



Διεύθυνση: Τσαμαδού 13-15
Τ.Κ. 26222 Πάτρα

Πρόγραμμα : Σπουδές στις Φυσικές Επιστήμες
Θεματική Ενότητα : ΦΥΕ10 (Γενικά Μαθηματικά Ι)
Ημερομηνία Παράδοσης : 10-11-2021

1η Γραπτή Εργασία

Πρωταρχικοί στόχοι της 1ης Εργασίας είναι η κατανόηση:

της απολύτου τιμής πραγματικών αριθμών και των ιδιοτήτων αυτής,
της επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων 2ου βαθμού,
των σχέσεων Vieta,
της έννοιας των μιγαδικών αριθμών,
των πράξεων των μιγαδικών και της αναπαράστασής τους στο μιγαδικό επίπεδο,
των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και των βασικών ιδιοτήτων τους,
της έννοιας του διανύσματος και των πράξεων με διανύσματα,
της έννοιας της συνάρτησης,
της έννοιας του πίνακα και των πράξεων με πίνακες,
της επίλυσης και διερεύνησης γραμμικών συστημάτων με χρήση πινάκων,
της εφαρμογής των πινάκων στη διατύπωση και στη μελέτη φυσικών προβλημάτων.

Με την επιτυχή ολοκλήρωση της εργασίας, οι φοιτητές/τριες θα έχουν αναπτύξει δεξιότητες για:

- να επιλύουν εξισώσεις με απόλυτη τιμή,
- να επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις 2ου βαθμού,
- να κάνουν πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς και να επιλύουν εξισώσεις μιγαδικών,
- να εφαρμόζουν τις τριγωνομετρικές ταυτότητες,

- να επιλύουν βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις,
- να υπολογίζουν το εσωτερικό γινόμενο, το εξωτερικό γινόμενο και την γωνία διανυσμάτων,
- να κάνουν πράξεις με πίνακες,
- να υπολογίζουν το πεδίο ορισμού συναρτήσεων,
- να εκφράζουν ένα γραμμικό σύστημα με χρήση πινάκων,
- να επιλύουν ένα γραμμικό σύστημα με την μέθοδο Gauss, καθώς και με την μέθοδο Cramer,
- να μοντελοποιούν στοιχειώδη προβλήματα και κάνοντας χρήση των ανωτέρω εργαλείων να τα επιλύουν (με ιδιαίτερο βάρος με χρήση μιγαδικών είτε με χρήση διανυσμάτων).

1). α) Να λυθεί η εξίσωση

$$|x^2 + 1| = 2|x - 1|,$$

για πραγματικούς αριθμούς x .

β) Να λυθεί η ανίσωση

$$\left| \frac{2(x+1)}{x^2+1} \right| \leq 1,$$

για πραγματικούς αριθμούς x .

2). α) Να γραφεί ο μιγαδικός αριθμός $z = -1 + i$ στην τριγωνομετρική του μορφή.

β) Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί $w = x + yi$, $x, y \in \mathbf{R}$, που ικανοποιούν

$$|w - 1| = \sqrt{2}|w|.$$

Να παρασταθούν γραφικά στο μιγαδικό επίπεδο, όλοι οι προηγούμενοι μιγαδικοί w .

3) α) Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} 4 \cos^2 x &= 1 \\ 4 \sin^2 x &= 3. \end{aligned}$$

β) Υπολογίστε την παράσταση και αποδείξτε ότι είναι ανεξάρτητη του τόξου x .

$$\sin x + \sin(2\pi/3 + x) + \sin(4\pi/3 + x).$$

4) Θεωρούμε το τριώνυμο $x^2 + bx + 4$. Βρείτε τις τιμές του b για τις οποίες

1. το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες.
2. το τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα.
3. το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.

4. το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών του είναι ίσο με 8.

5) α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$g_1(x) = \ln\left(\frac{1}{-x^2 + 3x - 2}\right), \quad g_2(x) = \sqrt{2x^2 - x - 1}$$

και στη συνέχεια υπολογίστε τη συνάρτηση

$$g_1(g_2(x)).$$

β) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{1-x}, \quad f : (0, 1) \rightarrow (0, \infty).$$

Δείξτε ότι είναι 1-1 και επί και βρείτε την αντίστροφή της.

6). Ξυλουργός κατασκευάζει γραφείο που η επιφάνεια γραφής είναι παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Παρατήρησε δε ότι αν η διαγώνιος του παραλληλογράμμου στην κορυφή Α διχοτομεί την γωνία Α, τότε και η διαγώνιος του παραλληλογράμμου στην κορυφή Β διχοτομεί την γωνία Β. Αποδείξτε τον ισχυρισμό του ξυλουργού.

7). Έστω τα διανύσματα $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (1, 2, 1)$, $\vec{c} = (1, -3, -1)$.

α) Να υπολογιστούν:

$$|\vec{a}|, \quad \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}, \quad \vec{a} \times \vec{b}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b}, \quad \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}).$$

β) Να υπολογίστε το εμβαδό του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα διανύσματα \vec{a} , \vec{b} και τον όγκο του στερεού που ορίζουν τα διανύσματα \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

γ) Γράψτε το διάνυσμα $(3, 5, 3)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

8). α) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν οι 2×2 πίνακες X που ικανοποιούν τη σχέση

$$AX = XA.$$

Επίσης βρείτε ένα 2×2 πίνακα X που ικανοποιεί τη σχέση

$$AX \neq XA.$$

β) Δίνονται οι πίνακες

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \\ a & b \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστεί ο πίνακας CB . Υπάρχει επιλογή στις παραμέτρους x, y, z, w, a, b ώστε ο πίνακας CB να είναι αντιστρέψιμος;

9). Με τη μέθοδο του Cramer βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbf{R}$ ώστε το σύστημα:

$$\begin{aligned}x + 2y &= -1 \\x - y + 3\lambda z &= 2 \\2\lambda x + y + 3z &= 1\end{aligned}$$

α) Έχει άπειρες λύσεις.

β) Έχει ακριβώς μια λύση την οποία και να προσδιορίσετε.

γ) Δεν έχει λύση.

10). Να λυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss το σύστημα

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0 \\x - y + 3z &= 2 \\2x + y + 3z &= 1\end{aligned}$$

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα και βαθμολογούνται με μία μονάδα το καθένα.

Καλή Επιτυχία!