

Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακαδημαϊκό Έτος 2021-2022

Εργασία 1η

Συνδυαστική

*Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η περαιτέρω εξοικείωση με τις σημαντικότερες μεθόδους και ιδέες της συνδυαστικής. Η εργασία πρέπει να γραφεί ηλεκτρονικά και να υποβληθεί μέσω του ηλεκτρονικού χώρου εκπαιδευτικής διαδικασίας study.eap.gr μέχρι την **Τετάρτη, 17/11/2021**.*

Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. Προτού υποβάλετε οριστικά την εργασία σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής στην πρώτη σελίδα του **συνοδευτικού αρχείου απαντήσεων**. Για να συμπληρώσετε π.χ. το όνομα κάντε διπλό κλικ στο σκιασμένο πεδίο <Όνομα Φοιτητή> και στη φόρμα που θα εμφανιστεί, στη θέση του προεπιλεγμένου κειμένου, συμπληρώστε το όνομά σας. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για κάθε σκιασμένο πεδίο του πρώτου μέρους της σελίδας που αναφέρεται στην υποβολή της εργασίας.
2. Στο **συνοδευτικό αρχείο απαντήσεων** πρέπει να **προσθέσετε** τις απαντήσεις σας στο χώρο κάτω από το εκάστοτε ερώτημα εκεί όπου περιέχεται η φράση:
<Χώρος Απάντησης (Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)>
την οποία μπορείτε να σβήσετε. Μπορείτε να διαμορφώσετε το χώρο όπως επιθυμείτε, δεν υπάρχει περιορισμός στον χώρο που θα καταλάβει η απάντησή σας.
3. Η εργασία περιλαμβάνει **5** βαθμολογούμενα ερωτήματα (1-5), στα οποία πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.
4. **Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε και την επίλυση και άλλων ασκήσεων από το βοηθητικό υλικό αλλά και από παλαιότερες εξετάσεις.** Σε αυτό μπορούν να σας βοηθήσουν και οι ακόλουθες ασκήσεις από αυτό το υλικό:

Προηγούμενες εργασίες: των τελευταίων ετών (2010-2021).

Προηγούμενα θέματα τελικών εξετάσεων: Ας προηγηθούν στη μελέτη σας οι εξετάσεις των τελευταίων ετών (2010-2021).

Ε ρ ω τ ή μ α τ α

Ερώτημα 1. Βασικές Τεχνικές Συνδυαστικής (μέγιστος βαθμός: 20)

Στο ερώτημα αυτό έχει σημασία να προσδιορίσετε το είδος του κάθε προβλήματος (άθροισμα, γινόμενο, επιλογές μη διατεταγμένων ή διατεταγμένων πλειάδων, διατάξεις, μεταθέσεις ομάδων όμοιων αντικειμένων, ρίψη σφαιριδίων σε κουτιά, κ.λ.π.) και στη συνέχεια να εφαρμόσετε τους κατάλληλους συνδυαστικούς τύπους.

Συνοδεντικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: #1, #2, #3, #4,#5, #6, #7, #8

Το PIN του κινητού είναι ένας τετραψήφιος αριθμός της μορφής ABCD. Να υπολογιστεί πόσα διαφορετικά PIN μπορούν να σχηματιστούν με χρήση ψηφίων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, εάν επιπλέον:

(1α)

Πρέπει όλα τα ψηφία του PIN να είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

(1β)

Το ψηφίο 3 πρέπει να εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές.

(1γ)

Στο PIN πρέπει τουλάχιστον ένα ψηφίο να είναι πρώτος αριθμός.

(1δ)

Το τελευταίο ψηφίο δεν επιτρέπεται να είναι το 0, ενώ επίσης δεν επιτρέπονται δυο διαδοχικές εμφανίσεις του 0.

