ΦΥΕ 10: 1η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ (2021-2022)

Άσκηση 1. Λύσεις:

α) Θα λύσουμε την εξίσωση: $\boxed{|x^2+1| = 2\cdot|x-1|}$ (*)

Έχουμε: $|x^2+1| = |2x-2| \Leftrightarrow x^2+1 = \pm(2x-2)$, οπότε έχουμε:

• 1η Περίπτωση: Είναι: $x^2+1 = 2x-2 \Leftrightarrow x^2+1-2x+2=0$

$\Leftrightarrow 1x^2-2x+3=0$ (δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x, με συντελεστές $\alpha=1,\ \beta=-2,\ \gamma=+3$)

Διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = (-2)^2-4\cdot1\cdot3 = 4-12 = -8<0$

άρα είναι αδύνατη εξίσωση και ως εκ τούτου δεν έχει λύσεις $x\in\mathbb{R}$.

• 2η Περίπτωση: Είναι: $x^2+1 = -(2x-2) \Leftrightarrow x^2+1 = -2x+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+1+2x-2=0 \Leftrightarrow 1x^2+2x-1=0$ (δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x, με συντελεστές $\alpha=1,\ \beta=2,\ \gamma=-1$)

Διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = 2^2-4\cdot1\cdot(-1) = 4+4 = 8>0$

Λύσεις:

$$x_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2+\sqrt{8}}{2\cdot 1} \cong \frac{-2+2{,}828}{2} = \frac{0{,}828}{2} = 0{,}414$$

ή ισοδύναμα:

$$x_1 = -\frac{2}{2} + \frac{\sqrt{4\cdot 2}}{2} = -1 + \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}{2} = -1 + \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \boxed{-1+\sqrt{2}}$$

&

$$x_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2-\sqrt{8}}{2\cdot 1} \cong \frac{-2-2{,}828}{2} = \frac{-4{,}828}{2} = -2{,}414$$

ή ισοδύναμα:

$$x_2 = -\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{4\cdot 2}}{2} = -1 - \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}{2} = -1 - \frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \boxed{-1-\sqrt{2}}$$

οι ζητούμενες λύσεις.

β) Θα λύσουμε την ανίσωση: $\left|\dfrac{2\cdot(x+1)}{x^2+1}\right| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \dfrac{2x+2}{x^2+1} \le 1 \quad (**)$

Λύνουμε λοιπόν τις κλασικές δύο ανισώσεις:

σταυρωτά γινόμενα "χιαστί" γινόμενα

(I) $\boxed{\dfrac{-1}{1} \le \dfrac{2x+2}{x^2+1}} \Leftrightarrow -1\cdot(x^2+1) \le 2x+2 \Leftrightarrow -x^2-1 \le 2x+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2-1-2x-2 \le 0$

$\Leftrightarrow -x^2-2x-3 \le 0$ (ανίσωση 2ου βαθμού ως προς x)

- Εξίσωση 2ου βαθμού ως προς x / $-x^2-2x-3=0$, με συντελεστές $\alpha=-1, \beta=-2, \gamma=-3$.

Διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = (-2)^2-4\cdot(-1)\cdot(-3) = 4-12 = -8 < 0$

άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη (δεν έχει πραγματικές λύσεις)

- Πίνακας Προσήμου /

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$-x^2-2x-3$	$-$

Συνεπώς, η ανίσωση (I) έχει λύσεις τις: $x\in(-\infty,+\infty)$ δηλαδή $x\in\mathbb{R}$.

(II) $\boxed{\dfrac{2x+2}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{1}}$ σταυρωτά γινόμενα "χιαστί" γινόμενα $\iff 2x+2 \leq 1\cdot(x^2+1) \iff 2x+2-x^2-1 \leq 0$

$\iff 2x+1-x^2 \leq 0$

$\iff -x^2+2x+1 \leq 0$ (ανίσωση 2ου βαθμού ως προς x)

• Εξίσωση 2ου βαθμού ως προς x

$-1x^2+2x+1=0$, με συντελεστές $\alpha=-1, \beta=2, \gamma=1$

Διακρίνουσα: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma = 2^2-4\cdot(-1)\cdot 1 = 4+4=8>0$

άρα, η εξίσωση έχει δύο πραγματικές, άνισες μεταξύ τους λύσεις τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\pm\sqrt{8}}{2\cdot(-1)} = \frac{-2\pm\sqrt{4\cdot 2}}{-2} = \frac{-2\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}{-2} =$$

$$= \frac{-2\pm 2\cdot\sqrt{2}}{-2} = \frac{-2}{-2} \pm \frac{2\cdot\sqrt{2}}{-2} = 1\pm(-\sqrt{2})$$

