ΦΥΕ 24

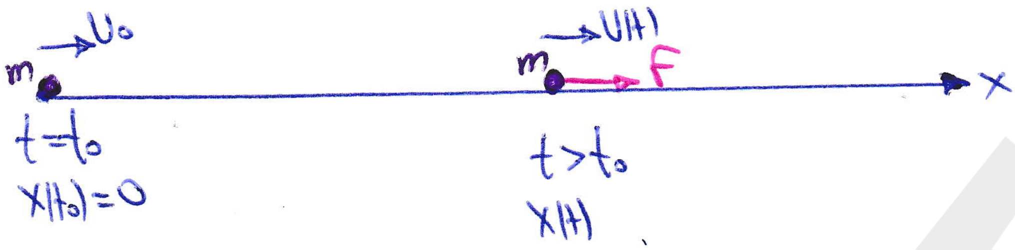
1η Εργασία 2021-2022

Σύνταξη – επιμέλεια:

Παναγιώτης Φ. Μοίρας

Σολωμού 29 Αθήνα ☎ 210.38.22.157 ☎ 210.38.22.495
On-line Φροντιστήριο www.arnos.gr info@arnos.gr

ΑΣΚΗΣΗ 1.



Α)

Ο 2ος νόμος του Newton για την κίνηση του υλικού σημείου είναι:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \rightarrow \frac{\cancel{m}v_0 t_0^2}{t^3} = \cancel{m}\frac{dv}{dt} \rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = v_0 t_0^2 \int_{t_0}^{t}\frac{dt}{t^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow v\Big|_{v_0}^{v} = v_0 t_0^2\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{t_0}^{t} \rightarrow v - v_0 = v_0 t_0^2\left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2t_0^2}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow v = v_0 - \frac{v_0 t_0^2}{2t^2} + \frac{v_0}{2} \rightarrow \boxed{v(t) = \frac{3}{2}v_0 - \frac{v_0 t_0^2}{2t^2}} \quad (1)$$

Από τον ορισμό της ταχύτητας προκύπτει:

$$v = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{(1)} \int_0^x dx = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{3}{2}v_0 - \frac{v_0 t_0^2}{2t^2}\right)dt \rightarrow$$

$$\rightarrow x\Big|_0^x = \frac{3}{2}v_0 t - \frac{v_0 t_0^2}{2}\left[-\frac{1}{t}\right]\Bigg|_{t_0}^{t} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3}{2}v_0(t-t_0) + \frac{v_0 t_0^2}{2t} - \frac{v_0 t_0^{\cancel{2}}}{2\cancel{t_0}} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3}{2}\upsilon_0 t - \frac{3}{2}\upsilon_0 t_0 + \frac{\upsilon_0 t_0^2}{2t} - \frac{\upsilon_0}{2}t_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3}{2}\upsilon_0 t - \frac{4}{2}\upsilon_0 t_0 + \frac{\upsilon_0 t_0^2}{2t} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{x(t) = \frac{3}{2}\upsilon_0 t - 2\upsilon_0 t_0 + \frac{\upsilon_0 t_0^2}{2t}} \quad (2)$$

Β) 1) Για $t = t_0$ η (1) δίνει:

$$\upsilon(t=t_0) = \frac{3}{2}\upsilon_0 - \frac{\upsilon_0 t_0^2}{2t_0^2} = \frac{3}{2}\upsilon_0 - \frac{\upsilon_0}{2} = \frac{2}{2}\upsilon_0 \rightarrow \boxed{\upsilon(t=t_0) = \upsilon_0}$$

Δηλαδή επαληθεύεται η αρχική συνθήκη για την ταχύτητα.

Ενώ για $t = t_0$ η (2) δίνει:

$$x(t=t_0) = \frac{3}{2}\upsilon_0 t_0 - 2\upsilon_0 t_0 + \frac{\upsilon_0 t_0^{\cancel{2}}}{2\cancel{t_0}} = 2\upsilon_0 t_0 - 2\upsilon_0 t_0 \rightarrow \boxed{x(t=t_0) = 0}$$

Δηλαδή επαληθεύεται και η αρχική συνθήκη για τη θέση του υλικού σημείου.

2) Ελέγχουμε την ορθότητα των διαστάσεων των όρων των $\upsilon(t)$ και $x(t)$ (σχέσεις (1) και (2)).

Στο δεξί μέλος της $\upsilon(t)$ (σχέση 1) ο όρος $\frac{3}{2}\upsilon_0$ έχει διαστάσεις [ταχύτητα], ενώ ο όρος $\frac{\upsilon_0 t_0^2}{2t^2}$ έχει διαστάσεις:

$$\frac{[\text{ταχύτητα}]\cancel{[\text{χρόνος}]^2}}{\cancel{[\text{χρόνος}]^2}} = [\text{ταχύτητα}]$$

Άρα οι διαστάσεις της (1) είναι σωστές.

