ΦΥΕ-34 -Εργασία Πρώτη Οκτώβριος 2021

Περιεχόμενα

1 Θέμα Πρώτο **2**
1.1 Εκφώνηση . . . 2
1.2 Λύση . . . 2

2 Θέμα Δεύτερο **6**
2.1 Εκφώνηση . . . 6
2.2 Εκφώνηση . . . 6
2.3 Λύση . . . 6

3 Θέμα Τρίτο **9**
3.1 Εκφώνηση . . . 9
3.2 Λύση . . . 10

4 Θέμα Τέταρτο **13**
4.1 Εκφώνηση . . . 13
4.2 Λύση . . . 13

5 Θέμα Πέμπτο **16**
5.1 Εκφώνηση . . . 16
5.2 Λύση . . . 16

6 Θέμα Έκτο **19**
6.1 Εκφώνηση . . . 19
6.2 Λύση . . . 20

7 Θέμα Έβδομο **21**
7.1 Εκφώνηση . . . 21
7.2 Λύση . . . 22

8 Θέμα Όγδοο **24**
8.1 Εκφώνηση . . . 24
8.2 Λύση . . . 25

9 Θέμα Ένατο **29**
9.1 Εκφώνηση . . . 29
9.2 Λύση . . . 30

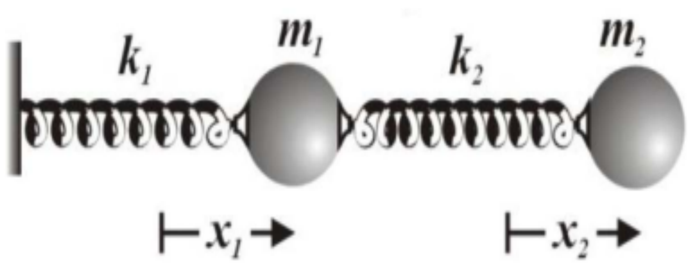
10 Θέμα Δέκατο **33**
10.1 Εκφώνηση . . . 33
10.2 Λύση . . . 33

1 Θέμα Πρώτο

1.1 Εκφώνηση

Το σύστημα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δυο ιδανικά ελατήρια με σταθερές $k_1 = 3k$ και $k_2 = 2k$ και από δυο σώματα με μάζες $m_1 = m_2 = m$ Να βρεθούν:

1. *Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος.*
2. *Οι ιδιοσυχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.*
3. *Οι λόγοι των πλατών των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.*
4. *Οι απομακρύνσεις $x_1(t)$, $x_2(t)$ για γενικές αρχικές συνθήκες. Εξειδικεύστε στην περίπτωση που $x_1(0) = x_0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$.*

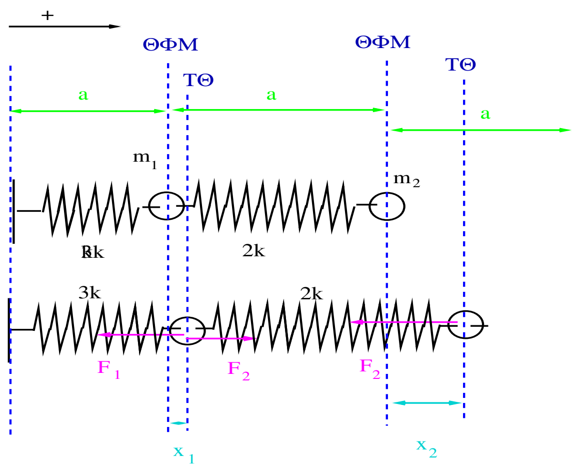


1.2 Λύση

Παρατηρηση:Προσοχή, η άσκηση αρχικά δεν μας λέει ότι τα ελατήρια βρίσκονται στις Θέσεις Φυσικού Μήκους αλλά το υπονοεί.

1. Αρχικά σχεδιάζουμε δύο θέσεις του συστήματος. Μια στην οποία τα ελατήρια βρίσκονται στο Φυσικό τους μήκος (ΘΦΜ) και μια Τυχαία Θέση. Έστω x_1 η μετατόπιση του πρώτου σώματος και x_2 η μετατόπιση του δεύτερου σώματος.

   Στη συνέχεια σχεδιάζουμε για κάθε θέση τις δυνάμεις οι οποίες ασκούνται. Στην ΤΘ τα ελατήρια είναι τεντωμένα κατά:



$$\begin{bmatrix} 1^o & \Delta l_1 = x_1 & F_1 = 3kx_1 \\ 2^o & \Delta l_2 = x_2 - x_1 & F_2 = 2k(x_2 - x_1) \end{bmatrix}$$

   καθώς οι απομακρύνσεις x_1, x_2 είναι ορισμένες από τις θέσεις φυσικού μήκους του κάθε ελατηρίου. Επίσης υπολογίσαμε και τις δυνάμεις που δέχεται το κάθε ελατήριο.

Από τον Δεύτερο Νόμο του Newton οι εξισώσεις κίνησης για κάθε σώμα στην τυχαία Θέση θα είναι (με $\ddot{x}$ συμβολίζουμε τη δεύτερη παράγωγο του x ως προς χρόνο):

$$\begin{bmatrix} m_1 a_1 = m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 \ddot{x}_1 = 2k(x_2 - x_1) - 3kx_1 \\ m_2 a_2 = m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = m_2 \ddot{x}_2 = -2k(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \overset{m_1=m_2=m}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} m\ddot{x}_1 = 2kx_2 - 5kx_1 \\ m\ddot{x}_2 = 2kx_1 - 2kx_2 \end{bmatrix}$$

Αυτές είναι οι εξισωσεις κίνησης.

2. Θέτοντας λύσεις της μορφής $x_n = A_n \cos\omega t$ έχουμε ότι :

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x}_1 = 2kx_2 - 5kx_1 \\ m\ddot{x}_2 = 2kx_1 - 2kx_2 \\ x_n = A_n \cos\omega t \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -mA_1\omega^2 = -5kA_1 + 2kA_2 \Longleftrightarrow A_1(5k - m\omega^2) - 2kA_2 = 0 \\ -mA_2\omega^2 = -2kA_2 + 2kA_1 \Longleftrightarrow -2kA_1 + (2k - m\omega^2)A_2 = 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} (5k - m\omega^2) & -2k \\ -2k & (2k - m\omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

Για να έχουμε σαν λύση και τη μη μηδενική λύση θα πρέπει:

$$\begin{vmatrix} (5k - m\omega^2) & -2k \\ -2k & (2k - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (5k - m\omega^2)(2k - m\omega^2) - 4k^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$m^2\omega^4 - 7km\omega^2 + 6k^2 = 0 \overset{\omega^2 = x}{\Longleftrightarrow} m^2x^2 - 7kmx + 6k^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 = \dfrac{k}{m} \Longleftrightarrow \omega_1 = \pm\sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \omega_2^2 = \dfrac{6k}{m} \Longleftrightarrow \omega_2 = \pm\sqrt{\dfrac{6k}{m}} \end{bmatrix}$$

Προφανώς μόνο οι μη αρνητικές ρίζες μας ενδιαφέρουν για το ω^2. Συνεπώς θα έχουμε ότι:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

Αυτές είναι οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

3. Για να βρω τον λόγο των πλατών επιστρέφουμε στις εξισώσεις κίνησης:

$$\begin{bmatrix} A_1(5k - m\omega^2) - 2kA_2 = 0 \quad \omega_1^2 = \dfrac{k}{m} \\ \\ A_1(5k - m\omega^2) - 2kA_2 = 0 \quad \omega_2^2 = \dfrac{6k}{m} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} A_1(5k - m\dfrac{k}{m}) - 2kA_2 = 0 \Longleftrightarrow 4kA_1 = 2kA_2 \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{1}{2} \\ A_1(5k - m\dfrac{6k}{m}) - 2kA_2 = 0 \Longleftrightarrow -kA_1 = 2kA_2 \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = -2 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοσυχνότητες για $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ είναι

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

Οι λόγοι των πλατών είναι:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{1}{2} & \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \dfrac{A_1}{A_2} = -2 & \omega_1 = \sqrt{\dfrac{6k}{m}} \end{bmatrix}$$

4. Οι απομακρύνσεις για γενικές συνθήκες είναι:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) = A_1 \cos\omega_1 t + B_1 \sin(\omega_1 t) + \Gamma_1 \cos\omega_2 t + \Delta_1 \sin(\omega_2 t) \\ \\ x_2(t) = A_2 \cos\omega_1 t + B_2 \sin(\omega_1 t) + \Gamma_2 \cos\omega_2 t + \Delta_2 \sin(\omega_2 t) \\ \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\ ,\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{6k}{m}} \\ \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{1}{2}\ ,\ \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = -2\ ,\ \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} = -2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) = A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin(\omega_1 t) + \Gamma_1\cos\omega_1 t + \Delta_1\sin(\omega_1 t) \\ \dot{x}_1 = -A_1\omega_1\sin\omega_1 t + B_1\omega_1\cos(\omega_1 t) - \Gamma_1\omega_2\sin\omega_2 t + \Delta_1\omega_2\cos(\omega_1 t) \\ x_2(t) = A_2\cos\omega_1 t + B_2\sin(\omega_1 t) + \Gamma_2\cos\omega_1 t + \Delta_2\sin(\omega_1 t) \\ \dot{x}_2 = -A_2\omega_1\sin\omega_1 t + B_2\omega_1\cos(\omega_1 t) - \Gamma_2\omega_2\sin\omega_2 t + \Delta_2\omega_2\cos(\omega_1 t) \\ \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\ ,\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{6k}{m}} \\ \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{1}{2}\ ,\ \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = -2\ ,\ \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} = -2 \end{bmatrix} \overset{x_1(0)=x_0\ ,\ x_2(0)=0\ ,\ \dot{x}_1(0)=0\ ,\ \dot{x}_2(0)=0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 = A_1 + \Gamma_1 \\ 0 = B_1\omega_1 + \Delta_1\omega_2 \\ 0 = A_2 + \Gamma_2 \\ 0 = B_2\omega_1 + \Delta_2\omega_2 \\ \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\ ,\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{6k}{m}} \\ \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{1}{2}\ ,\ \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = -2\ ,\ \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} = -2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 = A_1 + \Gamma_1 \\ 0 = B_1\sqrt{\dfrac{k}{m}} + \Delta_1\sqrt{\dfrac{6k}{m}} \\ 0 = 2A_1 - \dfrac{\Gamma_1}{2} \\ 0 = 2B_1\sqrt{\dfrac{k}{m}} - \dfrac{\Delta_1}{2}\sqrt{\dfrac{6k}{m}} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_0 = A_1 + \Gamma_1 \\ 0 = 5B_1 \Longleftrightarrow B_1 = 0 \\ \Gamma_1 = 4A_1 \\ \Delta_1 = \dfrac{4B_1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 = 5A_1 \Longleftrightarrow A_1 = \dfrac{x_0}{5} \\ B_1 = 0 \\ \Gamma_1 = \dfrac{4x_0}{5} \\ \Delta_1 = 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) = \dfrac{x_0}{5}\cos\omega_1 t + \dfrac{4x_0}{5}\cos\omega_2 t \\ x_2(t) = \dfrac{2x_0}{5}\cos\omega_1 t - \dfrac{2x_0}{5}\cos\omega_2 t \end{bmatrix}$$