Υπόδειξη: Για το (1γ), υπενθυμίζεται ότι ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται πρώτος αν είναι τουλάχιστον ίσος με το 2 και διαιρείται ακέραια μόνο από τον εαυτό του και τη μονάδα. Για το (1δ), προτείνεται να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για την εμφάνιση του ψηφίου 0 στο PIN.

Ερώτημα 2. Προβλήματα Συνδυαστικής (μέγιστος βαθμός: 25)

Το ερώτημα αυτό θα σας δώσει την ευκαιρία να εξασκηθείτε περισσότερο στην επιλογή των κατάλληλων τύπων σε προβλήματα συνδυαστικής.

Συνοδεντικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: #1, #2, #3, #4, #5, #6, #7, #8

Σε μια εταιρεία εργάζονται 11 άντρες και 9 γυναίκες, από τους οποίους οι 7 άντρες και οι 8 γυναίκες γνωρίζουν αγγλικά. Επιπλέον, 3 από τους άντρες βρίσκονται σε δικαστική διαμάχη μεταξύ τους και 2 από τις γυναίκες έχουν συγγενική σχέση.

(2α)

Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια πενταμελής ομάδα εργασίας με ισότιμα μέλη, εάν:

(2α1) Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

(2α2) Πρέπει να συμμετέχουν ακριβώς 3 γυναίκες και τουλάχιστον ένας από τους άντρες να γνωρίζει αγγλικά.

(2α3) Μπορεί να συμμετέχει το πολύ ένας από τους εργαζόμενους που βρίσκονται σε δικαστική διαμάχη.

(2β)

Ποια είναι η πιθανότητα σε μια ομάδα εργασίας που σχηματίστηκε εντελώς τυχαία, να συμμετέχουν οι δύο γυναίκες που έχουν συγγενική σχέση μεταξύ τους;

(2γ)

Ποια είναι η πιθανότητα, σε μια ομάδα εργασίας στην οποία συμμετέχουν το πολύ δύο γυναίκες, όλοι οι συμμετέχοντες να γνωρίζουν αγγλικά;

(2δ)

Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν όλοι οι άνδρες και όλες οι γυναίκες σε μια στρογγυλή τράπεζα, εάν καθένας / καθεμιά ενδιαφέρεται ποιος/ποια κάθεται στα δεξιά και ποιος/ποια κάθεται αριστερά του/της, και δεν επιτρέπεται να καθίσουν δυο γυναίκες σε διαδοχικές θέσεις;

Υπόδειξη: Για το (2δ), προτείνεται να τοποθετήσετε πρώτα τους 11 άνδρες στο τραπέζι. Τοποθετήστε στη συνέχεια στο τραπέζι τις 9 γυναίκες, ώστε να μην εμφανιστούν περισσότερες από μία γυναίκες ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς άνδρες.

Ερώτημα 3. Γεννήτριες Συναρτήσεις (μέγιστος βαθμός: 20)

Το ερώτημα θα σας δώσει την ευκαιρία να εξασκηθείτε στην ανάπτυξη γεννητριών συναρτήσεων. Θα πρέπει να εξετάσετε αν πρέπει να γίνει χρήση απλής ή εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης, και να αναγνωρίσετε τον συντελεστή του κατάλληλου όρου που δίνει το σωστό αποτέλεσμα. Εξαιρετικά χρήσιμη σε αυτές της ασκήσεις είναι η ικανότητα μετασχηματισμού σε ισοδύναμα προβλήματα (π.χ. κατανομή μπαλών σε υποδοχές).

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: #7, #8, #9, #10

Στην ΠΛΗ20 υπάρχουν 400 φοιτητές και έχουν δημιουργηθεί 12 τμήματα. Από τους φοιτητές, οι 320 παρακολουθούν τη θεματική ενότητα για πρώτη φορά και έχουν υποχρέωση υποβολής εργασιών, ενώ οι υπόλοιποι 80 έχουν κατοχυρώσει εργασίες.

