1η Γραπτή Εργασία ΠΛΗ 20

2021-2022

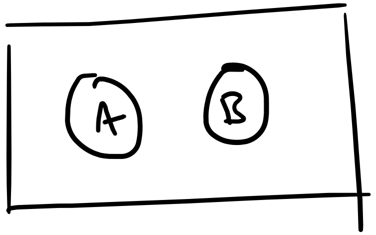
Συνεδρία 1 | 6/11/2021

Το PIN του κινητού είναι ένας τετραψήφιος αριθμός της μορφής ABCD. Να υπολογιστεί πόσα διαφορετικά PIN μπορούν να σχηματιστούν με χρήση ψηφίων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, εάν επιπλέον:

(1α) Πρέπει όλα τα ψηφία του PIN να είναι διαφορετικά μεταξύ τους.
(1β) Το ψηφίο 3 πρέπει να εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές.
(1γ) Στο PIN πρέπει τουλάχιστον ένα ψηφίο να είναι πρώτος αριθμός.
(1δ) Το τελευταίο ψηφίο δεν επιτρέπεται να είναι το 0, ενώ επίσης δεν επιτρέπονται δυο διαδοχικές εμφανίσεις του 0.

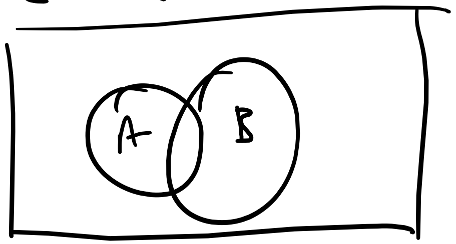
<u>Υπόδειξη:</u> Για το (1γ), υπενθυμίζεται ότι ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται **πρώτος** αν είναι τουλάχιστον ίσος με το 2 και διαιρείται ακέραια μόνο από τον εαυτό του και τη μονάδα. Για το (1δ), προτείνεται να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για την εμφάνιση του ψηφίου 0 στο PIN

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ



$|A \cup B| = |A| + |B|$

ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ



$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Το PIN του κινητού είναι ένας τετραψήφιος αριθμός της μορφής ABCD. Να υπολογιστεί πόσα διαφορετικά PIN μπορούν να σχηματιστούν με χρήση ψηφίων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, εάν επιπλέον:

(1α) Πρέπει όλα τα ψηφία του PIN να είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

(1β) Το ψηφίο 3 πρέπει να εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές.

(1γ) Στο PIN πρέπει τουλάχιστον ένα ψηφίο να είναι πρώτος αριθμός.

(1δ) Το τελευταίο ψηφίο δεν επιτρέπεται να είναι το 0, ενώ επίσης δεν επιτρέπονται δυο διαδοχικές εμφανίσεις του 0.

Υπόδειξη: Για το (1γ), υπενθυμίζεται ότι ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται **πρώτος** αν είναι τουλάχιστον ίσος με το 2 και διαιρείται ακέραια μόνο από τον εαυτό του και τη μονάδα. Για το (1δ), προτείνεται να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για την εμφάνιση του ψηφίου 0 στο PIN

1α $\quad \underline{10}\ \underline{9}\ \underline{8}\ \underline{7} \rightarrow 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

$0, 1, \ldots 9$ $\quad$ 10

$\downarrow$

$\_\ \_\ \_\ \_$

$$P(10,4) = \frac{10!}{6!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdots} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{\cancel{6!}} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$$

Το PIN του κινητού είναι ένας τετραψήφιος αριθμός της μορφής ABCD. Να υπολογιστεί πόσα διαφορετικά PIN μπορούν να σχηματιστούν με χρήση ψηφίων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, εάν επιπλέον:

(1α) Πρέπει όλα τα ψηφία του PIN να είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

(1β) Το ψηφίο 3 πρέπει να εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές.

(1γ) Στο PIN πρέπει τουλάχιστον ένα ψηφίο να είναι πρώτος αριθμός.

(1δ) Το τελευταίο ψηφίο δεν επιτρέπεται να είναι το 0, ενώ επίσης δεν επιτρέπονται δυο διαδοχικές εμφανίσεις του 0.

Υπόδειξη: Για το (1γ), υπενθυμίζεται ότι ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται **πρώτος** αν είναι τουλάχιστον ίσος με το 2 και διαιρείται ακέραια μόνο από τον εαυτό του και τη μονάδα. Για το (1δ), προτείνεται να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για την εμφάνιση του ψηφίου 0 στο PIN

1β

$0, 1, 2, \cancel{3}, 4, \ldots 9$

$\underline{3}\ \underline{9}\ \underline{3}\ \underline{9}$

$$\binom{4}{2}\ \underline{9}\ \underline{9} = \binom{4}{2} \cdot 9^2$$

που θα βάλω 3

Το PIN του κινητού είναι ένας τετραψήφιος αριθμός της μορφής ABCD. Να υπολογιστεί πόσα διαφορετικά PIN μπορούν να σχηματιστούν με χρήση ψηφίων από το αλφάβητο $\{0, 1, \ 2, \dots, 9\}$, εάν επιπλέον:

(1α) Πρέπει όλα τα ψηφία του PIN να είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

(1β) Το ψηφίο 3 πρέπει να εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές.

(1γ) Στο PIN πρέπει τουλάχιστον ένα ψηφίο να είναι πρώτος αριθμός.

(1δ) Το τελευταίο ψηφίο δεν επιτρέπεται να είναι το 0, ενώ επίσης δεν επιτρέπονται δυο διαδοχικές εμφανίσεις του 0.

Υπόδειξη: Για το (1γ), υπενθυμίζεται ότι ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται **πρώτος** αν είναι τουλάχιστον ίσος με το 2 και διαιρείται ακέραια μόνο από τον εαυτό του και τη μονάδα. Για το (1δ), προτείνεται να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για την εμφάνιση του ψηφίου 0 στο PIN

{0,1,**2**,**3**,4,**5**,6,**7**,8,9}

Πρ.1

(1γ) ΟΛΕΣ – όσες δεν έχουν πρώτο

$\boxed{\Pi \quad \Pi'}$

Πρ.2

Περ. 1 ακρ. 1 πρώτο

Περ. 2 -//- 2 πρ.

Περ. 3 -//- 3 πρ

Περ. 4 -//- 4 πρ.

Το PIN του κινητού είναι ένας τετραψήφιος αριθμός της μορφής ABCD. Να υπολογιστεί πόσα διαφορετικά PIN μπορούν να σχηματιστούν με χρήση ψηφίων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, εάν επιπλέον:

(1α) Πρέπει όλα τα ψηφία του PIN να είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

(1β) Το ψηφίο 3 πρέπει να εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές.

(1γ) Στο PIN πρέπει τουλάχιστον ένα ψηφίο να είναι πρώτος αριθμός.

(1δ) Το τελευταίο ψηφίο δεν επιτρέπεται να είναι το 0, ενώ επίσης δεν επιτρέπονται δυο διαδοχικές εμφανίσεις του 0.

Υπόδειξη: Για το (1γ), υπενθυμίζεται ότι ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται **πρώτος** αν είναι τουλάχιστον ίσος με το 2 και διαιρείται ακέραια μόνο από τον εαυτό του και τη μονάδα. Για το (1δ), προτείνεται να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για την εμφάνιση του ψηφίου 0 στο PIN

{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Πρ1

(1γ) ΟΛΕΣ – όσες δεν έχουν πρώτο

$\boxed{\Pi^{\Pi'}}$

ΟΛΕΣ = $\underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}$ $\quad 10^4$

ΚΑΝΕΝΑΣ ΠΡΩΤΟΣ $\underline{6}\ \underline{6}\ \underline{6}\ \underline{6}$ $\quad 6^4$

$$\boxed{10^4 - 6^4}$$

Το PIN του κινητού είναι ένας τετραψήφιος αριθμός της μορφής ABCD. Να υπολογιστεί πόσα διαφορετικά PIN μπορούν να σχηματιστούν με χρήση ψηφίων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, εάν επιπλέον:

(1α) Πρέπει όλα τα ψηφία του PIN να είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

(1β) Το ψηφίο 3 πρέπει να εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές.

(1γ) Στο PIN πρέπει τουλάχιστον ένα ψηφίο να είναι πρώτος αριθμός.

(1δ) Το τελευταίο ψηφίο δεν επιτρέπεται να είναι το 0, ενώ επίσης δεν επιτρέπονται δυο διαδοχικές εμφανίσεις του 0.