Στο δεξί μέλος της $x(t)$ (σχέση 2) οι όροι $\frac{3}{2}v_0 t$ και $-2v_0 t_0$ έχουν διαστάσεις:

$$[\text{ταχύτητα}][\text{χρόνος}] = \frac{[\text{μήκος}]}{\cancel{[\text{χρόνος}]}}\cancel{[\text{χρόνος}]} = [\text{μήκος}]$$

ενώ ο όρος $\frac{v_0 t_0^2}{2t}$ έχει διαστάσεις:

$$\frac{[\text{ταχύτητα}][\text{χρόνος}]^2}{\cancel{[\text{χρόνος}]}} = \frac{[\text{μήκος}]}{\cancel{[\text{χρόνος}]}}\cancel{[\text{χρόνος}]} = [\text{μήκος}]$$

Άρα οι διαστάσεις της (2) είναι σωστές.

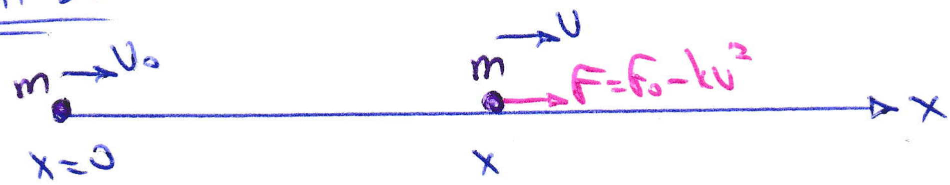
3) Στο όριο $t\to\infty$ παίρνουμε:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{3}{2}v_0 - \frac{v_0 t_0^2}{2t^2}\right) = \frac{3}{2}v_0$$

και $$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{3}{2}v_0 t - 2v_0 t_0 + \frac{v_0 t_0^2}{2t}\right) = +\infty$$

Άρα κατά την κίνηση του υλικού σημείου η ταχύτητά του τείνει στην τιμή $\frac{3}{2}v_0$ και συνεχώς απομακρύνεται απ' την αρχή του άξονα x (αρχική θέση).

ΑΣΚΗΣΗ 2



Η οριακή ταχύτητα του σωματιδίου αποτελεί τη μέγιστη ταχύτητά του και την αποκτά όταν η επιτάχυνσή του μηδενίζεται, δηλαδή τη στιγμή αυτή ο $2^{ος}$ νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \xrightarrow{\vec{\alpha}=0} F_0 - k\upsilon_{op}^2 = 0 \rightarrow F_0 = k\upsilon_{op}^2 \rightarrow \upsilon_{op}^2 = \frac{F_0}{k} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\upsilon_{op} = \sqrt{\frac{F_0}{k}}}$$

Ενώ ο $2^{ος}$ νόμος του Newton σε μια τυχαία θέση x του υλικού σημείου δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \rightarrow F_0 - k\upsilon^2 = m\underbrace{\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d\upsilon}{dx}\overbrace{\frac{dx}{dt}}^{\upsilon}}_{\text{κανόνας αλυσίδας!!}} \rightarrow$$

$$\rightarrow F_0 - k\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \rightarrow \int_0^x dx = m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{\upsilon\, d\upsilon}{F_0 - k\upsilon^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x\Big|_0^x = \frac{m}{-2k}\ln(F_0 - k\upsilon^2)\Big|_{\upsilon_0}^{\upsilon} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = -\frac{m}{2k}\ln\left(\frac{F_0 - k\upsilon^2}{F_0 - k\upsilon_0^2}\right) \rightarrow -\frac{2k}{m}x = \ln\left(\frac{F_0 - k\upsilon^2}{F_0 - k\upsilon_0^2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{-\frac{2k}{m}x} = \frac{F_0 - ku^2}{F_0 - ku_0^2} \rightarrow e^{-\frac{2k}{m}x}(F_0 - ku_0^2) = F_0 - ku^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow ku^2 = F_0 - (F_0 - ku_0^2)\, e^{-\frac{2k}{m}x} \rightarrow$$

$$\rightarrow u^2 = \frac{F_0}{k} - \left(\frac{F_0}{k} - u_0^2\right) e^{-\frac{2k}{m}x} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{u(x) = \sqrt{\frac{F_0}{k} - \left(\frac{F_0}{k} - u_0^2\right) e^{-\frac{2k}{m}x}}}$$

Από τη συνάρτηση $u(x)$ παρατηρείται ότι για $x \rightarrow \infty$ είναι $e^{-\frac{2k}{m}x} = e^{-\infty} \rightarrow 0$ και $u \rightarrow \sqrt{\frac{F_0}{k}} = u_{op.}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Α) Η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι:

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{1}{2}2t\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k} \rightarrow \boxed{\vec{\upsilon}=t\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}} \quad (1)$$

με μέτρο: $|\vec{\upsilon}|=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2}=\sqrt{t^2+2^2+1^2} \rightarrow \boxed{|\vec{\upsilon}|=\sqrt{t^2+5}} \quad (2)$

