Θέμα 1º

(i)
Έχουμε,

$$y'(t)+y(t)=0$$

$$\overset{e^{\int 1dt}=e^t}{\Longrightarrow} e^t \cdot y'(t)+e^t y(t)=0$$

$$\Longrightarrow (e^t \cdot y(t))'=0$$

$$\Longrightarrow e^t \cdot y(t)=c$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(t)=ce^{-t}}$$

Ισχύει ότι,

$$y(0)=a$$

$$\Longrightarrow ce^{-0}=a$$

$$\Longrightarrow c=a$$

Άρα,

$$y(t)=ae^{-t}$$

Ισχύει ότι,

$$\lim_{t\to+\infty} y(t)=\lim_{t\to+\infty}(\alpha e^{-t})=\alpha\cdot 0=0$$

(ii)

(a) Έχουμε,

$$y'(t)+y(t)=y^2(t)$$

$$\xrightarrow{\cdot y^{-2}(t)} y^{-2}(t)\cdot y'(t)+y^{-1}(t)=1$$

Θέτουμε,

$$z(t)=y^{-1}(t)$$

$$\Rightarrow z'(t)=-y^{-2}(t)\cdot y'(t)$$

Άρα,

$$-z'(t)+z(t)=1$$

$$\Rightarrow z'(t)-z(t)=-1$$

$$\xrightarrow{\cdot e^{\int -1dt}=e^{-t}} e^{-t}z'(t)-e^{-t}z(t)=-e^{-t}$$

$$\Rightarrow \left(e^{-t}z(t)\right)'=-e^{-t}$$

$$\Rightarrow e^{-t}z(t)=\int -e^{-t}dt=e^{-t}+c$$

$$\xrightarrow{\cdot e^{t}} z(t)=ce^{t}+1$$

$$\xrightarrow{z(t)=y^{-1}(t)} y^{-1}(t)=ce^{t}+1$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t)=\frac{1}{ce^{t}+1}} \leftarrow \text{γενική λύση}$$

Η ιδιάζουσα λύση είναι $y(t)=0$.

Ισχύει ότι,

$$y(0)=a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c\cdot e^{0}+1}=a \Rightarrow \frac{1}{c+1}=a$$

$$\xrightarrow{a\neq 0} c+1=\frac{1}{a} \Rightarrow c=1-\frac{1}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{\alpha-1}{\alpha}$$

• <u>για $\alpha \neq 1$ και $\alpha \neq 0$</u>

$$y'(t) = \frac{1}{\frac{\alpha-1}{\alpha}e^{t}+1}$$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\frac{\alpha-1}{\alpha}e^{t}+1} = 0.$$

• <u>για $\alpha=1$</u>

$$y(t) = 1$$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$$

• <u>για $\alpha=0$</u>

Για $y(0)=0$ η γενική λύση δεν δίνει λύση, άρα η λύση είναι η ιδιάζουσα και $y(t)=0$.

Άρα,

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

(Β) Έχουμε ότι,

$$y' + y = y^2$$

$$\Rightarrow y' = y^2 - y = f(x,y)$$

Σε μια περιοχή του $\overset{0,\,y(0)}{(0,a)}$ έχουμε:

$$f(x,y) \approx f(0,\alpha) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,\alpha)\cdot(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,\alpha)(y-a)$$

$$= a^2 - a + 0\cdot(x-0) + (2\alpha-1)\cdot(y-a)$$

$$= \alpha^2 - \cancel{\alpha} + 2\alpha y - 2\alpha^2 - y + \cancel{\alpha}$$

$$= -\alpha^2 + 2\alpha y - y$$

Άρα,

$$y' = f(x,y) \approx -\alpha^2 + 2\alpha y - y$$

$$\Rightarrow y' + y - 2\alpha y = -\alpha^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y' + (1-2\alpha)y = -\alpha^2}$$