(3α)

Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση που βρίσκει τους τρόπους κατανομής των φοιτητών στα τμήματα και να προσδιοριστεί ο όρος του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο, όταν:

(3α1) Απαιτείται όλα τα τμήματα να έχουν από 30 έως 40 φοιτητές και δεν έχει σημασία η σειρά κατανομής των φοιτητών σε κάθε τμήμα.

(3α2) Απαιτείται όλα τα τμήματα να έχουν τουλάχιστον 25 φοιτητές και όσα έχουν άρτιο αριθμό (δηλ. το 2^ο, το 4^ο, το 6^ο ... τμήμα) να έχουν άρτιο πλήθος

φοιτητών.

(3α3) Μας ενδιαφέρει μόνο η κατανομή των φοιτητών που παρακολουθούν το μάθημα για πρώτη φορά, οι οποίοι απαιτείται να κατανεμηθούν στα πρώτα 10 τμήματα ώστε κανένα τμήμα να μην είναι κενό και να μην περιέχει περισσότερους από 35 φοιτητές, αλλά να έχει σημασία η σειρά τοποθέτησής τους σε κάθε τμήμα.

(3β)

Δημιουργείται πιλοτικά **ένα** τμήμα επίλυσης αποριών στο οποίο ο καθηγητής υπολογίζεται ότι θα έχει φόρτο εργασίας 4 ώρες για κάθε φοιτητή που παρακολουθεί την ενότητα για πρώτη φορά και 1 ώρα για κάθε φοιτητή που έχει κατοχυρώσει εργασίες. Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση που βρίσκει τους τρόπους επιλογής διαφόρων συνδυασμών από νέους και παλιούς φοιτητές που θα συμμετάσχουν στο τμήμα επίλυσης αποριών, δίχως να ενδιαφέρει ακριβώς ποιοι είναι οι συγκεκριμένοι φοιτητές παρά μόνο πόσοι είναι οι φοιτητές από κάθε κατηγορία, ώστε ο καθηγητής που θα αναλάβει το συγκεκριμένο τμήμα να έχει συνολικό φόρτο εργασίας 250 ώρες. Να προσδιοριστεί επίσης ο όρος του οποίου ο συντελεστής δίνει τη ζητούμενη μέτρηση.

Ερώτημα 4. Αναδρομή & Επαγωγή (μέγιστος βαθμός: 25)

Το ερώτημα αυτό θα σας δώσει την ευκαιρία να εξασκηθείτε στην επίλυση αναδρομικών σχέσεων μέσω μαθηματικής επαγωγής και μέσω γεννητριών συναρτήσεων.

Συνοδεντικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: #11, #12, #13, #14

(4α)

Έστω a_0, a_1, a_2, \dots μια ακολουθία ακεραίων αριθμών η οποία ικανοποιεί την αναδρομική σχέση:

$$a_n = 6 \cdot a_{n-1} - 9 \cdot a_{n-2}, \text{ για κάθε } n \geq 2,$$

με αρχικές συνθήκες $a_0 = a_1 = 1$.

Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να αποδείξετε ότι ισχύει ο εξής κλειστός τύπος:

$$a_n = 3^n - \frac{2}{3} \cdot n \cdot 3^n, \text{ για κάθε } n \geq 0.$$

(4β)

Χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις, να βρείτε κλειστό τύπο για την αναδρομική σχέση:

$$b_n = 2 \cdot b_{n-1} + 3 \cdot b_{n-2}, \text{ για κάθε } n \geq 2,$$

με αρχικές συνθήκες $b_0 = b_1 = 1$.

(4γ)

Ο Γιώργος θέλει να πληρώσει σε ένα αυτόματο μηχάνημα τα διόδια της εθνικής οδού χρησιμοποιώντας κέρματα του 1 ευρώ, κέρματα των 2 ευρώ, και κέρματα (έστω ότι υπήρχαν) ή χαρτονομίσματα των 5 ευρώ. Μας ενδιαφέρει η ακολουθία c_0, c_1, c_2, \dots , ο όρος c_n της οποίας υπολογίζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων να πληρωθεί ένα ποσό των n ευρώ στο αυτόματο μηχάνημα με κέρματα του 1 ευρώ, των 2 ευρώ και των 5 ευρώ, καθώς και με χαρτονομίσματα των 5 ευρώ, όταν ενδιαφέρει η σειρά με την οποία ο Γιώργος εισάγει στο μηχάνημα τα κέρματα και τα χαρτονομίσματα που απαρτίζουν το ζητούμενο ποσό.

