1η Γραπτή Εργασία ΠΛΗ 20

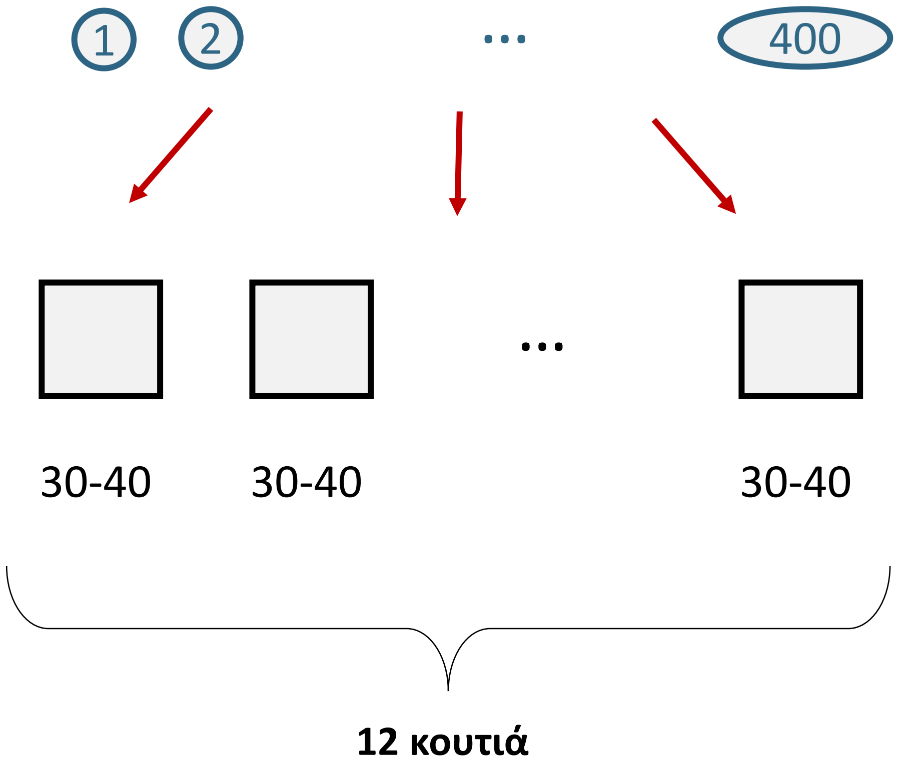
2021-2022

Συνεδρία 2 | 13/11/2021

Στην ΠΛΗ20 υπάρχουν 400 φοιτητές και έχουν δημιουργηθεί 12 τμήματα. Από τους φοιτητές, οι 320 παρακολουθούν τη θεματική ενότητα για πρώτη φορά και έχουν υποχρέωση υποβολής εργασιών, ενώ οι υπόλοιποι 80 έχουν κατοχυρώσει εργασίες.

(3α) Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση που βρίσκει τους τρόπους κατανομής των φοιτητών στα τμήματα και να προσδιοριστεί ο όρος του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο, όταν:

(3α1) Απαιτείται όλα τα τμήματα να έχουν από 30 έως 40 φοιτητές και δεν έχει σημασία η σειρά κατανομής των φοιτητών σε κάθε τμήμα.