Οπότε: $x_1 = 1+(-\sqrt{2}) = 1-\sqrt{2}$ & $x_2 = 1-(-\sqrt{2}) = 1+\sqrt{2}$

• Πίνακας Προσήμου

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$-1x^2+2x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Συνεπώς, η ανίσωση (II) έχει λύσεις τις:

$x \in (-\infty, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, +\infty)$ δηλαδή:

$x \leq 1-\sqrt{2}$ ή $x \geq 1+\sqrt{2}$

Τελικά, η ανίσωση (* *) ισχύει για κάθε:

$\boxed{x \leq 1-\sqrt{2}}$ ή $\boxed{x \geq 1+\sqrt{2}}$

Άσκηση 2. Λύσεις:

α) Θα γράψουμε το μιγαδικό αριθμό $\boxed{z = -1+1i}$ στην τριγωνομετρική του μορφή:

• Ξέρουμε ότι: $Re(z) = -1$ και $Im(z) = 1$

• Η τριγωνομετρική μορφή είναι: $z = \rho \cdot (συνθ + i \cdot ημθ)$, όπου:

$\cos\theta + i \cdot \sin\theta$

► $\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

► $συνθ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

► $ημθ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι: $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (rad) ακτίνια

Άρα: $z = \rho \cdot (συνθ + i \cdot ημθ) \Leftrightarrow$

$z = \sqrt{2} \cdot \left[συν\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot ημ\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

είναι η ζητούμενη τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού $z = -1 + 1 \cdot i$

β) Θα βρούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς $w = x + y\cdot i,\ x, y \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε:

$$\boxed{|w-1| = \sqrt{2}\cdot|w|} \qquad (1)$$

όπου:

- $w - 1 = x + y\cdot i - 1 = (x-1) + y\cdot i$ με $|w-1| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$
- $w = x + y\cdot i$ με $|w| = \sqrt{x^2+y^2}$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1), προκύπτει ότι:

$$|w-1| = \sqrt{2}\cdot|w| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}^{\,2} = \sqrt{2}^{\,2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}^{\,2} \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2+y^2 = 2\cdot(x^2+y^2) \Leftrightarrow$$

$$x^2-2x+1^2+y^2 = 2x^2+2y^2 \Leftrightarrow$$

$$1x^2-2x+1+1y^2-2x^2-2y^2=0 \Leftrightarrow -x^2-y^2-2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-1=0$$

