1η Γραπτή Εργασία ΠΛΗ 30

2021-2022

Συνεδρία 1 | 13/11/2021

ΑΡΝΟΣ Online Education

Ερώτημα 1

(A) Έστω f, g μη αρνητικές πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(n) + g(n) = \Theta\left(\max\{f(n), g(n)\}\right)$.

Συμβολισμός Θ – αντιστοιχεί στο =

$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists\, c_1, c_2, n_0 > 0,$ *τέτοια ώστε* $c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n),\ \forall\, n \ge n_0\}$

Πρακτικά: Γράφουμε $f(n) = \Theta(g(n))$ αν η f φράσσεται ανάμεσα σε δύο πολλαπλάσια της g για μεγάλα n – από κάποιο n_0 και πάνω

1) $c_1 \max\{f(n), g(n)\} \le f(n) + g(n) \le c_2 \max\{f(n), g(n)\}$

- $f(n) \le \max\{f(n), g(n)\}$
  $g(n) \le \max\{f(n), g(n)\}$ $\Rightarrow f(n) + g(n) \le 2 \cdot \max\{f(n), g(n)\}$

$\forall n \ge 1$

- αν $\max\{f(n), g(n)\} = f(n) \Rightarrow f(n) \le f(n) + g(n)$

  αν $\max\{f(n), g(n)\} = g(n) \Rightarrow g(n) \le f(n) + g(n)$

$c_1 = 1$

2. Να αποδείξετε ότι $f(n) + g(n) = \Omega\left(\min\{f(n), g(n)\}\right)$. Ποια ασυμπτωτική σχέση αρκεί να ισχύει μεταξύ των f, g για να ισχύει επιπλέον $f(n) + g(n) = O\left(\min\{f(n), g(n)\}\right)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας δίνοντας μια κατάλληλη απόδειξη.

$$\left.\begin{aligned} \alpha(n) &= \Omega(\beta(n)) \\ \alpha(n) &= O(\beta(n)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha(n) = \Theta(\beta(n))$$

ΑΡΝΟΣ Online Education

3. Αν $0 < g(n) \leq f(n) \leq g(n) + 1$, για κάθε $n \geq 1$, να αποδείξετε ότι δεν ισχύει αναγκαστικά $f(n) = \Theta(g(n))$, δίνοντας ένα κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

$g(n) \leq f(n) \leq g(n) + 1$

$g(n) = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} \leq \underbrace{\frac{1}{n} + 1}_{f(n)} \leq \frac{1}{n} + 1 \quad , n \geq 1$

$f(n) = \Theta(1)$

$g(n) = o(1)$

{ όχι ίδιας τάξης

Αν $g(n) \nearrow$, $g(n) + 1 = \Theta(g(n))$

$$\frac{g(n)+1}{g(n)} = 1 + \overset{\to 0}{\frac{1}{g(n)}} = 1$$

(B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(n) = 1^1 + 2^2 + \cdots + n^n = \sum_{i=1}^{n} i^i$, με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, ικανοποιεί τη σχέση $f(n) = \Theta(n^n)$.

Συμβολισμός Θ – αντιστοιχεί στο $=$

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists\, c_1,\, c_2, n_0 > 0, \text{ τέτοια ώστε } c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n),\ \forall\, n \ge n_0\}$$

Πρακτικά: Γράφουμε $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$ αν η f φράσσεται ανάμεσα σε δύο πολλαπλάσια της g για μεγάλα n – από κάποιο n_0 και πάνω

$$1^1 + 2^2 + \cdots + n^n \le \underbrace{n^n + n^n + n^n \cdots + n^n}_{n} = n \cdot n^n \ne \Theta(n^n)$$

Δεν έπιασε

(B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(n) = 1^1 + 2^2 + \cdots + n^n = \sum_{i=1}^{n} i^i$, με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, ικανοποιεί τη σχέση $f(n) = \Theta(n^n)$.