400 διακεκριμένα

$\downarrow$

$\underline{\underline{\text{εκθ}}}$

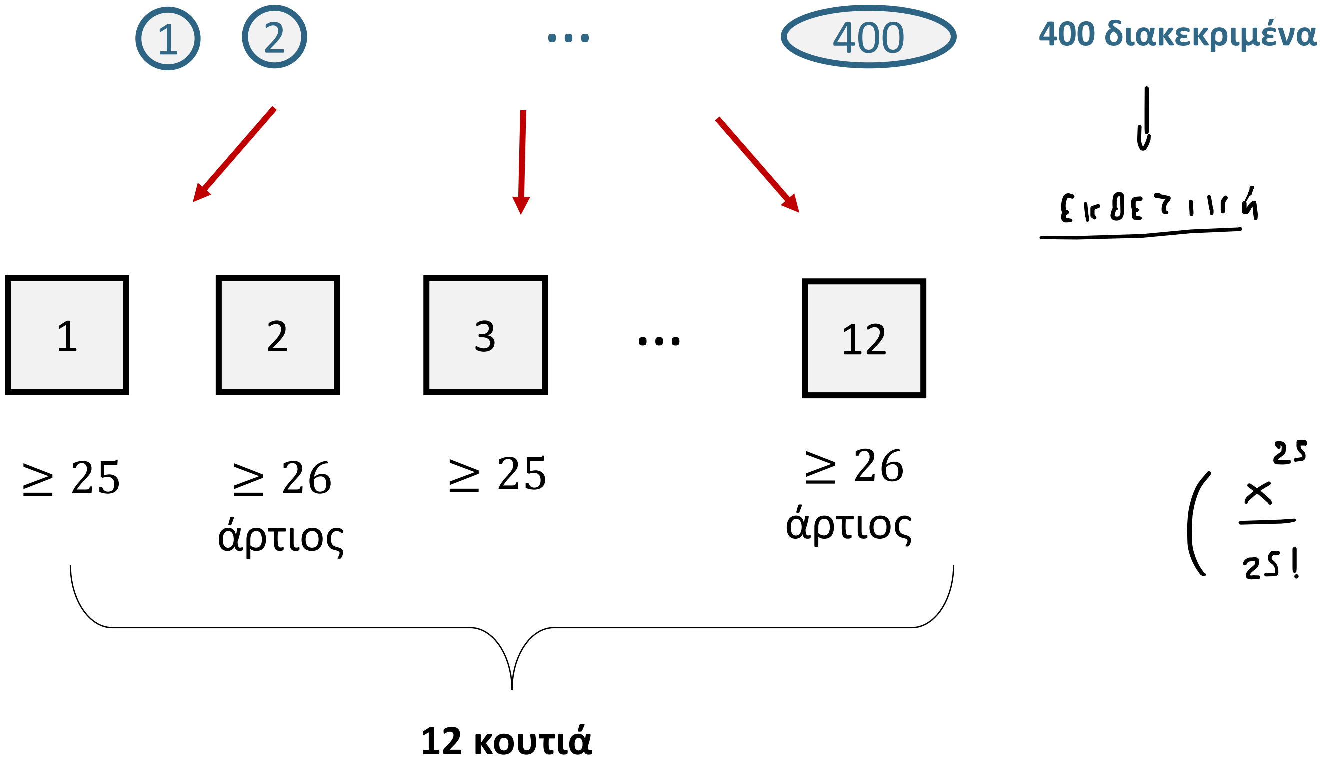
$$\left(\frac{x^{30}}{30!}+\frac{x^{31}}{31!}+\cdots+\frac{x^{40}}{40!}\right)^{12}$$

$$\frac{x^{400}}{400!}$$

Στην ΠΛΗ20 υπάρχουν 400 φοιτητές και έχουν δημιουργηθεί 12 τμήματα. Από τους φοιτητές, οι 320 παρακολουθούν τη θεματική ενότητα για πρώτη φορά και έχουν υποχρέωση υποβολής εργασιών, ενώ οι υπόλοιποι 80 έχουν κατοχυρώσει εργασίες.

(3α) Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση που βρίσκει τους τρόπους κατανομής των φοιτητών στα τμήματα και να προσδιοριστεί ο όρος του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο, όταν:

(3α2) Απαιτείται όλα τα τμήματα να έχουν τουλάχιστον 25 φοιτητές και όσα έχουν άρτιο αριθμό (δηλ. το 2ο, το 4ο, το 6ο … τμήμα) να έχουν άρτιο πλήθος φοιτητών.



1, 3, 5, 7, 9, 11 $\to \left(\frac{x^{25}}{25!}+\frac{x^{26}}{26!}+\dots+\frac{x^{400}}{400!}\right)$

2, 4, 6, 8, 10, 12 $\to \left(\frac{x^{26}}{26!}+\frac{x^{28}}{28!}+\dots+\frac{x^{400}}{400!}\right)$

