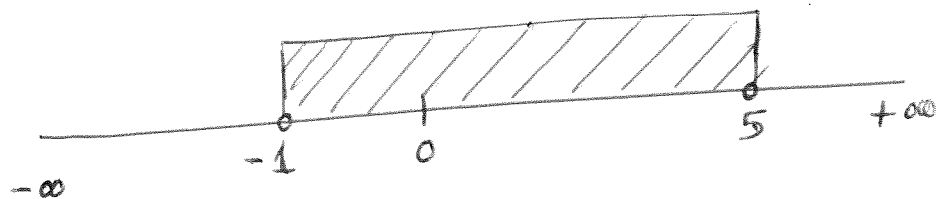


|                            |
|----------------------------|
| ΔΙΠ 40 - 3η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ |
| ΛΥΣΕΙΣ ΑΡΝΟΣ (2021-2022)   |

Άσκηση 1.

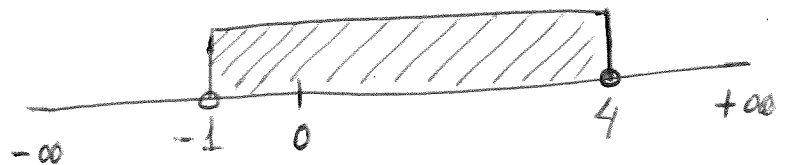
a)  $|x-2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \Leftrightarrow -3+2 < x-2+2 < 3+2$   
 $\Leftrightarrow -1 < x < 5.$



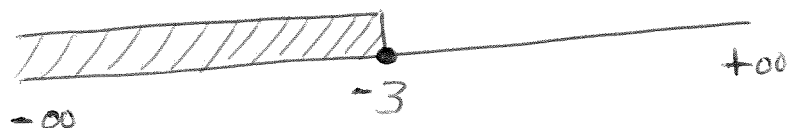
b)  $7 \leq x \leq 9$



c)  $-1 < x \leq 4$

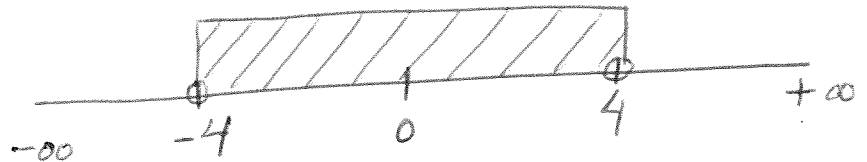


d)  $x \leq -3$

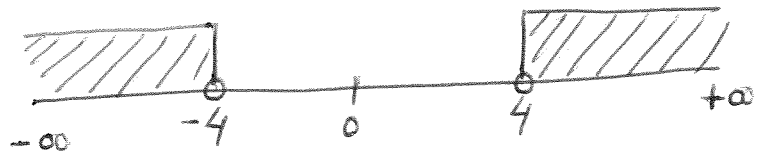


e)  $|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$

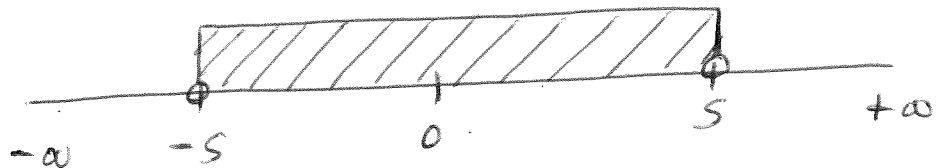
$\downarrow$   
 $|x-0| < 4$



f)  $|x| > 4 \Leftrightarrow x < -4 \text{ ή } x > 4$



g)  $-5 < x < 5$



## Άσκηση 2

$$\alpha) f'(x) = \left( \frac{4+x}{3-x} \right)' = \frac{(4+x)' \cdot (3-x) - (4+x) \cdot (3-x)'}{(3-x)^2} = \frac{1 \cdot (3-x) - (4+x) \cdot (-1)}{(3-x)^2}$$

$$= \frac{3-x+1 \cdot (4+x)}{(3-x)^2} = \frac{3-x+4+x}{(3-x)^2} = \frac{7}{(3-x)^2}, \quad x \neq 3.$$

Πότε, για  $x=0$  :  $f'(0) = \frac{7}{(3-0)^2} = \frac{7}{3^2} = \frac{7}{9}$ .

$$b) f'(x) = (\sqrt{5x-1})' = [(5x-1)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2} \cdot (5x-1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (5x-1)' =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (5x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5 = \frac{5}{2 \cdot (5x-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{5x-1}}$$

Διότι  $\frac{1}{2} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$   
αφού  $\text{Εκπ}(1,2)=2$

Πότε, για  $x=6$  :  $f'(6) = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{5 \cdot 6 - 1}} = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{30-1}} = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{29}}$ .