<u>Υπόδειξη:</u> Για το (1γ), υπενθυμίζεται ότι ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται **πρώτος** αν είναι τουλάχιστον ίσος με το 2 και διαιρείται ακέραια μόνο από τον εαυτό του και τη μονάδα. Για το (1δ), προτείνεται να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για την εμφάνιση του ψηφίου 0 στο PIN

Καθόλου "0"

(1) 9 9 9 9 → $\boxed{9^4}$

(2) 0 9 10 9 → $\boxed{9^2 \cdot 10}$

(3) 9 0 9 9 $\boxed{9^3}$

(4) 10 9 0 9 → $\boxed{9^2 \cdot 10}$

(5) 0 9 0 9 → $\boxed{9^2}$

$$\boxed{9^4 + 9^2 \cdot 10 + 9^3 + 9^2 \cdot 10 - 9^2}$$

Το PIN του κινητού είναι ένας τετραψήφιος αριθμός της μορφής ABCD. Να υπολογιστεί πόσα διαφορετικά PIN μπορούν να σχηματιστούν με χρήση ψηφίων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, εάν επιπλέον:

(1α) Πρέπει όλα τα ψηφία του PIN να είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

(1β) Το ψηφίο 3 πρέπει να εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές.

(1γ) Στο PIN πρέπει τουλάχιστον ένα ψηφίο να είναι πρώτος αριθμός.

(1δ) Το τελευταίο ψηφίο δεν επιτρέπεται να είναι το 0, ενώ επίσης δεν επιτρέπονται δυο διαδοχικές εμφανίσεις του 0.

Υπόδειξη: Για το (1γ), υπενθυμίζεται ότι ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται **πρώτος** αν είναι τουλάχιστον ίσος με το 2 και διαιρείται ακέραια μόνο από τον εαυτό του και τη μονάδα. Για το (1δ), προτείνεται να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για την εμφάνιση του ψηφίου 0 στο PIN

(1)

Καθόλου "0"

$\underbrace{\underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}}\ \underline{9} \to \boxed{9^4}$

ΑΚΡΙΒΩΣ 1 "0"

$\underline{0}\ \underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9} \to \boxed{9^3}$

$\underline{9}\ \underline{0}\ \underline{9}\ \underline{9} \to \boxed{9^3}$

$\underline{9}\ \underline{9}\ \underline{0}\ \underline{9} \to \boxed{9^3}$

ΑΚΡΙΒΩΣ 2 "0"

$\underline{0}\ \underline{9}\ \underline{0}\ \underline{9} \to \boxed{9^2}$

$$\boxed{9^4 + 3 \cdot 9^3 + 9^2}$$

Το $P(n,k)$ επιλέγει για να βάλει στη σειρά.

n διακεκριμένα

$$\overbrace{①\ ②\ ③\ \cdots\ ⓝ}$$

$\Downarrow$

$\boldsymbol{k}$

Επιλέγω k για να τα βάλω στη σειρά

$$\underset{\mathbf{1}}{\_\_\_}\quad \underset{\mathbf{2}}{\_\_\_}\quad \underset{\mathbf{3}}{\_\_\_}\quad \cdots \quad \underset{\boldsymbol{k}}{\_\_\_}$$

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Το $C(n,k)$ απλά επιλέγει.

n διακεκριμένα

$$\overbrace{①\ ②\ ③\ \cdots\ ⓝ}$$

$\Downarrow$

$\boldsymbol{k}$

Επιλέγω k για να τα βάλω σε ένα τσουβάλι

$$C(n,k)=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

*Και στις δύο περιπτώσεις, όταν επιλεγεί κάποιο αντικείμενο από τα n δεν επιτρέπεται να ξαναεπιλεγεί. Γι'αυτό λέμε ότι η επιλογή γίνεται **χωρίς επανάληψη.***

Άννα Κορφιάτη | korfiati.an@gmail.com | a.korfiati@arnos.gr | 6974 12 9730

Έστω ότι έχουμε 20 διακεκριμένα βιβλία σε μια βιβλιοθήκη και θέλουμε να επιλέξουμε 8 από αυτά, για να τα βάλουμε σε ένα ράφι

Προσέγγιση 1

20 διακεκριμένα

Επιλέγω 8 από τα 20. Όποιο επιλεγεί 1^o θα μπει 1^o στο ράφι, όποιο επιλεγεί 2^o θα μπει 2^o στο ράφι κλπ.

Άρα από τα 20 επιλέγω τα 8 χωρίς επανάληψη και με νοιάζει η **σειρά** με την οποία επιλέγω. Δηλαδή έχουμε

$\boldsymbol{P(20,8)} = \frac{20!}{(20-8)!} = \frac{20!}{12!}$ τρόπους

Προσέγγιση 2

20 διακεκριμένα

Επιλέγω 8 από τα 20 και τα βάζω πάνω σε ένα γραφείο.

Δηλαδή επιλέγω χωρίς να με νοιάζει η σειρά με

$\boldsymbol{C(20,8)} = \frac{\mathbf{20!}}{\mathbf{12!8!}}$ τρόπους

Τοποθετώ στο ράφι τα βιβλία που έχω πάνω στο γραφείο

με **8!** τρόπους.

Δηλαδή, από τον κανόνα του γινομένου, η τοποθέτηση γίνεται με

$\boldsymbol{C(20,8)\cdot 8!} = \frac{20!}{12!8!}\cdot 8! = \frac{20!}{12!}$ τρόπους

Άννα Κορφιάτη | korfiati.an@gmail.com | a.korfiati@arnos.gr | 6974 12 9730

Παρατηρούμε ότι και οι δύο προσεγγίσεις, στο προηγούμενο παράδειγμα, οδήγησαν στο ίδιο αποτέλεσμα.

Εν γένει, αν από n διακεκριμένα αντικείμενα θέλουμε να επιλέξουμε τα k ($k \leq n$) χωρίς να επιτρέπεται η επανάληψη **για να τα βάλουμε στη σειρά**, υπάρχουν οι εξής προσεγγίσεις.

Προσέγγιση 1

Επιλέγουμε με $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ τρόπους.

Το αντικείμενο που θα επιλεγεί 1ο θα μπει στην 1η θέση, το αντικείμενο που θα επιλεγεί 2ο θα μπει στην 2η θέση κλπ

Προσέγγιση 2

Στάδιο 1: Επιλέγω k από τα n χωρίς να με νοιάζει η σειρά επιλογής με $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Στάδιο 2: Στη συνέχεια, τοποθετώ τα k διακεκριμένα αντικείμενα στη σειρά με $k!$ τρόπους.

Τελικά, η όλη διαδικασία πραγματοποιείται με $\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k!$ τρόπους. Απλοποιείται το $k!$ και προκύπτει $\frac{n!}{(n-k)!}$

Δηλαδή $\boldsymbol{P(n,k) = C(n,k) \cdot k!}$.
Το $P(n,k)$ επιλέγει για να βάλει στη σειρά.
Το $C(n,k)$ απλά επιλέγει.

Σημειώστε το σωστό κουτάκι

Συνδυασμοί C	**Διατάξεις P**	
C	P	**Α)**Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να επιλέξω από 20 διακεκριμένα βιβλία τα 5 για να τα δωρίσω σε μια βιβλιοθήκη;
C	P	**Β)** Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να επιλέξω από 20 διακεκριμένα βιβλία τα 5 για να τα βάλω σε ένα ράφι;
C	P	**Γ)** Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να επιλέξω από 20 διακεκριμένα βιβλία τα 5 για να τα δωρίσω σε 1 έναν φίλο;
C	P	**Δ)**Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να επιλέξω από 20 διακεκριμένα βιβλία τα 5 για να τα δωρίσω σε 5 φίλους(1 ο καθένας);
C	P	**Ε)**Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να επιλέξω από 20 διακεκριμένους ανθρώπους τους 5, για να τους βάλω σε μια επιτροπή με ισότιμα μέλη;
C	P	**Ζ)**Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να επιλέξω από 20 διακεκριμένους ανθρώπους τους 5, για να τους βάλω σε μια επιτροπή με διακεκριμένα μέλη

Σημειώστε το σωστό κουτάκι

Συνδυασμοί C	Διατάξεις P	
C ✓	P	**Α)**Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να επιλέξω από 20 διακεκριμένα βιβλία τα 5 για να τα δωρίσω σε μια βιβλιοθήκη;
C	P ✓	**Β)** Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να επιλέξω από 20 διακεκριμένα βιβλία τα 5 για να τα βάλω σε ένα ράφι;
C ✓	P	**Γ)** Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να επιλέξω από 20 διακεκριμένα βιβλία τα 5 για να τα δωρίσω σε 1 έναν φίλο;
C	P ✓	**Δ)**Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να επιλέξω από 20 διακεκριμένα βιβλία τα 5 για να τα δωρίσω σε 5 φίλους(1 ο καθένας);
C ✓	P	**Ε)**Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να επιλέξω από 20 διακεκριμένους ανθρώπους τους 5, για να τους βάλω σε μια επιτροπή με ισότιμα μέλη;
C	P ✓	**Ζ)**Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να επιλέξω από 20 διακεκριμένους ανθρώπους τους 5, για να τους βάλω σε μια επιτροπή με διακεκριμένα μέλη

Σε μια εταιρεία εργάζονται 11 άντρες και 9 γυναίκες, από τους οποίους οι 7 άντρες και οι 8 γυναίκες γνωρίζουν αγγλικά. Επιπλέον, 3 από τους άντρες βρίσκονται σε δικαστική διαμάχη μεταξύ τους και 2 από τις γυναίκες έχουν συγγενική σχέση.