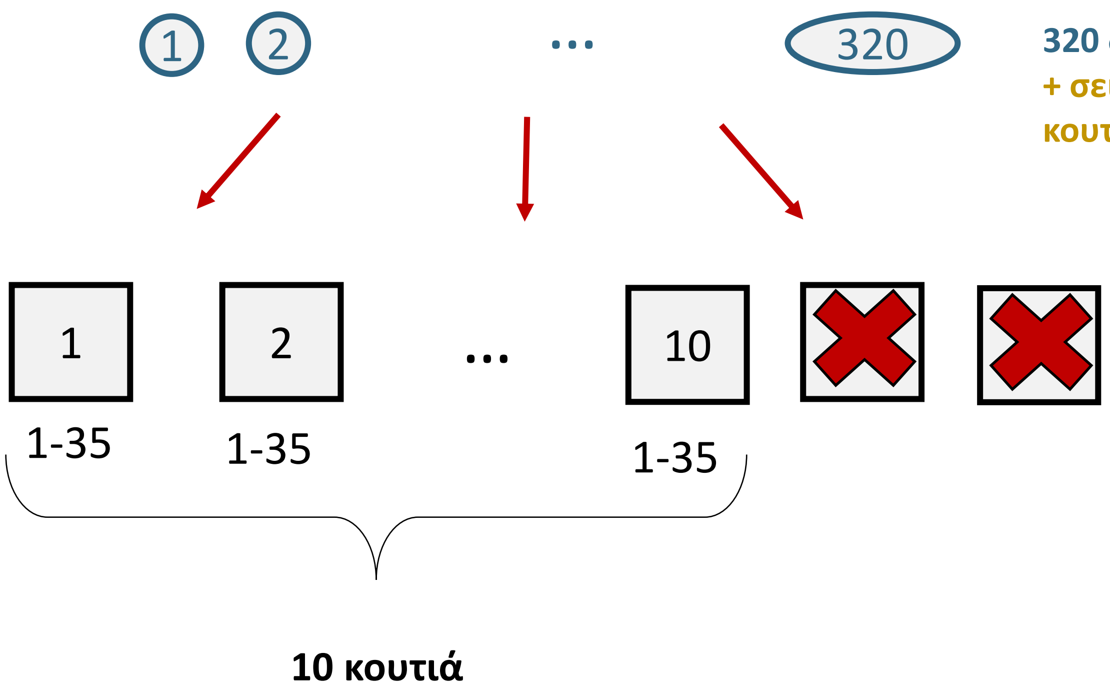
$$\left(\frac{x^{25}}{25!}+\frac{x^{26}}{26!}+\dots+\frac{x^{400}}{400!}\right)^6\left(\frac{x^{26}}{26!}+\frac{x^{28}}{28!}+\dots+\frac{x^{400}}{400!}\right)^6$$

$$\frac{x^{400}}{400!}$$

Στην ΠΛΗ20 υπάρχουν 400 φοιτητές και έχουν δημιουργηθεί 12 τμήματα. Από τους φοιτητές, οι 320 παρακολουθούν τη θεματική ενότητα για πρώτη φορά και έχουν υποχρέωση υποβολής εργασιών, ενώ οι υπόλοιποι 80 έχουν κατοχυρώσει εργασίες.

(3α) Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση που βρίσκει τους τρόπους κατανομής των φοιτητών στα τμήματα και να προσδιοριστεί ο όρος του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο, όταν:

(3α3) Μας ενδιαφέρει μόνο η κατανομή των φοιτητών που παρακολουθούν το μάθημα για πρώτη φορά, οι οποίοι απαιτείται να κατανεμηθούν στα πρώτα 10 τμήματα ώστε κανένα τμήμα να μην είναι κενό και να μην περιέχει περισσότερους από 35 φοιτητές, αλλά να έχει σημασία η σειρά τοποθέτησής τους σε κάθε τμήμα..



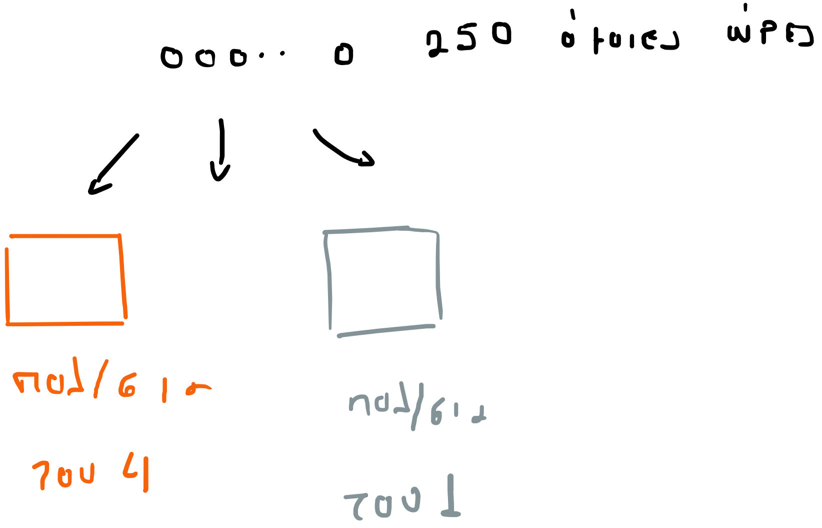
320 διακεκριμένα
+ σειρά μέσα στα κουτιά