Αποτελεί προτεινόμενη ενδεικτική λύση – Μελετήστε και δώστε τη δική σας προσωπική ματιά – Σε περίπτωση αντιγραφής ή τυπογραφικών λαθών δε φέρουμε καμία ευθύνη.

### Άσκηση 3 :

2./ Θα βρούμε τις εξισώσεις της εφαπτομένης & της κάθετης της καμπύλης  $y = x^3 - 3x + 1$ , στο σημείο  $(2, 3)$ .

### Λύση:

✓ Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης στο σημείο  $(2, 3)$ .

Η εξίσωση θα έχει τη μορφή:  $y = \alpha \cdot x + \beta$  (\*)

όπου:  $\alpha = y'(2)$  : ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

Βρίσκουμε ότι:  $y'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3$

οπότε, για  $x=2$  :  $y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 12 - 3 = 9$

Πότε, η εξίσωση (\*) παίρνει τη μορφή:  $y = 9 \cdot x + \beta$  (\*\*)

Για  $x=2$  &  $y=3$ , προκύπτει από (\*\*) η τιμή του  $\beta$ , ως εξής :

$$3 = 9 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3 - 18 = -15$$

Αποτελεί προτεινόμενη ενδεικτική λύση - Μελετήστε και δώστε τη δική σας προσωπική ματιά - Σε περίπτωση αντιγραφής ή τυπογραφικών λαθών δε φέρουμε καμία ευθύνη.

Λεγικά, η εξίσωση της εφαπτομένης στο (2,3) είναι:  $y = 9x - 15$

✓ Εύρεση της εξίσωσης της κάθετης της καμπύλης στο σημείο (2,3).

Η ζητούμενη ευθεία (μορφής:  $y = \gamma \cdot x + \delta$ ) είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο (2,3).

Οπότε, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των δύο ευθειών ισούται με (-1).

Αντικαθ.  $\gamma \cdot 9 = -1 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = -\frac{1}{9}}$

Οπότε, η ευθεία παίρνει τη μορφή:  $\boxed{y = -\frac{1}{9} \cdot x + \delta}$  (\*\*\*)

• Η ευθεία (\*\*\*) διέρχεται από το σημείο (2,3) οπότε έχουμε:  $3 = -\frac{1}{9} \cdot 2 + \delta$    
 ΔΛΑ, ΕΠΙ 9  $\Leftrightarrow 27 = -2 + 9 \cdot \delta \Leftrightarrow 9 \cdot \delta = 29$

$\Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{29}{9}}$

Απάντηση: Η κάθετη ευθεία έχει εξίσωση:  $\boxed{y = -\frac{1}{9} \cdot x + \frac{29}{9}}$

Αποτελεί προτεινόμενη ενδεικτική λύση – Μελετήστε και δώστε τη δική σας προσωπική ματιά – Σε περίπτωση αντιγραφής ή τυπογραφικών λαθών δε φέρουμε καμία ευθύνη.

b./ Γνωρίζουμε ότι η ευθεία  $y = 2x + 5$ , είναι εφαπτομένη της  $f(x) = x^2 + \alpha \cdot x + \beta$  στο  $x_0 = -1$ . Θα υπολογίσουμε τις τιμές των  $\alpha, \beta$ .

Λύση: Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f$  στο  $x_0 = -1$ , είναι η :

$$\boxed{y = \kappa \cdot x + \eta}$$
 , όπου:  $\kappa = f'(-1) \rightsquigarrow$  ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας  
 $\eta$  : ο σταθερός όρος.

Παραγωγίζοντας την  $f'(x)$ , παίρνουμε:

$$f'(x) = 2 \cdot x + \alpha \quad , \quad \text{άρα για } x = -1 : \\ f'(-1) = -2 + \alpha .$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f$ , στο  $x_0 = -1$ , είναι η εξής:

$$\boxed{y = (-2 + \alpha) \cdot x + \eta} \quad (*)$$

Όπως από δεδομένα της α' ευθείας, η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f$ , είναι η :

$$\boxed{y = 2 \cdot x + 5} \quad (**)$$

Αποστέλλει προτεινόμενη ενδεικτική λύση – Μελετήστε και δώστε τη δική σας προσωπική ματιά – Σε περίπτωση αντιγραφής ή τυπογραφικών λαθών δε φέρουμε καμία ευθύνη.

