Θέμα 1ο

• **Σελίδα 39, άσκηση 14**

Καλούμε το υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου M φραγμένο αν υπάρχει κάποιο $x_0 \in M$ και κάποια σταθερά $C < +\infty$ τ.ω. $d(\alpha, x_0) \leq C$ για κάθε $\alpha \in A$. Δείξτε ότι μία πεπερασμένη ένωση φραγμένων συνόλων είναι φραγμένη.

Λύση

Θεωρούμε τα φραγμένα υποσύνολα $A_1, \dots, A_n$ του μετρικού χώρου M.
Αφού τα $A_i, i=1,\dots,n$ είναι φραγμένα, τότε υπάρχουν x_{0_i} και C_i, $i=1,\dots,n$ τέτοια ώστε:

$$d(a, x_{0_i}) \leq C_i, \quad a \in M, i=1,\dots,n$$

Παίρνουμε,
- $x_{01} = p$
- $c = \max\{c_1, \dots, c_n\} + \max_{1\leq i\leq n}\{d(p, x_{0i})\} < +\infty$

Έστω $x \in A_i, i=1,\dots,n$, τότε

$$d(x,p) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{τριγωνική} \\ \text{ανισότητα}}}{\leq} d(x, x_{0i}) + d(x_{0i}, p) \leq C_i + d(x_{0i}, p)$$

$$\leq C$$

$$\Rightarrow d(x,p) \leq C, \quad x \in A_i, i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow x \in B(p, c)$$

Άρα $A_i \subseteq B(p,c)$, $i=1,\dots,n$

Άρα,
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq B(p,c)$$

$$\Rightarrow d(x,p) \leq c, \ \forall x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \ p = x_{0_1} \in M, \ c < +\infty$$

Άρα $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ είναι φραγμένο στον (M,d).

• Σελίδα 39, άσκηση 15

Ορίζουμε την διάμετρο του μη κενού υποσυνόλου A του μετρικού χώρου M ως εξής:

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(\alpha,b), \alpha,b \in A\}.$$

Δείξτε ότι το A είναι φραγμένο αν και μόνο αν $\operatorname{diam}(A)$ είναι πεπερασμένη.

Λύση

$\Rightarrow$) Έστω ότι το A είναι φραγμένο. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $x \in M$ τέτοια ώστε:

$$A \subseteq B(x,\varepsilon)$$
$$\Rightarrow \operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B(x,\varepsilon)) \leq 2\varepsilon < +\infty$$

Άρα $\operatorname{diam}(A)$ πεπερασμένη.

$\Leftarrow$) Έστω $\operatorname{diam}(A)$ πεπερασμένη, άρα $\operatorname{diam}(A) = \varepsilon$.
Ισχύει ότι,
$$d(\alpha,b) < \operatorname{diam}(A) = \varepsilon, \ \forall \alpha,b \in A$$
Σταθεροποιούμε το $b = b_0$.
$$\Rightarrow d(\alpha,b_0) < \varepsilon, \ \forall \alpha \in A$$
$$\Rightarrow \alpha \in B(b_0,\varepsilon)$$

Οπότε πήραμε $a \in A$ και καταλήξαμε $a \in B(b_0, \varepsilon)$.
Άρα,
$$A \subseteq B(b_0, \varepsilon)$$
Άρα A φραγμένο.

