ΦΥΕ - 40 -Εργασία Πρώτη Νοέμβρης 2021

1 Θέμα Πρώτο

1.1 Εκφώνηση

Στο σύστημα Gauss-cgs που χρησιμοποιείται στο σύγγραμμα του Σ. Τραχανά οι μονάδες του φορτίου είναι:

1. *(α)* $\sqrt{erg \cdot cm}$
2. C
3. *είναι αδιάστατο*
4. $N \cdot m$
5. $\sqrt{N \cdot m^2}$.

Αιτιολογήστε πώς προκύπτει.

1.2 Λύση

Ο νόμος του Coulomb είναι:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}$$

Στο σύστημα cgs έχουμε ότι $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1$ και είναι αδιάστατο. Επομένως:

$$\begin{bmatrix} q \to \sqrt{F \cdot r^2} \\ \\ F \to dyn = \dfrac{erg}{cm} \\ \\ r \to cm \end{bmatrix} \Longleftrightarrow q \to \sqrt{\frac{erg}{cm} \cdot cm^2} = \sqrt{erg \cdot cm}$$

Επομένως σωστή απάντηση είναι η α)

2 Θέμα Δεύτερο

2.1 Εκφώνηση

Λέιζερ εκπέμπει φως μήκους κύματος 800 nm *σε παλμούς διάρκειας* 4 fs. *Η ενέργεια ενός παλμού είναι* 2.00 μJ *και ο παλμός κινείται κατά μήκος του θετικού ημιάξονα των* x.

1. *Ποια είναι η ενέργεια (σε erg) και ποια η ελάχιστη αβεβαιότητα ενός φωτονίου του παλμού.*
2. *Το χωρικό εύρος (σε cm) και ως πολλαπλάσιο του μήκους κύματος.*
3. *Την ορμή και την ελάχιστη αβεβαιότητα της ορμής σε έναν παλμό*

2.2 Λύση

1. Η ενέργεια ενός παλμού θα δίνεται από:

$$\begin{bmatrix} E = 2.00\ \mu J = 2.00 \times 10^{-6}\ J \\ 1\ erg = 10^{-7}\ J \Longleftrightarrow 1\ J = 10^{7}\ erg \end{bmatrix} \Longleftrightarrow E = 2.00 \times 10^{-6} \cdot 10^{7}\ erg = 20.0\ erg$$

Θα δεχτούμε ότι μας ζητάει την ελάχιστη ενεργειακή αβεβαιότητα (και όχι την ελάχιστη π.χ. αβεβαιότητα στη μέτρηση της συχνότητας)

Δεχόμαστε ότι η αβεβαιότητα στο χρόνο είναι ίση με τη διάρκεια του παλμού, δηλαδή $\Delta t = 4\ fs = 4 \times 10^{-15}\ s$. Από την Αρχή της Απροσδιοριστίας (Αβεβαιότητας) χρόνου-ενέργειας έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \Delta E \cdot \Delta t \geq \dfrac{\hbar}{2} \\ \Delta t = 4 \times 10^{-15}\ s \\ \hbar = 1.054 \times 10^{-34}\ J \cdot s \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \Delta E = \frac{\hbar}{2\Delta t} = 1.32 \times 10^{-20}\ J$$

όπου για την ελάχιστη απροσδιοριστία κρατήσαμε την ισότητα.

2. Ο παλμός έχει εύρος w:

$$\begin{bmatrix} w = ct \\ c = 3 \times 10^{10}\ cm/s \\ t = 4 \times 10^{-15}\ s \end{bmatrix} \Longleftrightarrow w = 12 \times 10^{-5}\ cm$$

Επίσης:

$$\begin{bmatrix} \lambda = 800\ nm = 800 \times 10^{-9}\ m = 8 \times 10^{-5}\ cm \\ w = 12 \times 10^{-5}\ cm \end{bmatrix} \Longleftrightarrow N = \frac{w}{\lambda} = 1.5$$

3. Η ορμή θα δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} \lambda = \dfrac{h}{p} \\ \lambda = 8 \times 10^{-5}\ cm \\ h = 6.625 \times 10^{-27}\ erg \cdot s \end{bmatrix} \Longleftrightarrow p = \frac{6.625 \times 10^{-27}}{8 \times 10^{-5}} = 0.83 \times 10^{-22}\ g \cdot cm/s$$

Δεχόμαστε ότι η απροσδιοριστία στη θέση είναι ίση με το πλάτος του παλμού, δηλαδή $\Delta x = 12\times 10^{-5}\ cm$. Από την Αρχή της Απροσδιοριστίας (Αβεβαιότητας) θέσης - ορμής έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \Delta x \cdot \Delta p \geq \dfrac{\hbar}{2} \\ \\ \Delta x = 12 \times 10^{-5}\ cm \\ \\ \hbar = 1.054 \times 10^{-27}\ erg \cdot s \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x} = 4.4 \times 10^{-24}\ g \cdot cm/s$$

όπου για την ελάχιστη απροσδιοριστία κρατήσαμε την ισότητα.