Εξισώνοντας τους συντελεστές των αντιστοίχων όρων των σχέσεων (\*) και (\*\*) καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα :

$$\begin{cases} -2 + \alpha = 2 \\ 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2 + 2 = 4} \quad \checkmark$$

- Οπότε, η συνάρτηση  $f$  έχει πλέον τύπο:  $f(x) = x^2 + 4 \cdot x + \beta$ , η καρδιά της οποίας τέμνει την εφαιπτόμενη  $y = 2x + 5$ , στο  $x_0 = -1$ .

Οπότε, για  $x_0 = -1$ , πρέπει:

$$f(-1) = y(-1) \Leftrightarrow$$

$$(-1)^2 + 4 \cdot (-1) + \beta = 2 \cdot (-1) + 5 \Leftrightarrow$$

$$1 - 4 + \beta = -2 + 5 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\beta = 3 - 1 + 4 = 6} \quad \checkmark$$

- Απάντηση: Οι τιμές των  $\alpha, \beta$  είναι:  $\alpha = 4$  και  $\beta = 6$ .

Άρα:

$$f(x) = x^2 + \alpha x + \beta \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x^2 + 4x + 6}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες — ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο δικός σας!

### Άσκηση 4 :

$$a) y = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$$

Πότε, η 1<sup>η</sup> παράγωγος, βρίσκεται ως εξής:

$$y' = \left( \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} \right)' = \frac{(e^x)' \cdot (e^x + e^{-x}) - e^x \cdot (e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{e^x \cdot (e^x + e^{-x}) - e^x \cdot (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} + \overset{1}{e^0} - \cancel{e^{2x}} + \overset{1}{e^0}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

b)  $y = \sqrt{1+ηρx}$

Οπότε, η 1<sup>η</sup> παράγωγος, βρίσκεται ως εξής:

$$y' = (\sqrt{1+ηρx})' = \frac{1}{2\sqrt{1+ηρx}} \cdot (1+ηρx)' = \frac{1}{2\sqrt{1+ηρx}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+ηρx}}$$

c)  $y = \frac{x}{ηρx}$

Οπότε, η 1<sup>η</sup> παράγωγος βρίσκεται ως εξής:

$$y' = \left(\frac{x}{ηρx}\right)' = \frac{(x)' \cdot ηρx - x \cdot (ηρx)'}{ηρ^2x} = \frac{1 \cdot ηρx - x \cdot \cos x}{ηρ^2x} = \frac{ηρx - x \cdot \cos x}{ηρ^2x}$$



Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$d) \quad y = \sin x \cdot (1 - \cos x) = \sin x - \sin x \cdot \cos x$$

Πότε, η 1<sup>η</sup> παράγωγος, βρίσκεται ως εξής:

$$\begin{aligned} y' &= (\sin x - \sin x \cdot \cos x)' = (\sin x)' - (\sin x \cdot \cos x)' = \\ &= \cos x - [(\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)'] = \\ &= \cos x - [\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)] = \\ &= \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x \end{aligned}$$

$$e) \quad y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{1}{x^{2/5}} = x^{-2/5}$$

Πότε, η 1<sup>η</sup> παράγωγος, βρίσκεται ως εξής:

$$\begin{aligned} y' &= (x^{-2/5})' = -\frac{2}{5} \cdot x^{-2/5-1} = -\frac{2}{5} \cdot x^{-2/5-5/5} = -\frac{2}{5} \cdot x^{-7/5} = \\ &= -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x^{7/5}} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}} = \frac{-2}{5 \cdot \sqrt[5]{x^7}} \end{aligned}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες - ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος, ο Δικός σας!

$$f.) \quad y = (x^3+1) \cdot (x^4+1) = \overset{\curvearrowright}{x^3} \cdot \overset{\curvearrowright}{x^4} + x^3 + x^4 + 1 = x^7 + x^3 + x^4 + 1$$