2 Θέμα Δεύτερο

2.1 Εκφώνηση

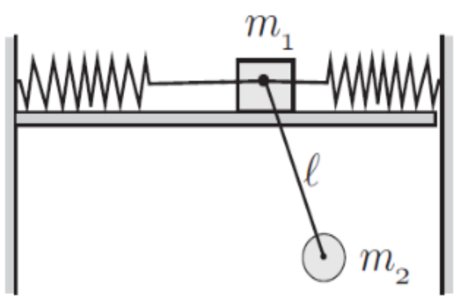
2.2 Εκφώνηση

Σώμα μάζας $m_1 = m$ συνδέεται με δύο ίδια ιδανικά ελατήρια σταθεράς k και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές σε οριζόντιο πάγκο. Ένα άλλο σώμα μάζας $m_2 = m$ συνδέεται με ελαφριά μπάρα μήκους l στο πρώτο σώμα και μπορεί να ταλαντώνεται ελεύθερα όπως στο παρακάτω σχήμα. Όταν το σύστημα είναι σε ισορροπία τα ελατήρια βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος. Αν το σύστημα κινείται έτσι ώστε οι γωνίες ταλάντωσης του εκκρεμούς να είναι μικρές και σας δίνεται επίσης ότι η σταθερά k έχει επιλεγεί ώστε να ισχύει $k = \dfrac{2mg}{l}$ (τα αποτελέσματα να εκφραστούν συναρτήσει των g, l):

1. *Να γραφούν οι εξισώσεις που διέπουν την κίνηση των δύο σωμάτων.*

2. *Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.*

3. *Να υπολογιστούν οι λόγοι των πλατών των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.*

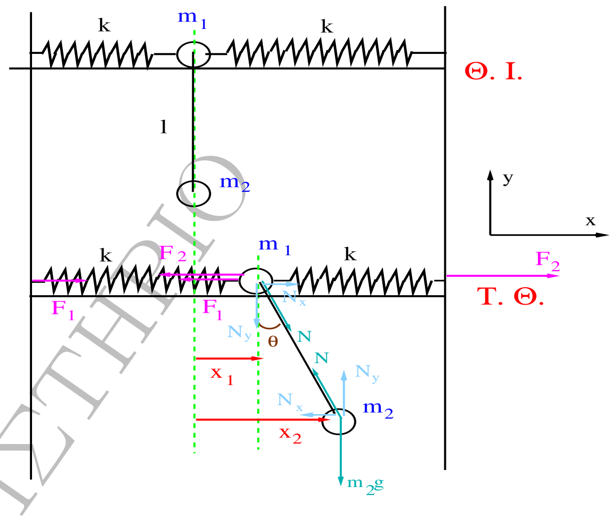


2.3 Λύση

1. Έστω x_1 η μετατόπιση του πρώτου σώματος και x_2 η μετατόπιση του δεύτερου σώματος όπως φαίνεται στο σχήμα.

Στην τυχαία Θέση (ΤΘ) το πρώτο ελατήριο k είναι παραμορφωμένο κατά x_1 ενώ το δεύτερο ελατήριο k επίσης κατά x_1. Συνεπώς οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα είναι

$$\begin{bmatrix} F_1 = kx_1 \\ \\ F_2 = kx_1 \end{bmatrix}$$



Αναλύουμε την δύναμη N που ασκεί η ράβδος στα δύο σώματα.

$$\begin{bmatrix} N_x = N\sin\theta \\ N_y = N\cos\theta \end{bmatrix}$$

Όμως η γωνία θ είναι μικρή επομένως μπορούμε να προσεγγίσουμε $\cos\theta \approx 1$. Τότε από τον Δεύτερο Νόμο του Newton για τοι δεύτερο σώμα στον κατακόρυφο άξονα θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \sum F_y = 0 \\ \sum F_y = N_y - m_2 g \\ N_y = N\cos\theta \\ \cos\theta \approx 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow N = m_2 g$$

Από τον Δεύτερο Νόμο του Newton οι εξισώσεις κίνησης στον άξονα x για κάθε σώμα θα είναι (με $\ddot{x}$

συμβολίζουμε τη δεύτερη παράγωγο του x ως προς χρόνο):

$$\begin{bmatrix} 1^o \quad , \quad m_1 a_1 = m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = m\ddot{x}_1 = N_x - F_1 - F_2 \Longleftrightarrow m\ddot{x}_1 = -kx_1 - kx_1 + N\sin\theta \\ 2^o \quad , \quad m_2 a_2 = m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = m\ddot{x}_2 = -N_x \Longleftrightarrow m\ddot{x}_2 = -N\sin\theta \\ N_x = N\sin\theta = N\dfrac{x_2 - x_1}{l} \\ N = m_2 g = mg \\ F_1 = kx_1 \\ F_2 = kx_1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x}_1 = mg\dfrac{x_2 - x_1}{l} - 2kx_1 \\ m\ddot{x}_2 = -mg\dfrac{x_2 - x_1}{l} \end{bmatrix}$$

όπου η μπάρα θεωρούμε ότι είναι άμαζη.

Αυτές είναι οι εξισώσεις κίνησης.

2. Θέτοντας λύσεις της μορφής $x_n = A_n \cos\omega t$ έχουμε ότι :

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x}_1 = mg\dfrac{x_2 - x_1}{l} - 2kx_1 \\ m\ddot{x}_2 = -mg\dfrac{x_2 - x_1}{l} \\ x_n = A_n \cos\omega t \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -mA_1\omega^2 = -2kA_1 + mg\dfrac{A_2 - A_1}{l} \Longleftrightarrow A_1(2k + \dfrac{mg}{l} - m\omega^2) - \dfrac{mg}{l}A_2 = 0 \\ -mA_2\omega^2 = -mg\dfrac{A_2 - A_1}{l} \Longleftrightarrow -\dfrac{mg}{l}A_1 + (\dfrac{mg}{l} - m\omega^2)A_2 = 0 \end{bmatrix} \overset{k=\frac{2mg}{l}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 2k + \dfrac{k}{2} - m\omega^2 & -\dfrac{k}{2} \\ -\dfrac{k}{2} & \dfrac{k}{2} - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

Για να έχουμε σαν λύση και τη μη μηδενική λύση θα πρέπει:

$$\begin{vmatrix} \frac{5k}{2} - m\omega^2 & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & \frac{k}{2} - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow m^2\omega^4 - 3km\omega^2 + k^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 = \frac{k}{m}\frac{3+\sqrt{5}}{2} \Longleftrightarrow \omega_1 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ \omega_2^2 = \frac{k}{m}\frac{3-\sqrt{5}}{2} \Longleftrightarrow \omega_2 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{bmatrix}$$

Προφανώς μόνο οι μη αρνητικές ρίζες μας ενδιαφέρουν για το ω^2. Συνεπώς θα έχουμε ότι:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

Αυτές είναι οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

3. Για να βρω τον λόγο των πλατών επιστρέφουμε στις εξισώσεις κίνησης:

$$\begin{bmatrix} A_1(2k + \frac{mg}{l} - m\omega^2) - \frac{mg}{l}A_2 = 0 & \omega_1^2 = \frac{k}{m}\frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ A_1(2k + \frac{mg}{l} - m\omega^2) - \frac{mg}{l}A_2 = 0 & \omega_1^2 = \frac{k}{m}\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \overset{k=\frac{2mg}{l}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} A_1(5k - m\frac{k}{m}(3+\sqrt{5})) - kA_2 = 0 \Longleftrightarrow A_1(2-\sqrt{5}) = A_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2-\sqrt{5}} \\ A_1(5k - m\frac{k}{m}(3-\sqrt{5})) - kA_2 = 0 \Longleftrightarrow A_1(2-\sqrt{5}) = A_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2+\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

3 Θέμα Τρίτο

3.1 Εκφώνηση

Είναι οι παρακάτω εκφράσεις λύσεις της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης (με a , b θετικές σταθερές); Εξηγήστε αναλυτικά την απάντηση σας. Για τη συνάρτηση της περίπτωσης a βρείτε τη σχέση διασποράς, την ταχύτητα φάσης και την ταχύτητα ομάδας για τις κυματικές λύσεις. Βρείτε επίσης τις μονάδες μέτρησης των σταθερών k, ω και a στο σύστημα SI για όλες τις περιπτώσεις.

1.

$$a)\ y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

2.

$$b)\ y(x,t) = A\frac{1}{a^2x^2 - t^2}$$

3.

$$c)\ y(x,t) = A\frac{1}{a^2x^2 + t^2}$$

4.

$$y(x,t) = a^2x^2 + t^2$$

΄

3.2 Λύση

Γνωρίζουμε ότι η κυματική εξίσωση είναι:

$$\frac{\partial y^2(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial y^2(x,t)}{\partial t^2} \tag{1}$$

όπου c **η ταχύτητα διάδοσης του κύματος η οποία θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη των** x, t.

