνεται υπ'όψιν η ταυτότητα των φοιτητών.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Α

Έστω $a_0, a_1, a_2, \dots$ μια ακολουθία ακεραίων αριθμών η οποία ικανοποιεί την αναδρομική σχέση:

$$a_n = 6 \cdot a_{n-1} - 9 \cdot a_{n-2}, \text{ για κάθε } n \geq 2,$$

με αρχικές συνθήκες $a_0 = a_1 = 1$.

Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να αποδείξετε ότι ισχύει ο εξής κλειστός τύπος:

$$a_n = 3^n - \frac{2}{3} \cdot n \cdot 3^n, \text{ για κάθε } n \geq 0.$$

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε ΙΣΧΥΡΗ ΕΠΑΓΩΓΗ.

Βάση Επαγωγής: Θα αποδείξουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $n = 0$ και $n = 1$

Πράγματι για $n = 0$ έχουμε $a_0 = 3^0 - \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot 3^0 = 1$

και για $n = 1$ έχουμε $a_1 = 3^1 - \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 3^1 = 3 - 2 = 1$

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για κάθε $k \leq n$.

Επαγωγικό βήμα: Θα αποδείξουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $n + 1$

Βήμα 1°

Κάνουμε κάποιες απλοποιήσεις στον προς απόδειξη τύπο

$$a_n = 3^n - \frac{2}{3} \cdot n \cdot 3^n \Leftrightarrow$$

$$a_n = 3^n - 2 \cdot n \cdot \frac{3^n}{3} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{a_n = 3^n - 2 \cdot n \cdot 3^{n-1}} \quad (1)$$

Βήμα 2°

Καταγράφουμε αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε και το φέρνουμε σε μια πιο «αναγνωρίσιμη μορφή».

Θα αποδείξουμε ότι

$$a_{n+1} = 3^{n+1} - 2 \cdot (n+1) \cdot 3^{n+1-1} \Leftrightarrow$$

$$a_{n+1} = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot (n+1) \cdot 3^n \Leftrightarrow$$

$$a_{n+1} = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot (n+1) \cdot 3^n \Leftrightarrow$$

$$a_{n+1} = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^n \cdot (n+1) \Leftrightarrow$$

$$a_{n+1} = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^n \cdot n - 2 \cdot 3^n \Leftrightarrow$$

$$a_{n+1} = 3^n \cdot (3 - 2n - 2) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{a_{n+1} = 3^n \cdot (1 - 2n)} \quad (2)$$

Βήμα 3^ο

Αντικαθιστούμε στον αναδρομικό τύπο και αξιοποιούμε την επαγωγική υπόθεση

Γνωρίζουμε ότι για τον a_{n+1} ισχύει ο αναδρομικός τύπος άρα είναι

$$a_{n+1} = 6 \cdot a_n - 9 \cdot a_{n-1}$$

Όμως έχουμε υποθέσει ότι για κάθε φυσικό k μέχρι το n ισχύει:

$$a_k = 3^k - \frac{2}{3} \cdot k \cdot 3^k \Leftrightarrow a_k = 3^k - 2 \cdot k \cdot 3^{k-1}$$

Άρα για τους a_n και a_{n-1} μπορούμε να κάνουμε χρήση του n – οστού όρου της ακολουθίας

Άρα:

- $a_n = 3^n - 2 \cdot n \cdot 3^{n-1}$
- $a_{n-1} = 3^{n-1} - 2 \cdot (n-1) \cdot 3^{n-2}$