Θέμα 2ο / σελίδα 42 / άσκηση 23

Ο υπόχωρος του ℓ_∞, που περιέχει όλες τις ακολουθίες που συγκλίνουν στο 0 είναι ορισμένος ως c_0 (παρατηρήστε ότι ο c_0 είναι υπόχωρος του ℓ_∞, άρα ο c_0 είναι χώρος με νόρμα $\|\cdot\|_\infty$). Δείξτε ότι έχουμε τους ακολουθιακούς εγκλεισμούς:

$$\ell_1 \subset \ell_2 \subset c_0 \subset \ell_\infty$$

Λύση

Θδο $\ell_1 \subset \ell_2$

Έστω $x \in \ell_1$ με $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$
Ισχύει ότι,

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)^2$$

Πράγματι,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)^2 = \left(|x_1| + \dots + |x_n|\right)^2$$

$$= (|x_1| + \dots + |x_n|)(|x_1| + \dots + |x_n|)$$

$$\begin{aligned} &= |x_1|^2 + |x_1|\cdot|x_2| + \dots + |x_1|\cdot|x_n| \\ &+ |x_2|^2 + |x_2|\cdot|x_1| + \dots + |x_2|\cdot|x_n| \\ &\ \vdots \\ &+ |x_n|^2 + \underbrace{|x_n|\cdot|x_1| + \dots + |x_n|\cdot|x_{n-1}|} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |x_k|\cdot|x_j|$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2, \text{ διότι } \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |x_k||x_j| \geq 0$$

Άρα, $\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|\right)^2 < +\infty$, διότι

$x \in \ell_1$.

Οπότε το μερικό άθροισμα είναι φραγμένο, άρα

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^2 < +\infty.$$

Οπότε $x \in \ell_2$.
Άρα $\ell_1 \subset \ell_2$.

Θδο $\ell_2 \subset c_0$

Έστω $x \in \ell_2$ με $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

Ισχύει ότι,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^2 = \left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

διότι $x \in \ell_2$.
Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^2$ συγκλίνει, οπότε:

$$|x_k|^2 \xrightarrow{k \to +\infty} 0$$
$$\Rightarrow |x_k| \xrightarrow{k \to +\infty} 0$$
$$\Rightarrow x_k \xrightarrow{k \to +\infty} 0$$

Άρα η ακολουθία $x=(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ συγκλίνει στο 0

, άρα $x \in c_0$

Οπότε,

$$\ell_2 \subset c_0.$$

Από εκφώνηση $c_0 \subset \ell_\infty$.
Άρα

$$\ell_1 \subset \ell_2 \subset c_0 \subset \ell_\infty$$

Θέμα 3ο / σελίδα 67 / άσκηση 32

Μια πραγματική συνάρτηση f στον μετρικό χώρο M καλείται κάτω ημισυνεχής αν, για κάθε πραγματικό α, το σύνολο $\{x \in M, f(x) \le \alpha\}$ είναι κλειστό στο M. Δείξτε ότι η f είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν $f(x) \le \liminf_{n \to +\infty} f(x_n)$, όπου $x_n \to x$ στο M.

Λύση

$\Rightarrow$) Έστω ότι η f είναι κάτω ημισυνεχής.
Ισχύει ότι $x_n \xrightarrow{d} x$.
Άρα,

$\forall \delta > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $d(x_n, x) < \delta, \ \forall n \ge N_0$.

Ισχύει ότι $m = \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) < +\infty$, διότι

$\{x \in M, f(x) \le a\}$ κλειστό σύνολο.

Επειδή η f είναι κάτω ημισυνεχής, το σύνολο $\{x \in M, f(x) \le m + \varepsilon\}, \forall \varepsilon > 0$ είναι κλειστό.
Άρα ε τυχαίο, τότε για $\varepsilon \to 0$ έχουμε:

$$f(x) \le \liminf_{n \to +\infty} f(x_n)$$

$\Leftarrow$) Θδο $\{x \in M, f(x) \le a\}$ κλειστό σύνολο.

Έστω $(x_n) \subseteq \{x \in M, f(x) \le a\}$ με $x_n \xrightarrow{d} x$.
Άρα,

$$f(x_n) \le \alpha$$

$$\Rightarrow \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \le \alpha$$

$$\xRightarrow[\text{ημισυνεχής}]{f \text{ κάτω}} f(x) \le \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \le \alpha$$

$$\Rightarrow x \in \{x \in M, f(x) \le \alpha\}.$$

Άρα το $\{x \in M, f(x) \leq a\}$ είναι κλειστό.