Ενώ η επιτάχυνση του υλικού σημείου είναι:

$$\vec{\alpha}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \boxed{\vec{\alpha}=\vec{i}}$$

με μέτρο: $|\vec{\alpha}|=\sqrt{1^2} \Rightarrow \boxed{|\vec{\alpha}|=1\,m/s^2} \quad (3)$

Β) Το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης είναι:

$$\alpha_\varepsilon=\frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt} \overset{(2)}{=} \frac{d}{dt}\left(\sqrt{t^2+5}\right)=\frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{t^2+5}} \rightarrow \boxed{\alpha_{\varepsilon(t)}=\frac{t}{\sqrt{t^2+5}}} \quad (4)$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι:

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\alpha_\kappa^2+\alpha_\varepsilon^2} \overset{(3)}{\longrightarrow} 1=\sqrt{\alpha_\kappa^2+\alpha_\varepsilon^2} \rightarrow 1=\alpha_\kappa^2+\alpha_\varepsilon^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha_\kappa^2=1-\alpha_\varepsilon^2 \overset{(4)}{\longrightarrow} \alpha_\kappa^2=1-\frac{t^2}{t^2+5}=\frac{\cancel{t^2}+5-\cancel{t^2}}{t^2+5} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha_\kappa^2=\frac{5}{t^2+5} \rightarrow \boxed{\alpha_{\kappa(t)}=\sqrt{\frac{5}{t^2+5}}} \quad (5)$$

ϛ) Η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς θα βρεθεί απ' τον ορισμό του μέτρου της κεντρομόλου επιτάχυνσης, ως:

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{\upsilon^2}{\alpha_\kappa} \xrightarrow{(2),(5)} \rho = \frac{t^2+5}{\sqrt{\frac{5}{t^2+5}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\rho = \frac{(t^2+5)^{3/2}}{\sqrt{5}}} \quad (6)$$

Ενώ η καμπυλότητα της τροχιάς είναι:

$$\chi = \frac{1}{\rho} \xrightarrow{(6)} \boxed{\chi = \frac{\sqrt{5}}{(t^2+5)^{3/2}}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Από τον ορισμό της επιτάχυνσης προκύπτει:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow 6t\vec{i} + 3\cos t\,\vec{j} - 2\sin t\,\vec{k} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t \left(6t\vec{i} + 3\cos t\,\vec{j} - 2\sin t\,\vec{k}\right) dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{v}\Big|_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} = 6\frac{t^2}{2}\vec{i} + 3\sin t\,\vec{j} + 2\cos t\,\vec{k}\Big|_0^t \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = 3t^2\vec{i} + 3(\sin t - \overset{0}{\cancel{\sin 0}})\vec{j} + 2(\cos t - \overset{1}{\cancel{\cos 0}})\vec{k} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + 3t^2\vec{i} + 3\sin t\,\vec{j} + 2(\cos t - 1)\vec{k} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{v} = 3\vec{j} + \cancel{2\vec{k}} + 3t^2\vec{i} + 3\sin t\,\vec{j} + 2\cos t\,\vec{k} - \cancel{2\vec{k}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = 3t^2\vec{i} + 3(\sin t + 1)\vec{j} + 2\cos t\,\vec{k}} \quad (1)$$

Ενώ από τον ορισμό της ταχύτητας προκύπτει:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \xrightarrow{(1)} 3t^2\vec{i} + 3(\sin t + 1)\vec{j} + 2\cos t\,\vec{k} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \left[3t^2\vec{i} + 3(\sin t + 1)\vec{j} + 2\cos t\,\vec{k}\right] dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{r}\Big|_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} = \cancel{3}\frac{t^3}{\cancel{3}}\vec{i} + 3(-\cos t + t)\vec{j} + 2\sin t\,\vec{k}\Big|_0^t \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = t^3\vec{i} + 3(-\cos t + \overset{1}{\cancel{\cos 0}} + t)\vec{j} + 2(\sin t - \overset{0}{\cancel{\sin 0}})\vec{k} \rightarrow$$

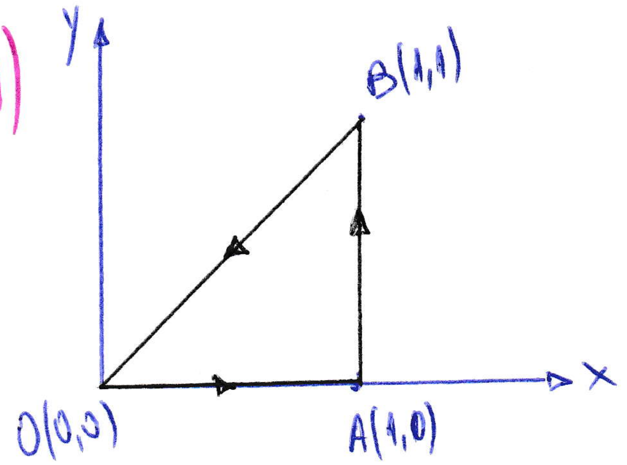
$$\rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t^3\vec{i} + 3(t - \cos t)\vec{j} + 2\sin t\,\vec{k} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{r} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + t^3\vec{i} + 3(t - \cos t)\vec{j} + 2\sin t\,\vec{k} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{r}_{(t)} = (2 + t^3)\vec{i} + 3(t - \cos t - 1)\vec{j} + 2\sin t\,\vec{k}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