Συμβολισμός Θ – αντιστοιχεί στο $=$

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists\, c_1,\, c_2, n_0 > 0,\ \text{τέτοια ώστε}\ c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n),\ \forall\, n \ge n_0\}$$

Πρακτικά: Γράφουμε $f(n) = \Theta(g(n))$ αν η f φράσσεται ανάμεσα σε δύο πολλαπλάσια της g για μεγάλα n – από κάποιο n_0 και πάνω

ΑΝΩ ΦΡΑΓΜΑ

$$1^1 + 2^2 + \cdots + n^n \le n^1 + n^2 + n^3 + \cdots + n^n$$

$\underline{n=2}$ $\quad 1^1 + 2^2 \le 2^1 + 2^2$

$\underline{n=3}$ $\quad 1^1 + 2^2 + 3^3 \le 3^1 + 3^2 + 3^3$

$\cdot\lambda \quad \cdot\lambda$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$

$3, 6, 12, 24, \ldots$

$n,\ n \cdot n = n^2,\ n^2 \cdot n = n^3$

$\underline{\gamma.\pi}$ $\quad \alpha_1 = n$

$\lambda = n$

$$\boxed{S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}}$$

$$n + n^2 + \cdots + n^n = n \cdot \frac{n^n - 1}{n-1}$$

$n \ge 2$

$$1^1 + 2^2 + \cdots + n^n \le \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\le 2} \cdot (n^n - 1) \le 2 \cdot (n^n - 1) = 2 \cdot n^n - 2 \le 2 \cdot n^n$$

ΑΡΝΟΣ Online Education

(B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(n) = 1^1 + 2^2 + \cdots + n^n = \sum_{i=1}^{n} i^i$, με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, ικανοποιεί τη σχέση $f(n) = \Theta(n^n)$.

Συμβολισμός Θ – αντιστοιχεί στο $=$

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists\, c_1, c_2, n_0 > 0, \text{ τέτοια ώστε } c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n),\ \forall\, n \ge n_0\}$$

Πρακτικά: Γράφουμε $f(n) = \Theta(g(n))$ αν η f φράσσεται <u>ανάμεσα</u> σε δύο πολλαπλάσια της g για μεγάλα n – από κάποιο n_0 και πάνω

Κάτω φράγμα

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n \geq 1 \cdot n^n$$

για $n \geq 1$

$n = 1$ $\quad 1^1 \geq 1^1$

$n = 2$ $\quad 1^1 + 2^2 \geq 2^2$

$n = 3$ $\quad 1^1 + 2^2 + 3^3 \geq 3^n$

$n \geq 2$

$$\frac{n}{n-1} \leq 2 \iff \cancel{(n-1)} \cdot \frac{n}{\cancel{n-1}} \leq 2 \cdot (n-1) \iff$$

$$\iff n \leq 2n - 2 \iff$$

$$\iff 2 \leq 2n - n$$

$$\iff n \geq 2$$

(Γ) Διατάξτε τις παρακάτω συναρτήσεις, σε αύξουσα σειρά, ως προς τον ρυθμό αύξησής τους:

$f_1(n) = 3^{1.5n}, f_2(n) = (3^n)^2, f_3(n) = n^{10\log_2 n}, f_4(n) = (\log_2 n)^{(\log_2 n)^2}, f_5(n) = n^{100}$.