Θα μπορούσαμε να βρούμε την απροσδιοριστία στην ορμή και διαφορετικά. Από τη σχετικότητα γνωρίζουμε ότι:

$$E = cp \Longleftrightarrow \Delta E = c\Delta p$$

Επομένως:

$$\begin{bmatrix} \Delta E = c\Delta p \\ \\ c = 3 \times 10^{10}\ cm/s \\ \\ \Delta E = 1.32 \times 10^{-20}\ J = 1.32 \times 10^{-13}\ erg \end{bmatrix} \Longleftrightarrow 1.32 \times 10^{-13} = 3 \times 10^{10} \Delta p \Longleftrightarrow$$

$$\Delta p = \frac{1.32 \times 10^{-13}}{3 \times 10^{10}} = 4.4 \times 10^{-24}\ g \cdot cm/s \qquad (1)$$

3 Θέμα Τρίτο

3.1 Εκφώνηση

Δείξτε ότι αν υποθέσουμε ότι η περίμετρος της τροχιάς του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου μπορούμε να συνάγουμε τον τύπο του Bohr για τα ενεργειακά επίπεδα.

3.2 Λύση

Η περιφέρεια του κύκλου δίνεται από την σχέση:

$$\Pi = 2\pi r$$

όπου r η ακτίνα του κύκλου.

Το μήκος κύματος του De Broglie είναι:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

όπου p η ορμή και h η σταθερά δράσης του Planck. Επομένως θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \Pi = n\lambda \\ \\ \Pi = 2\pi r \\ \\ \lambda = \dfrac{h}{p} \\ \\ p = mv \end{bmatrix} \Longleftrightarrow 2\pi R = \frac{h}{mv} \Longleftrightarrow mvr = n\frac{h}{2\pi}$$

που είναι η συνθήκη κβάντωσης της στροφορμής του Bohr, όπου m η μάζα του σωματιδίου, v η ταχύτητα του, n ακέραιος και r η ακτίνα της τροχιάς του. Στο σύστημα μας έχουμε :

$$\begin{bmatrix} U = -\dfrac{e^2}{r} \\ \\ F = \dfrac{e}{r^2} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow F = -kr$$

Η ολική ενέργεια θα είναι:

$$\begin{bmatrix} K = \dfrac{mv^2}{2} \\ \\ U = -\dfrac{e^2}{r} \\ \\ E = K + U \end{bmatrix} \Longleftrightarrow E = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r}$$

Το ηλεκτρόνιο εκτελεί κυκλικές τροχιές συνεπώς η δύναμη αυτή θα είναι η κεντρομόλος F_k.

$$\begin{bmatrix} F = F_k \\ \\ F = \dfrac{e^2}{r^2} \\ \\ F_k = \dfrac{mv^2}{r} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Longleftrightarrow \frac{e^2}{2r} = \frac{mv^2}{2}$$

Επομένως θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} mvr = n\hbar \\ \dfrac{e^2}{2r} = \dfrac{mv^2}{2} \Longleftrightarrow r = \dfrac{e^2}{mv^2} \\ E_n = \dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{e^2}{r} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} E_n = \dfrac{mv^2}{2} - mv^2 = -\dfrac{mv^2}{2} \Longleftrightarrow \\ mv\dfrac{e^2}{mv^2} = n\hbar \Longleftrightarrow v = \dfrac{e^2}{n\hbar} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$E_n = -\frac{me^4}{2n^2\hbar^2}$$

που είναι η σχέση για την κβάντωση της ενέργειας του Bohr.