Θέμα 4ο

Έστω ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η συνάρτηση f.

Λύση

Έχουμε,

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

για $x = y = 0$:

$$f(0) = (f(0))^2$$

$$\Rightarrow f(0) = 0 \quad \text{ή} \quad f(0) = 1$$

1η περίπτωση: $f(0) = 0$

Ισχύει ότι,

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

για $y = 0$:

$$f(x) = f(x) \cdot f(0) = f(x) \cdot 0 = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Άρα $f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

2η περίπτωση: $f(0) = 1$.

Έστω $\alpha = f(1)$.

Ισχύει ότι

$$f(2) = f(1) \cdot f(1) = (f(1))^2 = \alpha^2$$

$$f(3) = f(1) \cdot f(2) = \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha^3$$

Επαγωγικά,

$$f(n) = \alpha^n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Επίσης,

$$f(0)=f(1+(-1))=f(1)\cdot f(-1)$$

$$\Rightarrow 1=a\cdot f(-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(-1)=\alpha^{-1}}$$

Άρα Επαγωγικά:

$$f(-n)=\alpha^{-n}$$

Οπότε,

$$f(n)=\alpha^{n},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Έστω $p\in\mathbb{Z}$ και $q\in\mathbb{Z}^{+}$, ισχύει ότι:

$$\alpha^{p}=f(p)=f\left(q\cdot\frac{p}{q}\right)=f\Big(\underbrace{\frac{p}{q}+\ldots+\frac{p}{q}}_{q \text{ φορές}}\Big)=$$

$$=f\Big(\underbrace{\frac{p}{q}}_{x}+\underbrace{\Big(\frac{p}{q}+\ldots+\frac{p}{q}\Big)}_{y}\Big)=f\Big(\underbrace{\frac{p}{q}}_{x}\Big)\cdot f\Big(\underbrace{\frac{p}{q}+\ldots+\frac{p}{q}}_{y}\Big)=$$

$$=f\left(\frac{p}{q}\right)\cdot f\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\frac{p}{q}\right)=\left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^{q}$$

$$\Rightarrow \left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^{q}=\alpha^{p}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right)=\alpha^{\frac{p}{q}}$$

Άρα, $f(x)=\alpha^{x},\ x\in\mathbb{Q}$.

Έστω $x\in\mathbb{R}$. Λόγω πυκνότητας των ρητών υπάρχει $(q_n)\subseteq\mathbb{Q}$ τ.ω. $q_n\to x$.

Ισχύει ότι,

$$f(x)\xlongequal{q_n\to x}f\left(\lim_{n\to+\infty}q_n\right)\xlongequal{f\text{ συνεχής}}\lim_{n\to+\infty}f(q_n)=$$

$= \lim_{n \to +\infty} \alpha^{q_n} = \alpha^x$, αφού $q_n \to x$.

Άρα,

$$f(x) = \alpha^x = (f(1))^x$$

με $f(0) = 1$.

Θέμα 5ο

Σε κάθε πραγματικό αριθμό x αντιστοιχίζουμε ένα σύνολο $\Phi(x) \subset \mathbb{R} \setminus \{x\}$. Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ λέγεται ανεξάρτητο αν $S \cap \Phi(S) = \emptyset$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ανεξάρτητο σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ το οποίο είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

Λύση

Έστω $x \in (1,2)$.
Ορίζουμε,

$\alpha_x = \inf\{\alpha,\ (\alpha, x] \subset (1,2)\}$

$B x = \sup\{b,\ [x, b) \subset (1,2)\}$.

Ορίζουμε,

$I_x = (\alpha_x, B_x)$ με $x \in I_x$.