εκθετική
που μοιάζει
με συνήθη

$$\longrightarrow (x + x^2 + \cdots + x^{35})^{10}$$

$$\frac{x^{320}}{320!}$$

Στην ΠΛΗ20 υπάρχουν 400 φοιτητές και έχουν δημιουργηθεί 12 τμήματα. Από τους φοιτητές, οι 320 παρακολουθούν τη θεματική ενότητα για πρώτη φορά και έχουν υποχρέωση υποβολής εργασιών, ενώ οι υπόλοιποι 80 έχουν κατοχυρώσει εργασίες.
Δημιουργείται πιλοτικά **ένα** τμήμα επίλυσης αποριών στο οποίο ο καθηγητής υπολογίζεται ότι θα έχει φόρτο εργασίας **4 ώρες** για κάθε φοιτητή που παρακολουθεί την ενότητα για πρώτη φορά και **1** ώρα για κάθε φοιτητή που έχει **κατοχυρώσει εργασίες**. Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση που βρίσκει τους τρόπους επιλογής διαφόρων συνδυασμών από νέους και παλιούς φοιτητές που θα συμμετάσχουν στο τμήμα επίλυσης αποριών, **δίχως να ενδιαφέρει ακριβώς ποιοι είναι οι συγκεκριμένοι φοιτητές** παρά μόνο πόσοι είναι οι φοιτητές από κάθε κατηγορία, ώστε ο καθηγητής που θα αναλάβει το συγκεκριμένο τμήμα να έχει συνολικό φόρτο εργασίας **250** ώρες. Να προσδιοριστεί επίσης ο όρος του οποίου ο συντελεστής δίνει τη ζητούμενη μέτρηση.



$$x^{250} \quad \text{σω} \quad \left(1 + x^4 + x^8 + \dots + x^{4\cdot 320}\right)\cdot\left(1 + x + x^2 + \dots + x^{80}\right)$$

1. (Σ / Λ) Σε ένα αλφάβητο με 15 γράμματα υπάρχουν 3.500 Λ
διαφορετικές λέξεις 3 γραμμάτων.

$\neq$

$\underline{15}\ \underline{15}\ \underline{15} \rightarrow 15^3 = 3375$

2. (Σ / Λ) Το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της ανίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16$ είναι $C(20,4)$.

<u>Σχόλιο</u>

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$$

0 0 · · · 0 <u>16 όμοια</u>

χη χη χη χη

$$\binom{16+4-1}{16} = \binom{19}{16}$$

α όμοια αντικ.

b διακ. κουτιά

$$\binom{\alpha + b - 1}{\alpha}$$

$$\parallel$$

$$\binom{n + m - 1}{n}$$

2. (Σ / Λ) Το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της ανίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16$ είναι $C(20,4)$. $= \frac{20!}{16!\,4!}$ Σ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k$$

$$0 \leq k \leq 16$$

$$0\,0 \cdots 0 \quad k$$

$\square$ $\square$ $\square$ $\square$

x_1 x_1 x_1 x_1

$$\binom{k+4-1}{k} = \binom{k+3}{k}$$

$\rightarrow 0 \leq k \leq 16$

$$\longrightarrow \sum_{k=0}^{16} \binom{k+3}{k} = \binom{3+16+1}{16} = \binom{20}{16} = \frac{20!}{16!\,4!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

$$\binom{20}{16} = \binom{20}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

2. (Σ / Λ) Το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της ανίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16$ είναι $C(20,4)$. $= \frac{20!}{16!\,4!}$

Σ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y = 16$$

$y = 0 \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$

$y = 1 \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$

$y = 2 \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$

$0\,0 \cdots 0$ 16 όμοια

$\square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \boxed{y}$

χη χη χη χη χη

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{16+5-1}{16} = \binom{16+4}{16} = \binom{20}{16} = \binom{20}{4}$$

