

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση και το υποβάλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφο του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια, την υποβάλει με τη σειρά του στο study.eap.gr Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφο της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση)			
Κωδικός Θ.Ε.	ΦΥΕ 20	Όνοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής	17-11-2021 Τετάρτη
Ακ. Έτος	2021-22	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α Γ.Ε.	1	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΟΧΙ

Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)	
--	--

Υπογραφή

Καθηγητή-Συμβούλου

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Γενικά Μαθηματικά II – ΦΥΕ 20 Ακαδημαϊκό Έτος 2021-2022 1^η Γραπτή Εργασία

Ημερομηνία Ανάρτησης: 7 Οκτωβρίου 2021

Καταληκτική Ημερομηνία Υποβολής: 17 Νοεμβρίου 2021 (καταληκτική)

Η τέταρτη γραπτή εργασία πρέπει να σταλεί στον Σύμβουλο Καθηγητή σας αναρτώντας την στη διεύθυνση <http://study.eap.gr>

Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. Προτού αποστείλετε την εργασία στο Σύμβουλο Καθηγητή σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής που βρίσκεται στη πρώτη σελίδα αυτού του αρχείου.
2. Η εργασία σας μπορεί να γραφεί ηλεκτρονικά και σε ειδικές περιπτώσεις χειρόγραφα. Οι εργασίες σας θα πρέπει οπωσδήποτε να αποστέλλονται στον Καθηγητή σας σε μορφή **ενιαίου αρχείου Pdf**.
3. Η 1^η Γραπτή Εργασία περιλαμβάνει εννέα ασκήσεις στις οποίες πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.
4. Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε τη μελέτη της θεωρίας και των παραδειγμάτων του βιβλίου σας «Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών» καθώς και την επίλυση των ασκήσεων από το εναλλακτικό διδακτικό υλικό σας. Επίσης θα πρέπει να μελετήσετε τις αντίστοιχες γραπτές εργασίες και τα θέματα των εξετάσεων των προηγούμενων ετών. Το έντυπο και εναλλακτικό διδακτικό υλικό σας έχει αναρτηθεί στο arthesis ενώ τις γραπτές εργασίες και τα θέματα των εξετάσεων θα τις βρείτε (με την χρήση των κωδικών σας) στη διεύθυνση <http://study.eap.gr> ακολουθώντας το menu ΦΥΕ20 – Γενικά Μαθηματικά II > Συμπληρωματικό Υλικό.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι:

- η εξοικείωση με την έννοια της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (σ.δ.ε.), την λύση της (παραμετρική οικογένεια καμπύλων) καθώς και με το πρόβλημα των αρχικών τιμών της
- η κατανόηση των μεθόδων επίλυσης των δ.ε. 1ης τάξης και ιδιαίτερα των :
 - δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών
 - των ομογενών δ.ε.
 - των Γραμμικών δ.ε.
 - των δ.ε. ολικού διαφορικού (πλήρεις ή ακριβείς)
 - των δ.ε. Bernoulli (1667-1748)
 - των δ.ε. Ricatti (1676-1754)
- η εφαρμογή των δ.ε. στην επίλυση προβλημάτων

Οι ασκήσεις της 1^{ης} εργασίας αναφέρονται στα:

- Κεφάλαιο 1, Κεφάλαιο 2 του συγγράμματος «Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών» των W.E. Boyce, R.C. DiPrima, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π.
- Κεφάλαια 1,2,3 του ΕΔΥ

Στις σελίδες που ακολουθούν θα βρείτε τις εκφωνήσεις των Ασκήσεων της 1^{ης} Γραπτής Εργασίας καθώς και τις μονάδες βαθμολόγησης της κάθε άσκησης. Το άριστα για το σύνολο της εργασίας είναι οι 100 μονάδες.

Καλή επιτυχία.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

1^η Γραπτή Εργασία

Πρόγραμμα: Σπουδές στις Φυσικές Επιστήμες

Θεματική Ενότητα : Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης : 17-11-2021 (Τετάρτη)

Διαβάσετε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε άσκησης. Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Γράψτε τις λύσεις κάτω από τις εκφωνήσεις των Ασκήσεων.