Πότε, η 1<sup>η</sup> παράγωγος βρίσκεται ως εξής:

$$\begin{aligned} y' &= [(x^3+1) \cdot (x^4+1)]' = (x^7 + x^3 + x^4 + 1)' = (x^7)' + (x^3)' + (x^4)' + (1)' = \\ &= 7x^6 + 3x^2 + 4x^3 + 0 = 7x^6 + 3x^2 + 4x^3. \end{aligned}$$

$$g.) \quad y = (x^2+4x+2)^{1/2} = \sqrt{x^2+4x+2}$$

Πότε, η 1<sup>η</sup> παράγωγος βρίσκεται ως εξής:

$$y' = [(x^2+4x+2)^{1/2}]' = (\sqrt{x^2+4x+2})' =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+4x+2}} \cdot (x^2+4x+2)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+4x+2}} \cdot (2x+4+0) =$$

$$= \frac{\cancel{2} \cdot (x+2)}{\cancel{2} \cdot \sqrt{x^2+4x+2}} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+2}}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες - ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο δικός σας!

$$h.) \quad y = \ln \sqrt{x-1}$$

Πότε, η 1<sup>η</sup> παράγωγος βρίσκεται ως εξής:

$$y' = (\ln \sqrt{x-1})' = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot (\sqrt{x-1})' = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot (x-1)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-1} \cdot 2\sqrt{x-1}} \cdot 1 = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x-1}^2} = \frac{1}{2 \cdot (x-1)} = \frac{1}{2x-2} \quad /$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο δικός σας!

Άσκηση 5: Έχουμε τη συνάρτηση:  $y=f(x)=x^2 \cdot (x-2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Λύση:

- Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .
- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , ως πολυωνυμική.

• Σημεία τομής με  $x$ 's:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2(x-2)=0 \\ \Leftrightarrow x=0 \text{ (διπλή)} \neq x=2$$

- Έχουμε:  

$$f'(x) = (x^2)' \cdot (x-2) + x^2 \cdot (x-2)' = 2 \cdot x \cdot (x-2) + x^2 \cdot 1 = 2x^2 - 4x + x^2 = 3x^2 - 4x$$

με ρίζες:  $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (3x - 4) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{4}{3} \end{cases}$

Το πρόσημο της δίνεται στο διηλεκτικό πίνακα, όπου προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονotonίας & τα τοπικά ακρότατα.

| $x$     | $-\infty$ | $0$            | $\frac{4}{3}$            | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------------|--------------------------|-----------|
| $f'(x)$ | +         | -              | +                        |           |
| $f(x)$  |           | ↑              | ↓                        | ↑         |
|         |           | Τ.Μ.<br>$f(0)$ | Τ.Ε.<br>$f(\frac{4}{3})$ |           |

Πότε, για  $x=0$  η  $f$  λαμβάνει τη μέγιστη τιμή, ίση με:  
 (Τ.Μ.) → τοπικό μέγιστο  
 (Τ.Ε.) → τοπικό ελάχιστο  
 $f(0)=0$  κ' για  $x=\frac{4}{3}$  η ελάχιστη τιμή είναι ίση με:

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3} - 2\right) = \frac{16}{9} \cdot \left(\frac{4-6}{3}\right) = \frac{16}{9} \cdot \frac{(-2)}{3} = \frac{-32}{27} \approx -1,18$$

• Έχουμε επίσης:

$$f'(x) = (3x^2 - 4x)' = 6x - 4$$

η οποία έχει ρίζα την:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Το πρόσημο της  $f''$  φαίνεται στο διηλεκτικό πίνακα, όπου προσδιορίζουμε τα διαστήματα, όπου η  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη, καθώς και τα σημεία ακρότητας.

| x        | $-\infty$ | $\frac{2}{3}$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|---------------|-----------|
| $f''(x)$ | -         | 0             | +         |
| $f(x)$   |           |               |           |

κοίλη (εστρέφει τα κοίλα προς τα κάτω)      κυρτή (εστρέφει τα κοίλα προς τα πάνω)

Το σημείο  $(\frac{2}{3}, f(\frac{2}{3}))$  δηλαδή στο  $(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27})$  έχουμε σημείο ακρότητας. (Σ.Κ.)

• Η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ακρότητες στο  $\pm\infty$ , αφού είναι πολυωνομική 3<sup>ου</sup> βαθμού.