A)



Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ κατά μήκος του τριγώνου ΟΑΒΟ είναι:

$$W_{OABO} = W_{OA} + W_{AB} + W_{BO} \quad (1)$$

όπου το έργο σε κάθε πλευρά είναι:

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int (x^2 y\,\vec{i} + y^2 x\,\vec{j})\cdot(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}) \rightarrow$$

$$\rightarrow W = \int x^2 y\,dx + y^2 x\,dy \quad (2)$$

Αλλά στην διαδρομή ΟΑ είναι: $y=0 \rightarrow dy=0$ οπότε η (2) δίνει:

$$W_{OA} = \int_{(0,0)}^{(1,0)} x^2 \cancelto{0}{y}\,dx + \cancelto{0}{y^2}\,x\,\cancelto{0}{dy} \rightarrow W_{OA} = 0 \quad (3)$$

Στη διαδρομή ΑΒ είναι: $x=1 \rightarrow dx=0$ οπότε η (2) δίνει:

$$W_{AB} = \int_{(1,0)}^{(1,1)} x^2 y\,\cancelto{0}{dx} + y^2 \cancelto{1}{x}\,dy = \int_{y=0}^{1} y^2 dy = \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 \rightarrow W_{AB} = \frac{1}{3}\,J \quad (4)$$

Στη διαδρομή ΒΟ κινείται κατά μήκος της ευθείας $y=x \rightarrow$
$\rightarrow dy=dx$ οπότε η (2) δίνει:

$$W_{BO} = \int_{(1,1)}^{(0,0)} x^2 y\, dx + y^2 x\, dy = \int_{x=1}^{0} x^2 x\, dx + x^2 x\, dx = 2\int_1^0 x^3 dx =$$

$$= 2\frac{x^4}{4}\Big|_1^0 = 0 - \frac{1}{2} \longrightarrow W_{BO} = -\frac{1}{2} J \quad (5)$$

Άρα η (1) λόγω των (3), (4), (5) δίνει:

$$W_{OABO} = 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} \longrightarrow \boxed{W_{OABO} = -\frac{1}{6} J}$$

β) Ο στροβιλισμός της δύναμης $\vec{F}$ είναι:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \overset{+}{\vec{i}} & \overset{-}{\vec{j}} & \overset{+}{\vec{k}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 y & y^2 x & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-0) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(y^2 - x^2) =$$

$$= (y^2 - x^2)\vec{k} \neq 0$$

Συνεπώς η δύναμη είναι μη διατηρητική και για το λόγο αυτό το έργο της κατά μήκος της κλειστής διαδρομής OABO δεν είναι μηδενικό.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Είναι: $$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \overset{+}{\vec{i}} & \overset{-}{\vec{j}} & \overset{+}{\vec{k}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -yze^{-x} & ze^{-x} & ye^{-x} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(e^{-x} - e^{-x}\right) - \vec{j}\left(-ye^{-x} + ye^{-x}\right) + \vec{k}\left(-ze^{-x} + ze^{-x}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$$

Δηλαδή η δύναμη $\vec{F}$ είναι διατηρητική και απορρέει από δυναμική συνάρτηση U (δυναμική ενέργεια) μέσω της σχέσης:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \rightarrow e^{-x}\left(-yz\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}\right) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = yze^{-x} & (1) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = -ze^{-x} & (2) \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = -ye^{-x} & (3) \end{cases}$$

Οπότε από την (1) προκύπτει:

$$\int \partial U = yz\int e^{-x}\partial x \rightarrow U = -yze^{-x} + C(y,z) \quad (4)$$

Παραγωγίζουμε την (4) ως προς y και προκύπτει:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -ze^{-x} + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} \xrightarrow{(2)} -\cancel{ze^{-x}} = -\cancel{ze^{-x}} + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = 0 \rightarrow C(y,z) = C(z) \quad (5)$$

Οπότε η (4) λόγω της (5) γίνεται: $U = -yze^{-x} + C(z)$ (6)

Ενώ παραγωγίζοντας την (6) ως προς z προκύπτει:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -ye^{-x} + \frac{\partial C(z)}{\partial z} \xrightarrow{(3)} -\cancel{ye^{-x}} = -\cancel{ye^{-x}} + \frac{\partial C(z)}{\partial z} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial C(z)}{\partial z} = 0 \rightarrow C(z) = C \quad (7)$$

Άρα η (6) λόγω της (7) δίνει τη δυναμική συνάρτηση:

$$\boxed{U_{(x,y,z)} = -yze^{-x} + C}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7.

Θα πρέπει αρχικά να κατασκευάσουμε το διάγραμμα της $U(x)$.