4 Θέμα Τέταρτο

4.1 Εκφώνηση

1. *Ποια είναι η ενέργεια ενός ηλεκτρονίου του οποίου το μήκος κύματος de Broglie ισούται με το μήκος κύματος Compton; Είναι το ηλεκτρόνιο αυτό σχετικιστικό;*

2. *Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση βρείτε τον (μη τετριμμένο) συνδυασμό των $\hbar$, e, c ο οποίος δεν έχει διαστάσεις. Ποια η τιμή του στο σύστημα cgs που χρησιμοποιείται στο σύγραμμα του Σ. Τραχανά;*

4.2 Λύση

1. Το μήκος κύματος Compton δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda_C = \frac{h}{mc}$$

Το μήκος κύματος De Broglie δίνεται από :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$$

Από τις δύο σχέσεις έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} \lambda_C = \dfrac{h}{mc} \\ \lambda_{dB} = \dfrac{h}{p} \\ \lambda_C = \lambda_{dB} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow p = mc$$

Αν σκεφτούμε κλασσικά τότε

$$\begin{bmatrix} p = mv \\ p = mc \end{bmatrix} \Longleftrightarrow v = c$$

που προφανώς δεν μπορεί να συμβαίνει επομένως το σωματίδιο είναι σχετικιστικό:

$$\begin{bmatrix} p = mc \\ p = m\gamma v \\ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow mc = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Longleftrightarrow c^2(1-\frac{v^2}{c^2}) = v^2 \Longleftrightarrow$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{v^2}{c^2} \Longleftrightarrow 1 = 2\frac{v^2}{c^2} \Longleftrightarrow v = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

2. Στο cgs έχουμε για τα τρία μεγέθη:

$$e \rightarrow M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$$

$$c \rightarrow LT^{-1}$$

$$\hbar \rightarrow ML^2T^{-1}$$

θα σηκώσουμε κάθε μέγεθος σε μια δύναμη και θα πρέπει οι τελικές δυνάμεις των διαστάσεων να είναι μηδέν. Επομένως:

$$\begin{bmatrix} A = e^a \hbar^b c^d \\ \\ e \to M^{1/2} L^{3/2} T^{-1} \\ \\ c \to L T^{-1} \\ \\ \hbar \to M L^2 T^{-1} \\ \\ A \to M^0 L^0 T^0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow M^{a/2} L^{3a/2} T^{-a} L^d T^{-d} M^b L^{2b} T^{-b} = M^0 L^0 T^0 \Longleftrightarrow$$

$$M^{a/2+b} L^{3a/2+2b+d} T^{-a-b-d} = M^0 L^0 T^0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{a}{2} + b = 0 \\ \dfrac{3a}{2} + 2b + d = 0 \\ -a - b - d = 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a = 2 \\ \\ b = d = -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως το αδιάστατο μέγεθος είναι $A \to \dfrac{e^2}{\hbar c}$ που είναι η σταθερά λεπτής υφής. Η τιμή της είναι $\dfrac{1}{137}$.

Στο cgs έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \alpha = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{e^2}{\hbar c} \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1 \\ c = 3 \times 10^{10}\ cm/s \\ \\ e = 4.80 \times 10^{-10}\ cm^{3/2} g^{1/2} s^{-1} \\ \\ \hbar = 1.0546 \times 10^{-27}\ cm^2 \cdot g \cdot s^{-1} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{4.80^2 \times 10^{-20}}{1.0546 \times 10^{-27} \cdot 3 \times 10^{10}} \Longleftrightarrow$$

$$\alpha = 0.00728 = \frac{1}{137}$$

5 Θέμα Πέμπτο

5.1 Εκφώνηση

Έστω $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{C}$ γραμμικοί τελεστές. Δείξτε ότι

1. $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$
2. $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$
3. $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$
4. *Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω υπολογίστε τον μεταθέτη $[\hat{x}, \hat{p}^n]$ όπου n θετικός ακέραιος.*

5.2 Λύση

Γραμμικοί τελεστές σημαίνει:

$$[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$$
$$[\hat{A}, \lambda\hat{B} = \lambda[\hat{A}, \hat{B}]$$

όπου λ πραγματικός.

1. Έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} M_1 = [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] \\ M_2 = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] \\ [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} M_1 = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} \\ M_2 = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\hat{C} + \hat{B}(\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} M_1 = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} \\ M_2 = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$
$$M_1 = M_2$$

2.

$$\begin{bmatrix} M_3 = [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] \\ M_4 = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \\ [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} M_3 = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} \\ M_4 = \hat{A}(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}) + (\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A})\hat{B} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} M_1 = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} \\ M_2 = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$
$$M_3 = M_4$$

3. Έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} M_5 = [\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]] + [\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]] + [\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]] \\ [\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \\ [\hat{A},\hat{B}+\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}] + [\hat{A},\hat{C}] \end{bmatrix} \iff$$

$$M_5 = [\hat{A},\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}] + [\hat{B},\hat{C}\hat{A} - \hat{A}\hat{C}] + [\hat{C},\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}] \iff$$

$$M_5 = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} + \hat{B}\hat{C}\hat{A} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} + \hat{C}\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{C} = 0$$

4. Έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} M_6 = [\hat{x},\hat{p}^n] = [\hat{x},\hat{p}\hat{p}^{n-1}] \\ [\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\hat{C}] \\ [\hat{x},\hat{p}] = i\hbar \end{bmatrix} \iff$$

$$M_6 = [\hat{x},\hat{p}]\hat{p}^{n-1} + \hat{p}[\hat{x},\hat{p}^{n-1}] \iff M_6 = i\hbar\hat{p}^{n-1} + \hat{p}[\hat{x},\hat{p}\hat{p}^{n-2}] = i\hbar\hat{p}^{n-1} + \hat{p}[\hat{x},\hat{p}]\hat{p}^{n-2} + \hat{p}^2[\hat{x},\hat{p}^{n-2}] \iff$$

$$M_6 = i\hbar\hat{p}^{n-1} + i\hbar\hat{p}^{n-1} + \hat{p}^2[\hat{x},\hat{p}^{n-2}] = 2i\hbar\hat{p}^{n-1} + \hat{p}^2[\hat{x},\hat{p}^{n-2}]$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία n φορές καταλήγουμε:

$$[\hat{x},\hat{p}^n] = ni\hbar\hat{p}^{n-1}$$

6 Θέμα Έκτο

6.1 Εκφώνηση

Έστω ϕ_n , E_n , $n = 1,..,+\infty$, ιδιοκαταστάσεις και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές της ενέργειας ενός κβαντικού συστήματος. Απαντήστε αιτιολογημένα στα παρακάτω ερωτήματα:

1. *Ποια/ες από τις παρακάτω κυματοσυναρτήσεις αντιστοιχούν σε αποδεκτή κατάσταση του συστήματος;*

$$i)\ \psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n}{\sqrt{n+1}} \quad ii)\ \psi_1 = \frac{\sqrt{6}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n}{n}$$

2. *Έστω ότι το σύστημα βρίσκεται αρχικά ($t = 0$) στην κατάσταση*

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\phi_2$$

Ποια η κυματοσυνάρτηση τη χρονική στιγμή t;

3. *Ποια η πιθανότητα τη χρονική στιγμή t να μετρήσουμε ενέργεια ίση με E_2;*

4. *Ποια είναι η μέση τιμή και ποια η αβεβαιότητα της ενέργειας τη χρονική στιγμή t;*

6.2 Λύση

1. Καθώς οι ϕ_n είναι ιδιοκαταστάσεις του συστήματος και οι αντίστοιχες E_n οι ιδιοτιμές τους ισχύει:

$$\hat{H}\phi_n = E_n\phi_n \tag{2}$$

Για να είναι μια κυματοσυνάρτηση αποδεκτή θα πρέπει να είναι κανονικοποιημένη. Οι ιδιοκαταστάσεις είναι ορθοκανονικές , δηλαδή

$$\int \phi_n\phi_m dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \tag{3}$$

(α΄) Συνεπώς δοκιμάζουμε την κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης:

$$\left[\begin{array}{l} I = \int \psi_1\psi_1 dx \\ \int \phi_n\phi_m = \delta_{nm} \\ \psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n}{\sqrt{n+1}} \end{array}\right] \Longleftrightarrow I = \int \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n}{\sqrt{n+1}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\phi_m}{\sqrt{m+1}}dx \Longleftrightarrow$$

$$I = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} I = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1} > 1$$

Επομένως αυτή η κυματοσυνάρτηση δεν μπορεί να είναι κανονικοποιημένη.

(β΄) Συνεπώς δοκιμάζουμε την κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης:

$$\left[\begin{array}{l} I = \int \psi_1\psi_1 dx \\ \int \phi_n\phi_m = \delta_{nm} \\ \psi_1 = \frac{\sqrt{6}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n}{n} \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \end{array}\right] \Longleftrightarrow I = \frac{\sqrt{6}}{\pi}\frac{\sqrt{6}}{\pi}\int \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\phi_m}{m}dx \Longleftrightarrow$$

$$I = \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} I = \frac{6}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6} = 1$$

Επομένως αυτη η κυματοσυνάρτηση είναι κανονικοποοιημένη και μπορεί να είναι κατάσταση του συστήματος.