1. Για να είναι η $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ λύση της κυματικής εξίσωσης θα πρέπει να ικανοποιεί την 1. Επομένως θα έχουμε ότι:

$$\left[\begin{array}{l} y(x,t) = A\sin(kx-\omega t) \\ \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial t^2} \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial x^2} = -Ak^2\sin(kx-\omega t) \\ \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial t^2} = -A\omega^2\sin(kx-\omega t) \\ \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial t^2} \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$-Ak^2\sin(kx-\omega t) = -\frac{1}{c^2}A\omega^2\sin(kx-\omega t) \Longleftrightarrow c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} \Longleftrightarrow c = \frac{\omega}{k}$$

Η ταχύτητα είναι ανεξάρτητη των x, t επομένως αυτή η συνάρτηση είναι λύση της κυματικής εξίσωσης. Αυτή είναι η ταχύτητα φάσης.
Η σχέση διασποράς είναι:

$$c = \frac{\omega}{k} \Longleftrightarrow \omega = ck$$

Η ταχύτητα ομάδας είναι:

$$\left[\begin{array}{l} v_g = \dfrac{d\omega}{dk} \\ \\ \omega = ck \end{array}\right] \Longleftrightarrow v_g = c$$

Επομένως η ταχύτητα ομάδας ταυτίζεται με την ταχύτητα φάσης.

Θα πρέπει η μονάδα του ορίσματος (μέσα στο ημίτονο) να είναι ακτίνια η οποία δεν είναι μονάδα στο S.I.. Συνεπώς το όρισμα στο σύστημα αυτό θα πρέπει να είναι καθαρός αριθμός (χωρίς διαστάσεις). Από αυτό καταλήγουμε ότι $k \to m^{-1}$, $\omega \to s^{-1}$.

2. Για να είναι η $y(x,t) = A\dfrac{1}{a^2x^2 - t^2}$ λύση της κυματικής εξίσωσης θα πρέπει να ικανοποιεί την 1. Επομένως θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} y(x,t) = A\dfrac{1}{a^2x^2 - t^2} \\ \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial t^2} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial x^2} = -\dfrac{2a^2(3a^2x^2 + t^2)}{(t^2 - a^2x^2)^3} \\ \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{2(a^2x^2 + 3t^2)}{(a^2x^2 - t^2)^3} \\ \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial t^2} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$-\frac{2a^2(3a^2x^2 + t^2)}{(t^2 - a^2x^2)^3} = \frac{1}{c^2}\frac{2(a^2x^2 + 3t^2)}{(a^2x^2 - t^2)^3} \Longleftrightarrow 2a^2(3a^2x^2 + t^2) = \frac{1}{c^2}2(a^2x^2 + 3t^2) \Longleftrightarrow$$

$$3a^4x^2 + a^2t^2 = \frac{a^2x^2 + 3t^2}{c^2} \Longleftrightarrow (3a^4c^2 - a^2)x^2 + (a^2c^2 - 3)t^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$3a^4c^2 - a^2 = 0 \Longleftrightarrow c^2 = \frac{1}{3a^2} \Longleftrightarrow c = \frac{1}{a\sqrt{3}}$$

$$a^2c^2 - 3 = 0 \Longleftrightarrow c^2 = \frac{3}{a^2} \Longleftrightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{a}$$

Βλέπουμε ότι η τιμή της ταχύτητας που μηδενίζει τον όρο των x δεν μηδενίζει τον όρο των t επομένως δεν είναι κυματική λύση.

Καθώς θα πρέπει στον παρονομαστή της συνάρτησης οι προσθετέοι να έχουν τις ίδιες μονάδες, δηλαδή μονάδες χρόνου

$$a^2m^2 \to s^2 \Longleftrightarrow a \to \frac{s}{m}$$

3. Για να είναι η $y(x,t) = A\dfrac{1}{a^2x^2 + t^2}$ λύση της κυματικής εξίσωσης θα πρέπει να ικανοποιεί την 1. Επομένως

θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} y(x,t) = A\dfrac{1}{a^2x^2+t^2} \\ \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial t^2} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial x^2} = -\dfrac{2a^2(3a^2x^2-t^2)}{(t^2+a^2x^2)^3} \\ \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{2(-a^2x^2+3t^2)}{(a^2x^2+t^2)^3} \\ \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial t^2} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{2a^2(3a^2x^2-t^2)}{(t^2+a^2x^2)^3} = \frac{1}{c^2}\frac{2(-a^2x^2+3t^2)}{(a^2x^2+t^2)^3} \Longleftrightarrow 2a^2(3a^2x^2-t^2) = \frac{1}{c^2}2(-a^2x^2+3t^2) \Longleftrightarrow$$

$$3a^4x^2 - a^2t^2 = \frac{-a^2x^2+3t^2}{c^2} \Longleftrightarrow (3a^4c^2+a^2)x^2 - (a^2c^2+3)t^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$3a^4c^2 + a^2 = 0 \Longleftrightarrow c^2 = \frac{-1}{3a^2} \Longleftrightarrow c = \frac{\pm i}{a\sqrt{3}}$$

$$a^2c^2 + 3 = 0 \Longleftrightarrow c^2 = \frac{-3}{a^2} \Longleftrightarrow c = \frac{\pm i\sqrt{3}}{a}$$

Βλέπουμε ότι η τιμή της ταχύτητας που μηδενίζει τον όρο των x δεν μηδενίζει τον όρο των t επομένως δεν είναι κυματική λύση.

Καθώς θα πρέπει στον παρονομαστή της συνάρτησης οι προσθετέοι να έχουν τις ίδιες μονάδες, δηλαδή μονάδες χρόνου

$$a^2m^2 \to s^2 \Longleftrightarrow a \to \frac{s}{m}$$

4. Για να είναι η $y(x,t) = a^2x^2 + t^2$ λύση της κυματικής εξίσωσης θα πρέπει να ικανοποιεί την 1. Επομένως θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} y(x,t) = a^2x^2+t^2 \\ \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial t^2} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial x^2} = 2a^2 \\ \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial t^2} = 2 \\ \dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial y^2(x,t)}{\partial t^2} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$2a^2 = \frac{1}{c^2}2 \Longleftrightarrow c = \frac{1}{a}$$

Βλέπουμε ότι η τιμή της ταχύτητας που μηδενίζει τον όρο των x μηδενίζει τον όρο των t επομένως η συνάρτηση είναι κυματική λύση.

Καθώς θα πρέπει στη συνάρτησης οι προσθετέοι να έχουν τις ίδιες μονάδες, δηλαδή μονάδες χρόνου

$$a^2m^2 \to s^2 \iff a \to \frac{s}{m}$$

Η ταχύτητα φάσης είναι $c = c = \frac{1}{a}$.

4 Θέμα Τέταρτο

4.1 Εκφώνηση

1. *Ένα εγκάρσιο αρμονικό (ημιτονοειδές) κύμα ταξιδεύει σε μία τεντωμένη χορδή κατά τη θετική x διεύθυνση με ταχύτητα $10\ cm/s$. Το πλάτος του κύματος είναι $10\ cm$ και το μήκος κύματος του είναι $0.5\ m$. Βρείτε την εγκάρσια ταχύτητα ενός σημείου Σ της χορδής όπου η μετατόπιση του κύματος είναι $5\ cm$.*

2. *Ένας αυλός που έχει το ένα άκρο του κλειστό περιέχει αέριο με πυκνότητα ρ_1 και ένας αυλός που είναι ανοικτός και στα δύο άκρα του περιέχει αέριο με πυκνότητα $\rho_2 = 4\rho_1$. Και τα δύο αέρια έχουν ίδιο μέτρο ελαστικότητας. Και οι δύο αυλοί διεγείρονται στον πρώτο υπέρτονο με την ίδια συχνότητα. Αν το μήκος του αυλού που έχει το ένα άκρο του κλειστό είναι $30\ cm$ να βρεθεί το μήκος του αυλού που έχει και τα δύο άκρα του ανοικτά. Σημείωση: Ο πρώτος υπέρτονος είναι η επόμενη ιδιοσυχνότητα μετά τη θεμελιώδη συχνότητα. Επίσης, υπενθυμίζεται ότι η ταχύτητα του ήχου σε αέριο δίνεται από τη σχέση $v = \sqrt{K/\rho}$, όπου K το μέτρο ελαστικότητας και ρ η πυκνότητα του αερίου.*

4.2 Λύση

1. Η εξίσωση του κύματος είναι

$$\begin{bmatrix} y = A\sin(\omega t - kx) \\ A = 10\ cm = 0.1\ m \\ k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda = 0.5\ m \end{bmatrix} \iff y = 0.1\sin(\omega t - 4\pi x)$$

όπου A το πλάτος του κύματος

Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής:

$$\begin{bmatrix} v = \lambda \cdot f \\ \lambda = 0.5\ m \\ v = 10\ cm/s = 0.1\ m/s \end{bmatrix} \iff 0.1 = 0.5f \iff f = \frac{1}{5} = 0.2\ Hz$$

Η κυκλική συχνότητα θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \omega = 2\pi f \\ f = 0.2\ Hz \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \omega = 0.4\pi\ rad/s$$

Επομένως:

$$\begin{bmatrix} y = 0.1\sin(\omega t - 4\pi x) \\ \omega = 0.4\pi\ rad/s \end{bmatrix} \Longleftrightarrow y = 0.1\sin(0.4\pi t - 4\pi x)$$