(2α) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια πενταμελής ομάδα εργασίας με ισότιμα μέλη, εάν:

(2α1)Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

(2α2)Πρέπει να συμμετέχουν ακριβώς 3 γυναίκες και τουλάχιστον ένας από τους άντρες να γνωρίζει αγγλικά.

(2α3)Μπορεί να συμμετέχει το πολύ ένας από τους εργαζόμενους που βρίσκονται σε δικαστική διαμάχη.

11 Α $\downarrow$ 7 Αγγ

9 Γ $\downarrow$ 8 Αγγ

(2α1) $\binom{20}{5} = \dfrac{20!}{5!\,15!}$

(2α2)

Περ1   3 Γ $\to$ 1 Α (Αγγ) $\to$ 1 Α (όχι αγγ)

$\binom{9}{3}\cdot\binom{7}{1}\cdot\binom{4}{1}$

Περ. 2   3 Γ $\to$ 2 Α (Αγγ)

$\binom{9}{3}\cdot\binom{7}{2}$

$\binom{9}{3}\cdot\binom{7}{1}\cdot\binom{4}{1} + \binom{9}{3}\cdot\binom{7}{2}$

Σε μια εταιρεία εργάζονται 11 άντρες και 9 γυναίκες, από τους οποίους οι 7 άντρες και οι 8 γυναίκες γνωρίζουν αγγλικά. Επιπλέον, 3 από τους άντρες βρίσκονται σε δικαστική διαμάχη μεταξύ τους και 2 από τις γυναίκες έχουν συγγενική σχέση.

(2α) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια πενταμελής ομάδα εργασίας με ισότιμα μέλη, εάν:

- **(2α1)** Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.
- **(2α2)** Πρέπει να συμμετέχουν ακριβώς 3 γυναίκες και τουλάχιστον ένας από τους άντρες να γνωρίζει αγγλικά.
- **(2α3)** Μπορεί να συμμετέχει το πολύ ένας από τους εργαζόμενους που βρίσκονται σε δικαστική διαμάχη.

11 Α $\downarrow$ 7 Αγγ

9 Γ $\downarrow$ 8 Αγγ

(2α1) $\binom{20}{5} = \frac{20!}{5!\,15!}$

(2α2) «ΟΛΕΣ» 3Γ 2Α

$\binom{9}{3}\cdot\binom{11}{2}$

«ΚΑΚΕΣ» 3Γ 2Α (όχι αγγ)

$\binom{9}{3}\cdot\binom{4}{2}$

$\binom{9}{3}\binom{11}{2} - \binom{9}{3}\cdot\binom{4}{2}$

Ερώτημα 2 | 2Α | 1η ΓΕ ΠΛΗ 20 – 2021-2022

Σε μια εταιρεία εργάζονται 11 άντρες και 9 γυναίκες, από τους οποίους οι 7 άντρες και οι 8 γυναίκες γνωρίζουν αγγλικά. Επιπλέον, 3 από τους άντρες βρίσκονται σε δικαστική διαμάχη μεταξύ τους και 2 από τις γυναίκες έχουν συγγενική σχέση.

(2α) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια πενταμελής ομάδα εργασίας με ισότιμα μέλη, εάν:

(2α1)Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

(2α2)Πρέπει να συμμετέχουν ακριβώς 3 γυναίκες και τουλάχιστον ένας από τους άντρες να γνωρίζει αγγλικά.

(2α3)Μπορεί να συμμετέχει το πολύ ένας από τους εργαζόμενους που βρίσκονται σε δικαστική διαμάχη.

A_1 A_2 A_3 οι τσακωμένοι

Περ.1 Μόνο A_1 → 1 → $20-3=17$ → $\binom{17}{4}$

+

Περ.2 Μόνο A_2 → 1 → $20-3=17$ → $\binom{17}{4}$

+

Περ.3 Μόνο A_3 → 1 → $20-3=17$ → $\binom{17}{4}$

+

Περ.4 Κανένας τσακωμένος → $20-3=17$ → $\binom{17}{5}$

(2β) Ποια είναι η πιθανότητα σε μια ομάδα εργασίας που σχηματίστηκε εντελώς τυχαία, να συμμετέχουν οι δύο γυναίκες που έχουν συγγενική σχέση μεταξύ τους;

Ω: όλες οι 5-μελείς

$$|\Omega| = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5!\,15!}$$

Σ: συμμ. οι 2 Γ συγγ.

$$\underbrace{\binom{2}{2}}_{=1} \cdot \binom{18}{3} = |\Sigma|$$

$$P(\Sigma) = \frac{\binom{18}{3}}{\binom{20}{5}}$$

(2γ) Ποια είναι η πιθανότητα, σε μια ομάδα εργασίας στην οποία συμμετέχουν το πολύ δύο γυναίκες, όλοι οι συμμετέχοντες να γνωρίζουν αγγλικά;

Ω A

|Ω| = # ομάδων το πολύ δύο γυναίκες

|A| = # – " – και όλοι γνωρίζουν αγγλικά

Απρ. γνωρ. αγγ.

|Ω| → 0Γ → $\binom{11}{5}$ + → 1Γ → $\binom{9}{1}\cdot\binom{11}{4}$ + → 2Γ → $\binom{9}{2}\cdot\binom{11}{3}$

|A| → 0Γ → $\binom{7}{5}$ + → 1Γ → $\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{4}$ + → 2Γ → $\binom{8}{2}\cdot\binom{7}{3}$

Σε μια εταιρεία εργάζονται 11 άντρες και 9 γυναίκες, από τους οποίους οι 7 άντρες και οι 8 γυναίκες γνωρίζουν αγγλικά. Επιπλέον, 3 από τους άντρες βρίσκονται σε δικαστική διαμάχη μεταξύ τους και 2 από τις γυναίκες έχουν συγγενική σχέση.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{7}{5} + \binom{8}{1}\cdot\binom{7}{4} + \binom{8}{2}\cdot\binom{7}{3}}{\binom{11}{5} + \binom{9}{1}\cdot\binom{11}{4} + \binom{9}{2}\cdot\binom{11}{3}}$$

$\boxed{1 \,\&\, 2}$ ΓΕ 1 19 - 20

(2δ) Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν όλοι οι άνδρες και όλες οι γυναίκες σε μια στρογγυλή τράπεζα, εάν καθένας / καθεμιά ενδιαφέρεται ποιος/ποια κάθεται στα δεξιά και ποιος/ποια κάθεται αριστερά του/της, και δεν επιτρέπεται να καθίσουν δυο γυναίκες σε διαδοχικές θέσεις;

Υπόδειξη: Για το (2δ), προτείνεται να τοποθετήστε πρώτα τους 11 άνδρες στο τραπέζι. Τοποθετήστε στη συνέχεια στο τραπέζι τις 9 γυναίκες, ώστε να μην εμφανιστούν περισσότερες από μία γυναίκες ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς άνδρες.

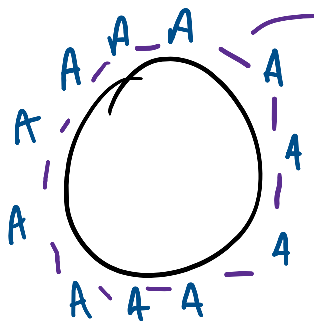
11 Α   9 Γ

Στην ευθεία

_Α_Α_Α_Α_Α_Α_Α_Α_Α_Α_Α_

$$11!\binom{12}{9}\cdot 9!$$

Στον κύκλο



→ 11 διαχ. κενά

$$\frac{11!}{11} = 10!$$

$$\boxed{10!\binom{11}{9}\cdot 9!}$$

→ P(11,9)

Σε ένα παιδικό πάρτι, έχουν έρθει 30 παιδιά, 12 αγόρια και 18 κορίτσια, τα οποία θεωρούμε διακεκριμένα.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε όλα τα παιδιά σε μία σειρά, ώστε να μην υπάρχουν δύο ή περισσότερα αγόρια σε διαδοχικές θέσεις;

_ Α Κ Α Κ Α Κ Α Κ . Κ Α _

12! 7 Κ ??