2. Όταν οι ϕ_n είναι οι ιδιοκατάστασεις του συστήματος για $t = 0$ και η κατάσταση του συστήματος είναι γραμμικός συνδιασμός των ιδιοκαταστάσεων του συστήματος τότε η χρονική κατάσταση της κυματοσυνάρτησης είναι:

$$\begin{bmatrix} \Psi(t=0) = \sum_n a_n \phi_n \\ \\ \hat{H}\phi_n = E_n \phi_n \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$
$$\Psi(t) = \sum_n a_n e^{-iE_n t\hbar} \phi_n$$

Επομένως στην περίπτωση μας :

$$\begin{bmatrix} \Psi(t=0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\phi_2 \\ \\ \hat{H}\phi_n = E_n \phi_n \\ \\ \Psi(t) = \sum_n a_n e^{-iE_n t\hbar} \phi_n \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$
$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-iE_1 t\hbar} \phi_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-iE_2 t\hbar} \phi_2$$

3. Έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \Psi(t) = \sum_n a_n(t) \phi_n \\ \\ \Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-iE_1 t\hbar} \phi_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-iE_2 t\hbar} \phi_2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-iE_1 t\hbar} \\ \\ a_2(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-iE_2 t\hbar} \end{bmatrix}$$

Η πιθανότητα να μετρηθεί η κατάσταση $n = 2$ και επομένως και η ενέργεια E_2 είναι

$$\begin{bmatrix} p_2 = a_2(t) a_2^*(t) \\ \\ a_2(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-iE_2 t\hbar} \\ \\ a_2^*(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{iE_2 t\hbar} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow p_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$$

Η πιθανότητα βρέθηκε μεγαλύτερη της μονάδας. Προφανώς έχει γίνει λάθος στην κυματοσυνάρτηση που μας δόθηκε. Θα έπρεπε να είναι (για να είναι σωστή η κανονικοποίηση)

$$\Psi(t=0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\phi_2 \tag{4}$$

Σε αυτή την περίπτωση η πιθανότητα θα είναι $p_2 = \frac{2}{3}$.

4. Η μέση τιμή ενός μεγέθους με διάκριτες ιδιοτιμές όταν η κυματοσυνάρτηση του συστήματος είναι γραμμικός συνδιασμός των ιδιοσυναρτήσεων του είναι:

$$\begin{bmatrix} \Psi(t) = \sum_n a_n(t)\phi_n \\ \hat{A}\phi_n = \lambda_n\phi_n \\ <\hat{A}> = \int \Psi^*(t)\hat{A}\Psi(t)dx \\ \int \phi_n\phi_m dx = \delta_{nm} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow <A> = \sum_n a_n^*(t)a_n(t)\lambda_n$$

όπου λ_n η ιδιοτιμή του μεγέθους A για την κατάσταση n.

Για την περίπτωση μας

$$\begin{bmatrix} \hat{H}\phi_n = E_n\phi_n \\ a_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-iE_1t\hbar} \\ a_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{-iE_2t\hbar} \\ <E> = \sum_n a_n^*(t)a_n(t)E_n \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$<E> = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-iE_1t\hbar}\frac{1}{\sqrt{3}}e^{iE_1t\hbar}E_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{-iE_2t\hbar}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{iE_2t\hbar}E_2 = \frac{E_1+2E_2}{3}$$

Για να βρώ την αβεβαιότητα της ενέργειας θα πρέπει να βρώ τη μέση τιμή της ενέργειας στο τετράγωνο:

$$\begin{bmatrix} \hat{H}\hat{H}\phi_n = E_n^2\phi_n \\ a_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-iE_1t\hbar} \\ a_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{-iE_2t\hbar} \\ < E >= \sum_n a_n^*(t)a_n(t)E_n \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$< E^2 >= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-iE_1t\hbar}\frac{1}{\sqrt{3}}e^{iE_1t\hbar}E_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{-iE_2t\hbar}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{iE_2t\hbar}E_2^2 = \frac{E_1^2 + 2E_2^2}{3}$$