Έστω $y \in (1,2)$, οπότε ορίζεται $I_y = (\alpha_y, B_y)$.
Τα I_x, I_y είναι τα μέγιστα σύνολα των x, y, δηλαδή:

- αν $x \in I$, τότε $I \subset I_x$
- αν $y \in I$, τότε $I \subset I_y$

Ισχυρισμός: Αν $I_x \neq I_y$, τότε $I_x \cap I_y = \emptyset$

Απόδειξη Ισχυρισμού

Έστω $I_x \cap I_y \neq \emptyset$
Έστω $x \in I_x \cup I_y$, τότε $I_x \cup I_y \subset I_x$, άρα $I_y \subseteq I_x$
Έστω $y \in I_x \cup I_y$, τότε $I_x \cup I_y \subset I_y$, άρα $I_x \subseteq I_y$.
Άρα $I_x = I_y$, άτοπο.

Άρα $I_x \cap I_y = \emptyset$

Ισχύει ότι,

$$(1,2) = \bigcup_{x\in U} I_x$$

Θεωρούμε την απεικόνιση:

$$k : (1,2) \to (0,1)$$

με τύπο:

$$k(x) = x-1$$

Η k είναι 1-1 και επί.

Θεωρούμε $S=(0,1)$, λόγω της k κάθε στοιχείο x του S το αντιστοιχίζουμε με το $k(x)\in(1,2)$ και κάθε στοιχείο $k(x)$ το αντιστοιχίζουμε με $I_{k(x)}$.

Άρα για κάθε $x\in S$, του αντιστοιχούμε το $I_{k(x)}=\varphi(x)$

Άρα,

$$\phi(S) = \bigcup_{x\in S} \varphi(x) = (1,2)$$

Οπότε,

(1) $S\subset\mathbb{R}$

(2) $card(S)=card(\mathbb{R})$

(3) $S\cap\phi(S) = (0,1)\cap(1,2)=\phi$.

Θέμα 6ο

Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$ και συνάρτηση $p: X \longrightarrow [0,+\infty)$ με τις ιδιότητες

(i) $p(x)=0 \Longleftrightarrow x=0$

(ii) $p(\lambda x)=|\lambda| p(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Να αποδείξετε ότι η p είναι νόρμα αν και μόνο αν το σύνολο $B_X=\{x \in X, p(x) \leq 1\}$ είναι κυρτό.

Λύση

$\Rightarrow$) Έστω p νόρμα. Θα δείξουμε ότι το B_X είναι κυρτό. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x,y \in B_X$, τότε το $t\cdot x+(1-t)y \in B_X$ με $t \in [0,1]$.

Έστω $x,y \in B_X$, τότε $p(x) \leq 1$ και $p(y) \leq 1$.

Για $t \in [0,1]$ ισχύει ότι,

$$p(tx+(1-t)y) \underset{\substack{p\text{-νόρμα}\\ \text{τριγωνική}\\ \text{ανισότητα}}}{\leq} p(tx)+p((1-t)y) \xlongequal{p\text{-νόρμα}} t\cdot p(x)+(1-t)p(y) \underset{\substack{x,y \in B_X\\ p(x)\leq 1,\, p(y)\leq 1}}{\leq} t+(1-t)=1$$

Άρα $p(tx+(1-t)y) \leq 1$, άρα $tx+(1-t)y \in B_X$, άρα B_X κυρτό.

$\Leftarrow$) Έστω B_X κυρτό, για να δείξουμε ότι η p είναι νόρμα θα δείξουμε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα.

Ισχύει ότι,

- $p\left(\frac{x}{p(x)}\right) \xlongequal{(ii)} \frac{1}{p(x)} p(x)=1$
- $p\left(\frac{y}{p(y)}\right) \xlongequal{(ii)} \frac{1}{p(y)} p(y)=1$

Άρα $\dfrac{x}{p(x)}, \dfrac{y}{p(y)} \in B_x$.