Ακρότατα της $U(x)$:

$$\frac{dU}{dx}=0 \rightarrow -4x+\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}}=0 \rightarrow x(x-4)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$ Θέσεις ισορροπίας

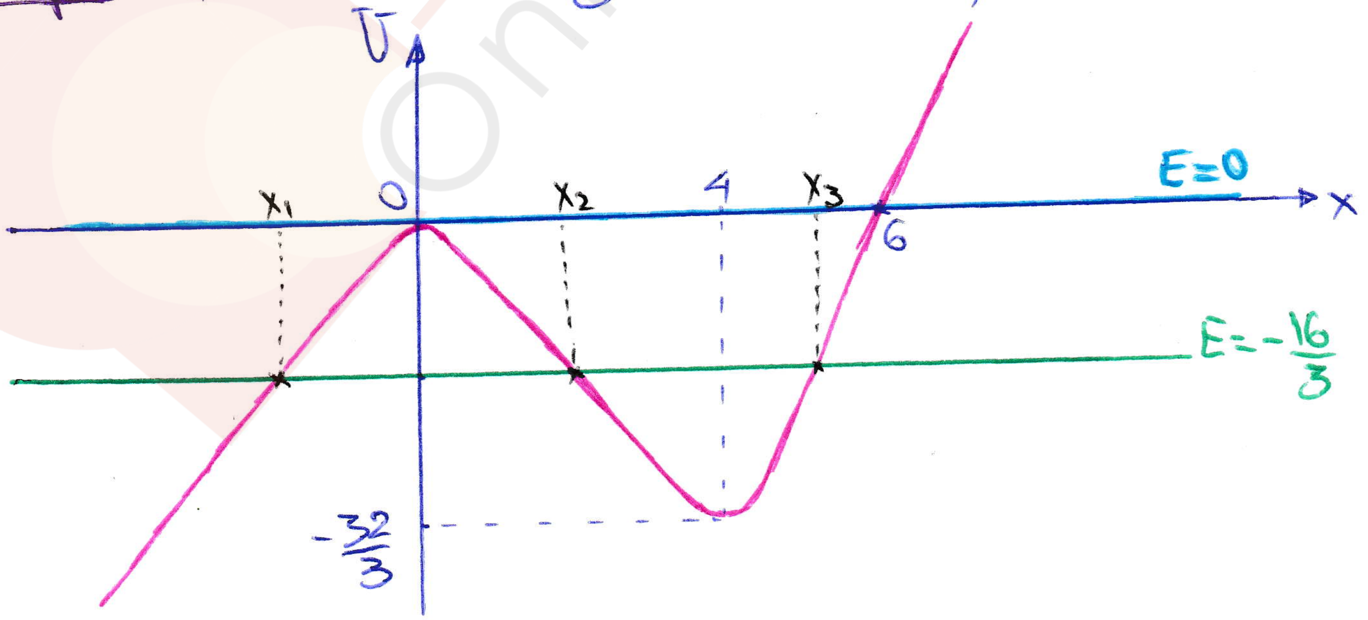
Χαρακτηρισμός ακροτάτων:

$$\frac{d^2U}{dx^2}=-4+2x$$ οπότε:

- $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0}=-4<0$ δηλαδή το $x=0$ είναι max θέση ασταθούς ισορροπίας με $U(x=0)=0$

- $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=4}=-4+2\cdot 4=4>0$ δηλαδή το $x=4$ είναι μια θέση ευσταθούς ισορροπίας με $U(x=4)=-2\cdot 4^2+\frac{4^3}{3}=-32+\frac{64}{3}=-\frac{96+64}{3}=-\frac{32}{3}$

Σημεία τομής: $U(x)=0 \rightarrow -2x^2+\frac{x^3}{3}=0 \rightarrow x^2\left(\frac{x}{3}-2\right)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}$



A) Σύμφωνα με το διάγραμμα της $U_{(x)}$ αν η ολική ενέργεια του υλικού σημείου είναι $E=-\frac{16}{3}$ οι επιτρεπτές περιοχές κίνησης είναι $-\infty<x<x_1$ ή $x_2\leq x\leq x_3$, όπου x_1, x_2, x_3 οι λύσεις της εξίσωσης $U_{(x)}=E \rightarrow$

$$\rightarrow -2x^2+\frac{x^3}{3}=-\frac{16}{3} \rightarrow -6x^2+x^3=-16 \rightarrow x^3-6x^2+16=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-2)(x^2-4x-8)=0 \rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x_2=2 \\ x^2-4x-8=0 \text{ δηλ. } x=\frac{4\pm\sqrt{16+32}}{2}= \end{cases}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{48}}{2}=\frac{4\pm4\sqrt{3}}{2} \rightarrow x=2\pm2\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x_1=2-2\sqrt{3} \\ x_3=2+2\sqrt{3} \end{cases}$$

Άρα οι επιτρεπτές περιοχές κίνησης είναι:

$\boxed{-\infty<x<2-2\sqrt{3}}$ ή $\boxed{2\leq x\leq 2+2\sqrt{3}}$

Στην περιοχή $2\leq x\leq 2+2\sqrt{3}$ η κίνηση είναι περατωμένη, καθώς το υλικό σημείο εκτελεί ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας $x=4$.