Αντικαθιστώντας στην $a_{n+1} = 6 \cdot a_n - 9 \cdot a_{n-1}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 6 \cdot (3^n - 2 \cdot n \cdot 3^{n-1}) - 9 \cdot (3^{n-1} - 2 \cdot (n-1) \cdot 3^{n-2}) \Leftrightarrow \\ a_{n+1} &= 6 \cdot 3^n - 6 \cdot 2 \cdot n \cdot 3^{n-1} - 9 \cdot 3^{n-1} + 9 \cdot 2 \cdot (n-1) \cdot 3^{n-2} \Leftrightarrow \\ a_{n+1} &= 6 \cdot 3^n - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot n \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} + 3^2 \cdot 3^{n-2} \cdot 2 \cdot (n-1) \Leftrightarrow \\ a_{n+1} &= 6 \cdot 3^n - 2 \cdot 2 \cdot n \cdot 3^n - 3 \cdot 3^n + 3^n \cdot 2 \cdot (n-1) \Leftrightarrow \\ a_{n+1} &= 3^n \cdot (6 - 4n - 3 + 2(n-1)) \Leftrightarrow \\ a_{n+1} &= 3^n \cdot (6 - 4n - 3 + 2n - 2) \Leftrightarrow \\ a_{n+1} &= 3^n \cdot (1 - 2n) \end{aligned}$$

Όπερ έδει δείξαι

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Β

Χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις, να βρείτε κλειστό τύπο για την αναδρομική σχέση:

$$b_n = 2 \cdot b_{n-1} + 3 \cdot b_{n-2}, \text{ για κάθε } n \geq 2,$$

με αρχικές συνθήκες $b_0 = b_1 = 1$.

Έστω $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

Έχουμε:

$$\begin{array}{lcl} b_2 = 2 \cdot b_1 + 3 \cdot b_0 & & x^2 \cdot b_2 = 2 \cdot x^2 \cdot b_1 + 3 \cdot x^2 \cdot b_0 \\ b_3 = 2 \cdot b_2 + 3 \cdot b_1 & & x^3 \cdot b_3 = 2 \cdot x^3 \cdot b_2 + 3 \cdot x^3 \cdot b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_n = 2 \cdot b_{n-1} + 3 \cdot b_{n-2} & & x^n \cdot b_n = 2 \cdot x^n \cdot b_{n-1} + 3 \cdot x^n \cdot b_{n-2} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Άρα

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot b_n \cdot x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot b_n \cdot x^{n+2} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n \cdot x^n = 2 \cdot x \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot x^n + 3 \cdot x^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n \Leftrightarrow$$

$$B(x) - b_1 x - b_0 = 2 \cdot x \cdot (B(x) - b_0) + 3 \cdot x^2 \cdot B(x) \Leftrightarrow$$

$$B(x) - x - 1 = 2 \cdot x \cdot (B(x) - 1) + 3 \cdot x^2 \cdot B(x) \Leftrightarrow$$

$$B(x) - x - 1 = 2 \cdot x \cdot B(x) - 2x + 3 \cdot x^2 \cdot B(x) \Leftrightarrow$$

$$B(x)(1 - 2x - 3x^2) = x + 1 - 2x \Leftrightarrow$$

$$B(x) = \frac{1 - x}{1 - 2x - 3x^2}$$

Παραγοντοποίηση του παρονομαστή

$$1 - 2x - 3x^2 = (x + 1)(1 - 3x) \text{ (αναλυτικά οι πράξεις στο video)}$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1-x}{1-2x-3x^2} = \frac{1-x}{(x+1)(1-3x)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{1-3x} \Leftrightarrow$$

$$1-x = (1-3x) \cdot a + (1+x) \cdot b \Leftrightarrow$$

$$1-x = a - 3ax + b + bx \Leftrightarrow$$

$$a - 3ax + b + bx - 1 + x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot (b + 1 - 3a) + (a + b - 1) = 0$$

Άρα

$$\begin{cases} a + b - 1 = 0 \\ b + 1 - 3a = 0 \end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα:

$$b = 3a - 1 \text{ άρα } a + (3a - 1) - 1 = 0 \text{ άρα } 4a - 2 = 0 \text{ άρα } a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Επομένως } b = 3 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Άρα:

$$B(x) = \frac{1-x}{1-2x-3x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{1-3x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-3x}$$

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1 + ax + a^2 x^2 + \dots$$

→ Χρήσιμες γεννήτριες [εδώ](#)

$$B(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-x)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-3x}$$

Άρα

$$B(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n$$

Εν τέλει:

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot (-1)^n + \frac{1}{2} \cdot 3^n \right] \cdot x^n$$

$$\text{Δηλαδή } b_n = \frac{1}{2} \cdot (-1)^n + \frac{1}{2} \cdot 3^n$$

Επαλήθευση του τύπου – ΜΗΝ ΤΟ ΓΡΑΨΕΤΕ ΣΤΗΝ ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΑΣ

```
def beta(n):
    if n == 0:
        return 1
    elif n==1:
        return 1
    else:
        return 2*beta(n-1)+3*beta(n-2)

def niostos(n):
    return (1/2)*(-1)**n+(1/2)*3**n

for i in range(20):
    print("O anadromikos dinei -- " + str(beta(i)) + "-- kai autos pou
    apodeiksame dinei --" + str(niostos(i))+ "--")
```

Το πρόγραμμα τυπώνει:

```
O anadromikos dinei -- 1-- kai autos pou apodeiksame dinei --1.0--
O anadromikos dinei -- 1-- kai autos pou apodeiksame dinei --1.0--
O anadromikos dinei -- 5-- kai autos pou apodeiksame dinei --5.0--
O anadromikos dinei -- 13-- kai autos pou apodeiksame dinei --13.0--
O anadromikos dinei -- 41-- kai autos pou apodeiksame dinei --41.0--
O anadromikos dinei -- 121-- kai autos pou apodeiksame dinei --121.0--
O anadromikos dinei -- 365-- kai autos pou apodeiksame dinei --365.0--
O anadromikos dinei -- 1093-- kai autos pou apodeiksame dinei --1093.0--
O anadromikos dinei -- 3281-- kai autos pou apodeiksame dinei --3281.0--
O anadromikos dinei -- 9841-- kai autos pou apodeiksame dinei --9841.0--
O anadromikos dinei -- 29525-- kai autos pou apodeiksame dinei --29525.0--
O anadromikos dinei -- 88573-- kai autos pou apodeiksame dinei --88573.0--
O anadromikos dinei -- 265721-- kai autos pou apodeiksame dinei --265721.0--
O anadromikos dinei -- 797161-- kai autos pou apodeiksame dinei --797161.0--
O anadromikos dinei -- 2391485-- kai autos pou apodeiksame dinei --2391485.0--
O anadromikos dinei -- 7174453-- kai autos pou apodeiksame dinei --7174453.0--
O anadromikos dinei -- 21523361-- kai autos pou apodeiksame dinei --21523361.0--
O anadromikos dinei -- 64570081-- kai autos pou apodeiksame dinei --64570081.0--
O anadromikos dinei -- 193710245-- kai autos pou apodeiksame dinei --193710245.0--
O anadromikos dinei -- 581130733-- kai autos pou apodeiksame dinei --581130733.0--
```

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Γ

Ο Γιώργος θέλει να πληρώσει σε ένα αυτόματο μηχάνημα τα διόδια της εθνικής οδού χρησιμοποιώντας κέρματα του 1 ευρώ, κέρματα των 2 ευρώ, και κέρματα (έστω ότι υπήρχαν) ή χαρτονομίσματα των 5 ευρώ. Μας ενδιαφέρει η ακολουθία $c_0, c_1, c_2, \dots$, ο όρος c_n της οποίας υπολογίζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων να πληρωθεί ένα ποσό των n ευρώ στο αυτόματο μηχάνημα με κέρματα του 1 ευρώ, των 2 ευρώ και των 5 ευρώ, καθώς και με χαρτονομίσματα των 5 ευρώ, όταν ενδιαφέρει η σειρά με την οποία ο Γιώργος εισάγει στο μηχάνημα τα κέρματα και τα χαρτονομίσματα που απαρτίζουν το ζητούμενο ποσό.

(4γ1) Να προσδιοριστούν οι αρχικές τιμές της ακολουθίας, $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$.

(4γ2) Να προσδιοριστεί η αναδρομική σχέση που δίνει την τιμή του όρου c_n , για κάθε $n \geq 5$.