30

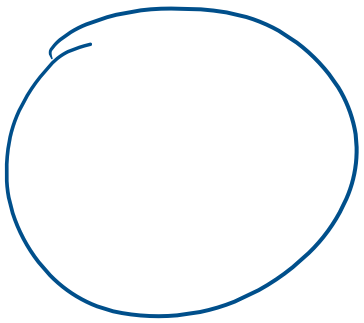
3. (Σ / Λ) Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους 15 ζευγάρια μπορούν να καθίσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι, ~~χωρίς κανέναν περιορισμό ως προς τη θέση που καταλαμβάνει ο καθένας~~, αλλά καθένας ενδιαφέρεται ποιος κάθεται αριστερά και ποιος κάθεται δεξιά, είναι ίσοι με 30!.

→ δεν έχω διαιτ. θέσεις στο τραπέζι

Λ

→ με νοιάζει η φορά

30



$$\frac{30!}{30} = 29!$$

4. (Σ / Λ) Ένα σύνολο 100 στοιχείων έχει 9.900 διαφορετικά υποσύνολα με 2 στοιχεία το καθένα. Λ

$$\binom{100}{2} = \frac{100!}{98!\,2!} = \frac{99\cdot 100}{2} = 99\cdot 50 = 4950$$

$S = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{P}(S)$ = δυναμοσύνολο του S $\rightsquigarrow$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων

$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, S \}$

$\downarrow$

έχει $2^3 = 8$ στοιχεία

3 → # στοιχείων του S

Έστω σύνολο S με n το πλήθος στοιχεία. Η κατασκευή ενός **υποσυνόλου** του S με $\boldsymbol{k}$ **στοιχεία** γίνεται με $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ τρόπους. Παρατηρήστε πως κατά την επιλογή k στοιχείων για την συγκρότηση του υποσυνόλου επιλέγουμε χωρίς επανάληψη k από τα n στοιχεία του S χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής

Παράδειγμα: Έστω $S=\{1,2,3\}$. Πόσα υποσύνολα δύο στοιχείων μπορούμε να φτιάξουμε;

Απάντηση 1 – Καταγραφή: Τα υποσύνολα δυο στοιχείων είναι τα : $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$

Απάντηση 2 – Εφαρμογή τύπου: Έχουμε $\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!1!}=3$

Για τον υπολογισμό του συνολικού πλήθους των υποσυνόλων ενός συνόλου, παίρνουμε τα υποσύνολα με **0** στοιχεία, τα υποσύνολα με **1** στοιχείο, τα υποσύνολα με **2** στοιχεία κλπ. και φτάνουμε μέχρι τα υποσύνολα με $\boldsymbol{n-1}$ στοιχεία και τα υποσύνολα με $\boldsymbol{n}$ στο**ιχεία. Όλα αυτά τα σύνολα είναι διαφορετικά μεταξύ τους, άρα** τα παραπάνω πλήθη τα προσθέτουμε.

Έχουμε λοιπόν:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n}$$

Η τελευταία ισότητα θα εξηγηθεί παρακάτω, μέσω των γεννητριών συναρτήσεων

Το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου με $\boldsymbol{n}$ στοιχεία ισούται με $\boldsymbol{2^n}$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ

$\underset{G_1}{2} \quad \underset{G_2}{2} \quad \underset{G_3}{2} \quad \underset{G_4}{2} \quad \dots \quad \underset{G_n}{2} \quad \to \quad 2^n$

$\underset{1}{\underline{0}} \quad \underset{2}{\underline{1}} \quad \underset{3}{\underline{0}} \quad \to \quad \{2\}$

$\underset{1}{\underline{1}} \quad \underset{2}{\underline{1}} \quad \underset{3}{\underline{0}} \quad \to \quad \{1, 2\}$

Σε μια παρέα υπάρχουν 9 φίλες. Πόσοι διαφορετικοί συνδυασμοί εξόδων υπάρχουν;

Σε μια παρέα υπάρχουν 9 φίλες. Πόσοι διαφορετικοί συνδυασμοί εξόδων υπάρχουν;

Ισούται με το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου με 9 στοιχεία, αν εξαιρέσουμε το κενό και τα μονοσύνολα

$$\binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \cdots + \binom{9}{8} + \binom{9}{9} = 2^9 - \binom{9}{0} - \binom{9}{1}$$

$$= 512 - 1 - 9$$

$$= \boxed{502}$$

Σε μια εξέταση λαμβάνουν μέρος 350 φοιτητές και υπάρχουν 20 αίθουσες διαθέσιμες χωρίς περιορισμό χωρητικότητας. Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να μοιραστούν οι φοιτητές στις αίθουσες είναι:

Κουτια αντικειμενα

m^n

1. (Σ / Λ) $P(350,20)$ εάν δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία εισέρχονται οι φοιτητές σε κάθε αίθουσα. Λ

350 διακ

20^{350}

20

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσω $\boldsymbol{n}$ **διακεκριμένα αντικείμενα** σε $\boldsymbol{m}$ **διακεκριμένα κουτιά** χωρίς περιορισμούς;

$$m^n$$

Θυμάμαι: Κουτιά εις την αντικείμενα

Χαρακτηριστικό παράδειγμα

Ένα λεωφορείο που έχει **9** επιβάτες και πρόκειται να κάνει **4** στάσεις. Με δεδομένο ότι κανένας νέος επιβάτης δεν μπαίνει, με πόσους τρόπους μπορούν να αποβιβαστούν οι **9** επιβάτες στις **4** στάσεις;

1 → **4 επιλογές**

2 → **4 επιλογές**

⋮

9 → **4 επιλογές**

Έχουμε $4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4 = 4^9$ επιλογές.

Προκύπτει δηλαδή το αποτέλεσμα που θα μας έδινε και παραπάνω τύπος:
Κουτιά(4) εις την αντικείμενα (9)

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσω $\boldsymbol{n}$ **διακεκριμένα αντικείμενα** σε $\boldsymbol{m}$ **διακεκριμένα κουτιά** αν με νοιάζει η **σειρά** με την οποία θα μπουν τα αντικείμενα στα κουτιά;

$$\frac{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}-\mathbf{1})!}{(\boldsymbol{m}-\mathbf{1})!}$$

Θυμάμαι:
(αντικείμενα + κουτιά μείον 1) παραγοντικό, δια κουτιά μείον 1 παραγοντικό

Χαρακτηριστικό παράδειγμα

Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 12 διακεκριμένα σφαιρίδια σε 5 σωλήνες διαφορετικού χρώματος;

(αντικείμενα + κουτιά μείον 1) παραγοντικό

Απάντηση: $\frac{(12+5-1)!}{(5-1)!}=\frac{16!}{4!}$

κουτιά μείον 1 παραγοντικό

Σημείωση: *Το γεγονός ότι τα αντικείμενα τοποθετούνται σε σωλήνες, σημαίνει πως μετά την τοποθέτηση διατηρείται η πληροφορία του ποιο έπεσε 1^o, ποιο 2^o κλπ άρα μας νοιάζει η σειρά μέσα στα κουτιά*

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσω $\boldsymbol{n}$ **όμοια** σε $\boldsymbol{m}$ **διακεκριμένα κουτιά** χωρίς περιορισμούς

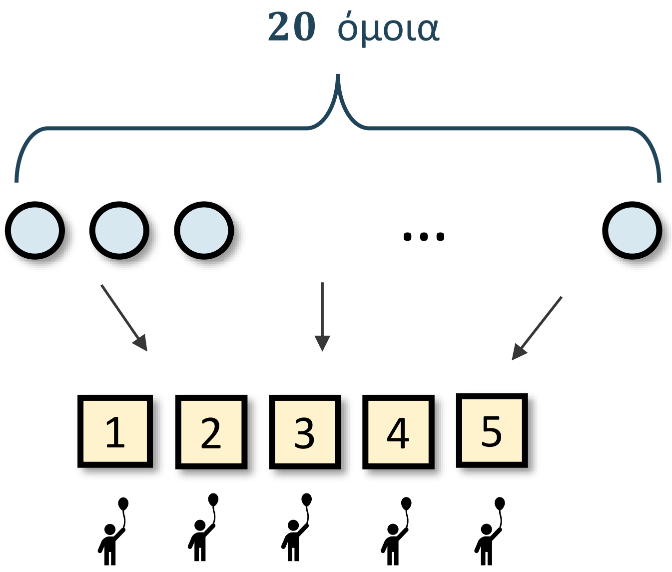
$$\binom{\text{αντικείμενα} + \text{κουτιά} - 1}{\text{αντικείμενα}}$$

$$\binom{\boldsymbol{n+m-1}}{\boldsymbol{n}}$$

Θυμάμαι:
αντικείμενα + κουτιά
μείον 1 ανά αντικείμενα

Χαρακτηριστικό παράδειγμα

Με πόσους τρόπους μπορούμε να διανείμουμε 20 όμοιες καραμέλες σε 5 παιδιά **χωρίς περιορισμούς;**



Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με τη διανομή 20 όμοιων αντικειμένων σε 5 διακεκριμένα κουτιά, χωρίς περιορισμούς.