Η αβεβαιότητα στην ενέργεια θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \Delta E = \sqrt{< E^2 > - < E >^2} \\ < E >= \frac{E_1 + 2E_2}{3} \\ < E^2 >= \frac{E_1^2 + 2E_2^2}{3} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \Delta E = \sqrt{\frac{E_1^2 + 2E_2^2}{3} - (\frac{E_1 + 2E_2}{3})^2} = \sqrt{\frac{3E_1^2 + 2E_2^2 - 6E_1E_2}{9}}$$

7 Θέμα Έβδομο

7.1 Εκφώνηση

Η κυματοσυνάρτηση σωματιδίου μάζας m τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι

$$\psi(x) = Ae^{-\lambda x^2/2+\mu x}$$

όπου λ, μ θετικές σταθερές.

1. *Να υπολογιστεί η σταθερά κανονικοποίησης.*
2. *Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές της θέσης και της ορμής.*
3. *Να υπολογιστούν οι αβεβαιότητες της θέσης και της ορμής.*
4. *Να ελεχθεί η αρχή της αβεβαιότητας θέσης-ορμής.*

7.2 Λύση

1. Η σταθερά A υπολογίζεται μέσα από την κανονικοποίηση (θα χρησιμοποιήσουμε και τη σχέση ορθογωνιότητας)

$$\left[\begin{array}{c} <\psi|\psi>=1 \text{ Κανονικοποίηση} \\ \\ \psi(x)=Ae^{-\lambda x^2/2+\mu x} \\ \\ -\lambda x^2+2\mu x=-(ax+b)^2-C \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}} \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} <\psi|\psi>=1 \\ \\ \psi(x)=Ae^{-\lambda x^2/2+\mu x} \\ \\ -\lambda x^2+2\mu x=-a^2x^2-2abx-b^2-C \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}} \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} <\psi|\psi>=1 \\ \\ \psi(x)=Ae^{-\lambda x^2/2+\mu x} \\ \\ -\lambda=-a^2 \Longleftrightarrow a=\sqrt{\lambda} \\ \\ 2\mu=-2ab \Longleftrightarrow b=-\dfrac{\mu}{a}=-\dfrac{\mu}{\sqrt{\lambda}}-b^2=C \Longleftrightarrow C=-\dfrac{\mu^2}{\lambda} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}} \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$A^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2/2+\mu x}e^{-\lambda x^2/2+\mu x}dx=1 \Longleftrightarrow$$

$$A^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2+2\mu x}dx=1 \Longleftrightarrow A^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax+b)^2-C}dx=1 \Longleftrightarrow$$

$$A^2e^{-C}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax+b)^2}dx=1 \overset{y=ax+b}{\Longleftrightarrow} \frac{A^2}{a}e^{-C}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy=1 \Longleftrightarrow$$

$$A^2e^{-C}\sqrt{\pi}=a \Longleftrightarrow A^2=a\frac{e^C}{\sqrt{\pi}}=\sqrt{\lambda}\frac{e^{-\frac{\mu^2}{\lambda}}}{\sqrt{\pi}} \Longleftrightarrow$$

$$A=(\frac{\lambda}{\pi})^{1/4}e^{-\frac{\mu^2}{2\lambda}}$$

2. Η μέση τιμή της θέσης θα είναι:

$$\left[\begin{array}{c} <x>=\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x\psi dx \\ \\ \psi(x)=Ae^{-\lambda x^2/2+\mu x}=Ae^{-(ax+b)^2/2}e^{-C/2} \end{array}\right] \Longleftrightarrow <x>=0$$

καθώς η συνάρτηση $e^{-(ax+b)^2}$ είναι άρτια. Η συνάρτηση $xe^{-(ax+b)^2}$ είναι περιττή. Το ολοκλήρωμα μιας περιττής συνάρτησης σε συμμετρικά όρια είναι μηδενικό.

Η μέση τιμή της ορμής θα είναι:

$$\left[\begin{array}{c} <p>=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{p}\psi dx \\ \psi(x)=Ae^{-\lambda x^2/2+\mu x}=Ae^{-(ax+b)^2/2}e^{-C/2} \\ \hat{p}=-i\hbar\frac{d}{dx} \end{array}\right] \iff$$

$$<p>=\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-(ax+b)^2/2}e^{-C/2}(-i\hbar)\frac{d}{dx}Ae^{-(ax+b)^2/2}e^{-C/2}dx \iff$$

$$<p>=A^2e^{-C}(-i\hbar)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(ax+b)^2/2}(-a)(ax+b)e^{-(ax+b)^2/2}dx \overset{y=ax+b}{\iff}$$

$$<p>=-A^2e^{-C}(-i\hbar)\int_{-\infty}^{\infty}ye^{-y^2}dy=0$$

καθώς η συνάρτηση e^{-y^2} είναι άρτια. Η συνάρτηση ye^{-y^2} είναι περιττή. Το ολοκλήρωμα μιας περιττής συνάρτησης σε συμμετρικά όρια είναι μηδενικό.