Σε ένα παιδικό πάρτι, έχουν έρθει 30 παιδιά, 12 αγόρια και 18 κορίτσια, τα οποία θεωρούμε διακεκριμένα.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε όλα τα παιδιά σε μία σειρά, ώστε να μην υπάρχουν δύο ή περισσότερα αγόρια σε διαδοχικές θέσεις;

Στάδιο 1: Βάζω τα κορίτσια στη σειρά με **18!** τρόπους και δημιουργούνται 19 κενά

_ Κ _ Κ _ Κ _ Κ _ Κ _ Κ _ Κ _ Κ _ Κ _ Κ _ Κ _ Κ _ Κ _ Κ _ Κ _ Κ _ Κ _ Κ _

Στάδιο 2: Από τα 19 κενά επιλέγω με $\binom{19}{12}$ ποια κενά θα γεμίσουν

Στάδιο 3: Βάζω τα αγόρια με **12!** τρόπους

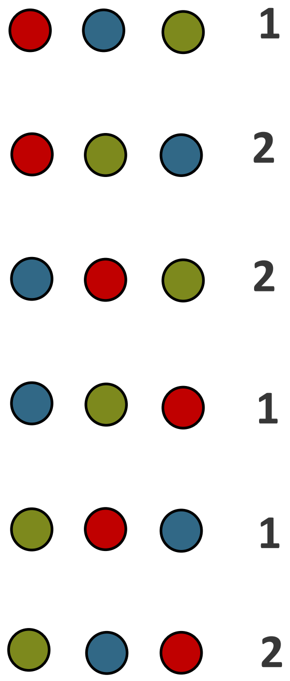
Από τον **κανόνα του γινομένου** η διαδικασία γίνεται με $18! \cdot \binom{19}{12} \cdot 12! = 18! \cdot \frac{19!}{12!7!} \cdot 12! = \frac{\mathbf{18!19!}}{\mathbf{7!}}$

$\left(18 \cdot P(19, 12) \right)$

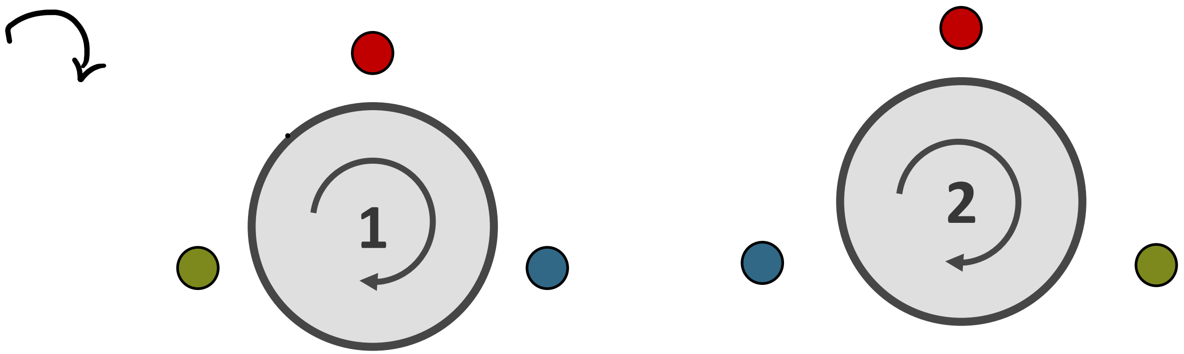
Κυκλικές μεταθέσεις

Έστω ότι έχουμε 3 μπάλες: 1 μπλε, 1 κόκκινη,1 πράσινη.
Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τις τοποθετήσουμε σε έναν **κύκλο;**

Τοποθετήσεις στην ευθεία

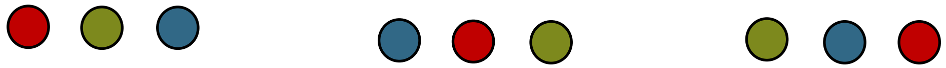


Παρατηρούμε πως επειδή πλέον βρισκόμαστε σε κύκλο, δεν είναι σαφές το ποια είναι η 1η μπάλα, ποια η 2η και ποια η 3η



Παρατηρήστε πως η **Διάταξη 1** στον κύκλο αντιστοιχεί στις

Παρατηρήστε πως η **Διάταξη 2** στον κύκλο αντιστοιχεί στις

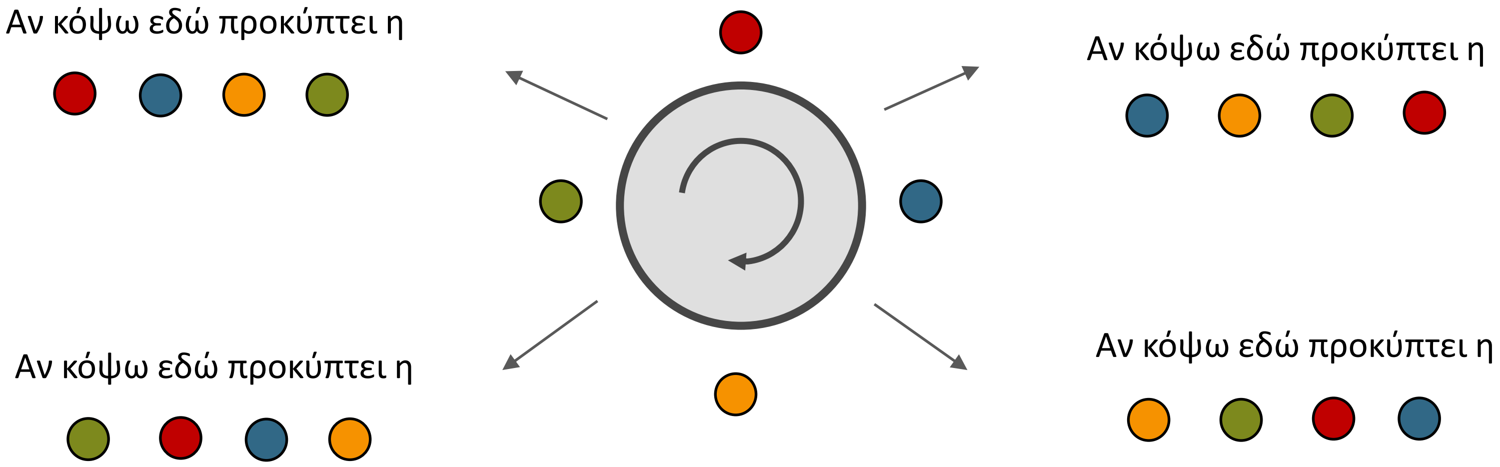


Άρα έχουμε **2 τρόπους** τοποθέτησης στον κύκλο

Έστω τώρα ότι έχουμε να τοποθετήσουμε **4** διακεκριμένα αντικείμενα σε έναν κύκλο.
Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση;

Συμβολίζουμε με κ το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης των 4 αντικειμένων στον κύκλο.

Έστω ότι έχουμε την ακόλουθη τοποθέτηση:



Άρα: Για κάθε 1 **τοποθέτηση** στον **κύκλο** έχουμε 4 **τοποθετήσεις** στην **ευθεία**
Άρα για κ **τοποθετήσεις** στον **κύκλο** έχουμε $4 \cdot \kappa$ **τοποθετήσεις** στην **ευθεία**

Άρα το **πλήθος τοποθετήσεων στην ευθεία** = $4 \cdot \kappa$ άρα $4! = 4 \cdot \kappa$ δηλαδή

$$\kappa = \frac{4!}{4}$$

Γενίκευση

Συμβολίζουμε με κ το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης των n διακεκριμένων αντικειμένων σε κύκλο.

Άρα: Για κάθε 1 **τοποθέτηση** στον **κύκλο** έχουμε n **τοποθετήσεις** στην **ευθεία**
Άρα για κ **τοποθετήσεις** στον **κύκλο** έχουμε $n \cdot \kappa$ **τοποθετήσεις** στην **ευθεία**

Άρα το **πλήθος τοποθετήσεων στην ευθεία** = $n \cdot \kappa$ άρα $n! = n \cdot \kappa$ δηλαδή

$$\boxed{\kappa = \frac{n!}{n}} = (n-1)!$$

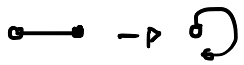
Σημείωση

Ο τύπος αυτός ισχύει εν γένει για τοποθετήσεις στην ευθεία.
Παραπάνω απλώς χρησιμοποιήσαμε ένα απλό παράδειγμα τοποθέτησης στην ευθεία.