(4γ3) Με βάση την αναδρομική σας σχέση, να προσδιορίσετε το πλήθος των τρόπων για να πληρωθεί ένα ποσό των 5 και 6 και ευρώ. Ταιριάζουν οι τιμές που δίνει η αναδρομική σας σχέση με τις αρχικές τιμές που βρήκατε στο **(4γ1)**;

Υπόδειξη: Για το (4γ2), μελετήστε τις αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις που προκύπτουν, ανάλογα με το είδος του τελευταίου (στη σειρά) κέρματος ή χαρτονομίσματος που συνεισφέρει στη συνολική αξία των n ευρώ.

Θεωρούμε ότι υπάρχουν και κέρματα και χαρτονομίσματα των 5 ευρώ.

(4γ1)

$$c_0 = 1 \rightarrow _$$

$$c_1 = 1 \rightarrow 1$$

$$c_2 = 2 \rightarrow 11, 2$$

$$c_3 = 3 \rightarrow 111, 12, 21$$

$$c_4 = 5 \rightarrow 1111, 112, 121, 211, 22$$

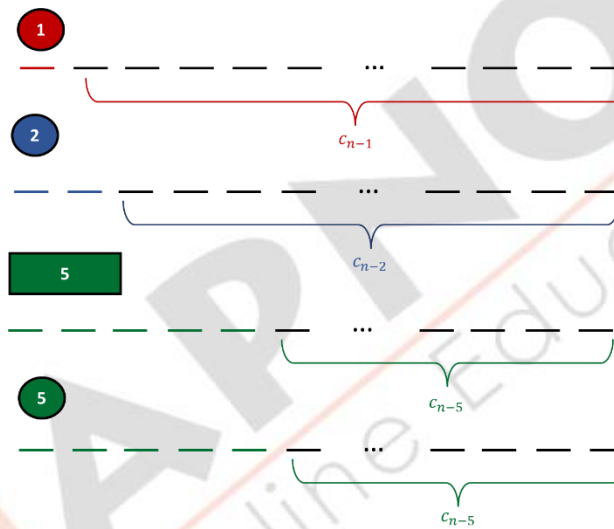
$$c_5 = 10 \rightarrow 11111, 1112, 1121, 1211, 2111, 221, 122, 221, 5_{\kappa}, 5_{\chi} \text{ (όπου το } 5_{\kappa} \text{ αναφέρεται στο Κέρμα των 5 ευρώ και το } 5_{\chi} \text{ αναφέρεται στο χαρτονόμισμα των 5 ευρώ)}$$

$$c_6 = 17 \rightarrow 111111, 11112, 11121, 11211, 12111, 21111, 1122, 1212, 2112, 2211, 2121, 2112, 222, 15_{\kappa}, 5_{\kappa}1, 15_{\chi} 5_{\chi} 1$$

(4γ2)

Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

- Αν το τελευταίο **κέρμα/χαρτονόμισμα** που χρησιμοποιείται είναι του **1 ευρώ**, τότε έχουμε ακριβώς τους τρόπους να πληρώσουμε το ποσό **$n - 1$**
- Αν το τελευταίο **κέρμα/χαρτονόμισμα** που χρησιμοποιείται είναι των **2 ευρώ**, τότε έχουμε ακριβώς τους τρόπους να πληρώσουμε το ποσό **$n - 2$**
- Αν το τελευταίο **κέρμα/χαρτονόμισμα** που χρησιμοποιείται είναι των **5 ευρώ**, τότε έχουμε ακριβώς τους τρόπους να πληρώσουμε το ποσό **$n - 5$** αν χρησιμοποιήσουμε κέρμα των 5 ευρώ και άλλους τόσους τρόπους αν χρησιμοποιήσουμε χαρτονόμισμα των 5 ευρώ



Άρα η αναδρομική σχέση είναι η:

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2} + 2 \cdot c_{n-5}$$

με αρχικές συνθήκες $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 3, c_4 = 5$

(4γ3)