B) Σύμφωνα με το διάγραμμα της $U_{(x)}$ αν η ολική ενέργεια του υλικού σημείου είναι $E=0$ οι επιτρεπτές περιοχές κίνησης είναι:

$\boxed{-\infty<x\leq 0}$ ή $\boxed{0\leq x\leq 6}$

Στην περιοχή $0\leq x\leq 6$ η κίνηση είναι περατωμένη, καθώς το υλικό σημείο εκτελεί ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας $x=4$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Α) Για $k=10$ και $\alpha=2$ η δύναμη γίνεται:

$$F=10\left(\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)\rightarrow F=\frac{40}{x^3}-\frac{10}{x^2} \quad (1)$$

Η δυναμική συνάρτηση U υπολογίζεται από τη δύναμη μέσω της σχέσης:

$$F=-\frac{dU}{dx}\xrightarrow{(1)}\frac{40}{x^3}-\frac{10}{x^2}=-\frac{dU}{dx}\rightarrow\int_0^U dU=\int_\infty^x\left(\frac{10}{x^2}-\frac{40}{x^3}\right)dx\rightarrow$$

$$\rightarrow U=\frac{-10}{x}+\frac{40}{2x^2}\rightarrow U_{(x)}=\frac{20}{x^2}-\frac{10}{x} \quad (2)$$

Ακρότατα:

$$\frac{dU}{dx}=0\xrightarrow{(2)}-2\cdot\frac{20}{x^3}+\frac{10}{x^2}=0\rightarrow\frac{40}{x^{\cancel{3}}}=\frac{10}{\cancel{x^2}}\rightarrow x=4.$$ θέση ισορροπίας

Χαρακτηρισμός ακροτάτου:

$$\frac{d^2U}{dx^2}=\frac{120}{x^4}-\frac{20}{x^3}$$ οπότε:

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=4}=\frac{120}{4^4}-\frac{20}{4^3}=\frac{120}{256}-\frac{20}{64}=\frac{120-80}{256}=\frac{40}{256}=\frac{10}{64}>0$$

Δηλ. στο $x=4$ η $U_{(x)}$ παρουσιάζει min και αποτελεί θέση ευσταθούς ισορροπίας.

Είναι: $U_{(x=4)}=\frac{20}{4^2}-\frac{10}{4}=\frac{20-40}{16}=-\frac{20}{16}=-\frac{5}{4}$

Σημεία τομής: $U_{(x)}=0\xrightarrow{(2)}\frac{20}{x^2}-\frac{10}{x}=0\rightarrow\frac{20}{x^{\cancel{2}}}=\frac{10}{\cancel{x}}\rightarrow x=2$

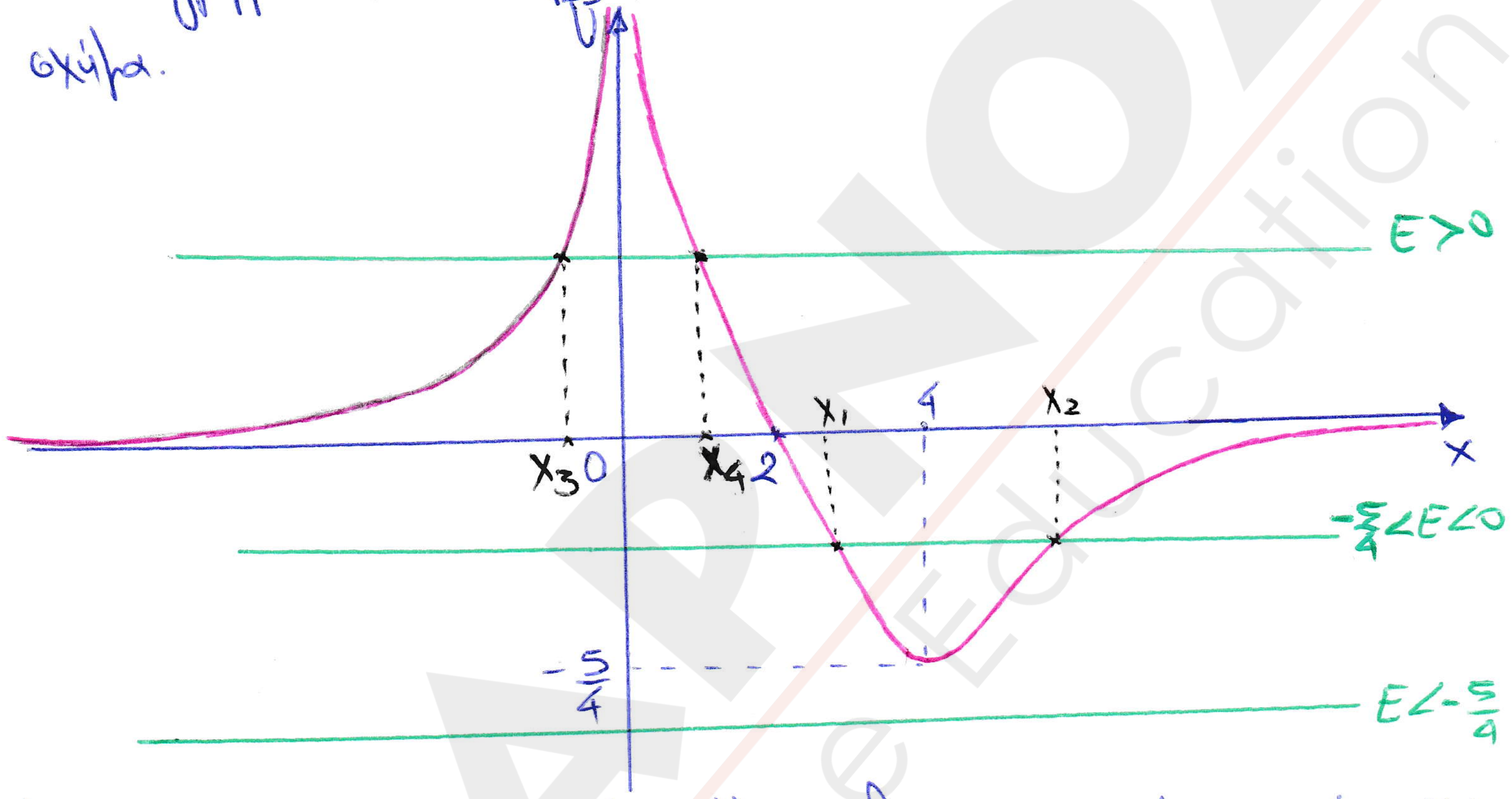
Επίσης στα όρια: $x \to 0^+ : U \to \infty$