Άσκηση 1^η (15 μονάδες)

Με την χρήση της μεθόδου των χωριζόμενων μεταβλητών να λυθούν :

(i) [5-μονάδες] η συνήθης διαφορική εξίσωση (σ.δ.ε.)

$$xy(1+x^2)y' = 1+y^2, \quad x \in (0,1), \quad y = y(x) \in (0,+\infty).$$

(ii) [10-μονάδες] το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Άσκηση 2^η (10 μονάδες)

Δίνεται το ακόλουθο Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ.)

$$\begin{cases} 2xyy' = x^2 + 3y^2, \quad x \neq 0, \quad y = y(x), & (1) \\ y(1) = 1, & (2). \end{cases}$$

(i) [2-μονάδες] Αποδείξτε ότι η (1) αποτελεί μια δ.ε. ομογενή ως προς τις μεταβλητές της.

(ii) [8-μονάδες] Λύστε το Π.Α.Τ. (2) και προσδιορίστε το μέγιστο πεδίο ορισμού της λύσης.

Άσκηση 3^η (7 μονάδες)

Εξετάστε αν η συνήθης δ.ε.

$$2xy + (1+x^2)y' = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y = y(x)$$

είναι ακριβής (ή πλήρης) και στην συνέχεια επιλύστε την. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα σας επιλύοντας την δοθείσα δ.ε. και με την μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών.

Άσκηση 4^η (15 μονάδες)

Δίνεται το ακόλουθο Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ.)

$$\begin{cases} (x^2 - y^2 + y)y' + x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y = y(x), & (1) \\ y(2) = 1, & (2) \end{cases}$$

(i) [5-μονάδες] Αποδείξτε ότι η δ.ε. (1) δεν είναι πλήρης (ή ακριβής) και στη συνέχεια προσδιορίστε ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $f(y)$.

(ii) [10-μονάδες] Να λυθεί το παραπάνω Π.Α.Τ.

Άσκηση 5^η (10 μονάδες)

Να λυθεί το ακόλουθο Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ.)

$$\begin{cases} (1-x^2)y' - xy = 1, & x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}, y = y(x), & (1) \\ y(0) = 0, & & (2). \end{cases}$$

Άσκηση 6^η (10 μονάδες)

Να βρεθεί η γενική λύση της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης

$$(x+1)^2 y' + 2x(x+1)^2 y + xe^{x^2} y^2 = 0, \quad x > -1, y = y(x).$$

Άσκηση 7^η (15 μονάδες)

Δίνεται η σ.δ.ε.

$$xy' = y^2 + y - 6, \quad x > 0, y = y(x) \quad (1).$$

(i) [3-μονάδες] Να υπολογιστεί η τιμή της σταθερής συνάρτησης $y_1=c$, $c \in \mathbb{R}$, ώστε αυτή να αποτελεί μια λύση της (1)

(ii) [12-μονάδες] Να βρεθεί η γενική λύση της (1).

Άσκηση 8^η (8 μονάδες)

Ο πληθυσμός $N(t)$, όπου t είναι ο χρόνος, κάποιου βιολογικού είδους (αμοιβάδες, άνθρωποι, δεινόσαυροι κ.λ.π.) μεταβάλλεται σύμφωνα με την ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$N'(t) = aN(t) + bN^2(t), \quad \text{όπου } a, b \text{ θετικές σταθερές παράμετροι,} \quad (1).$$

Η διαφορική εξίσωση (1) λέγεται αυτόνομη εξίσωση διότι η εξέλιξή της καθορίζεται από αυτό καθαυτό το μέγεθος του πληθυσμού $N(t)$. Να βρεθεί η γενική λύση της (1).

Άσκηση 9^η (10 μονάδες)

Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης με αρχική ταχύτητα v_0 . Υποθέτουμε ότι η μοναδική δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το βάρος του

$$w(x) = \frac{mgR^2}{(x+R)^2},$$

όπου, g είναι η βαρυτική σταθερά, R η ακτίνα της Γης και x η απόσταση του σώματος από την επιφάνεια της Γης (δηλαδή, λαμβάνουμε υπόψη μόνο την μεταβολή του βαρυτικού πεδίου της Γης με το ύψος, υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει τριβή του αέρα).

Να υπολογιστεί η ταχύτητα διαφυγής του σώματος (δηλαδή, η μικρότερη αρχική ταχύτητα που θα πρέπει να έχει το σώμα για να μην επιστρέψει στην Γη).