Είναι $c_5 = c_4 + c_3 + 2 \cdot c_0 = 5 + 3 + 2 \cdot 1 = 10$

Είναι $c_6 = c_5 + c_4 + 2 \cdot c_1 = 10 + 5 + 2 \cdot 1 = 17$

Πράγματι η αναδρομική σχέση δίνει αυτό που αναμέναμε

Επαλήθευση του τύπου – **ΜΗΝ ΤΟ ΓΡΑΨΕΤΕ ΣΤΗΝ ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΑΣ**

```
def diodia(n):  
    if n == 0:  
        return 1 #c0=1  
    elif n == 1:  
        return 1 #c1=1  
    elif n == 2:  
        return 2 #c2=3  
    elif n == 3:  
        return 3 #c3=3  
    elif n==4:#a4  
        return 5 #c4=5  
    else:  
        return diodia (n-1) + diodia(n-2) + 2* diodia (n-5)  
  
for i in range(10):  
    print (diodia(i))
```

Το πρόγραμμα τυπώνει:

O 0os oros isoutai me 1
O 1os oros isoutai me 1
O 2os oros isoutai me 2
O 3os oros isoutai me 3
O 4os oros isoutai me 5
O 5os oros isoutai me 10
O 6os oros isoutai me 17
O 7os oros isoutai me 31
O 8os oros isoutai me 54
O 9os oros isoutai me 95

ΕΡΩΤΗΜΑ 5Α

Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους, βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό* (Σ) ή *Λάθος* (Λ) και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

5Α1 Σ/Λ Σε ένα αλφάβητο με 15 γράμματα υπάρχουν 3.500 διαφορετικές λέξεις 3 γραμμάτων.

ΛΑΘΟΣ

Έχουμε 3 θέσεις όπου για κάθε θέση έχουμε 15 επιλογές. Οι τρόποι να συμπληρωθούν οι θέσεις είναι $15^3 = 3375 \neq 3500$

5Α2 Σ/Λ Το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της ανίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16$ είναι $C(20,4)$.

ΣΩΣΤΟ

Επαναδιατυπώνουμε την ερώτηση ως εξής:

Αναζητούμε το πλήθος των μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y = 16$

Όπου, τα αντικείμενα που θα πέσουν στο y «δεν μετράνε».

Πχ η λύση $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 7$ και $y = 3$ αντιστοιχεί στην εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 = 4 + 2 + 7 = 13$

Άρα πράγματι είναι 16 όμοια αντικείμενα σε 5 διακεκριμένα κουτιά: $\binom{16+5-1}{16} = \binom{20}{16} = \binom{20}{4}$

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ – για βαθύτερη κατανόηση – όχι για να την γράψετε

Θα βρούμε το πλήθος των μη αρνητικών λύσεων των εξισώσεων $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k$ με $0 \leq k \leq 16$

Είναι:

$$\sum_{k=0}^{16} \binom{k+4-1}{k} = \sum_{k=0}^{16} \binom{k+3}{k}$$

Από την παρακάτω ταυτότητα για $r = 3$ και $n = 16$ παίρνουμε το ζητούμενο.

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

Η απόδειξη της ταυτότητας βρίσκεται εδώ: https://proofwiki.org/wiki/Sum_of_r%2Bk_Choose_k_up_to_n

```
1 import math
2 sum = 0
3 for k in range(17):
4     sum = sum + math.comb(k+3,k)
5
6 print("i lisi einai " + str(sum))
7
8 print("to eap dinei "+ str(math.comb(20,4)))
```

i lisi einai 4845
to eap dinei 4845
>

5A3 Σ/Λ Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους 15 ζευγάρια μπορούν να καθίσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι, χωρίς κανέναν περιορισμό ως προς τη θέση που καταλαμβάνει ο καθένας, αλλά καθένας ενδιαφέρεται ποιος κάθεται αριστερά και ποιος κάθεται δεξιά, είναι ίσοι με $30!$.

ΛΑΘΟΣ

Πρόκειται για την τοποθέτηση 30 διακεκριμένων αντικειμένων σε κύκλο, όπου μας νοιάζει η φορά και δεν υπάρχει άλλος περιορισμός.