δουλεύει
σχεδόν
πάντα

Εν γένει

$$\# \text{ τοποθετήσεων στον κύκλο} = \frac{\#\text{τοποθετήσεων στην ευθεια}}{\#\text{ θεσεων του κύκλου}}$$



$$\#\,\text{τοποθετήσεων στον κύκλο} = \frac{\#\text{τοποθετήσεων στην ευθεια}}{\#\text{ θεσεων του κύκλου}}$$

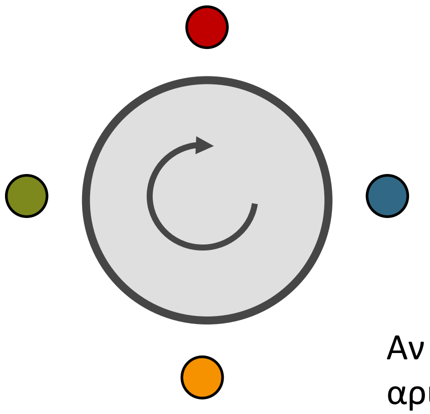
← ΔΕΝ δουλεύει

5Α
4Κ } εναλλάξ σε ροτόντα

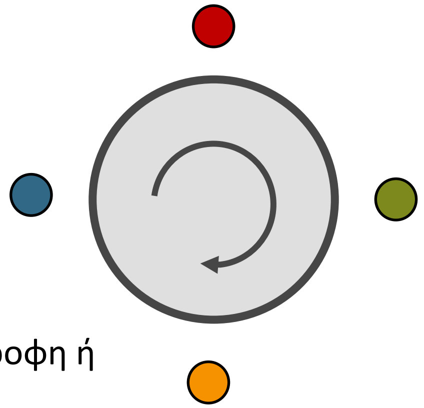
~~Α Κ Α Κ Α Κ Α Κ Α~~

Αν επιπλέον **δεν** μας νοιάζει η φορά (δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη) έχουμε το εξής:

Δεξιά του είναι το και αριστερά το



Δεξιά του είναι το και αριστερά το



Αν δεν μας νοιάζει η φορά (δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη) αυτές οι δύο τοποθετήσεις <u>ταυτίζονται</u>

Δηλαδή αν **δεν** μας νοιάζει η **φορά** (δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη) **κάθε τοποθέτηση έχει μετρηθεί δυο φορές.**

Άρα διαιρούμε με 2 το αποτέλεσμα που προέκυψε στην προηγούμενη σελίδα.

Με πόσους τρόπους μπορώ να τα τοποθετήσω n διακεκριμένα αντικείμενα σε κύκλο;
*Θεωρούμε ότι ο κύκλος έχει **μη** διακεκριμένες θέσεις*

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Επιπλέον αν δεν με νοιάζει η φορά (δεξιόστροφη, αριστερόστροφη) διαιρώ με 2.

Γενικός κανόνας για τοποθετήσεις σε κύκλο:

$$\#\text{ τοποθετήσεων στον κύκλο} = \frac{\#\text{τοποθετήσεων στην ευθεια}}{\#\text{ θεσεων του κύκλου}}$$

← σχεδόν πάντα

πρεπει "διπλώνοντας" την τοποθ. στην ευθεία να την χαλάει

Αν δίνεται ότι οι **θέσεις του κύκλου είναι διακεκριμένες**, στην πραγματικότητα έχω τοποθέτηση στην ευθεία

Έχουμε 4 διακεκριμένα αγόρια και 4 διακεκριμένα κορίτσια.

α. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τα παιδιά σε ένα κυκλικό τραπέζι;

β. Πώς αλλάζει η απάντηση του **α** αν επιπλέον θέλουμε να κάθονται εναλλάξ τα αγόρια και τα κορίτσια;

γ. Πώς αλλάζει η απάντηση του **β** αν επιπλέον δεν μας ενδιαφέρει η φορά της τοποθέτησης;

Έχουμε 4 διακεκριμένα αγόρια και 4 διακεκριμένα κορίτσια.
α. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τα παιδιά σε ένα κυκλικό τραπέζι;
β. Πώς αλλάζει η απάντηση του **α** αν επιπλέον θέλουμε να κάθονται εναλλάξ τα αγόρια και τα κορίτσια;
γ. Πώς αλλάζει η απάντηση του **β** αν επιπλέον δεν μας ενδιαφέρει η φορά της τοποθέτησης; $:2$

(α) $\frac{8!}{8} = 7!$

(β) Στην ευθεία

Περ. 1   Α Κ Α Κ Α Κ Α Κ $\to 4!\,4!$

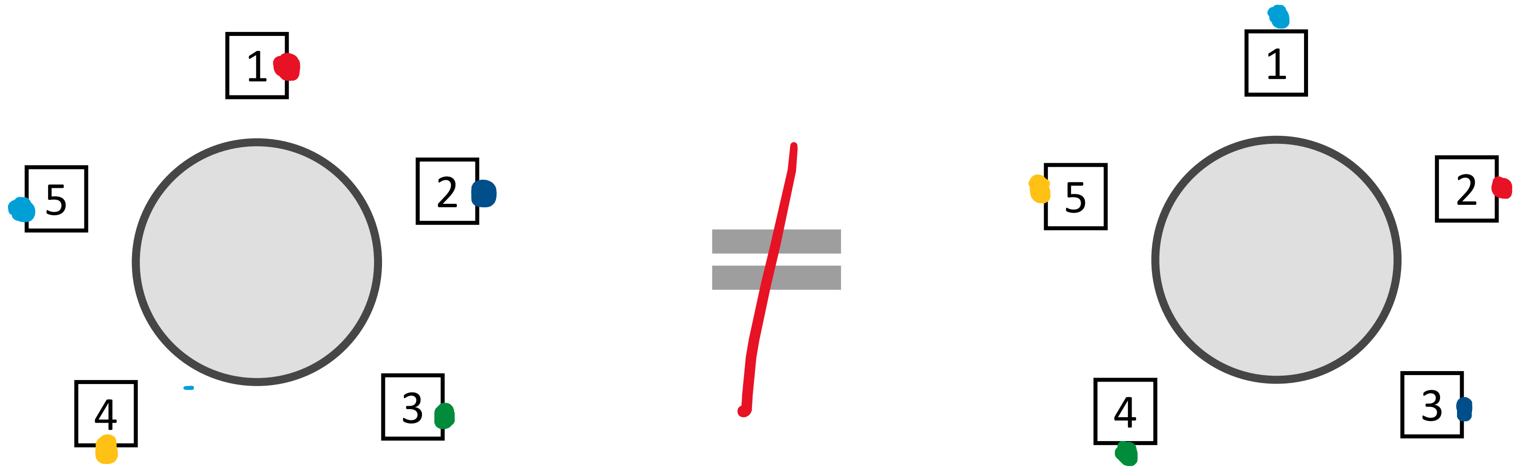
Περ. 2   Κ Α Κ Α Κ Α Κ Α $\to 4!\,4!$

$\Big\} \; 2\cdot 4!\,4!$

Στον κύκλο $\to \frac{2\cdot 4!\,4!}{8} = \frac{4!\,4!}{4} = 4!\cdot 3!$

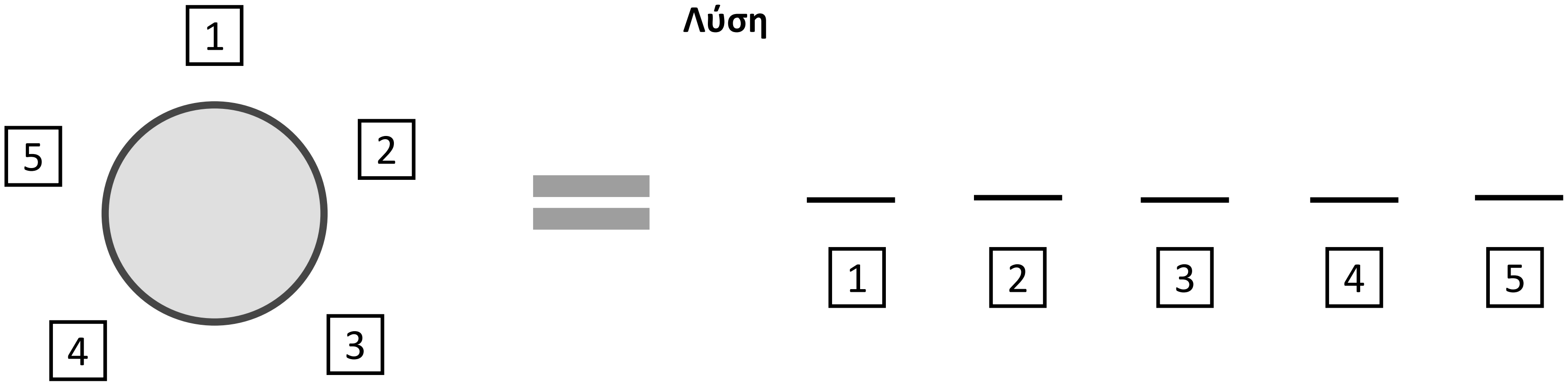
(γ) $\frac{4!\,3!}{2}$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 5 παίκτες σε ένα **κυκλικό τραπέζι** με **διακεκριμένες θέσεις;**



Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 5 παίκτες σε ένα **κυκλικό τραπέζι** με **διακεκριμένες θέσεις;**

Λύση



Προσοχή!

Το γεγονός ότι οι θέσεις στον κύκλο είναι **διακεκριμένες** σημαίνει πως πρόκειται για παγίδα.