Έχουμε ότι,

$$y' + (1-2\alpha)y = -\alpha^2$$

$$e^{\int(1-2\alpha)dt} = e^{(1-2\alpha)t}$$

$$\Rightarrow e^{(1-2\alpha)t}\cdot y' + e^{(1-2\alpha)t}\cdot(1-2\alpha)y = -\alpha^2\cdot e^{(1-2\alpha)t}$$

$$\Rightarrow \left(e^{(1-2\alpha)t}\cdot y(t)\right)' = -\alpha^2\cdot e^{(1-2\alpha)t}$$

$$\Rightarrow e^{(1-2\alpha)t}\cdot y(t) = \int\left(-\alpha^2\cdot e^{(1-2\alpha)t}\right)dt$$

$$= -\frac{\alpha^2}{1-2\alpha}e^{(1-2\alpha)t} + c$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = c\cdot e^{(2\alpha-1)t} - \frac{\alpha^2}{1-2\alpha}}$$

Ισχύει ότι,

$$y(0) = \alpha$$

$$\Rightarrow c \cdot e^{(2\alpha-1)\cdot 0} - \frac{\alpha^2}{1-2\alpha} = \alpha$$

$$\Rightarrow c = \alpha + \frac{\alpha^2}{1-2\alpha} = \frac{\alpha - 2\alpha^2 + \alpha^2}{1-2\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{\alpha - \alpha^2}{1-2\alpha}}$$

Άρα,

$$y(t) = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{1-2\alpha} e^{(2\alpha-1)t} - \frac{\alpha^2}{1-2\alpha}$$

Άρα για $\alpha \neq \frac{1}{2}$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \begin{cases} -\infty, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 1, & \alpha = 1 \\ \frac{\alpha^2}{2\alpha-1}, & \alpha \in (0, \frac{1}{2}) \\ 0, & \alpha = 0 \\ \frac{\alpha^2}{2\alpha-1}, & \alpha < 0 \end{cases}$$

Άρα για $\alpha = \frac{1}{2}$

Έχουμε,

$$y' = -\frac{1}{4} \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{4}t + c$$

Όμως,

$$y(0) = \frac{1}{2}$$

Θέμα 2ο

Έχουμε ότι,

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{1}{2}(1-x^2) \end{cases}$$

Εύρεση Σημείων Ισορροπίας

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{1}{2}(1-x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Τα σημεία ισορροπίας είναι $(1,0)$ και $(-1,0)$.

Θέτουμε,

- $f_1(x,y) = y$
- $f_2(x,y) = \frac{1}{2}(1-x^2)$

Ο Ιακωβιανός πίνακας της $\vec{F}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ είναι:

$$J_{\vec{F}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x & 0 \end{pmatrix}$$

Για το $(1,0)$:

$$J_F(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Γραμμικοποιημένο Σύστημα:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = i \text{ ή } \lambda_2 = -i$$

Άρα το $(1,0)$ είναι κέντρο.

<u>Για το $(-1,0)$</u> :

$$J_F(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Γραμμικοποιημένο Σύστημα</u> :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

<u>Ιδιοτιμές B</u>

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda_1 = 1 \text{ ή } \lambda_2 = -1$$

Αφού $\lambda_1 > 0$ και $\lambda_2 < 0$, το σημείο ισορροπίας $(-1,0)$ είναι σάγμα, άρα ασταθές.

Από το Θεώρημα γραμμικοποίησης, το $(-1,0)$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας του αρχικού συστήματος.

Θέμα 3º

(α)

Θέτουμε,

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = y' \\ y_2' = y'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4\mu y' - 81 y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4\mu y_2 - 81 y_1 \end{cases}$$

Σημεία Ισορροπίας

$$\begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ -4\mu y_2 - 81 y_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

Άρα το σημείο ισορροπίας είναι το $(0,0)$.