Ισχύει ότι,

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)} = \frac{x}{p(x)+p(y)} + \frac{y}{p(x)+p(y)}$$

$$= \underbrace{\frac{p(x)}{p(x)+p(y)}}_{t\in[0,1]} \cdot \frac{x}{p(x)} + \underbrace{\frac{p(y)}{p(x)+p(y)}}_{1-t\in[0,1]} \cdot \frac{y}{p(y)}$$

$$= t \cdot \underbrace{\frac{x}{p(x)}}_{\in B_x} + (1-t)\underbrace{\frac{y}{p(y)}}_{\in B_x} \in B_x$$

Διότι,

- $1-t = 1 - \dfrac{p(x)}{p(x)+p(y)} = \dfrac{p(x)+p(y)}{p(x)+p(y)} - \dfrac{p(x)}{p(x)+p(y)}$

$$= \frac{p(y)}{p(x)+p(y)}$$

- $t = \dfrac{p(x)}{p(x)+p(y)} \leq 1$ και $t = \dfrac{p(x)}{p(x)+p(y)} \geq 0$

- B_x κυρτό

Άρα,

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)} \in B_x$$

$$\Longleftrightarrow p\cdot\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)}\right) \leq 1 .$$

(ii)

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{p(x)+p(y)} \cdot p(x+y) \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow p(x+y) \leq p(x)+p(y)$$

Άρα ισχύει η τριγωνική ανισότητα, άρα p νόρμα

Θέμα 7ο

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $P=\{(x_n)_n \in \ell_2, |x_n|<1, \forall n \in \mathbb{N}\}$ είναι ανοικτό σύνολο στον ℓ_2..

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f : \ell^2 \longrightarrow [0,+\infty)$$

με τύπο:

$$f(x) = \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n| , \quad x = (x_n)_n \in \ell^2 .$$

Η f είναι συνεχής, επειδή είναι νόρμα.

Ισχύει ότι,

$$\|x\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n| , \quad x = (x_n)_n \in \ell^2$$

Επίσης το διάστημα $(0,1)$ είναι ανοικτό.

Άρα,

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ συνεχής στο } \ell_2 \\ \bullet\ (0,1) \text{ ανοικτό στο } [0,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}((0,1)) \text{ ανοικτό στο } \ell_2 .$$

Όμως,

$$f^{-1}((0,1)) = \{x \in \ell^2 , 0 < f(x) < 1\} =$$

$$= \{x \in \ell^2 , 0 < \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < 1\} =$$

$$= \{x \in \ell^2 , \ |x_n| < 1\} = P$$

Άρα το P είναι ανοικτό στον ℓ_2.

Θέμα 8ο

(α) Έστω (M,d) μετρικός χώρος και $A\subseteq M$ με την ιδιότητα: υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x,y\in A$ με $x\neq y$, να ισχύει $d(x,y)\geq\delta$. Είναι το A κλειστό στον M.

(β) έστω $A,B\subseteq\mathbb{R}$, με την συνήθη μετρική, με A πυκνό και B πεπερασμένο. Να δειχθεί ότι το $A\setminus B$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Λύση

(α)
Έστω A κλειστό στον M. Άρα για κάθε $(x_n)\subseteq A$ με $x_n\to x$, τότε $x\in A$.
Άρα $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $d(x_n,x)<\varepsilon$, $\forall n\geq n_0$.
Οπότε για $\varepsilon=\delta$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω.

$$d(x_n,x)<\delta,\ \forall n\geq n_0$$

$\underline{\text{για } n=n_0}$

$$d(x_{n_0},x)<\delta,\ x_{n_0},x\in A$$

άτοπο.
Άρα το A δεν είναι κλειστό.

(β)
Έστω $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$.
Το A είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, άρα
$\forall x\in\mathbb{R}$ $\exists(x_n)_n\subseteq A$ τ.ω. $x_n\to x$.
Έστω $x\in\mathbb{R}$.
$\underline{1^{\eta}\ \text{περίπτωση}}$ $(x_n)_n\notin B$, $\forall n$
Τότε δεν υπάρχει θέμα και έχουμε $x_n\to x$.