Η εγκάρσια ταχύτητα θα είναι:

$$\begin{bmatrix} v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ y = 0.1\sin(0.4\pi t - 4\pi x) \\ u = 5\ cm = 0.05\ m \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} v_y = 0.1 \cdot 0.4\pi\cos(0.4\pi t - 4\pi x) \\ 0.05 = 0.1\sin(0.4\pi t - 4\pi x) \Longleftrightarrow \sin(0.4\pi t - 4\pi x) = \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} v_y = 0.1 \cdot 0.4\pi\cos(0.4\pi t - 4\pi x) \\ \sin(0.4\pi t - 4\pi x) = \dfrac{1}{2} \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow v_y = 0.04\pi\frac{\sqrt{3}}{2}\ m/s \quad (2)$$

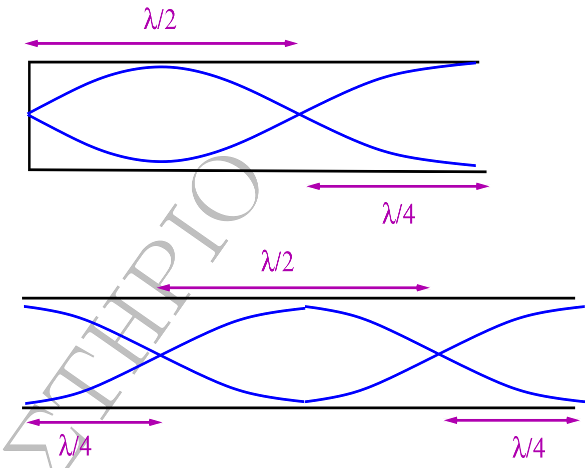
2. Οι ταχύτητες στα δύο μέσα δίνονται από:

$$\begin{bmatrix} v = \sqrt{\dfrac{K}{\rho}} \\ \rho_2 = 4\rho_1 \\ K_1 = K_2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{\frac{K}{4\rho_1}}}{\sqrt{\frac{K}{\rho_1}}} = 2$$

Ο αυλός που έχει το ένα άκρο του ανοικτό θα έχει στο κλειστό άκρο δεσμό ενώ στο ανοικτό άκρο θα έχει κοιλία. Επομένως το μήκος του θα είναι

$$L_1 = N\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1}{4}$$

καθώς η απόσταση ανάμεσα σε δύο δεσμούς είναι μισό μήκος κύματος ενώ η απόσταση ανάμεσα σε ένα δεσμό και στην κοντινότερη του κοιλία είναι το ένα τέταρτο του μήκους κύματος.



Όπου N είναι ο αριθμός των στασίμων κυμάτων μέσα στον αυλό (όπου ένα στάσιμο είναι η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς δεσμούς ή δύο διαδοχικές κοιλίες). Η θεμελιώδης συχνότητα είναι όταν δεν έχουμε κανένα στάσιμο κύμα στον αυλό ($N = 0$). Ο πρώτος υπέρτονος είναι για $N = 1$. Επομένως

$$L_1 = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1}{4} = \frac{3\lambda_1}{4}$$

Ο αυλός που έχει και τα δύο άκρα του ανοικτά θα και στα δύο έχει κοιλία. Επομένως το μήκος του θα είναι

$$L_2 = N\frac{\lambda_2}{2}$$

καθώς η απόσταση ανάμεσα σε δύο κοιλίες είναι μισό μήκος κύματος. N είναι ο αριθμός των στασίμων κυμάτων μέσα στον αυλό (όπου ένα στάσιμο είναι η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς δεσμούς ή δύο διαδοχικές κοιλίες). Η θεμελιώδης συχνότητα είναι όταν δεν έχουμε ένα στάσιμο κύμα στον αυλό ($N = 1$). Ο πρώτος υπέρτονος είναι για $N = 2$. Επομένως

$$L_2 = 2\frac{\lambda_2}{2} = \lambda_2$$

Οι δύο συχνότητες είναι ίδιες επομένως:

$$\begin{bmatrix} v = \lambda f \\ \\ \dfrac{v_2}{v_1} = 2 \\ L_1 = \dfrac{3\lambda_1}{4} \\ \\ L_1 = 30\ cm = 0.3\ m \\ \\ L_2 = \lambda_2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2 \\ 0.3 = \dfrac{3\lambda_1}{4} \iff \lambda_1 = 0.4\ m \\ L_2 = \lambda_2 \end{bmatrix} \iff$$

$$\frac{L_2}{0.4} = 2 \iff L_2 = 0.8\ m$$

5 Θέμα Πέμπτο

5.1 Εκφώνηση

Δίνονται δύο χορδές με ίδια ταχύτητα διάδοσης κυμάτων με μήκη L και L'. Η χορδή μήκους L έχει και τα δύο άκρα πακτωμένα ενώ η άλλη με μήκος $L?$ έχει το ένα άκρο ελεύθερο και το άλλο πακτωμένο.

1. *Βρείτε τον λόγο L/L' αν οι τρίτες αρμονικές στις δυο χορδές έχουν το ίδιο μήκος κύματος και γράψτε και σχεδιάστε για μια χρονική στιγμή την συναρτησιακή μορφή της απομάκρυνσης $y(x,t)$ για τις συγκεκριμένες αρμονικές. Εξηγήστε γιατί ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες από την συγκεκριμένη μορφή $y(x,t)$.*

2. *Βρείτε τον λόγο L/L' αν απελευθερωθούν και τα δύο άκρα της χορδής με μήκος L' .*

3. *Πως αλλάζουν οι παραπάνω απαντήσεις αν η ταχύτητες διάδοσης των κυμάτων στις χορδές δεν είναι ίδιες;*

5.2 Λύση

Οι χορδές στο πακτωμένο άκρο τους έχουν πάντα δεσμούς ενώ στο ελεύθερο άκρο τους έχουν πάνταν κοιλίες. Μια χορδή με τα δύο άκρα πακτωμένα θα έχει μήκος (καθώς η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών είναι μισό μήκος κύματος)

$$L = N_1 \frac{\lambda_1}{2}$$

Μια χορδή με το ένα άκρο πακτωμένα και το άλλο ελεύθερο θα έχει μήκος (καθώς η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών είναι μισό μήκος κύματος και η απόσταση ενός δεσμού από την κοντινότερη κοιλία είναι το ένα τέταρτο του μήκους κύματους)

$$L' = N_2 \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2}{4}$$

1. Οι τρίτες αρμονικές είναι οι τρίτες συχνότητες μετά την θεμελιώδη. Δηλαδή $N_1 = 4$ καθώς $N_1 = 1$ είναι η θεμελιώδης. Επίσης $N_2 = 3$ καθώς $N_2 = 0$ είναι η θεμελιώδης. Μας δίνει ότι τα μήκη κύματος είναι τα ίδια επομενως $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Συνεπώς:

$$\begin{bmatrix} L = N_1 \dfrac{\lambda}{2} \\[2ex] N_1 = 4 \\[2ex] L' = N_2 \dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\lambda}{4} \\[2ex] N_2 = 3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \frac{L}{L'} = \frac{4\dfrac{\lambda}{2}}{3\dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\lambda}{4}} = \frac{2\lambda}{1.75\lambda} = \frac{8}{7}$$

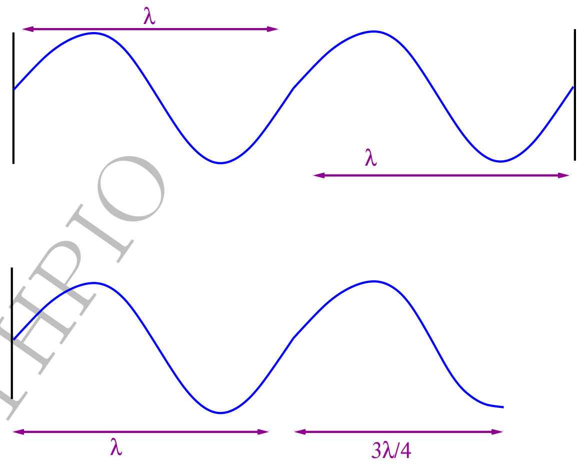
Στις χορδές δημιουργούνται στάσιμα κύματα με εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} y_1 = A_1 \sin k_1 x_1 \sin \omega_1 t \\[2ex] y_2 = A_2 \sin k_2 x_2 \sin \omega_2 t \\[2ex] k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \\[2ex] \lambda_1 = \lambda_2 \\[2ex] v = f\lambda \\[2ex] v_1 = v_2 \\[2ex] \omega 2\pi f \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 = A_1 \sin k_1 x_1 \sin \omega_1 t \\[2ex] y_2 = A_2 \sin k_2 x_2 \sin \omega_2 t \\[2ex] k_1 = k_2 = k \\[2ex] f_1\lambda = f_2\lambda \Longleftrightarrow f_1 = f_2 = f \\[2ex] \omega_1 = \omega_2 = \omega \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} y_1 = A_1 \sin k x_1 \sin \omega t \\[2ex] y_2 = A_2 \sin k x_2 \sin \omega t \end{bmatrix}$$

Όπου A_1, A_2 τα πλάτη των ταλαντώσεων.

Επιλέγω $\omega t = \frac{\pi}{2} \iff \sin \omega t = 1$ και για τις δύο χορδές. Στην πρώτη που είναι και τα δύο άκρα πακτωμένα έχω 4 στάσιμα κύματα επομένως 2λ ενώ σε αυτή που έχω το ένα άκρο ανοικτό έχω τριάμιση στάσιμα κύματα $\frac{7}{2}\frac{\lambda}{2} = \frac{7\lambda}{4}$



Οι συνοριακές συνθήκες είναι για $x_1 = x_2 = 0$ $y_1 = y_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} y_1 = A_1 \sin kx_1 \sin \omega t \\ y_2 = A_2 \sin kx_2 \sin \omega t \\ x = 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{bmatrix}$$

σε συμφωνία με τις συνοριακές συνθήκες.