Έχουμε **5** επιλογές για την θέση $\boxed{1}$ **4** επιλογές για την θέση $\boxed{2}$ **3** επιλογές για την θέση $\boxed{3}$

2 επιλογές για την θέση $\boxed{4}$ και **1** επιλογή για την θέση $\boxed{5}$

Όταν έχουμε διακεκριμένες θέσεις στον κύκλο, το πλήθος των τοποθετήσεων ισούται με το πλήθος τοποθετήσεων στην ευθεία.

Άρα η τοποθέτηση γίνεται με **5**! τρόπους

Η κριτική επιτροπή ενός τηλεοπτικού διαγωνισμού αποτελείται από **7** άντρες και **13** γυναίκες.
Οι γυναίκες κάλεσαν τους άντρες σε δείπνο για να συζητήσουν. Στο εστιατόριο κάθισαν σε ένα στρογγυλό τραπέζι 20 θέσεων. Να υπολογιστούν οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτό, αν:

(α) δεν υπάρχουν περιορισμοί ως προς τον τρόπο που μπορούν να καθίσουν.

(β) ανάμεσα σε δύο άντρες κάθεται τουλάχιστον μία γυναίκα (δηλ. δεν κάθονται δύο άντρες ο ένας δίπλα στον άλλο).

Σημείωση: Στο στρογγυλό τραπέζι δύο τοποθετήσεις θεωρούνται ίδιες αν η μία λαμβάνεται από την άλλη περιστρέφοντας το τραπέζι. Ισοδύναμα, σε κάθε τοποθέτηση μας ενδιαφέρει ποιος κάθεται δεξιά ή αριστερά καθενός και όχι η συγκεκριμένη θέση στο κυκλικό τραπέζι.

με νοιάζει η φορά

Η κριτική επιτροπή ενός τηλεοπτικού διαγωνισμού αποτελείται από 7 άντρες και 13 γυναίκες.
Οι άντρες κάλεσαν τις γυναίκες σε δείπνο για να συζητήσουν. Στο εστιατόριο κάθισαν σε ένα στρογγυλό τραπέζι 20 θέσεων. Να υπολογιστούν οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτό, αν:

(α) δεν υπάρχουν περιορισμοί ως προς τον τρόπο που μπορούν να καθίσουν.

(β) ανάμεσα σε δύο άντρες κάθεται τουλάχιστον μία γυναίκα (δηλ. δεν κάθονται δύο άντρες ο ένας δίπλα στον άλλο).

(α) $\frac{20!}{20} = 19!$

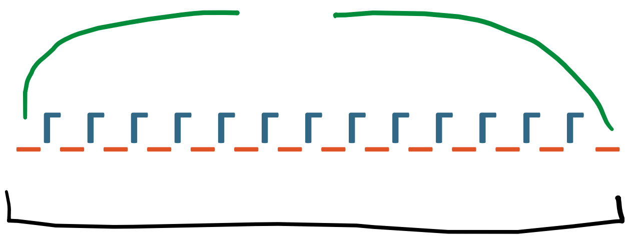
(b)

Συνδυαστική | Κυκλικές Μεταθέσεις | Άσκηση 3.3 | Από ΓΕ

Η κριτική επιτροπή ενός τηλεοπτικού διαγωνισμού αποτελείται από 7 άντρες και 13 γυναίκες.
Οι άντρες κάλεσαν τις γυναίκες σε δείπνο για να συζητήσουν. Στο εστιατόριο κάθισαν σε ένα στρογγυλό τραπέζι 20 θέσεων. Να υπολογιστούν οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτό, αν:
(α) δεν υπάρχουν περιορισμοί ως προς τον τρόπο που μπορούν να καθίσουν.
(β) ανάμεσα σε δύο άντρες κάθεται τουλάχιστον μία γυναίκα (δηλ. δεν κάθονται δύο άντρες ο ένας δίπλα στον άλλο).

(β)

το ίδιο κενό

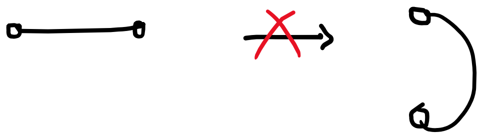


αν διπλώσω έχω το ίδιο κενό δυο φορές

$$\frac{\#\ \text{τοποθετήσεων στην ευθεια}}{\#\ \text{θεσεων του κύκλου}}$$

↓

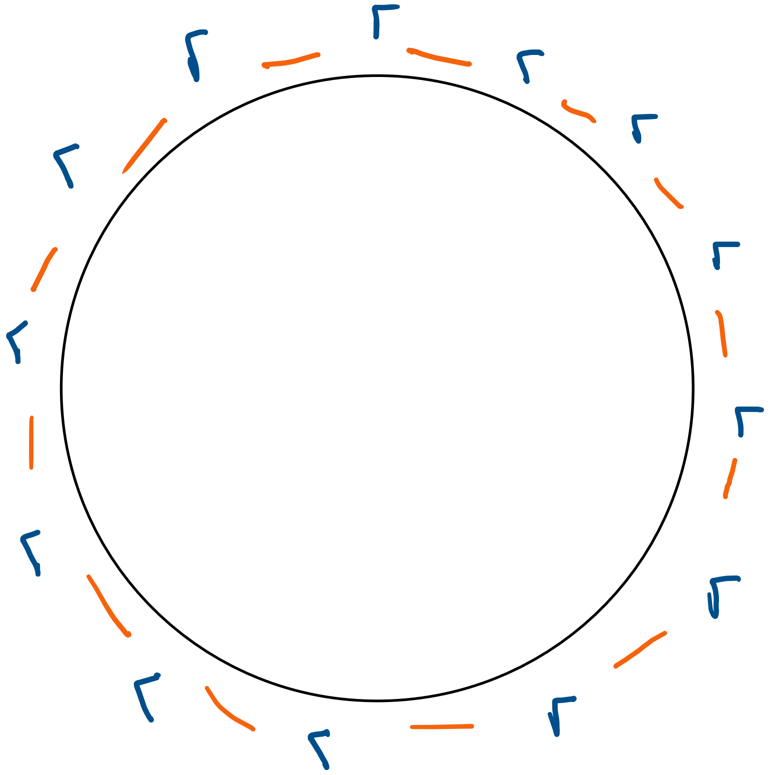
δεν διπλώνει



Η κριτική επιτροπή ενός τηλεοπτικού διαγωνισμού αποτελείται από 7 άντρες και 13 γυναίκες.
Οι άντρες κάλεσαν τις γυναίκες σε δείπνο για να συζητήσουν. Στο εστιατόριο κάθισαν σε ένα στρογγυλό τραπέζι 20 θέσεων. Να υπολογιστούν οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτό, αν:

(α) δεν υπάρχουν περιορισμοί ως προς τον τρόπο που μπορούν να καθίσουν.

(β) ανάμεσα σε δύο άντρες κάθεται τουλάχιστον μία γυναίκα (δηλ. δεν κάθονται δύο άντρες ο ένας δίπλα στον άλλο).



Στ 1 Βάζω τις γυναίκες στο κύκλο με $\frac{13!}{13} = 12!$

Στ 2 Έχω 13 διακεκριμένα κενά. Διαλέγω με $\binom{13}{7}$ ποια θα δεσμεύσουν

Στ.3 Βάζω τους άντρες με $7!$ τρόπους

Άρα $\to$ $12!\,P(13,7) = \frac{12!\,13!}{6!}$

Η κριτική επιτροπή ενός τηλεοπτικού διαγωνισμού αποτελείται από 7 άντρες και 13 γυναίκες.
Οι άντρες κάλεσαν τις γυναίκες σε δείπνο για να συζητήσουν. Στο εστιατόριο κάθισαν σε ένα στρογγυλό τραπέζι 20 θέσεων. Να υπολογιστούν οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτό, αν:
(α) δεν υπάρχουν περιορισμοί ως προς τον τρόπο που μπορούν να καθίσουν.
(β) ανάμεσα σε δύο άντρες κάθεται τουλάχιστον μία γυναίκα (δηλ. δεν κάθονται δύο άντρες ο ένας δίπλα στον άλλο).

Απάντηση ΕΑΠ

Σκεπτόμενοι όπως στο (α) αρχικά βάζουμε τις 13 γυναίκες κριτές σε κυκλική διάταξη με $P(12,12) = 12!$ τρόπους,

και στη συνέχεια τοποθετούμε έναν-έναν τους άντρες κριτές ανάμεσά τους έτσι ώστε να μην κάθονται δίπλα δίπλα.