Είναι όμως:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

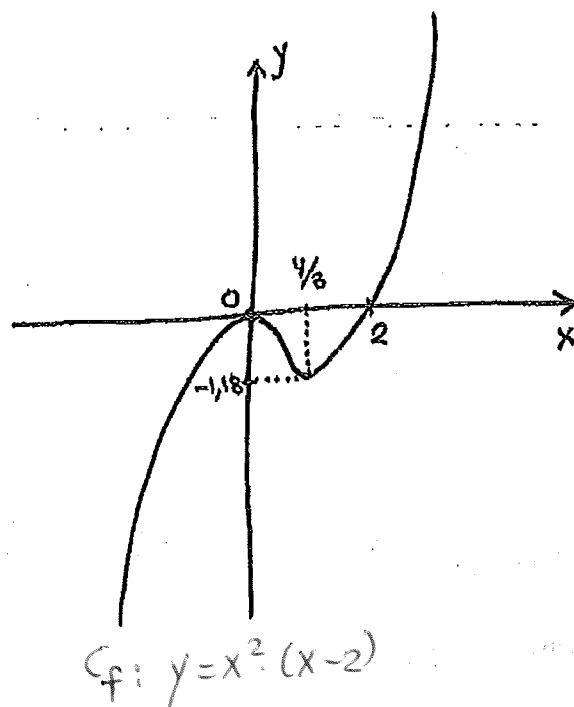
&

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

- Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  & χαράσσουμε τη γραμμή παραστάδα της  $f$ .

| $x$      | $-\infty$ | $0$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|-----|---------------|---------------|-----------|
| $f'(x)$  | +         | 0   | -             | -             | +         |
| $f''(x)$ | -         | -   | 0             | +             | +         |
| $f(x)$   |           |     |               |               |           |

$\tau.μ. \quad f(0) = 0$   
 $\tau.κ. \quad \left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$   
 $\tau.ε. \quad f\left(\frac{4}{3}\right) = -1,18$



Απαντήσεις προτεινόμενες - ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

### Άσκηση 6 :

α) Δίνεται:  $f(x) = x^2 + x - 6$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ )

• Βρούμε τις ρίζες της  $1^{ης}$  παραγώγου. Λύνοντας την εξίσωση:  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - 6)' = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} = -0,5.$$

• Η μονotonία και τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$  στο  $\mathbb{R}$ , φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

| $x$     | $-\infty$ | $-0,5$     | $+\infty$  |
|---------|-----------|------------|------------|
| $f'(x)$ |           | $-$        | $+$        |
| $f(x)$  |           | $\searrow$ | $\nearrow$ |

T.E  
(τοπικό ελάχιστο)

Οότε, η συνάρτηση  $f$  είναι  
γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  
 $(-\infty, -0,5]$  & γνησίως  
αύξουσα στο διάστημα  $[-0,5, +\infty)$ .

& παρουσιάζει ένα μόνο τοπικό ακρότατο (ελάχιστο) για  $x = -0,5$  το:

$$f(-0,5) = (-0,5)^2 + (-0,5) - 6 = 0,25 - 0,5 - 6 = -6,25$$

b./ Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = 2 + x^{\frac{2}{3}}$ ,  $x \geq 0$

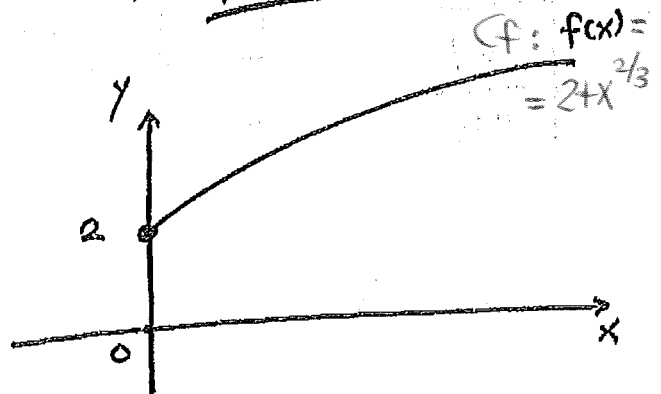
Βρίσκουμε τις ρίζες της  $f'$ , θένοντας την εξίσωση:  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2 + x^{\frac{2}{3}})' = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0 \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΗ (οχι λύσεις)}$$

Πότε, αυτό σημαίνει: ότι η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ , δηλαδή:  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \geq 0$   
 με την ελάχιστη τιμή της να είναι για  $x=0$ , ίσως με:  $f(0) = 2$

&  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + x^{\frac{2}{3}}) = +\infty$



\* Σχόλιο:  $\frac{2}{3} - \frac{1}{1} = \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2-3}{3} = -\frac{1}{3}$

$\text{Eκπ}(1,3) = 3$ .