$$f_1(n) = 3^{1.5 \cdot n} = \left(3^{1.5}\right)^n = (5.19)^n$$

$$f_2(n) = \left(3^n\right)^2 = 3^{2n} = \left(3^2\right)^n = 9^n$$

$$f_3(n) = n^{10 \log n}$$

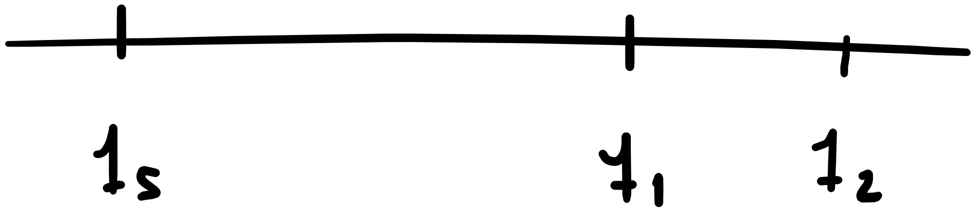
$$f_4(n) = (\log n)^{(\log n)^2}$$

$$f_5(n) = n^{100}$$

$$\left(\alpha^{\kappa}\right)^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$$

$$\left(\alpha^{\kappa}\right)^{\lambda} = \left(\alpha^{\lambda}\right)^{\kappa}$$

$$\alpha^{\kappa \cdot \lambda} \qquad \alpha^{\lambda \cdot \kappa}$$



(Γ) Διατάξτε τις παρακάτω συναρτήσεις, σε αύξουσα σειρά, ως προς τον ρυθμό αύξησής τους:

$f_1(n) = 3^{1.5n}, f_2(n) = (3^n)^2, f_3(n) = n^{10\log_2 n}, f_4(n) = (\log_2 n)^{(\log_2 n)^2}, f_5(n) = n^{100}$.

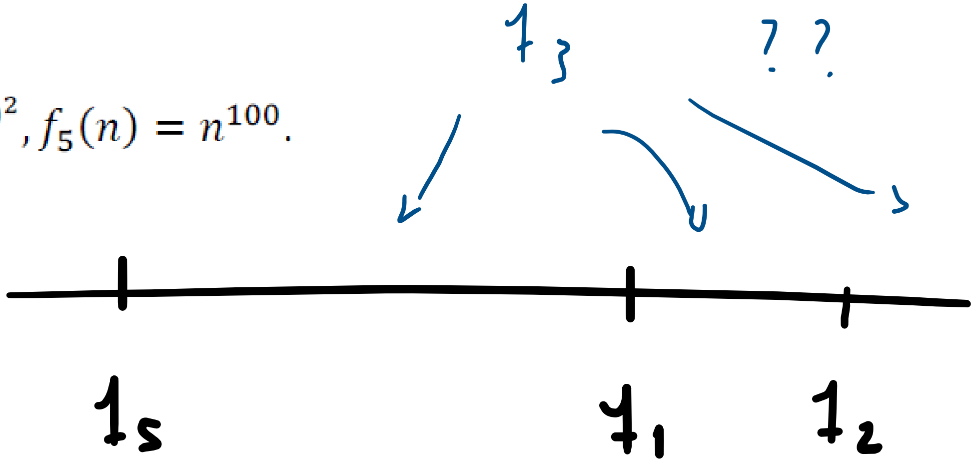
$f_1(n) = 3^{1.5\cdot n} = (3^{1.5})^n = (5.19)^n$ ✓

$f_2(n) = (3^n)^2 = 3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$ ✓

$f_3(n) = n^{10\log n}$

$f_4(n) = (\log n)^{(\log n)^2}$

$f_5(n) = n^{100}$ ✓



$f_5 \ll f_3$

δηλ. $100 \ll 10\cdot\log n \Rightarrow$

$n^{100} \ll n^{10\cdot\log n}$

$\log a^{\kappa} = \kappa \cdot \log a$

(Γ) Διατάξτε τις παρακάτω συναρτήσεις, σε αύξουσα σειρά, ως προς τον ρυθμό αύξησής τους:

$f_1(n) = 3^{1.5n}, f_2(n) = (3^n)^2, f_3(n) = n^{10\log_2 n}, f_4(n) = (\log_2 n)^{(\log_2 n)^2}, f_5(n) = n^{100}.$