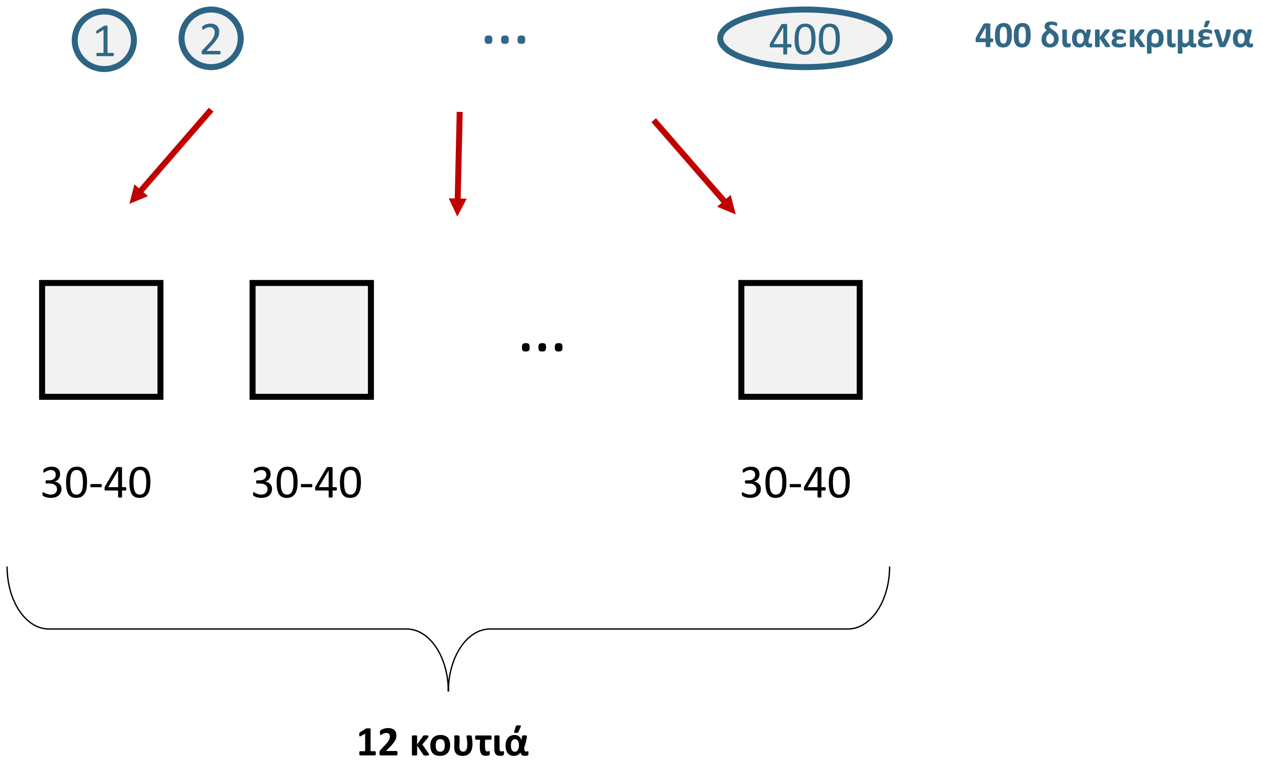
Η διαφορά τώρα (σε σχέση με την διάταξη των γυναικών σε σειρά που είχαμε στο (1α2)) είναι ότι υπάρχουν 13 διακεκριμένες «ενδιάμεσες» θέσεις μεταξύ των 13 γυναικών κριτών σε κυκλική διάταξη και άρα μπορούμε να τοποθετήσουμε τους 7 άντρες κριτές ανάμεσα στις γυναίκες με $P(13,7)$ τρόπους.

Τελικά, η απάντηση δίνεται από το κανόνα του γινομένου $P(12,12) * P(13,7)$.

Στην ΠΛΗ20 υπάρχουν 400 φοιτητές και έχουν δημιουργηθεί 12 τμήματα. Από τους φοιτητές, οι 320 παρακολουθούν τη θεματική ενότητα για πρώτη φορά και έχουν υποχρέωση υποβολής εργασιών, ενώ οι υπόλοιποι 80 έχουν κατοχυρώσει εργασίες.

(3α) Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση που βρίσκει τους τρόπους κατανομής των φοιτητών στα τμήματα και να προσδιοριστεί ο όρος του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο, όταν:

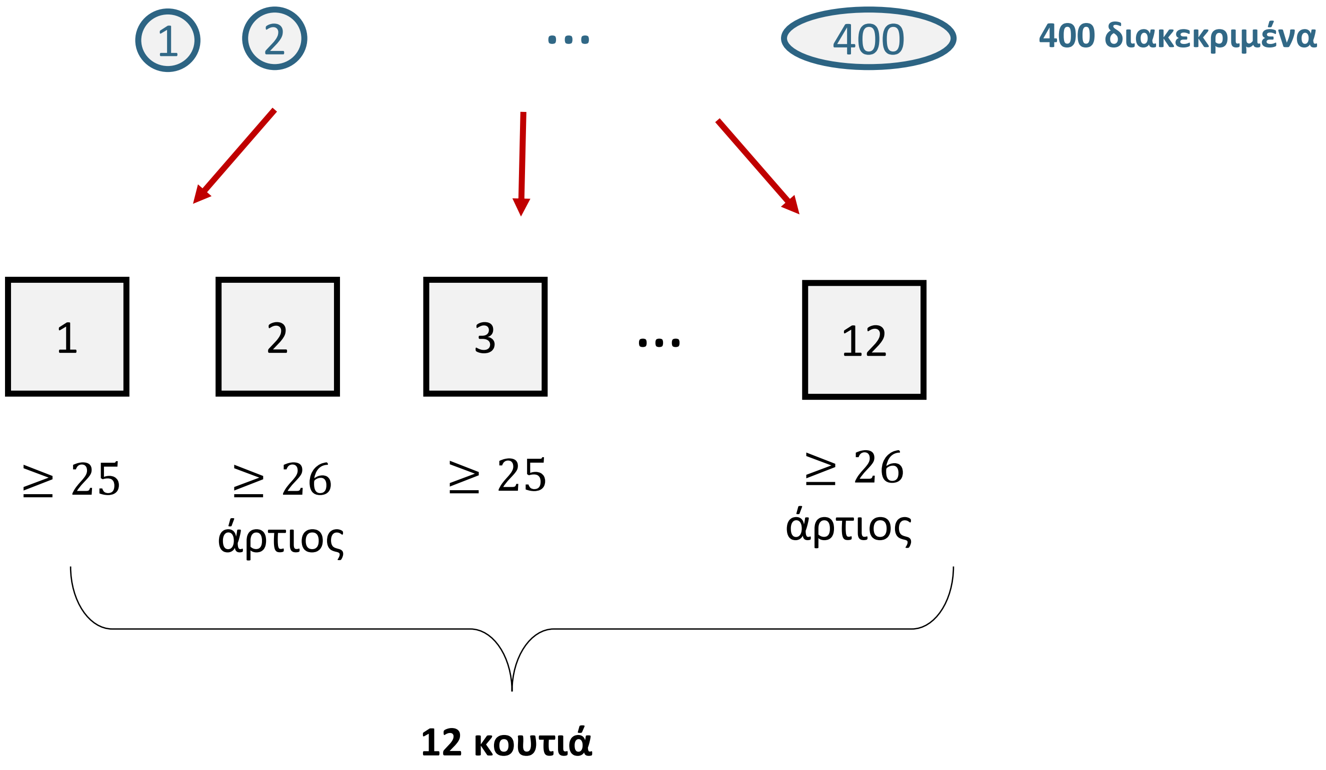
(3α1) Απαιτείται όλα τα τμήματα να έχουν από 30 έως 40 φοιτητές και δεν έχει σημασία η σειρά κατανομής των φοιτητών σε κάθε τμήμα.



Στην ΠΛΗ20 υπάρχουν 400 φοιτητές και έχουν δημιουργηθεί 12 τμήματα. Από τους φοιτητές, οι 320 παρακολουθούν τη θεματική ενότητα για πρώτη φορά και έχουν υποχρέωση υποβολής εργασιών, ενώ οι υπόλοιποι 80 έχουν κατοχυρώσει εργασίες.