γ) Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$

• Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(x) = 3x^2$  και  $f''(x) = 6x$ .

Λύνοντας την εξίσωση:  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$ .

• Το πρόσημο της  $f''$  φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

| $x$      | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|-----|-----------|
| $f''(x)$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $f(x)$   |           |     |           |

$\swarrow$  κοίτη  $\searrow$  στρέφεται κοίλα προς τα κάτω  
 $\nearrow$  κυρτή  $\nearrow$  στρέφεται κοίλα προς τα πάνω  
 $x=0$  (θέση σημείου καμπής)

Επομένως, η  $f$  είναι κυρτή στο διάστημα  $[0, +\infty)$  και κοίτη στο διάστημα  $(-\infty, 0]$ . Επειδή, η  $f''$  μηδενίζεται για  $x=0$  και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο, οπότε το σημείο  $(0, f(0))$  δηλαδή το  $(0, 0)$  είναι σημείο καμπής της  $C_f$ .

$\downarrow$   
 $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

## Άσκηση 7:

α) Έχουμε τη συνάρτηση:  $y = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Η  $y$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $y'(x) = e^x$ ,  $y''(x) = e^x$ .

Το πρόσημο της  $y''$  φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

| $x$      | $-\infty$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|-----------|
| $y''(x)$ |           | +         |
| $y(x)$   |           |           |

κυρτή (στρέφει τα κιάλια προς τα πάνω)

Η συνάρτηση  $y = e^x$  είναι κυρτή σε όλο το διάστημα του πεδίου ορισμού της, δηλαδή στρέφει τα κιάλια προς τα άνω.



b) Έχουμε τη συνάρτηση :  $y = \frac{e^x}{x^3}, x \neq 0$

Ποιούμε :  $y'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x \cdot x^3 - e^x \cdot 3x^2}{x^6} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{e^x}{x^3}\right)'$

$$\Leftrightarrow e^x \cdot (x^3 - 3x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \text{ (δεν διρίφει)} \\ x = 3 \\ \text{(αποδιρίφει)} \end{array} \right\}$$

• Πίνακας Πρόσημου της  $y'$ :

| $x$     | $-\infty$                                                                          | $0$                                                                                 | $3$                                                                                 | $+\infty$ |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $y'(x)$ | -                                                                                  | 0                                                                                   | -                                                                                   | +         |
| $y(x)$  |  |  |  |           |

ελάχιστο, για  $x=3$

• Συνεπώς, η  $y$  έχει ελάχιστη τιμή την:  $y(3) = \frac{e^3}{3^3} = \frac{e^3}{27}$ .

c) Έχουμε τη συνάρτηση:  $y = 2x^3 - 8, x \in \mathbb{R}$

➤ Προσδιορίζουμε την 1<sup>η</sup> παράγωγο:  $y'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 0 = 6x^2$  η οποία μηδενίζεται για την τιμή  $x=0$ . Άρα:  $y'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0$  (διπλή ρίζα)

➤ Πίνακας Πρόσημου για την 1<sup>η</sup> παράγωγο

| x       | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|-----------|
| $y'(x)$ | +         | 0 | +         |
| $y(x)$  |           |   |           |

Άρα, αφού  $y'(x) > 0$ , για  $x \in \mathbb{R}$  (&  $y'(x) = 0$ , για  $x=0$ ), άρα η 1<sup>η</sup> παράγωγος διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ . Άρα, η συνάρτησή μας δεν έχει μέγιστα ή ελάχιστα.