(β)

Ο πίνακας του συστήματος είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -81 & -4\mu \end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμές

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -81 & -4\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4\mu\lambda + \lambda^2 + 81 = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + 4\mu\lambda + 81 = 0$

$\Delta = (4\mu)^2 - 4\cdot 81 = 4\cdot(4\mu^2 - 81)$

• $\Delta > 0 \Leftrightarrow \mu \in (-\infty, -\frac{9}{2}) \cup (\frac{9}{2}, +\infty)$

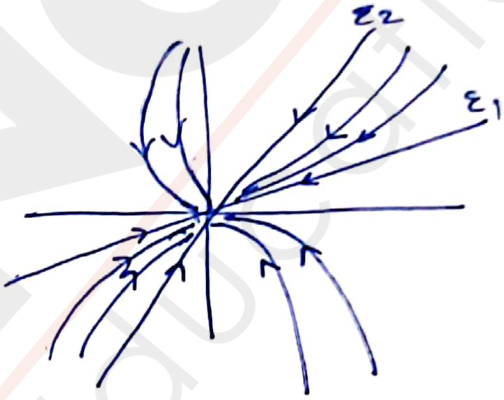
$$\lambda_{1,2} = \frac{-4\mu \pm \sqrt{4\cdot(4\mu^2-81)}}{2} = -2\mu \pm \sqrt{4\mu^2-81}$$

Άρα,

$\lambda_1 = -2\mu - \sqrt{4\mu^2-81} < 0$

$\lambda_2 = -2\mu + \sqrt{4\mu^2-81} < 0$

(διότι $-2\mu + \sqrt{4\mu^2-81} < 0$
$\sqrt{4\mu^2-81} < 2\mu$
$4\mu^2 - 81 < 4\mu^2$
$-81 < 0$)



Άρα το σ.ι. είναι ευσταθής κόμβος.

• $\Delta = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{9}{2}$ ή $\mu = -\frac{9}{2}$

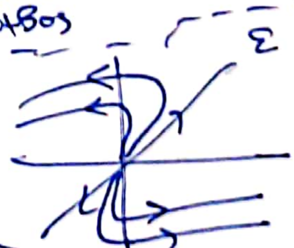
- $\mu = \frac{9}{2}$

$\lambda = -9 < 0$, διπλή

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -81 & -18 \end{pmatrix}$, έχει ένα ιδιοδιάνυσμα το $(-1, 9)$, άρα είναι ευσταθής νόθος κόμβος

- $\mu = -\frac{9}{2}$ $\lambda = 9 > 0$, διπλή

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -81 & 18 \end{pmatrix}$, έχει ένα ιδιοδιάνυσμα το $(1, 9)$, άρα είναι ασταθής νόθος κόμβος



• $\Delta < 0 \Leftrightarrow \mu \in (-\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$

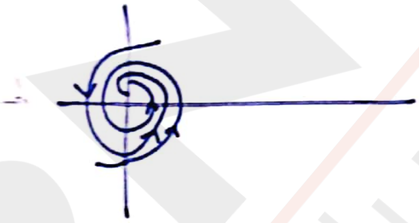
$$\lambda_{1,2} = \frac{-4\mu \pm i\sqrt{4\cdot(81-4\mu^2)}}{2} = -2\mu \pm i\sqrt{81-4\mu^2}$$

- $\mu \in \left(-\frac{9}{2}, 0\right)$

$Re(\lambda_{1,2}) > 0$, άρα το σημείο ισορροπίας είναι ασταθής εστία

- $\mu \in \left(0, \frac{9}{2}\right)$

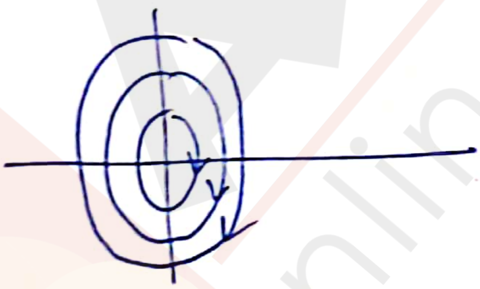
$Re(\lambda_{1,2}) < 0$, άρα το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθής εστία



- $\mu = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{81} = \pm 9i$

Άρα το σημείο ισορροπίας είναι κέντρο



Έχουμε οικογένεια ελλείψεων.

(γ)

Οι τιμές διακλάδωσης είναι $t_1=-\frac{9}{2}$, $t_2=0$, $t_3=\frac{9}{2}$.

Στις τιμές αυτές αλλάζει η φύση του σημείου ισορροπίας.