(3α) Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση που βρίσκει τους τρόπους κατανομής των φοιτητών στα τμήματα και να προσδιοριστεί ο όρος του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο, όταν:

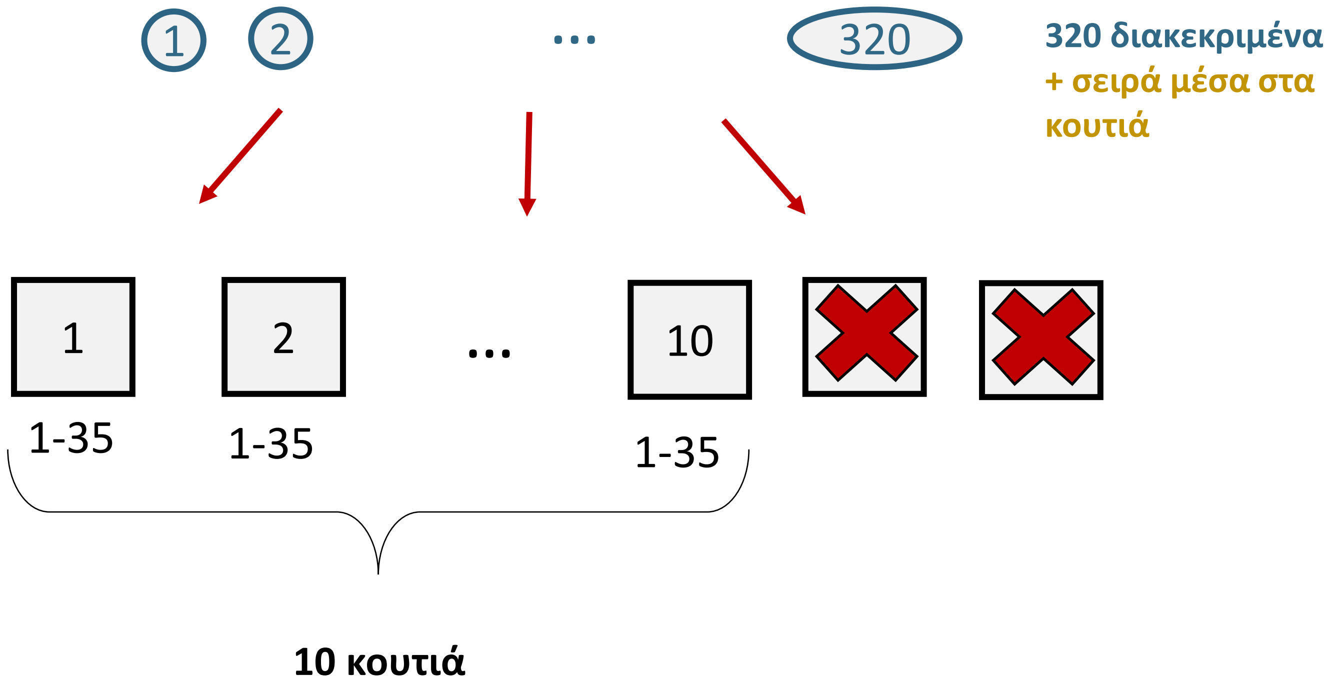
(3α2) Απαιτείται όλα τα τμήματα να έχουν τουλάχιστον 25 φοιτητές και όσα έχουν άρτιο αριθμό (δηλ. το 2ο, το 4ο, το 6ο … τμήμα) να έχουν άρτιο πλήθος φοιτητών.



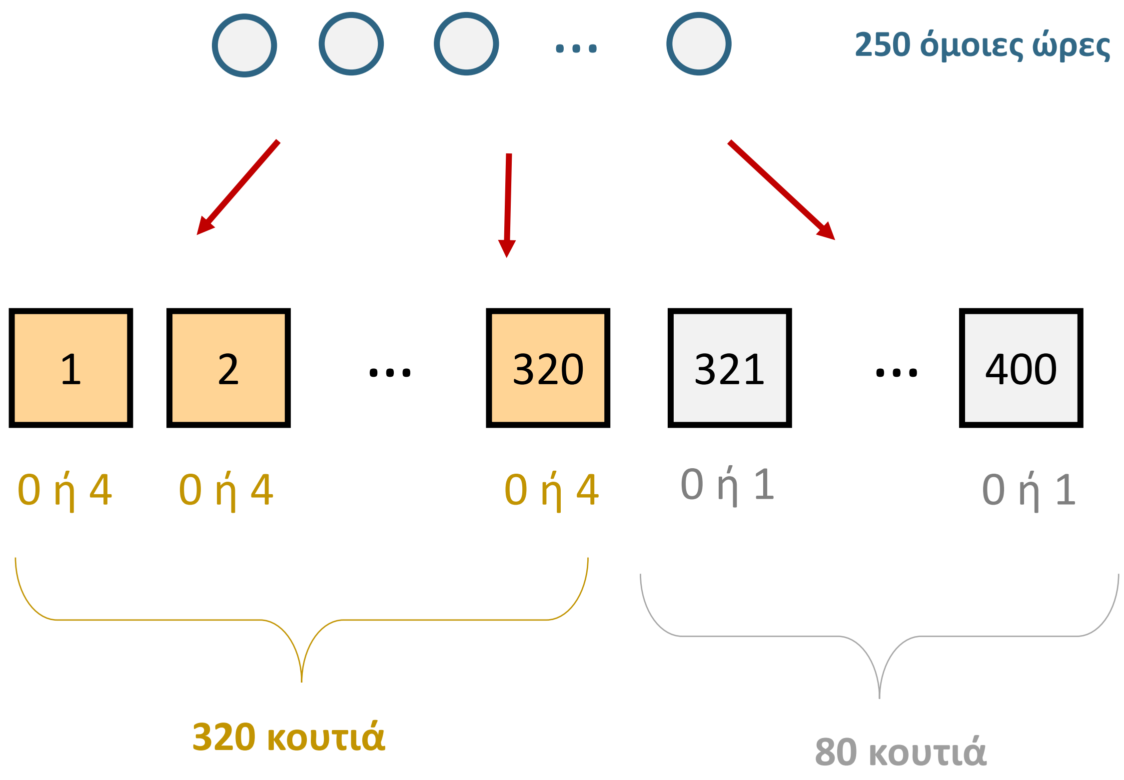
Στην ΠΛΗ20 υπάρχουν 400 φοιτητές και έχουν δημιουργηθεί 12 τμήματα. Από τους φοιτητές, οι 320 παρακολουθούν τη θεματική ενότητα για πρώτη φορά και έχουν υποχρέωση υποβολής εργασιών, ενώ οι υπόλοιποι 80 έχουν κατοχυρώσει εργασίες.

(3α) Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση που βρίσκει τους τρόπους κατανομής των φοιτητών στα τμήματα και να προσδιοριστεί ο όρος του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο, όταν:

(3α3) Μας ενδιαφέρει μόνο η κατανομή των φοιτητών που παρακολουθούν το μάθημα για πρώτη φορά, οι οποίοι απαιτείται να κατανεμηθούν στα πρώτα 10 τμήματα ώστε κανένα τμήμα να μην είναι κενό και να μην περιέχει περισσότερους από 35 φοιτητές, αλλά να έχει σημασία η σειρά τοποθέτησής τους σε κάθε τμήμα..



Στην ΠΛΗ20 υπάρχουν 400 φοιτητές και έχουν δημιουργηθεί 12 τμήματα. Από τους φοιτητές, οι 320 παρακολουθούν τη θεματική ενότητα για πρώτη φορά και έχουν υποχρέωση υποβολής εργασιών, ενώ οι υπόλοιποι 80 έχουν κατοχυρώσει εργασίες.
Δημιουργείται πιλοτικά **ένα** τμήμα επίλυσης αποριών στο οποίο ο καθηγητής υπολογίζεται ότι θα έχει φόρτο εργασίας **4 ώρες** για κάθε φοιτητή που παρακολουθεί την ενότητα για πρώτη φορά και **1 ώρα** για κάθε φοιτητή που έχει **κατοχυρώσει εργασίες**. Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση που βρίσκει τους τρόπους επιλογής διαφόρων συνδυασμών από νέους και παλιούς φοιτητές που θα συμμετάσχουν στο τμήμα επίλυσης αποριών, δίχως να ενδιαφέρει ακριβώς ποιοι είναι οι συγκεκριμένοι φοιτητές παρά μόνο πόσοι είναι οι φοιτητές από κάθε κατηγορία, ώστε ο καθηγητής που θα αναλάβει το συγκεκριμένο τμήμα να έχει συνολικό φόρτο εργασίας **250** ώρες. Να προσδιοριστεί επίσης ο όρος του οποίου ο συντελεστής δίνει τη ζητούμενη μέτρηση.



Έστω a_0, a_1, a_2, … μια ακολουθία ακεραίων αριθμών η οποία ικανοποιεί την αναδρομική σχέση:

$$a_n = 6 \cdot a_{n-1} - 9 \cdot a_{n-2}, \text{ για κάθε } n \geq 2,$$

με αρχικές συνθήκες $a_0 = a_1 = 1$.

Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να αποδείξετε ότι ισχύει ο εξής κλειστός τύπος:

$$a_n = 3^n - \frac{2}{3} \cdot n \cdot 3^n, \text{ για κάθε } n \geq 0.$$

Χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις, να βρείτε κλειστό τύπο για την αναδρομική σχέση:

$$b_n = 2 \cdot b_{n-1} + 3 \cdot b_{n-2}, \text{ για κάθε } n \geq 2,$$

με αρχικές συνθήκες $b_0 = b_1 = 1$.