Οι τρόποι να γίνει αυτό είναι $\frac{30!}{30} = 29!$

5A4 Σ/Λ Ένα σύνολο 100 στοιχείων έχει 9.900 διαφορετικά υποσύνολα με 2 στοιχεία το καθένα.

ΛΑΘΟΣ

Έχουμε $\binom{100}{2}$ υποσύνολα με ακριβώς 2 στοιχεία.

Είναι $\binom{100}{2} = \frac{100!}{98!2!} = \frac{99 \cdot 100}{2} = 99 \cdot 50 = 4950 \neq 9900$

ΕΡΩΤΗΜΑ 5B

Σε μια εξέταση λαμβάνουν μέρος 350 φοιτητές και υπάρχουν 20 αίθουσες διαθέσιμες χωρίς περιορισμό χωρητικότητας. Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να μοιραστούν οι φοιτητές στις αίθουσες είναι

5B1 Σ/Λ $P(350,20)$ εάν δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία εισέρχονται οι φοιτητές σε κάθε αίθουσα.

ΛΑΘΟΣ

Οι τρόποι να διανείμουμε 350 διακεκριμένα αντικείμενα (τους φοιτητές) σε 20 διακεκριμένα κουτιά χωρίς περιορισμούς ισούται με 20^{350}

5B2 Σ/Λ Όσοι ο συντελεστής του $x^{350}/350!$ στην παράσταση

$$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{350}}{350!}\right)^{20}$$

εάν δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία εισέρχονται οι φοιτητές σε κάθε αίθουσα.

ΣΩΣΤΟ

Πρόκειται για την διανομή 350 διακεκριμένων αντικειμένων σε 20 κουτιά χωρίς περιορισμούς (σε κάθε κουτί μπορούν αν πέσουν από 0 έως 350 αντικείμενα).

Η γεννήτρια που λύνει το πρόβλημα είναι πράγματι η εκθετική γεννήτρια που δίνεται και ο συντελεστής είναι αυτός του $x^{350}/350!$

5B3 Σ/Λ Όσοι ο συντελεστής του $x^{350}/350!$ στην παράσταση

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{350})^{20}$$

εάν έχει σημασία η σειρά με την οποία εισέρχονται οι φοιτητές σε κάθε αίθουσα.

ΣΩΣΤΟ

Μνημονικός κανόνας: όταν μοιράζουμε διακεκριμένα αντικείμενα σε διακεκριμένα κουτιά και μας ενδιαφέρει η **σειρά** μέσα στα **κουτιά**, παίρνουμε «**εκθετικό συντελεστή** σε εκθετική που μοιάζει με **συνήθη**»

Πρόκειται για την διανομή 350 διακεκριμένων αντικειμένων σε 20 κουτιά χωρίς περιορισμούς (σε κάθε κουτί μπορούν αν πέσουν από 0 έως 350 αντικείμενα) ενώ μας νοιάζει η **σειρά** μέσα στα κουτιά

Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να γίνει χρήση εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης όπου, για οποιαδήποτε k σφαιρίδια, υπάρχουν $k!$ διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησής τους στην ίδια υποδοχή. Κάθε υποδοχή έχει τον ίδιο (εκθετικό) απαριθμητή, που είναι ο εξής:

$$x + 2! \frac{x^2}{2!} + 3! \frac{x^3}{3!} + \dots + 350! \frac{x^{350}}{350!} = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{350}.$$

Άρα η γεννήτρια είναι σωστή και ο συντελεστής είναι επίσης σωστός

5B4 Σ/Λ Όσοι ο συντελεστής του x^{350} στην παράσταση

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{350})^{20}$$

εάν έχει σημασία η σειρά με την οποία εισέρχονται οι φοιτητές σε κάθε αίθουσα.

ΛΑΘΟΣ

Αφού είναι σωστό το **5B3** δεν μπορεί να είναι σωστό και αυτό. Ο συντελεστής πρέπει να είναι εκθετικός.