Η δεύτερη συνοριακή συνθήκη είναι $x_1 = L$, $y_1 = 0$ με $x_2 = \frac{7L}{8}$, $y_2 = A_2$ για $\omega t = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{bmatrix} y_1 = A_1 \sin kx_1 \sin \omega t \\ y_2 = A_2 \sin kx_2 \sin \omega t \\ x_1 = L \\ y_1 = 0 \\ x_2 = L' = \frac{7L}{8} \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{bmatrix} \overset{\omega t = \frac{\pi}{2}}{\iff} \begin{bmatrix} 0 = A_1 \sin kL \iff kL = n_1\pi \iff k = \frac{n_1\pi}{L} \\ y_2 = A_2 \sin kL' \\ L' = \frac{7L}{8} \\ n_1 = 4 \end{bmatrix} \iff$$

$$y_2 = A_2 \sin[\frac{7L}{8}\frac{n\pi}{L}] = A_2 \sin\frac{28\pi}{8} = A_2$$

σε συμφωνία με τις συνοριακές συνθήκες.

2. Αν απελευθερωθούν και τα δύο άκρα της δεύτερης χορδής σημαίνει ότι θα έχουμε και στα δύο άκρα κοιλία. Και καθώς η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές κοιλίες είναι ένα στάσιμο κύμα, δηλαδή $\frac{\lambda}{2}$ θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} L = N_1 \dfrac{\lambda_1}{2} \\ L' = N_2 \dfrac{\lambda_2}{2} \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ N_1 = N_2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow L = L' \Longleftrightarrow \frac{L}{L'} = 1$$

3. Αν οι ταχύτητες διάδοσης των δύο κυμάτων δεν είναι ίδιες τότε τα μεν μήκη κύματος είναι κοινά αλλά από τη σχέση $v = \lambda f$ οι συχνότητες δεν είναι. Οι παραπάνω απαντήσεις δεν θα αλλάξουν καθώς τα μήκη των χροδών επηρεάζονται από το μήκος κύματος. Απλά οι δύο χορδές δεν θα ταλαντώνονται με σταθερή διαφορά φάσης. Η διαφορά φάσης τους συνεχώς θα μεταβάλλεται.

$$\begin{bmatrix} y_1 = A_1 \sin kx_1 \sin \omega_1 t \\ y_2 = A_2 \sin kx_2 \sin \omega_2 t \\ \Delta\phi = (\omega_1 - \omega_2)t = 2\pi(f_1 = f_2)t \end{bmatrix}$$

6 Θέμα Έκτο

6.1 Εκφώνηση

Η ταχύτητα φάσης για επιφανειακά κύματα σε ένα υγρό δίνεται από τη σχέση

$$v_p = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi S}{\rho\lambda}}$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας, S η επιφανειακή τάση, ρ η πυκνότητα του υγρού και λ το μήκος κύματος.

1. *Να βρεθεί η σχέση διασποράς και η ταχύτητα ομάδας των επιφανειακών κυμάτων στο υγρό.*

2. *Να βρεθεί το μήκος κύματος που ελαχιστοποιεί την ταχύτητα φάσης. Ποιες οι τιμές των ταχυτήτων φάσης και ομάδας για αυτό το μήκος κύματος;*

6.2 Λύση

1. Η ταχύτητα φάσης δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} v_p = \dfrac{\omega}{k} \\ v_p = \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi} + \dfrac{2\pi S}{\rho\lambda}} \\ k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Longleftrightarrow \lambda = \dfrac{2\pi}{k} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi S}{\rho\lambda}} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi S}{\rho\lambda} \Longleftrightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g2\pi}{2k\pi} + \frac{2\pi Sk}{\rho 2\pi} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} + \frac{Sk}{\rho} \Longleftrightarrow \omega^2 = gk + \frac{Sk^3}{\rho} \Longleftrightarrow$$

$$\omega = \sqrt{gk + \frac{Sk^3}{\rho}}$$

που είναι η σχέση διασποράς.

2. Ελάχιστο θα έχουμε όταν η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας φάσης ως προς το μήκος κύματος μηδενίζεται:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_p}{d\lambda} = 0 \\ v_p = \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi} + \dfrac{2\pi S}{\rho\lambda}} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \frac{\frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi S}{\rho\lambda^2}}{2\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi S}{\rho\lambda}}} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi S}{\rho\lambda^2} \Longleftrightarrow \frac{g}{2\pi} = \frac{2\pi S}{\rho\lambda^2} \Longleftrightarrow$$

$$\lambda^2 = \frac{4\pi^2 S}{\rho g} \Longleftrightarrow \lambda = 2\pi\sqrt{\frac{S}{\rho g}}$$

Αυτό είναι το μοναδικό ακρότατο για $\lambda > 0$. Μπορούε να καταλάβουμε ότι είναι μέγιστο με δύο τρόπους:

(α΄) Βλέποντας την συμπεριφορά της ταχύτητας φάσης στα δύο όρια

$$\lambda \to 0 \quad v_p = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi S}{\rho\lambda}} \to \infty$$

$$\lambda \to \infty \quad v_p = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi S}{\rho\lambda}} \to \infty$$

Εφόσον έχουμε ένα μόνο ακρότατο και για $\lambda \to 0$, $\lambda \to \infty$ η ταχύτητα είναι άπειρη, άρα η ταχύτητα μειώνεται από την άπειρη τιμή της μέχρι μια ελάχιστη και στη συνέχεια αυξάνει ξανά μέχρι την άπειρη τιμή της.

(β΄) Μπορούμε να πάρουμε και τη δεύτερη παράγωγο ως προς το μήκος κύματος σε αυτό το μήκος κύματος και να αποδείξουμε ότι είναι θετική:

$$\begin{bmatrix} A = \dfrac{d_p^v}{d\lambda^2} \\ v_p = \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi} + \dfrac{2\pi S}{\rho\lambda}} \\ \lambda = 2\pi\sqrt{\dfrac{S}{\rho g}} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow A = \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\dfrac{g}{2\pi} - \dfrac{2\pi S}{\rho\lambda^2}}{2\sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi} + \dfrac{2\pi S}{\rho\lambda}}}\right] \Longleftrightarrow$$

$$A = \frac{-(\frac{g}{2\pi})^2 + \frac{6\frac{g}{2\pi}\frac{2\pi S}{\rho}}{\lambda^2} + \frac{3(\frac{2\pi S}{\rho})^2}{\lambda^4}}{4(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi S}{\rho\lambda})^{3/2}} = \frac{-\frac{g^2}{4\pi^2} + \frac{6g^2}{4\pi^2} + \frac{3g^2}{4\pi^2}}{4(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi S}{\rho\lambda})^{3/2}} > 0$$

Επομένως είναι ελάχιστο.

7 Θέμα Έβδομο

7.1 Εκφώνηση

Μια σημαντική ποσότητα στη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε υλικά είναι ο μιγαδικός δείκτης διάθλασης $\tilde{n} = n + i\kappa$ *, όπου* n *,* κ *το πραγματικό και φανταστικό μέρος του δείκτη διάθλασης αντίστοιχα. Μέσω αυτού μπορούν να περιγραφούν τόσο φαινόμενα διασποράς (διασκεδασμού) όσο και απορρόφησης. Ο μιγαδικός δείκτης διάθλασης ορίζεται από τη σχέση* $\tilde{n}^2 = \tilde{\epsilon}_r$ *όπου* $\tilde{\epsilon}_r$ *είναι η μιγαδική σχετική διηλεκτρική σταθερά. Για την περιγραφή των οπτικών ιδιοτήτων μετάλλων ένα σημαντικό μοντέλο είναι το μοντέλο Drude, όπου η μιγαδική σχετική διηλεκτρική σταθερά δίνεται από τη σχέση*

$$\tilde{\epsilon}_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma}$$

όπου ω *η γωνιακή συχνότητα,* ω_p *η συχνότητα πλάσματος και* γ *ο συντελεστής απόσβεσης (απωλειών) του μετάλλου. Για τις οπτικές ιδιότητες του αργύρου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο Drude με συχνότητα πλάσματος* $\omega_p = 2 \times 10^{15}$ rad/s *και σταθερά απόσβεσης (απωλειών)* $\gamma = 10^{13}$ rad/s*. Υπολογίστε τα* n, κ *στον άργυρο για φως γωνιακής συχνότητας* 1.2×10^{15} rad/s*. Πως αλλάζουν τα αποτελέσματα αν η γωνιακή συχνότητα του φωτός είναι* 2.9×10^{15} rad/s*;*

7.2 Λύση

Έχουμε ότι:

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{n} = n + i\kappa \\ \tilde{\epsilon}_r = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} \\ \tilde{n}^2 = \tilde{\epsilon}_r \\ \gamma = 10^{13}\ rad/s \\ \omega_p = 2 \times 10^{15}\ rad/s \\ \omega = 1.2 \times 10^{15}\ rad/s \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} \tilde{n} = n + i\kappa \\ \tilde{\epsilon}_r = 1 - \dfrac{4 \times 10^{30}}{1.44 \times 10^{30} + i1.2 \times 10^{15} \cdot 10^{13}} \\ \tilde{n}^2 = (n + i\kappa)^2 = (n^2 - \kappa^2) + 2n\kappa i = \tilde{\epsilon}_r \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{n} = n + i\kappa \\ \tilde{\epsilon}_r = 1 - \dfrac{4\times 10^{30}}{1.44\times 10^{30} + i1.2\times 10^{28}} = 1 - \dfrac{4}{1.44 + 0.012i} \\ (n^2-\kappa^2) + 2n\kappa i = \tilde{\epsilon}_r \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{n} = n + i\kappa \\ \tilde{\epsilon}_r = 1 - \dfrac{4\times 10^{30}}{1.44\times 10^{30} + i1.2\times 10^{28}} = 1 - \dfrac{4}{1.44 + 0.012i} \\ (n^2-\kappa^2) + 2n\kappa i = \tilde{\epsilon}_r \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$(n^2-\kappa^2) + 2n\kappa i = 1 - \frac{4}{1.44+0.012i}\frac{1.44-0.012i}{1.44-0.012i} = 1 - \frac{5.76-0.048i}{1.44^2+0.012^2} = 1 - \frac{5.76-0.048i}{2.073} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} n^2-\kappa^2 = \dfrac{2.073-5.76}{2.073} = -1.7786 \\ 2n\kappa = \dfrac{0.48}{2.073} = 0.023 \\ |\epsilon| = \sqrt{(n^2-\kappa^2)^2 + (2n\kappa)^2} = 1.7787 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} (n^2-\kappa^2)^2 = (-1.7786)^2 \\ (2n\kappa)^2 = 0.023^2 \\ |\epsilon| = \sqrt{(n^2-\kappa^2)^2 + (2n\kappa)^2} = 1.7787 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} (n^2+\kappa^2)^2 = \epsilon^2 \\ n^2-\kappa^2 == -1.7786 \\ |\epsilon| = \sqrt{(n^2-\kappa^2)^2 + (2n\kappa)^2} = 1.7787 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} n = \sqrt{\dfrac{1.7787-1.7786}{2}} = 0.007 \\ \kappa = \sqrt{\dfrac{1.7787-1.7786}{2}} = 1.333 \end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το σύστημα μπορούμε να το λύσουμε και με διτετράγωνη:

$$\begin{bmatrix} (n^2-\kappa^2)^2 = -1.7786 \\ 2n\kappa = 0.023 \Longleftrightarrow \kappa = \dfrac{0.023}{2n} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow n^2 - \frac{0.023^2}{4n^2} = -1.7786 \Longleftrightarrow$$

$$4n^4 - 0.023^2 = -4n^2\cdot 1.7786 \Longleftrightarrow n^4 + n^2\cdot 1.7786 - 0.023^2 = 0 \overset{x=n^2}{\Longleftrightarrow}$$
$$x^2 + 1.7786x - 0.023^2 = 0$$

Για την άλλη συχνότητα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \tilde{n} = n + i\kappa \\ \tilde{\epsilon}_r = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} \\ \tilde{n}^2 = \tilde{\epsilon}_r \\ \gamma == 10^{13}\ rad/s \\ \omega_p = 2 \times 10^{15}\ rad/s \\ \omega = 2.9 \times 10^{15}\ rad/s \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{n} = n + i\kappa \\ \tilde{\epsilon}_r = 1 - \dfrac{4 \times 10^{30}}{8.41 \times 10^{30} + i2.9 \times 10^{15} \cdot 10^{13}} \\ \tilde{n}^2 = (n + i\kappa)^2 = (n^2 - \kappa^2) + 2n\kappa i = \tilde{\epsilon}_r \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{n} = n + i\kappa \\ \tilde{\epsilon}_r = 1 - \dfrac{4 \times 10^{30}}{8.41 \times 10^{30} + i2.9 \times 10^{28}} = 1 - \dfrac{4}{8.41 + 0.029i} \\ (n^2 - \kappa^2) + 2n\kappa i = \tilde{\epsilon}_r \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{n} = n + i\kappa \\ \tilde{\epsilon}_r = 1 - \dfrac{4 \times 10^{30}}{8.41 \times 10^{30} + i2.9 \times 10^{28}} = 1 - \dfrac{4}{8.41 + 0.029i} \\ (n^2 - \kappa^2) + 2n\kappa i = \tilde{\epsilon}_r \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$(n^2 - \kappa^2) + 2n\kappa i = 1 - \frac{4}{8.41 + 0.029i}\frac{8.41 - 0.029i}{8.41 - 0.029i} = 1 - \frac{33.64 - 0.116i}{8.41^2 + 0.029^2} = 1 - \frac{33.64 - 0.116i}{70.73} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} n^2 - \kappa^2 &= \frac{70.73 - 33.64}{70.73} = 0.524396 \\ 2n\kappa &= -\frac{0.116}{70.73} = -0.0016 \\ |\epsilon| &= \sqrt{(n^2 - \kappa^2)^2 + (2n\kappa)^2} = 0.524402 \end{aligned} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} n = \sqrt{\dfrac{0.524402 + 0.524396}{2}} = 0.724 \\ \kappa = \sqrt{\dfrac{0.524402 - 0.524396}{2}} = 0.0018 \end{bmatrix}$$

8 Θέμα Όγδοο

8.1 Εκφώνηση

1. *Ένα κυλινδρικό μεταλλικό νήμα διαμέτρου 1.5 mm κρατείται σταθερό στα δύο άκρα του που βρίσκονται σε απόσταση 50 cm. Αν ασκείται στο νήμα τάση 100 N τότε το νήμα ταλαντώνεται στη θεμελιώδη συχνότητα και σε συνδυασμό με ταλαντευμένο διαπασών παράγει 5 διακροτήματα ανά δευτερόλεπτο. Αν μειωθεί η τάση του νήματος σε 81 N τότε το νήμα ξανά ταλαντώνεται στη θεμελιώδη του συχνότητα και πάλι σε συνδυασμό με το ίδιο διαπασών παράγει και σε αυτή την περίπτωση 5 διακροτήματα ανά δευτερόλεπτο. Να βρεθούν η συχνότητα ταλάντωσης του διαπασών και η πυκνότητα του υλικού του νήματος.*

2. *Το μαγνητικό πεδίο (σε μονάδες SI), σε ένα ομογενές, ισοτροπικό και μη-μαγνητικό διηλεκτρικό μέσο δίνεται από τη σχέση*

$$\vec{B}(x,t) = -\hat{j}5 \times 10^{-7}\cos(1.6\pi \times 10^{9}t - 8\pi x)\ (T)$$

Βρείτε το δείκτη διάθλασης του διηλεκτρικού μέσου και το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο E που έχει μέση χρονική τιμή μηδέν.

8.2 Λύση

1. Η ταχύτητα ενός κύματος σε μια χορδή η οποία τείνεται από τάση Tκαι έχει γραμμική πυκνότητα μ δίνεται από τη σχέση:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Στην περίπτωση μας θα έχουμε για τις δύο περιπτώσεις:

$$\begin{bmatrix} v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} \\ \\ T_1 = 100\ N \\ \\ T_2 = 81\ N \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 = \sqrt{\dfrac{100}{\mu}} \\ v_2 = \sqrt{\dfrac{81}{\mu}} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{10}{9}$$

Και στις δύο περιπτωσεις παράγεται ο ίδιος αριθμός διακροτημάτων ανά δευτερόλεπτο επομένως και στις δύο περιπτώσεις η συχνότητα του διακροτήματος είναι $f_\delta = 5\ Hz$.

Όμως και στις δύο περιπτώσεις το νήμα ταλαντώνεται στη θεμελιώδη συχνότητα του επομένως καθώς τα δύο άκρα του είναι πακτωμένα στο νήμα υπάρχει ένα στάσιμο κύμα. Αυτό μας λέει ότι και στις δύο περιπτώσεις το μήκος κύματος είναι το ίδιο. Συνεπώς θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} v = \lambda f \\ \\ \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{10}{9} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{10}{9}$$

Η συχνότητα του διακορτήματος είναι

$$f_\delta = |f - f_0|$$

όπου f η συχνότητα ταλάντωσης του νήματος και f_0 η συχνότητα ταλάντωσης του διαπασών. Επομένως θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} f_\delta = f1 - f_0 \\ \\ f_\delta = f_0 - f_2 \\ \\ f_\delta = 5\ Hz \\ \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{10}{9} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow 2f_\delta = f_1 - f_2 \Longleftrightarrow 10 = \frac{f_2}{9} \Longleftrightarrow$$

$$f_2 = 90\ Hz \tag{3}$$

Επομένως θα έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} f_\delta = f_0 - f_2 \\ \\ f_\delta = 5\ Hz \\ \\ f_2 = 90\ Hz \end{bmatrix} \Longleftrightarrow f_0 = 95\ Hz$$

Εφόσον στο νήμα έχουμε μισό μήκος κύματος τότε το μήκος κύματος θα είναι $\lambda = 2L = 1\ m$. Σε αυτή την περίπτωση:

$$\begin{bmatrix} v_2 = \sqrt{\dfrac{81}{\mu}} \\ \\ v_2 = \lambda f_2 \\ \\ \lambda = 1\ m \\ \\ f_2 = 90\ Hz \end{bmatrix} \Longleftrightarrow 90 = \sqrt{\frac{81}{\mu}} \Longleftrightarrow$$

$$8100 = \frac{81}{\mu} \Longleftrightarrow \mu = \frac{1}{100}\ kg/m$$

2. Μας δίνεται το εξής μαγνητικό πεδίο:

$$\begin{bmatrix} \vec{B}(x,t) = -\hat{j}5\times10^{-7}\cos(1.6\pi\times10^{9}t - 8\pi x) \\ \vec{B} = \vec{B}_0\cos(\omega t - kx) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \omega = 1.6\pi\times10^{9}\ rad/s \\ k = 8\pi\ m^{-1} \\ \vec{B}_0 = \hat{j}5\times10^{-7}\ T \end{bmatrix}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$\begin{bmatrix} v = \dfrac{\omega}{k} \\ \omega = 1.6\pi\times10^{9}\ rad/s \\ k = 8\pi\ m^{-1} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow v = 2\times10^{8}\ m/s$$

Ο δείκτης διάθλασης είναι:

$$\begin{bmatrix} n = \dfrac{c}{v} \\ v = 2\times10^{8}\ m/s \\ c = 3\times10^{8}\ m/s \end{bmatrix} \Longleftrightarrow n = 1.5$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Ampere-Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Καθώς το μέσο μας είναι διηλεκτρικό (μονωτής) δεν έχουμε ρεύμα απομένως $\vec{J} = 0$. Συνεπώς:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Παρατηρηση:Υπάρχουν δύο σχέσεις που συνδέουν το ηλεκτρικό πεδίο με το μαγνητικό, ο νόμος του Faraday και ο νόμος των Ampere-Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad Faraday$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad Ampere - Maxwell$$

Θα επιλέγουμε πάντα τη σχέση στην οποία το γνωστό πεδίο είναι στον στροβιλισμό.