3. Για να βρω τις αβεβαιότητες της θέσης (Δx) και της ορμής (Δp) θα πρέπει να βρώ και τις μέσες τιμές του τετραγώνου της θέσης και της μέσης τιμής του τετραγώνου της ορμής γιατί.

Για τη μέση τιμή του τετραγώνου της θέσης:

$$\left[\begin{array}{c} <x^2>=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^* x^2\psi dx \\ \psi(x)=Ae^{-\lambda x^2/2+\mu x}=Ae^{-(ax+b)^2/2}e^{-C/2} \\ \int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}e^{-\lambda x^2}dx=\frac{(2n)!}{(4\lambda)^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \\ A^2=a\frac{e^C}{\sqrt{\pi}} \\ b=-\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \\ a=\sqrt{\lambda} \end{array}\right] \Longleftrightarrow <x^2>=a\frac{e^C}{\sqrt{\pi}}e^{-C}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-(ax+b)^2}dx \overset{y=ax+b}{\Longleftrightarrow}$$

$$<x^2>=\frac{a}{a^3\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(y-b)^2e^{-y^2}dy \Longleftrightarrow$$

$$<x^2>=\frac{1}{a^2\sqrt{\pi}}[\int_{-\infty}^{\infty}y^2e^{-y^2}dy-2b\int_{-\infty}^{\infty}ye^{-y^2}dy+b^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy] \overset{n=1,n=0}{\Longleftrightarrow}$$

$$<x^2>=\frac{1}{\lambda\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}[\frac{1}{2}+\frac{\mu^2}{\lambda}]=\frac{1}{\lambda}[\frac{1}{2}+\frac{\mu^2}{\lambda}]$$

Η μέση τιμή του τετραγώνου της ορμής θα είναι:

$$\left[\begin{array}{c} <p^2>=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{p}\hat{p}\psi dx \\ \psi(x)=Ae^{-\lambda x^2/2+\mu x}=Ae^{-(ax+b)^2/2}e^{-C/2} \\ \hat{p}=-i\hbar\frac{d}{dx} \\ \int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}e^{-\lambda x^2}dx=\frac{(2n)!}{(4\lambda)^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \\ A^2=a\frac{e^C}{\sqrt{\pi}} \\ b=-\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \\ a=\sqrt{\lambda} \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$<p^2>=\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-(ax+b)^2/2}e^{-C/2}(-i\hbar)^2\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}Ae^{-(ax+b)^2/2}e^{-C/2}dx \overset{y=ax+b}{\Longleftrightarrow}$$

$$<p^2>=A^2e^{-C}(-i\hbar)^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}e^{-y^2/2}]\frac{dy}{dx}dx \Longleftrightarrow$$

$$<p^2>=A^2e^{-C}(-i\hbar)^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}e^{-y^2/2}]\frac{dy}{dx}dx \Longleftrightarrow$$

$$<p^2>=A^2e^{-C}(-i\hbar)^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\frac{d}{dx}(-ye^{-y^2/2})]dy \Longleftrightarrow$$

$$<p^2>=a\frac{e^C}{\sqrt{\pi}}e^{-C}(-i\hbar)^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\frac{d}{dy}(-ye^{-y^2/2})]\frac{dy}{dx}dy \Longleftrightarrow$$

$$<p^2>=\frac{a^2}{\sqrt{\pi}}i^2\hbar^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}(-e^{-y^2/2}+y^2e^{-y^2/2})]dy \Longleftrightarrow$$

$$<p^2>=\frac{a^2\hbar^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-y^2}-y^2e^{-y^2})]dy \Longleftrightarrow$$

$$<p^2>=\frac{a^2\hbar^2}{\sqrt{\pi}}[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy-\int_{-\infty}^{\infty} y^2e^{-y^2}dy] \overset{n=1,n=0}{\Longleftrightarrow}$$

$$<p^2>=\frac{a^2\hbar^2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}[1-\frac{1}{2}]=\frac{\lambda\hbar^2}{2}$$