$x \to +\infty : U \to 0$

$x \to 0^- : U \to \infty$

$x \to -\infty : U \to 0$

Το διάγραμμα της δυναμικής συνάρτησης φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Β) Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα η διερεύνηση πρέπει να γίνει για τις ακόλουθες τιμές της μηχανικής ενέργειας Ε:

1) Αν $E < -\frac{5}{4}$ τότε η κίνηση του υλικού σημείου είναι αδύνατη.

2) Αν $E = -\frac{5}{4}$ τότε το υλικό σημείο επιτρέπεται να βρίσκεται ακίνητο στη θέση ευσταθούς ισορροπίας $x = 4$.

3) Αν $-\frac{5}{4} < E < 0$ τότε το υλικό σημείο επιτρέπεται να κινείται στην περιοχή $x_1 \le x \le x_2$, όπου x_1, x_2 τα σημεία τομής της $V(x)$

Συνδηλώ οι λύσεις της εξίσωσης $U(x) = E$.
Η κίνηση είναι περιορισμένη και το υλικό σημείο εκτελεί ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας $x=4$.

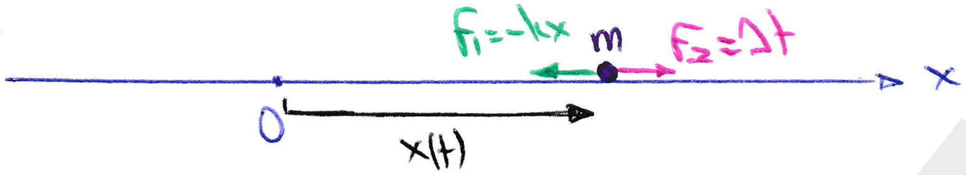
4) Αν $E=0$ τότε η επιτρεπτή περιοχή κίνησης είναι $2 \leq x < +\infty$.

5) Αν $E>0$ τότε οι επιτρεπτές περιοχές κίνησης είναι:

$-\infty < x \leq x_3$ ή $x_4 \leq x < +\infty$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Α)



Ο 2ος νόμος του Newton για την κίνηση του υλικού σημείου είναι:

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{\alpha} \rightarrow -kx + \lambda t = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{\lambda}{m}t \rightarrow$$

$$\rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{\lambda}{m}t \qquad (1)$$

Η διαφορική εξίσωση κίνησης (1) του υλικού σημείου αποτελεί μια μη ομογενή διαφορική εξίσωση 2ης τάξης και περιγράφει την εξαναγκασμένη ταλάντωση που εκτελεί το υλικό σημείο.