Συνεπώς

$$\begin{bmatrix} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ \vec{B}(x,t) = -\hat{j} 5 \times 10^{-7} \cos(1.6\pi \times 10^9 t - 8\pi x) = \hat{y} B_y \\ B_y = -5 \times 10^{-7} \cos(1.6\pi \times 10^9 t - 8\pi x) \quad B_x = 0 \quad B_z = 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \hat{z} \dfrac{\partial B_y}{\partial x} \Longleftrightarrow \\ B_y = -5 \times 10^{-7} \cos(1.6\pi \times 10^9 t - 8\pi x) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\hat{z} 40\pi \times 10^{-7} \sin(1.6\pi \times 10^9 t - 8\pi x) \Longleftrightarrow$$

$$\vec{E} = -\hat{z} \frac{40\pi \times 10^{-7}}{\epsilon\mu} \int \sin(1.6\pi \times 10^9 t - 8\pi x) dt \Longleftrightarrow$$

$$\vec{E} = \hat{z} \frac{40\pi \times 10^{-7}}{1.6\pi\epsilon\mu} \cos(1.6\pi \times 10^9 t - 8\pi x) + \hat{z} g(x,y,z) \Longleftrightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{25 \times 10^{-7}}{\epsilon\mu} \cos(1.6\pi \times 10^9 t - 8\pi x) + \hat{z} g(x,y,z)$$

Όμως για να είναι:

$$\begin{bmatrix} <E>=0 \\ <E>=\frac{1}{T}\int_0^T E(t)dt \\ \vec{E}=\frac{25\times10^{-7}}{\epsilon\mu}\cos(1.6\pi\times10^9t-8\pi x)+\hat{z}g(x,y,z) \\ \frac{1}{T}\int_0^T \cos(1.6\pi\times10^9t-8\pi x)dt=0 \\ \omega=\frac{2\pi}{T} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$<E>=\frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{25\times10^{-7}}{\epsilon\mu}\cos(1.6\pi\times10^9t-8\pi x)+\hat{z}g(x,y,z)\right)dt \Longleftrightarrow$$

$$0=\frac{1}{T}\int_0^T g(x,y,z)dt \Longleftrightarrow g(x,y,z)=0$$

Συνεπώς:

$$\begin{bmatrix} v^2=\frac{1}{\epsilon\mu} \\ v=2\times10^8\ m/s \\ \vec{E}=\frac{25\times10^{-7}}{\epsilon\mu}\cos(1.6\pi\times10^9t-8\pi x) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\vec{E}=25\times10^{-7}\cdot4\times10^{16}\cos(1.6\pi\times10^9t-8\pi x)$$

9 Θέμα Ένατο

9.1 Εκφώνηση

Δίνεται περιοχή του χώρου όπου υπάρχει το παρακάτω μαγνητικό πεδίο: $\vec{B}=A\hat{i}\cos(ay+bt)$ *όπου* a, b, A *γνωστές σταθερές.*

1. *Βρείτε μια συνθήκη μεταξύ των σταθερών που πρέπει να ικανοποιείται ώστε η περιοχή του χώρου να είναι κενή. Βρείτε επίσης τις μονάδες μέτρησης των σταθερών στο σύστημα SI.*
2. *Βρείτε τον στροβιλισμό του δοσμένου μαγνητικού πεδίου.*
3. *Βρείτε το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο αν δεν υπάρχουν μαγνητικά ρεύματα στην περιοχή και δείξτε ότι είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο. Σχολιάστε τον λόγο του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου προς το πλάτος του μαγνητικού πεδίου και τη σχετική φάση.*

4. *Βρείτε την πυκνότητα φορτίων στην δεδομένη περιοχή του χώρου.*

5. *Βρείτε τον δείκτη διάθλασης του υλικού που υπάρχει στην δοσμένη περιοχή του χώρου.*

6. *Βρείτε το διάνυσμα Poynting και την ένταση που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο ηλεκτρομαγνητικό κύμα στην περίπτωση που διαδίδεται στο κενό. Ελέγξτε τη συμβατότητα των μονάδων μέτρησης της έντασης που βρήκατε με τις μονάδες μέτρησης των σταθερών a, b, A.*

9.2 Λύση

1. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι μακριά από τις πηγές το μαγνητικό πεδίο δίνεται από:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(ky - \omega t)$$

Συνεπώς για την περίπτωση μας έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(ky + \omega t) \\ \vec{B} = A\hat{i}(ay + bt) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} \vec{B}_0 = A\hat{i} \\ k = a \\ \omega = -b \end{matrix}$$

Για να διαδίδεται το κύμα στο κενό θα πρέπει η ταχύτητα διάδοσης να είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό:

$$\begin{bmatrix} c = 3 \times 10^8 \ m/s \\ c = \dfrac{\omega}{k} \\ k = a \\ \omega = -b \end{bmatrix} \Longleftrightarrow 3 \times 10^8 \ = \frac{-b}{a}$$

Επειδή το $\cos(ky - \omega t)$ είναι καθαρός αριθμός (αδιάστατος) το A θα έχει μονάδες έντασης μαγνητικού πεδίου, δηλαδή T. Μέσα στο όρισμα του συνημιτόνου θα πρέπει να έχουμε μονάδες γωνίας επομένως $ay \to rad \Longleftrightarrow a \to rad/m$ και $bt \to rad \Longleftrightarrow b \to rad/s$.

2. Ο στροβιλισμός του μαγνητικού πεδίου είναι:

$$\left[\begin{array}{c} \vec{\nabla}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ \vec{B} = A\hat{i}\cos(ay+bt) = \hat{x}B_x \\ B_x = A\cos(ay+bt) \quad B_y = 0 \quad B_z = 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\hat{z}\frac{\partial B_x}{\partial y} \Longleftrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = Aa\hat{z}\sin(ay+bt)$$

3. Θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Ampere-Maxwell

$$\left[\begin{array}{c} \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \epsilon\mu\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ J = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = Aa\hat{z}\sin(ay+bt) \\ v^2 = \dfrac{1}{\epsilon\mu} \\ v = \dfrac{-b}{a} \end{array}\right] \Longleftrightarrow \epsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = Aa\hat{z}\sin(ay+bt) \Longleftrightarrow$$

$$\vec{E} = \hat{z}\frac{Aa}{\epsilon\mu}\int\sin(ay+bt)dt \Longleftrightarrow$$

$$\vec{E} = -\hat{z}\frac{Aa}{b\epsilon\mu}\cos(ay+bt) = \hat{z}Av\cos(ay+bt) \tag{4}$$

όπου v η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στην περιοχή αυτή.

Βλέπουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο ταλαντώνεται στον άξονα z ενώ το μαγνητικό στον άξονα x. Επομένως είναι κάθετα μεταξύ τους. Το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίσο με το πλάτος του μαγνητικού πεδίου πολλαπλασιασμένο με την ταχύτητα διάδοσης.

Τα δύο πεδία γράφονται ως εξής:

$$\left[\begin{array}{c} \vec{E} = \hat{z}Av\cos(ay+bt) \\ \vec{B} = A\hat{x}\cos(ay+bt) \end{array}\right]$$

Επομένως τα δύο πεδία έχουν την ίδια φάση.

4. Από το νόμο του Gauss για τον ηλεκτρισμό έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \vec{\nabla}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon} \\ \vec{E} = \hat{z}Av\cos(ay+bt) = E_z(y,t)\hat{z} \\ \vec{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\hat{z} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial E_z(y,t)}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon} \Longleftrightarrow \rho = 0$$

όπου ρ η πυκνότητα φορτίων.

5. Ο δείκτης διάθλασης θα είναι:

$$\begin{bmatrix} n = \dfrac{c}{v} \\ v = -\dfrac{b}{a} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow n = -\frac{ca}{b}$$

6. Το διάνυσμα Poynting $\vec{S}$ δίνεται από:

$$\begin{bmatrix} \vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \\ \vec{E}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ E_x & E_y & E_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ \vec{B} = A\hat{i}\cos(ay+bt) = \hat{x}B_x \\ B_x = A\cos(ay+bt) \\ \vec{E} = -\hat{z}\dfrac{Aa}{b\epsilon\mu}\cos(ay+bt) = \hat{z}E_z \\ E_z = Av\cos(ay+bt) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\hat{y}E_zB_x = \hat{y}\frac{1}{\mu_0}A^2v\cos^2(ay+bt)$$

Το μέτρο του διανύσματος Poynting είναι η στιγμιαία ένταση του κύματος η οποία μετριέται σε W/m^2 .

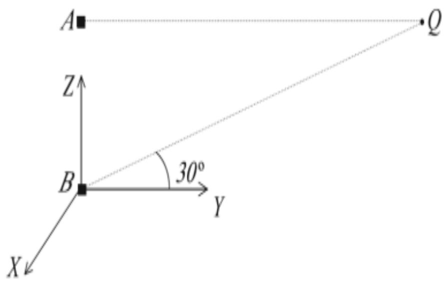
Επομένως:

$$\begin{bmatrix} A \to T \\ \\ v \to m/s \\ \\ mu_0 \to N/A^2 = kg \cdot m/(s^2 \cdot A^2) \\ \\ T \to N/(A \cdot m) \\ \\ N \to J/m \\ \\ W \to J/s \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \frac{1}{\mu_0}A^2 v \to \frac{N^2}{(A^2 \cdot m^2}\frac{m}{s}\frac{A^2}{N} = \frac{N}{m \cdot s} = \frac{J}{m^2 \cdot s} = \frac{W}{m^2}$$

10 Θέμα Δέκατο

10.1 Εκφώνηση

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο πηγές, A και B, οι οποίες εκπέμπουν επίπεδα ηλεκτρομαγνητικά κύματα συχνότητας 120 MHz που διαδίδονται στο κενό. Και τα δύο ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι γραμμικά πολωμένα, με διάνυσμα πόλωσης του ηλεκτρικού πεδίου κατά τον άξονα των x, και κατευθύνονται προς το σημείο Q. Η ένταση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που μετρούμε στο σημείο Q όταν είτε η πηγή A είτε η πηγή B εκπέμπει ανεξάρτητα είναι $10^{-6}\ W/m^2$.