<u>2η περίπτωση</u> Έστω $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ τ.ω. $(x_n)_n \in B$

Θεωρούμε την ακολουθία $(y_n)_n = (x_n)_n$, $n > n_k$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 > n_k$ τ.ω. $|y_n - x| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$
άρα $(y_n)_n \subseteq A$ και $y_n \to x$.

Σε κάθε περίπτωση το $A \setminus B$ είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 9ο

(α) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική. Αν A, B πυκνά και B ανοικτό, να δειχθεί ότι $A\cap B$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

(β) Υπάρχει $A \in \mathbb{R}$, με την συνήθη μετρική, τέτοιο ώστε κάθε $x\in A$ είναι μεμονωμένο σημείο του A, αλλά το $\mathbb{R}\setminus A$ δεν είναι ανοικτό;

Λύση

(α) Έστω A είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ και B ανοικτό στο $\mathbb{R}$. Έστω $U \subseteq B$ με $U\neq\emptyset$ ανοικτό στο B αν και μόνο αν U είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$.

Ισχύει ότι,

$$U\cap A = (U\cap B)\cap A = U\cap(B\cap A) = U\cap(A\cap B)$$

Όμως το A είναι πυκνό, άρα $U\cap A\neq\emptyset$.

Επίσης,

$$U\cap(A\cap B)\neq\emptyset$$

Άρα δείξαμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μη κενή τομή με το $A\cap B$.

Άρα $A\cap B$ πυκνό στο $\mathbb{R}$.

(β) Θεωρούμε,

$$A=\left\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Κάθε στοιχείο του A είναι μεμονωμένο.

Πράγματι, Έστω ένα τυχαίο στοιχείο του A:

$$x=\frac{1}{n}\in A.$$

Τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ τ.ω. $\left(\frac{1}{n}-\varepsilon, \frac{1}{n}+\varepsilon\right)\cap A=\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

όπου $\varepsilon<\min\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right\}$.

Το $\mathbb{R}\setminus A = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$

που δεν είναι ανοικτό, διότι για το 0 δεν υπάρχει περιοχή που να βρίσκεται εξ' ολοκλήρου μέσα στο $\mathbb{R}\setminus A$.

Θέμα 10ο

Έστω $f:(M,\rho)\to(N,\sigma)$ συνάρτηση με την ιδιότητα ότι απεικονίζει βασικές ακολουθίες του μετρικού χώρου (M,ρ) σε βασικές ακολουθίες του μετρικού χώρου (N,σ).
Είναι η f συνεχής;

Λύση

Όχι πάντα, πρέπει (M,ρ) να είναι πλήρης μετρικός χώρος.
Πράγματι, έστω (M,ρ) πλήρης μετρικός χώρος.
Απαγωγή σε άτοπο
Έστω $x\in M$, υποθέτουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x. Τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ και μία βασική ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο M, άρα ο M είναι πλήρης τότε $\alpha_n\to x$, τέτοια ώστε:

$$\sigma(f(\alpha_n), f(x))>\varepsilon,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Θεωρούμε την:

$$b_n=\begin{cases}\alpha_n, & n \text{ άρτιοι}\\ x, & n \text{ περιττοί}\end{cases}$$

Η $(b_n)_n$ είναι βασική, όμως η $(f(b_n))_n$ δεν είναι βασική, διότι:

$$\sigma(f(b_{2n}), f(b_{2n-1}))=\sigma(f(\alpha_{2n}), f(x))>\varepsilon$$

Οπότε καταλήγουμε σε αντίφαση.

Άρα η $f:(M,\rho)\to(N,\sigma)$ είναι συνεχής αν (M,ρ) πλήρης μετρικός χώρος.