$\left(-\infty,-\frac{9}{2}\right)$ ευσταθής κόμβος

$\left(-\frac{9}{2},0\right)$ ασταθής εστία

$\left(0,\frac{9}{2}\right)$ ευσταθής εστία

$\left(\frac{9}{2},+\infty\right)$ ευσταθής κόμβος

(δ)

για $t=0$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -81y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = y_2' \\ y_1' = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = -81y_1 \\ y_1' = y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1''+81y_1=0 \\ y_1' = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = c_1\cos(9t)+c_2\sin(9t) \\ y_2 = -9c_1\sin(9t)+9c_2\cos(9t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(0)=1 \\ y_2(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=0 \end{cases}$$

Άρα,

$y_1(t)=\cos(9t)$

$y_2(t)=-9\sin(9t)$.

Άρα,

$$\frac{y_1^2(t)}{1^2} + \frac{y_2^2(t)}{9^2} = 1$$

Όποτε έχουμε έλλειψη, που επιβεβαιώνεται από την περίπτωση των μιγαδικών ιδιοτιμών στο ερώτημα (β).

Θέμα 4ο

Έχουμε ότι,

- $\left|f_1(z)\right| \leq \frac{|z|}{2}$

για $z=0 \rightarrow |f_1(0)| \leq 0 \Rightarrow f_1(0)=0$

- $\left|f_2(z)\right| \leq \frac{|z|}{2}$

για $z=0 \rightarrow |f_2(0)| \leq 0 \Rightarrow f_2(0)=0$

Σημεία Ισορροπίας

$$\begin{cases} x'=0 \\ y'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+f_1(y)=0 \\ -y+f_2(x)=0 \end{cases}$$

Το $(0,0)$ επαληθεύει το σύστημα, διότι $f_1(0)=f_2(0)=0$.
Άρα το $(0,0)$ είναι σημείο ισορροπίας.

Θεωρούμε,

- $V(x,y)=x^2+y^2$

- $\frac{dV}{dt}=2xx'+2yy'=2x\cdot(-x+f_1(y))+2y\cdot(-y+f_2(x))$

$$\overset{|f_j(z)|\leq\frac{|z|}{2}}{\leq} 2x\cdot\left(-x+\frac{y}{2}\right)+2y\cdot\left(-y+\frac{x}{2}\right)$$

$$=-2x^2+xy-2y^2+xy$$

$$=-1\cdot(x^2+y^2)-(x-y)^2$$

$$\leq -1\cdot(x^2+y^2)$$

$$=-1\cdot V(x)$$

Άρα $\frac{dV}{dt} \leq -1 \cdot V(x)$

Άρα $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{M \cdot N}$ τ.ω. αν $\|X(0,0)\| < \delta$, τότε

$\|X\| = \|(x,y) - (0,0)\| \leq M \cdot e^{-\frac{\gamma t}{2}} \|X(0,0)\| \leq$

$\leq M \cdot N \cdot \delta < M \cdot N \cdot \frac{\varepsilon}{M \cdot N} = \varepsilon$

Άρα το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές

Το $e^{-\frac{\gamma t}{2}} \leq N$, διότι είναι φθίνουσα συνάρτηση και κοντά στο $(0,0)$ φράσσεται.

Θέμα 5ο

Έχουμε ότι,

$$\left|\frac{\partial H}{\partial x}(x,p)\right| \leq c\cdot\sqrt{|p|^2+1}$$

από το σύστημα $\Rightarrow$ $|p'| \leq c\cdot\sqrt{|p|^2+1}$

Θέτωντας $p=\sinh(u)$, $p'=\cosh(u)\cdot u'$ $\Rightarrow$ $|\cosh(u)\cdot u'| \leq c\cdot\sqrt{|\sinh(u)|^2+1}$

$$\Rightarrow |\cosh(u)\cdot u'| \leq c\cdot\sqrt{\sinh^2 u+1}$$

$$\Rightarrow |\cosh(u)||u'| \leq c\sqrt{\cosh^2 u}$$

$$\Rightarrow |\cancel{\cosh(u)}|\cdot|u'| \leq c\cdot|\cancel{\cosh u}|$$

$$\Rightarrow |u'| \leq c$$

$$\Rightarrow \int_0^t |u'|\,dt \leq \int_0^t c\,dt$$

$$\Rightarrow |u(t)-u(0)| \leq c\cdot t \Rightarrow |u(t)-\operatorname{arcsinh}(p(0))| \leq ct$$

$$\Rightarrow |u(t)-\operatorname{arcsinh}(\xi)| \leq ct$$

Άρα u πεπερασμένη για $t\in\mathbb{R}$, άρα p πεπερασμένη για $t\in\mathbb{R}$.