Η γενική λύση της (1) ισούται με τη λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης και μιας μερικής λύσης. Δηλαδή:

$$x(t) = x_{ομογενούς} + x_{μερικής} \qquad (2)$$

όπου $x_{ομογενούς} = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$ (3)

και τη μερική λύση την καθορίζει το μη ομογενές κομμάτι της (1)

οπότε: $x_{μερικής} = Bt$ (4) και $\ddot{x}_{μερικής} = 0$ (5)

Επειδή η μερική λύση $x_{μερική}$ πρέπει να επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση (1) αν αντικαταστήσουμε τις (4), (5) στην (1) προκύπτει:

$$\cancel{\ddot{x}_{\mu\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}\varsigma}}^{\,0} + \frac{k}{m} x_{\mu\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}\varsigma} = \frac{\lambda}{m} t \rightarrow \frac{k}{\cancel{m}} B\cancel{t} = \frac{\lambda}{\cancel{m}} \cancel{t} \rightarrow B = \frac{\lambda}{k} \quad (6)$$

Οπότε η (4) λόγω της (6) δίνει:

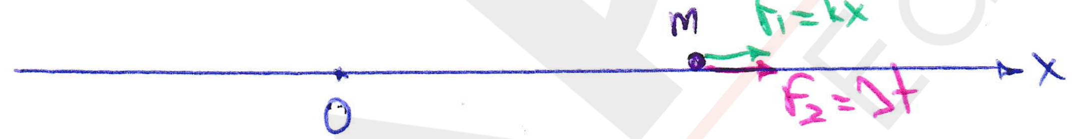
$$x_{\mu\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}\varsigma} = \frac{\lambda}{k} t \quad (7)$$

Άρα η (2) λόγω των (3) και (7) δίνει:

$$\boxed{x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right) + \frac{\lambda}{k} t.}$$

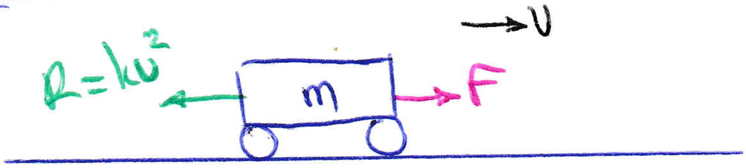
όπου οι σταθερές A και φ προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες $x(t=0)$ και $\upsilon(t=0)$.

B)



Αν η F_1 αντιστρέψει τη φορά της τότε το υλικό σημείο θα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση και συνεχώς θα απομακρύνεται από την αρχή του άξονα x προς το $+\infty$.

ΑΣΚΗΣΗ 10



Η σταθερή ισχύς $P=30kW$ που αποδίδει η μηχανή του οχήματος αντιστοιχεί σε δύναμη F που ασκείται σ' αυτό τέτοια ώστε:

$$P=\frac{dW}{dt}=\frac{\vec{F}\cdot d\vec{x}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv\cancelto{1}{\cos 0}\to P=Fv\to$$

$$\to F=\frac{P}{v}\quad(1)$$

Η δύναμη της αντίστασης είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας δηλαδή $R=kv^2$ και όταν το όχημα αναπτύσσει τη μέγιστη ταχύτητά του v_{max} η επιτάχυνσή του μηδενίζεται και ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_x=0\to F-R=0\xrightarrow{(1)}\frac{P}{v_{max}}-kv_{max}^2=0\to\frac{P}{v_{max}}=kv_{max}^2\to$$

$$\to k=\frac{P}{v_{max}^3}\quad(2)$$

Κατά την κίνηση του οχήματος όταν η ταχύτητά του μεταβάλλεται από $v_1=10m/s$ σε $v_2=20m/s$ ο 2ος νόμος Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F}_x=m\vec{a}\to F-R=ma\xrightarrow{(1)}\frac{P}{v}-kv^2=m\frac{dv}{dt}=\underbrace{m\frac{dv}{dx}\overbrace{\frac{dx}{dt}}^{v}}_{\text{κανόνας αλυσίδας!!}}\to$$

$$\to \frac{P}{\upsilon} - k\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \to$$

$$\to P - k\upsilon^3 = m\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon^2 \to dx = m\frac{\upsilon^2 d\upsilon}{P - k\upsilon^3} \xrightarrow{(2)}$$

$$\to \int_0^S dx = \frac{m}{P}\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2}\frac{\upsilon^2 d\upsilon}{1 - \frac{\upsilon^3}{\upsilon_{max}^3}} \to$$

$$\to S = \frac{m}{P}\left[-\frac{\upsilon_{max}^3}{3}\ln\left(1 - \frac{\upsilon^3}{\upsilon_{max}^3}\right)\right]_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \Rightarrow$$

$$\to S = -\frac{m\upsilon_{max}^3}{3P}\left[\ln\left(1 - \frac{\upsilon_2^3}{\upsilon_{max}^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{\upsilon_1^3}{\upsilon_{max}^3}\right)\right] \to$$

$$\to S = -\frac{1000kg\cdot(40m/s)^3}{3\cdot 30000W}\left[\ln\left(1 - \frac{20^3}{40^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{10^3}{40^3}\right)\right] =$$

$$= -\frac{64000}{90}\left(\underbrace{\ln 0{,}875}_{-0{,}133} - \underbrace{\ln 0{,}984}_{-0{,}016}\right) = -\frac{6400}{9}(-0{,}117)m \to$$

$$\to \boxed{S = 83{,}2m}$$