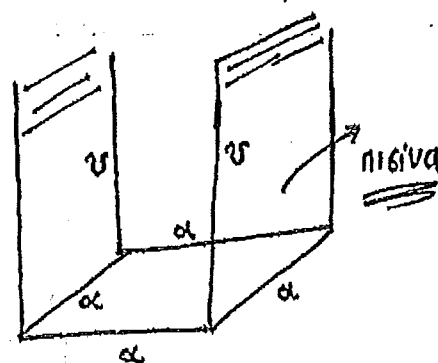
Άσκηση 8: Έχουμε ανοικτή ημίσινα, τετραγωνικής βάσης, με όγκο  $V = 32 \text{ m}^3$

- Βρίσκουμε τη συνάρτηση που προσδιορίζει τη συνολική επιφάνεια των εσωτερικών τοίχων & του πυθμένα:

$$E = 4 \cdot E_{\text{κάθε τοίχου}} + E_{\text{πυθμένα}}$$

$$= 4 \cdot (\alpha \cdot \upsilon) + \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E = 4 \cdot \alpha \cdot \upsilon + \alpha^2} \quad (*)$$



Γνωρίζουμε ότι ο όγκος της ημίσινας, ισοδύναμο με  $V = 32$ , δηλαδή:

$$E_{\text{βάσης}} \cdot \upsilon_{\text{ημίσινας}} = 32 \Leftrightarrow \alpha^2 \cdot \upsilon = 32 \Leftrightarrow \boxed{\upsilon = \frac{32}{\alpha^2}} \quad (**)$$

Αντικαθιστώντας τη (\*\*) στην (\*), προκύπτει ότι:

$$E = 4 \cdot \alpha \cdot \upsilon + \alpha^2 = 4 \cdot \alpha \cdot \frac{32}{\alpha^2} + \alpha^2 = \frac{128}{\alpha} + \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E(\alpha) = \frac{128}{\alpha} + \alpha^2}$$

• Βάζουμε την εξίσωση:  $E'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{128}{x^2} + 2 \cdot x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{128}{x^2} = -2 \cdot x \Leftrightarrow 2 \cdot x^3 = 128 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{64}} = 4 \text{ m}.$

• Κριτήριο 2<sup>ης</sup> Παραγώγου:  $E''(x) = \left(-\frac{128}{x^2} + 2 \cdot x\right)' = -128 \cdot (x^{-2})' + 2 \cdot 1 =$

$= -128 \cdot (-2) \cdot x^{-3} + 2 = \frac{256}{x^3} + 2.$  Πότε, για  $x = 4$ :

$E''(4) = \frac{256}{4^3} + 2 = \frac{256}{64} + 2 = 6 > 0.$

Συνεπώς, το σημείο εμβαδόν (επιφάνεια) ελαχιστοποιείται, όταν:  $x = 4 \text{ m}$ .

$v = \frac{32}{x^2} = \frac{32}{4^2} = \frac{32}{16} = 2 \text{ m}.$  Η ελάχιστη επιφάνεια είναι:

$E = 4 \cdot x \cdot v + x^2 = 4 \cdot 4 \cdot 2 + 4^2 = 32 + 16 = 48 \text{ τ.μ (m}^2\text{)}.$

Άσκηση 9:

Γνωρίζουμε ότι η ευθεία  $y = 3x + 1$ , είναι εφαπτομένη της  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , στο σημείο  $(1, 4)$ . Θα υπολογίσουμε τις τιμές των  $a, b, c$ .

Λύση: Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f(x)$  στο  $x_0 = 1$ , είναι η:  $y = k \cdot x + \lambda$

όπου:  $k = f'(1)$  : ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας  
 $\lambda$  : ο σταθερός όρος.

Αφού:  $f'(x) = 2a \cdot x + b$  άρα:  $f'(1) = 2a + b \rightarrow$  οπότε:  $k = 2a + b$

• Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f(x)$ , στο  $x_0 = 1$ , είναι η εξής:

$$y = (2a + b) \cdot x + \lambda \quad (*)$$

• Πως, από δεδομένα της άσκησης, η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f$ , είναι η:

$$y = 3 \cdot x + 1 \quad (**)$$

• Σβιώνοντας τους συντελεστές των όρων των σχέσεων  $(*)$ ,  $(**)$  έχουμε:

$$\begin{aligned} 2a + b &= 3 \\ \lambda &= 1 \end{aligned} \quad \parallel \quad \rightarrow \quad \boxed{2a + b = 3} \quad (1)$$

- Γνωρίζουμε ακόμη ότι η γραφική παράσταση της  $f(x)$ , διέρχεται από το σημείο  $(1, 4)$ . Ανάλυση:

$$f(1) = 4 \Leftrightarrow \underset{x}{\alpha} \cdot \underset{y}{1}^2 + b \cdot 1 + c = 4 \Leftrightarrow \boxed{\alpha + b + c = 4} \quad (2)$$

- Ακόμη, η συνάρτηση  $f(x)$  γνωρίζουμε ότι έχει ακρότατο, όταν  $x = -3$ .