Έχουμε ότι,

$$\left|\frac{\partial H}{\partial p}(x,p)\right| \leq c$$

από το σύστημα $\Rightarrow$ $|x'| \leq c$

$$\Rightarrow \int_0^t |x'|\,dt \leq \int_0^t c\,dt \Rightarrow |x(t)-x(0)| \leq c\,t$$

$\Rightarrow |x(t)-y| \leq c \cdot t$

Άρα x πεπερασμένη για $t \in \mathbb{R}$.

Θέμα 6ο

(α) $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx - \lambda x^2 - \mu xy = 0 \\ vy - \xi y^2 + \rho xy = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot (k - \lambda x - \mu y) = 0 \\ y \cdot (v - \xi y + \rho x) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} k - \lambda x - \mu y = 0 \\ v - \xi y + \rho x = 0 \end{cases}$ (2)

<u>Θα λύσω το σύστημα (2)</u>

$\begin{cases} \lambda x + \mu y = k \\ -\rho x + \xi y = v \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ -\rho & \xi \end{vmatrix} = \lambda\xi + \mu\rho > 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} k & \mu \\ v & \xi \end{vmatrix} = k\xi - \mu v < 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & k \\ -\rho & v \end{vmatrix} = \lambda v + k\rho > 0$$

άρα

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{k\xi - \mu v}{\lambda\xi + \mu\rho} < 0$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda v + k\rho}{\lambda\xi + \mu\rho} > 0$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο, διότι $x \geq 0$ και $y \geq 0$

Το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι:

$$(0,0)$$

(β)

Θέτουμε,

$$f_1(x,y) = kx - \lambda x^2 - \mu xy$$
$$f_2(x,y) = vy - \xi y^2 + \rho xy$$

$$\vec{F} = (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

Ιακωβιανός Πίνακας

$$J_{\vec{F}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k - 2\lambda x - \mu y & -\mu x \\ \rho x & v - 2\xi y + \rho x \end{pmatrix}$$

για το $(0,0)$

$$J_{\vec{F}}(0,0) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = k > 0$ και $\lambda_2 = v > 0$.
Άρα το $(0,0)$ είναι ασταθής κόμβος.
Όσο περνάει ο χρόνος οι πληθυσμοί δεν θα τείνουν να εξαφανιστούν και να έχουμε $x(t)=0$ και $y(t)=0$.

(δ)
Αν $\kappa\zeta > \mu\nu$, τότε έχουμε άλλο ένα σημείο ισορροπίας:

$$\Big(\underbrace{\frac{\kappa\zeta-\mu\nu}{\lambda\zeta+\mu\rho}}_{x_0}, \underbrace{\frac{\lambda\nu+\kappa\rho}{\lambda\zeta+\mu\rho}}_{y_0}\Big)$$

Για το (x_0,y_0):

$$A = J_{\vec{F}}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \kappa-2\lambda x_0-\mu y_0 & -\mu x_0 \\ \rho x_0 & \nu-2\zeta y_0+\rho x_0 \end{pmatrix}$$

Για να είναι ευσταθές το σημείο ισορροπίας, πρέπει οι ιδιοτιμές να είναι αρνητικές.
Ισχύει ότι:

- $\lambda_1+\lambda_2 = tr(A)$
- $\lambda_1\cdot\lambda_2 = det(A)$

Για να είναι αρνητικές πρέπει

$$\begin{cases} tr(A)<0 \\ det(A)>0 \end{cases}$$

Άρα είναι εφικτή και ευσταθής η κατάσταση όπου οι γάτες και τα ποντίκια ζουν σε ισορροπία.