Η απάντηση δίνεται από τον τύπο:

$$\binom{\text{αντικείμενα} + \text{κουτιά} - 1}{\text{αντικείμενα}} = \binom{20+5-1}{20} = \binom{24}{20} = \frac{24!}{20!\,4!}$$

Σε μια εξέταση λαμβάνουν μέρος 350 φοιτητές και υπάρχουν 20 αίθουσες διαθέσιμες χωρίς περιορισμό χωρητικότητας. Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να μοιραστούν οι φοιτητές στις αίθουσες είναι:

2. (Σ / Λ) Όσοι ο συντελεστής του $x^{350}/_{350!}$ στην παράσταση

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{350}}{350!}\right)^{20}$$

εάν δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία εισέρχονται οι φοιτητές σε κάθε αίθουσα. Σ

0 0 0 · · · 0 350 διακ

$\underbrace{\square \cdots \square}_{20}$

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{350}}{350!}\right)^{20}$$ συντ $\frac{x^{350}}{350!}$

Σε μια εξέταση λαμβάνουν μέρος 350 φοιτητές και υπάρχουν 20 αίθουσες διαθέσιμες χωρίς περιορισμό χωρητικότητας. Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να μοιραστούν οι φοιτητές στις αίθουσες είναι:

3. (Σ / Λ) Όσοι ο συντελεστής του $x^{350}/_{350!}$ στην παράσταση

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{350})^{20}$$

εάν έχει σημασία η σειρά με την οποία εισέρχονται οι φοιτητές σε κάθε αίθουσα. Σ

4. (Σ / Λ) Όσοι ο συντελεστής του x^{350} στην παράσταση

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{350})^{20}$$

εάν έχει σημασία η σειρά με την οποία εισέρχονται οι φοιτητές σε κάθε αίθουσα. Λ

Δύο μοντέλα:

[1] Όμοια αντικείμενα σε διακεκριμένα κουτιά – συνήθης -απαριθμητής για το κάθε κουτί, συντελεστή του x εις την όσα αντικείμενα μοιράζω

[2] διακεκριμένα αντικείμενα σε διακεκριμένα κουτιά – εκθετική -απαριθμητής για το κάθε κουτί με παραγοντικά στον παρονομάστη, συντελεστή του x εις την όσα αντικείμενα μοιράζω με παραγοντικό στον παρονομαστή

[2+σειρά] -εκθετική που μοιάζει με συνήθη αν με νοιάζει η σειρά μέσα στα κουτιά γράφω «*Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να γίνει χρήση εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης όπου, για οποιαδήποτε k σφαιρίδια, υπάρχουν $k!$ διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησής τους στην ίδια υποδοχή.:*» και γράφω την εκθετική γεννήτρια χωρίς τα παραγοντικά στους παρονομαστές. Παίρνω συντελεστή με παραγοντικό!

Έστω $a_0, a_1, a_2, \ldots$ μια ακολουθία ακεραίων αριθμών η οποία ικανοποιεί την αναδρομική σχέση:

$$a_n = 6 \cdot a_{n-1} - 9 \cdot a_{n-2}, \text{ για κάθε } n \geq 2,$$

με αρχικές συνθήκες $a_0 = a_1 = 1$.

Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να αποδείξετε ότι ισχύει ο εξής κλειστός τύπος:

$$a_n = 3^n - \frac{2}{3} \cdot n \cdot 3^n, \text{ για κάθε } n \geq 0.$$

Χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις, να βρείτε κλειστό τύπο για την αναδρομική σχέση:

$$b_n = 2 \cdot b_{n-1} + 3 \cdot b_{n-2}, \text{ για κάθε } n \geq 2,$$

με αρχικές συνθήκες $b_0 = b_1 = 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \qquad a_n = \frac{1}{n} \qquad 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 + \cdots$$

$$b_n \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$$