Ανάλυση:  $f'(-3) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \alpha \cdot (-3) + b = 0 \Leftrightarrow \boxed{b - 6\alpha = 0} \quad (3)$

➤ Προέκυψε λοιπόν το σύστημα των σχέσεων (1), (2), (3):

$$\left. \begin{array}{l} 2\alpha + b = 3 \\ \alpha + b + c = 4 \\ b - 6\alpha = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2\alpha + 6\alpha = 3 \\ \alpha + b + c = 4 \\ b = 6\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8\alpha = 3 \\ \alpha + b + c = 4 \\ b = 6\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow$$

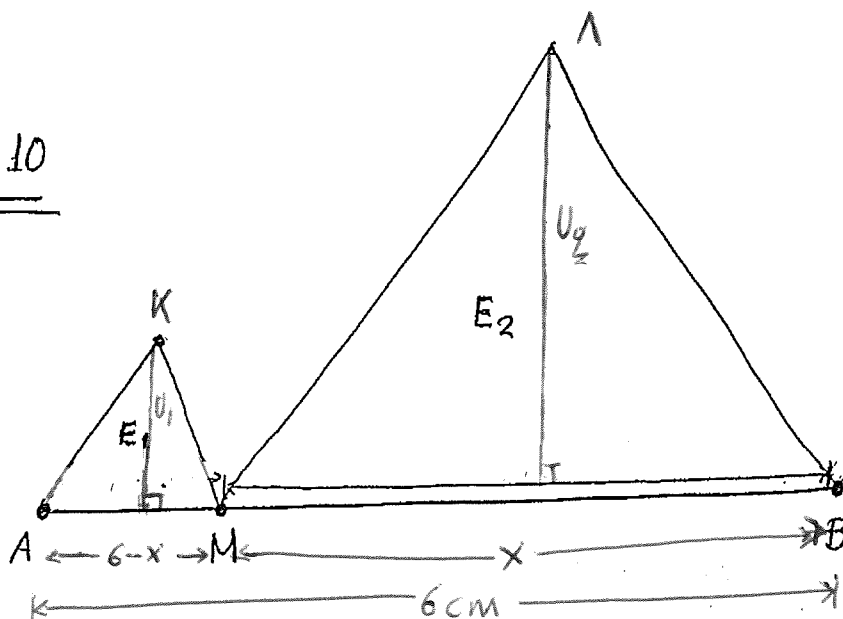
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{3}{8} \\ \alpha + b + c = 4 \\ b = 6 \cdot \frac{3}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{3}{8} \\ c = 4 - \alpha - b = 4 - \frac{3}{8} - \frac{9}{4} \\ b = \frac{9}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{3}{8} \\ c = \frac{32}{8} - \frac{3}{8} - \frac{18}{8} = \frac{11}{8} \\ b = \frac{9}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{8}, b = \frac{9}{4}, c = \frac{11}{8}.$$

Ανάλυση:  $f(x) = \frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{9}{4} \cdot x + \frac{11}{8}$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Λύση 10



Το άθροισμα των εμβαδών, είναι:

$$E = E_1 + E_2$$

$$\text{όπου: } \left\{ \begin{aligned} E_1 &= \frac{b_1 \cdot U_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (6-x) \cdot (6-x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ E_2 &= \frac{b_2 \cdot U_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\}$$

Πρα:

$$E(x) = \frac{1}{2} \cdot (6-x)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot [(6-x)^2 + x^2] = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (36 - 12x + 2x^2)$$

Είναι η συνάρτηση του αθροίσματος των εμβαδών των

δύο τριγώνων

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\triangleright E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (0 - 12 + 4x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (4x - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12}{4} = 3 \text{ cm}$$

$$\triangleright E''(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (4x - 12)' = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (4 - 0) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \sqrt{3} > 0$$

Πώς λοιπόν, το άθροισμα των εμβαδών γίνεται ελάχιστο, όταν το  $M$  βρίσκεται δεξιά  $x = 3$  μονάδες <sup>(cm)</sup> αριστερά του  $B$ , δηλαδή όταν το  $M$  είναι το μέσον του  $AB$ .

Το ελάχιστο άθροισμα είναι ίσο με:

$$E_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (36 - 12 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (36 - 36 + 18) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 18 = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$