(4γ1) Να προσδιοριστούν οι αρχικές τιμές της ακολουθίας, $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$.

(4γ2) Να προσδιοριστεί η αναδρομική σχέση που δίνει την τιμή του όρου c_n , για κάθε $n \geq 5$.

(4γ3) Με βάση την αναδρομική σας σχέση, να προσδιορίσετε το πλήθος των τρόπων για να πληρωθεί ένα ποσό των 5 και 6 και ευρώ. Ταιριάζουν οι τιμές που δίνει η αναδρομική σας σχέση με τις αρχικές τιμές που βρήκατε στο **(4γ1)**;

Υπόδειξη: Για το (4γ2), μελετήστε τις αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις που προκύπτουν, ανάλογα με το είδος του τελευταίου (στη σειρά) κέρματος ή χαρτονομίσματος που συνεισφέρει στη συνολική αξία των n ευρώ.

Ερώτημα 5. Επιλογή Σ/Λ (μέγιστος βαθμός: 10)

Το ερώτημα αυτό έχει σκοπό στο να σας εισάγει στην μορφή της εξέτασης με ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα με τέσσερις απαντήσεις το καθένα από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι σωστή ή λάθος. Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας (σωστό η λάθος) σε λιγότερο από 15 λεπτά. Στη συνέχεια όμως θα πρέπει να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, όπως απαιτεί η εκφώνηση του ερωτήματος.

Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους, βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό* (Σ) ή *Λάθος* (Λ) και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

(5α)

1. (Σ / Λ) Σε ένα αλφάβητο με 15 γράμματα υπάρχουν 3.500 διαφορετικές λέξεις 3 γραμμάτων.

2. (Σ / Λ) Το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της ανίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16$ είναι $C(20,4)$.

3. (Σ / Λ) Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους 15 ζευγάρια μπορούν να καθίσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι, χωρίς κανέναν περιορισμό ως προς τη θέση που καταλαμβάνει ο καθένας, αλλά καθένας ενδιαφέρεται ποιος κάθεται αριστερά και ποιος κάθεται δεξιά, είναι ίσοι με $30!$.

4. (Σ / Λ) Ένα σύνολο 100 στοιχείων έχει 9.900 διαφορετικά υποσύνολα με 2 στοιχεία το καθένα.

(5β)

Σε μια εξέταση λαμβάνουν μέρος 350 φοιτητές και υπάρχουν 20 αίθουσες διαθέσιμες χωρίς περιορισμό χωρητικότητας. Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να μοιραστούν οι φοιτητές στις αίθουσες είναι:

1. (Σ / Λ) $P(350,20)$ εάν δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία εισέρχονται οι φοιτητές σε κάθε αίθουσα.

2. (Σ / Λ) Όσοι ο συντελεστής του $x^{350}/350!$ στην παράσταση

$$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{350}}{350!}\right)^{20}$$

εάν δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία εισέρχονται οι φοιτητές σε κάθε αίθουσα.

3. (Σ / Λ) Όσοι ο συντελεστής του $x^{350}/350!$ στην παράσταση

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{350})^{20}$$

εάν έχει σημασία η σειρά με την οποία εισέρχονται οι φοιτητές σε κάθε αίθουσα.

4. (Σ / Λ) Όσοι ο συντελεστής του x^{350} στην παράσταση

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{350})^{20}$$

εάν έχει σημασία η σειρά με την οποία εισέρχονται οι φοιτητές σε κάθε αίθουσα.