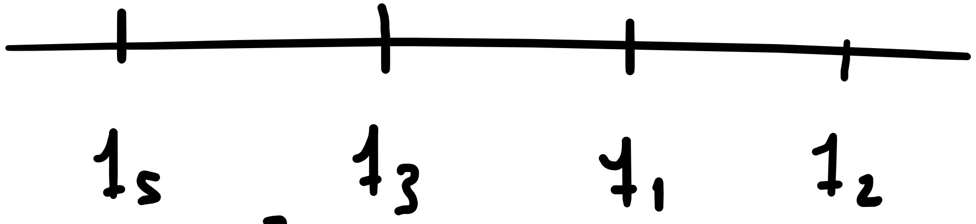
$f_1(n) = 3^{1.5\cdot n} = \left(3^{1.5}\right)^n = (5.19)^n$ ✓

$f_2(n) = \left(3^n\right)^2 = 3^{2n} = \left(3^2\right)^n = 9^n$ ✓

$f_3(n) = n^{10\log n}$ ✓

$f_4(n) = (\log n)^{(\log n)^2}$

$f_5(n) = n^{100}$ ✓



$f_5 \ll f_3 \ll f_1$

- $\log f_1(n) = \log (5.19)^n = n \cdot \log 5.19 = \Theta(n)$
- $\log f_3(n) = \log n^{10\log n} = 10\log n \cdot \log n = 10\log^2 n = \Theta(\log^2 n)$

$\log a^{k} = k \cdot \log a$

ΑΡΝΟΣ Online Education

(Γ) Διατάξτε τις παρακάτω συναρτήσεις, σε αύξουσα σειρά, ως προς τον ρυθμό αύξησής τους:

$f_1(n) = 3^{1.5n}, f_2(n) = (3^n)^2, f_3(n) = n^{10\log_2 n}, f_4(n) = (\log_2 n)^{(\log_2 n)^2}, f_5(n) = n^{100}.$

$f_1(n) = 3^{1.5 \cdot n} = \left(3^{1.5}\right)^n = (5.19)^n$ ✓

$f_2(n) = (3^n)^2 = 3^{2n} = \left(3^2\right)^n = 9^n$ ✓

$f_3(n) = n^{10\log n}$ ✓

$f_4(n) = (\log n)^{(\log n)^2}$

$f_5(n) = n^{100}$ ✓

f_4 . ??

$f_5 \quad f_3 \quad f_1 \quad f_2$

f_3, f_4

$\log f_3(n) = \log n^{10\log n} = 10\log n \cdot \log n = \Theta(\log^2 n)$

$\log f_4(n) = \log (\log n)^{(\log n)^2} = \log^2 n \cdot \log(\log n)$

$f_4 >> f_3$

$\log a^{k} = k \cdot \log a$

ΑΡΝΟΣ Online Education

(Γ) Διατάξτε τις παρακάτω συναρτήσεις, σε αύξουσα σειρά, ως προς τον ρυθμό αύξησής τους:

$f_1(n) = 3^{1.5n}, f_2(n) = (3^n)^2, f_3(n) = n^{10\log_2 n}, f_4(n) = (\log_2 n)^{(\log_2 n)^2}, f_5(n) = n^{100}.$

$f_1(n) = 3^{1.5 \cdot n} = \left(3^{1.5}\right)^n = (5.19)^n$ ✓

$f_2(n) = \left(3^n\right)^2 = 3^{2n} = \left(3^2\right)^n = 9^n$ ✓

$f_3(n) = n^{10 \log n}$ ✓

$f_4(n) = (\log n)^{(\log n)^2}$

$f_5(n) = n^{100}$ ✓

$f_5 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_1 \quad f_2$

$f_4 \,??\, f_1$

$f_4 << f_1$

$f_4 >> f_3$

$\log f_4(n) = \Theta\left(\log^2 n \cdot \log(\log n)\right)$

$\log f_1(n) = \log 5.19^n = n \cdot \log 5.19 = \Theta(n)$

Μια ομάδα μηχανικών υπολογιστών που εργάζονται στην εταιρεία DataBite προσπαθεί να εφεύρει νέους αλγόριθμους ανάλυσης μεγάλου όγκου χρηματιστηριακών και τραπεζικών δεδομένων που περιήλθαν στην κατοχή τους. Συγκεκριμένα, έχουν αναπτύξει πέντε αλγορίθμους «διαίρει και βασίλευε» με τα εξής χαρακτηριστικά:

- Ο αλγόριθμος A_1 διασπά το αρχικό πρόβλημα μεγέθους *n* σε τρία υποπροβλήματα μεγέθους *n/3, n/6* και *n/9*, τα επιλύει και στη συνέχεια συνθέτει τις λύσεις τους σε χρόνο *n*.
  - $T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{6}\right) + T\left(\frac{n}{9}\right) + n$
- Ο αλγόριθμος A_2 διασπά το αρχικό πρόβλημα μεγέθους *n* σε 6 υποπροβλήματα μεγέθους *n/6*, τα επιλύει και στη συνέχεια συνθέτει τις λύσεις τους σε χρόνο 6*n*.
  - $T(n) = 6 \cdot T\left(\frac{n}{6}\right) + 6n$
- Ο αλγόριθμος A_3 διασπά το αρχικό πρόβλημα μεγέθους *n* σε 256 υποπροβλήματα μεγέθους *n/4*, τα επιλύει και στη συνέχεια συνθέτει τις λύσεις τους σε χρόνο $8n^4$.
  - $T(n) = 256 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + 8n^4$
- Ο αλγόριθμος A_4 διασπά το αρχικό πρόβλημα μεγέθους *n* σε 49 υποπροβλήματα μεγέθους *n/343*, τα επιλύει και στη συνέχεια συνθέτει τις λύσεις τους σε χρόνο $5n^2$.
  - $T(n) = 49 \cdot T\left(\frac{n}{343}\right) + 5n^2$
- Ο αλγόριθμος A_5 διασπά το αρχικό πρόβλημα μεγέθους *n* σε 625 υποπροβλήματα μεγέθους *n/125*, τα επιλύει και στη συνέχεια συνθέτει τις λύσεις τους σε χρόνο $10n^{5/4}$.
  - $T(n) = 625\, T\left(\frac{n}{125}\right) + 10n^{5/4}$

Προκειμένου να μπορέσουν να εκτιμήσουν τον χρόνο επίλυσης κάθε αλγορίθμου, οι μηχανικοί υπολογιστών ενδιαφέρονται για την ασυμπτωτική πολυπλοκότητα καθενός από αυτούς και ζητούν τη βοήθειά σας. Συγκεκριμένα σας ζητούν:

(A) Να γράψετε την αναδρομική εξίσωση που δίνει τον χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου A_1 και στη συνέχεια να την επιλύσετε με το δέντρο της αναδρομής.

ΑΡΝΟΣ Online Education

- $T(n) = 625\, T\left(\frac{n}{125}\right) + 10\, n^{5/4}$

$T(n) = \alpha \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ $\quad \alpha \geq 1$, $b > 1$

$\log_b \alpha = \log_{125} 625$

$= \log_{5^3} 5^4$

$= \log_{5^3} \left(5^3\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$

$f(n) = O\left(n^{\log_b \alpha - \varepsilon}\right)$ - - - $f(n) > 0$ σταθερό

$f(n) = \Theta\left(n^{\log_b \alpha}\right)$ - - —

$f(n) = \Omega\left(n^{\log_b \alpha + \varepsilon}\right)$ + extra - -

$n^{\frac{5}{4}}$ $\qquad n^{\frac{4}{3}}$ $\qquad$ 0,0000001

$n^{1.25} \ll n^{1.33 - \varepsilon}$ $\qquad$ 1η ΘΚ $\Rightarrow$ $T(n) = \Theta\left(n^{1.33}\right)$