1. *Βρείτε τη μορφή των ηλεκτρικών πεδίων E που εκπέμπονται από την πηγή A και από την πηγή B.*
2. *Βρείτε τα αντίστοιχα μαγνητικά πεδία B που έχουν μέση χρονική τιμή μηδέν. Δώστε τα αποτελέσματα σας σε μονάδες SI.*

10.2 Λύση

1. Το κύμα το οποίο έρχεται από το A διαδίδεται στον άξονα y και ταλαντώνεται (έχει διεύθυνση πόλωσης) στον άξονα x. Η κυκλική συχνότητα τους είναι:

$$\begin{bmatrix} \omega = 2\pi f \\ f = 120\ MHz = 120 \times 10^6\ Hz \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \omega = 24\pi \times 10^7\ rad/s$$

Τα κύματα διαδίδονται στο κενό, επομένως ισχύει:

$$\begin{bmatrix} c = \lambda f \\ f = 120\ MHz = 120 \times 10^6\ Hz \\ c = 3 \times 10^8\ m/s \end{bmatrix} \Longleftrightarrow 3 \times 10^8 = 1.2 \times 10^8 \lambda \Longleftrightarrow \lambda = 2.5\ m$$

Ο κυματάριθμος είναι τότε:

$$\begin{bmatrix} k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda = 2.5\ m \end{bmatrix} \Longleftrightarrow k = 0.8\pi\ m^{-1}$$

Το κύμα από το α) θα είναι:

$$\begin{bmatrix} E = \hat{x} E_{0A} \cos(\omega t - ky) \\ \omega = 24\pi \times 10^7\ rad/s \\ k = 0.8\pi\ m^{-1} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow E = \hat{x} E_{0A} \cos(24\pi \times 10^7 \cdot t - 0.8\pi \cdot y)$$

Η ένταση του κύματος είναι:

$$\begin{bmatrix} I = \dfrac{1}{2} c \epsilon_0 E_{0A}^2 \\ I = 10^{-6}\ W/m^2 \\ \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ C^2/N \cdot m^2 \\ c = 3 \times 10^8\ m/s \end{bmatrix} \Longleftrightarrow E_{0A} = 0.027\ V/m$$

Το ηλεκτρικό πεδίο που προέρχεται από το σημείο Β θα διαδίδεται στην ευθεία BQ επομένως θα είναι ένα διάνυσμα $\vec{k} = k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$ (καθώς το διάνυσμα του κυματάριθμου βρίσκεται πάνω στη διεύθυνση διάδοσης). Θα έχουμε τότε:

$$\begin{bmatrix} k_y = k \cos 30 \\ k_z = k \sin 30 \\ k = 0.8\pi\ m^{-1} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} k_y = 0.693\pi\ m^{-1} \\ k_x = 0.4\pi\ m^{-1} \end{bmatrix}$$

Πάλι το ηλεκτρικό πεδίο ταλαντώνεται πάνω στον άξονα των x. Επομένως το κύμα από το Β θα είναι:

$$\begin{bmatrix} E = \hat{x}E_{0B}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \\ \omega = 24\pi \times 10^7 \ rad/s \\ k = 0.8\pi \ m^{-1} \\ \vec{k} = \hat{y}0.693\pi + \hat{z}0.4\pi \\ \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow E = \hat{x}E_{0B}\cos(24\pi \times 10^7 \cdot t - 0.693\pi \cdot y - 0.4\pi \cdot z)$$

Καθώς οι εντάσεις του κύματος θα είναι ίσες για τα δύο κύματα προφανώς και τα δύο πλάτη του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι ίδια $E_{0A} = E_{0B} = 0.027 \ V/m$.

2. Θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Παρατηρηση:Υπάρχουν δύο σχέσεις που συνδέουν το ηλεκτρικό πεδίο με το μαγνητικό, ο νόμος του Faraday και ο νόμος των Ampere-Maxwell

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad Faraday \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad Ampere - Maxwell \end{aligned}$$

Θα επιλέγουμε πάντα τη σχέση στην οποία το γνωστό πεδίο είναι στον στροβιλισμό.

(α′) Για το πεδίο από το σημείο Α:

$$\left[\begin{array}{c} \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \\ \vec{E} = \hat{x}0.027\cos(24\pi\times 10^7\cdot t - 0.8\pi\cdot y) = \hat{x}E_x \\ E_x = 0.027\cos(24\pi\times 10^7\cdot t - 0.8\pi\cdot y) \quad E_y = 0 \quad E_z = 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = \hat{y}\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \hat{z}\dfrac{\partial E_x}{\partial y} \Longleftrightarrow \\ E_x = 0.027\cos(24\pi\times 10^7\cdot t - 0.8\pi\cdot y) \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\hat{z}0.027\cdot 0.8\pi\sin(24\pi\times 10^7\cdot t - 0.8\pi\cdot y) \Longleftrightarrow$$

$$\vec{B} = \hat{z}0.027\cdot 0.8\pi\int\sin(24\pi\times 10^7\cdot t - 0.8\pi\cdot y)dt \Longleftrightarrow$$

$$\vec{B} = -\hat{z}\frac{0.027\cdot 0.8\pi}{24\pi\times 10^7}\cos(24\pi\times 10^7\cdot t - 0.8\pi\cdot y) + \hat{z}g(x,y,z) \Longleftrightarrow$$

$$\vec{B} = -\hat{z}9\times 10^{-11}\cos(24\pi\times 10^7\cdot t - 0.8\pi\cdot y) + \hat{z}g(x,y,z)$$

Όμως για να είναι:

$$\begin{bmatrix} <B>=0 \\ <B>=\frac{1}{T}\int_0^T B(t)dt \\ \vec{B}=-\hat{z}9\times10^{-11}\cos(24\pi\times10^7\cdot t-0.8\pi\cdot y)+\hat{z}g(x,y,z) \\ \frac{1}{T}\int_0^T\cos(24\pi\times10^7\cdot t-0.8\pi\cdot y)dt=0 \\ \omega=\frac{2\pi}{T} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$<B>=-\hat{z}9\times10^{-11}\frac{1}{T}\int_0^T\cos(24\pi\times10^7\cdot t-0.8\pi\cdot y)dt+\hat{z}\frac{1}{T}\int_0^T g(x,y,z)dt=0 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{T}Tg(x,y,z)=0 \Longleftrightarrow g(x,y,z)=0 \tag{5}$$

Συνεπώς:

$$\vec{B}=-\hat{z}9\times10^{-11}\cos(24\pi\times10^7\cdot t-0.8\pi\cdot y)$$

(β΄) Για το πεδίο από το σημείο Β:

$$\begin{bmatrix} \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \\ \vec{E}=\hat{x}0.027\cos(24\pi\times10^7\cdot t-0.693\pi\cdot y-0.4\pi\cdot z)=\hat{x}E_x \\ E_x=0.027\cos(24\pi\times10^7\cdot t-0.693\pi\cdot y-0.4\pi\cdot z)\quad E_y=0\quad E_z=0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=\hat{y}\frac{\partial E_x}{\partial z}-\hat{z}\frac{\partial E_x}{\partial y} \Longleftrightarrow \\ E_x=0.027\cos(24\pi\times10^7\cdot t-0.693\pi\cdot y-0.4\pi\cdot z) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \hat{y}0.027 \cdot 0.4\pi \sin(24\pi \times 10^7 \cdot t - 0.693\pi \cdot y - 0.4\pi \cdot z) -$$
$$\hat{z}0.027 \cdot 0.693\pi \sin(24\pi \times 10^7 \cdot t - 0.693\pi \cdot y - 0.4\pi \cdot z) \Longleftrightarrow$$
$$\vec{B} = [\hat{z}0.027 \cdot 0.693\pi - \hat{y}0.027 \cdot 0.4\pi] \int \sin(24\pi \times 10^7 \cdot t - 0.693\pi \cdot y - 0.4\pi \cdot z)dt \Longleftrightarrow$$
$$\vec{B} = -\frac{\hat{z}0.027 \cdot 0.693\pi - \hat{y}0.027 \cdot 0.4\pi}{24\pi \times 10^7}[\cos(24\pi \times 10^7 \cdot t - 0.693\pi \cdot y - 0.4\pi \cdot z) + f(x,y,z)] \Longleftrightarrow$$
$$\vec{B} = -[\hat{z}7.8 \times 10^{-11} - \hat{y}4.5 \times 10^{-11}][\cos(24\pi \times 10^7 \cdot t - 0.693\pi \cdot y - 0.4\pi \cdot z) + f(x,y,z)]$$

Όμως για να είναι:

$$\begin{bmatrix} <B>=0 \\ <B>=\frac{1}{T}\int_0^T B(t)dt \\ \vec{B} = -[\hat{z}7.8 \times 10^{-11} - \hat{y}4.5 \times 10^{-11}][\cos(24\pi \times 10^7 \cdot t - 0.693\pi \cdot y - 0.4\pi \cdot z) + f(x,y,z)] \\ \frac{1}{T}\int_0^T \cos(24\pi \times 10^7 \cdot t - 0.693\pi \cdot y - 0.4\pi \cdot z)dt = 0 \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$<B> = -[\hat{z}7.8 \times 10^{-11} - \hat{y}4.5 \times 10^{-11}][\frac{1}{T}\int_0^T \cos(24\pi \times 10^7 \cdot t - 0.693\pi \cdot y - 0.4\pi \cdot z)dt +$$
$$\hat{z}\frac{1}{T}\int_0^T f(x,y,z)dt] = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\frac{1}{T}Tf(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow f(x,y,z) = 0 \tag{6}$$

Συνεπώς:

$$\vec{B} = -[\hat{z}7.8 \times 10^{-11} - \hat{y}4.5 \times 10^{-11}]\cos(24\pi \times 10^7 \cdot t - 0.693\pi \cdot y - 0.4\pi \cdot z)$$