Η αβεβαιότητα της θέσης θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \Delta x=\sqrt{<x^2>-<x>} \\ <x>=0 \\ <x^2>=\frac{1}{\lambda}[\frac{1}{2}+\frac{\mu^2}{\lambda}] \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \Delta x=\sqrt{\frac{1}{\lambda}[\frac{1}{2}+\frac{\mu^2}{\lambda}]}$$

Η αβεβαιότητα της ορμής θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \Delta p=\sqrt{<p^2>-<p>} \\ <p>=0 \\ <p^2>=\frac{\lambda\hbar^2}{2} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \Delta p=\hbar\sqrt{\frac{\lambda\hbar^2}{2}}$$

4. Η Αρχή της Απροσδιοριστίας θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \Delta x \Delta p \geq \dfrac{\hbar}{2} \\ \Delta x = \sqrt{\dfrac{1}{\lambda}[\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu^2}{\lambda}]} \\ \Delta p = \hbar\sqrt{\dfrac{\lambda\hbar^2}{2}} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \Delta x \Delta p = \hbar\sqrt{\frac{\lambda}{2}\frac{1}{\lambda}[\frac{1}{2}+\frac{\mu^2}{\lambda}]]} = \hbar\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\mu^2}{2\lambda}} \geq \frac{\hbar}{2}$$

καθώς οι σταθερές μ , λ είναι θετικές.

8 Θέμα Όγδοο

8.1 Εκφώνηση

Η κυματοσυνάντηση ελευθέρου σωματιδίου μάζας m τη χρονική στιγμή $t = 0$ δίνεται από

$$\psi(x) = C\cos(kx)$$

1. *Εξετάστε ποιες από τις ποσότητες (α) ορμή και (β) ενέργεια έχουν καθορισμένη τιμή και ποια είναι αυτή.*

2. *Βρείτε τη μορφή της κυματοσυνάρτησης τη χρονική στιγμή t.*

8.2 Λύση

1. Για να έχει ένα μέγεθος καθοσριμένη τιμή θα πρέπει η κυματοσυνάρτηση να είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή του (δηλαδή να ικανοποιεί την εξίσωση ιδιοτιμών του). Για την ορμή έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \hat{p} = -i\hbar\dfrac{d}{dx} \\ \hat{p}\psi(x) = \lambda\psi(x) \\ \psi(x) = C\cos(kx) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow -i\hbar\frac{d}{dx}C\cos(kx) = \lambda C\cos(kx) \Longleftrightarrow$$

$$i\hbar Ck\sin(kx) = \lambda C\cos(kx)$$

Προφανώς αυτη η σχέση δεν ικανοποιείται για κάθε x επομένως αυτή η κυματοσυνάρτηση δεν είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή της ορμής. Συνεπώς η ορμή δεν έχει καθορισμένη τιμή.

Για την ενέργεια θα έχουμε (το σωματίδιο είναι ελεύθερο επομένως δεν έχει δυναμική ενέργεια και η

Χαμιλτονιανή είναι μόνο ο όρος της κινητικής ενέργειας

$$\begin{bmatrix} \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \\ \hat{H}\psi(x) = E\psi(x) \\ \psi(x) = C\cos(kx) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m}Ck^2\cos(kx) = EC\cos(kx) \Longleftrightarrow$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Η ενέργεια είναι καθορισμένη και έχει τιμή $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

2. Θα πρέπει να ικανοποιείται η χρονοεξαρτημένη εξίσωση του Schrödinger :

$$\begin{bmatrix} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} \\ \psi(x,t) = \phi(x)T(t) \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x,t) = E\phi(x,t) \\ E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)T(t) = i\hbar\frac{\partial\phi(x)T(t)}{\partial t} \Longleftrightarrow$$

$$-T(t)\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = i\hbar\phi(x)\frac{\partial T(t)}{\partial t} \Longleftrightarrow$$

$$-\frac{1}{\phi(x)}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\phi(x)}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = E \Longleftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x,t) = E\phi(x,t) \\ i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t}T(t) = E \Longleftrightarrow \frac{\partial T(t)}{T(t)} = \frac{-iE\partial t}{\hbar} \Longleftrightarrow T(t) = e^{\frac{-iE\partial t}{\hbar}} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\psi(x) = C\cos x e^{\frac{-i\hbar k^2 \partial t}{2m}}$$