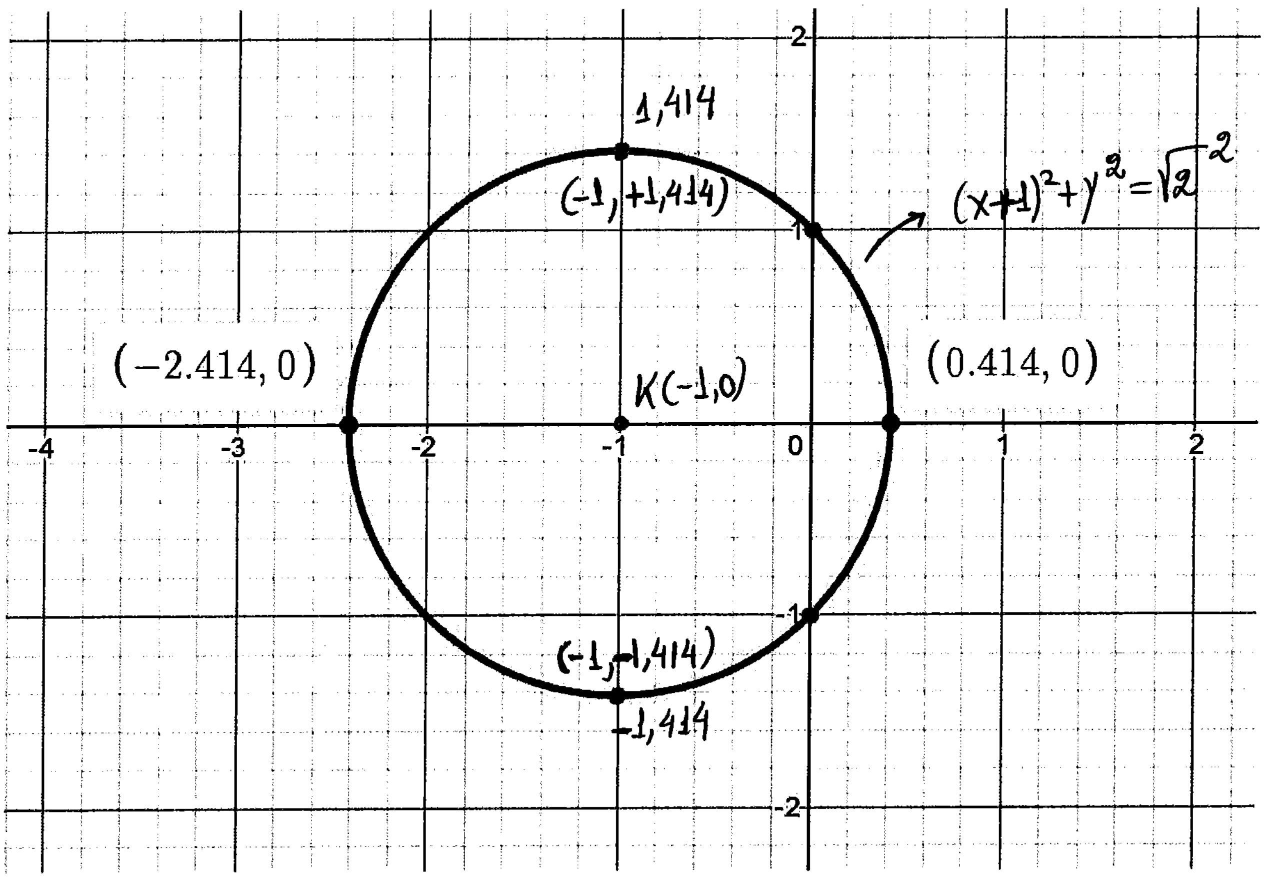
$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+2x+(\underbrace{1-2}_{-1})=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2+2x+1)+y^2=2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2+(y-0)^2=2$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{[x-(-1)]^2+(y-0)^2=\sqrt{2}^{\,2}}$$

, οι μιγαδικοί αριθμοί $w=x+y\cdot i$, $x,y\in\mathbb{R}$ έχουν τις εικόνες (x,y) τους πάνω στον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(-1,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}\cong 1,414$.



με: • $0+1,414=1,414$ & • $-1+1,414=0,414$

• $0-1,414=-1,414$ • $-1-1,414=-2,414$

Άσκηση 3. Λύσεις:

α) • Λύνουμε την εξίσωση:

$$4\cdot \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\cos x = \pm \frac{1}{2}}$$

$\boxed{\cos x = \frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

άρα:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{array}\right\}, \kappa\in\mathbb{Z}$$

ή

$\boxed{\cos x = -\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\cos x = \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

άρα:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \end{array}\right\}, \kappa\in\mathbb{Z}$$

• Λύνουμε την εξίσωση:

$$4\cdot \sin^2 x = 3 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

$$\boxed{\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \quad \text{ή} \quad \boxed{\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

άρα:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ &\text{ή} \\ x &= 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\kappa\pi + \frac{3\pi-\pi}{3} \\ &= 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \end{aligned}\right\}, \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\sin x = -\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\sin x = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{3\pi+\pi}{3}\right)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

άρα:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\kappa\pi + \frac{4\pi}{3} \\ &\text{ή} \\ x &= 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{4\pi}{3}\right) \\ &= 2\kappa\pi + \frac{3\pi-4\pi}{3} \\ &= 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{aligned}\right\}, \kappa\in\mathbb{Z}$$

β) Έχουμε την ακόλουθη παράσταση:

$$\sin x + \sin\left(\frac{2\pi}{3}+x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}+x\right) =$$

$$= \sin x + \sin\left(x + \frac{\cancel{3}^{1}\pi}{\cancel{3}} - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\cancel{3}^{1}\pi}{\cancel{3}} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin x + \sin\left(x + \pi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin x + \sin\left[\pi + \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] + \sin\left[\pi + \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

• $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$

$$= \sin x - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin x - \left(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right) - \left(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin x - \sin x \cdot \frac{1}{2} + \cancel{\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} - \sin x \cdot \frac{1}{2} - \cancel{\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

με: $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$= \sin x - \cancel{2} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$= \sin x - \sin x$$

$= 0$. (όντως λοιπόν η παράσταση είναι ανεξάρτητη του τόξου x).

SOS τύποι: $\sin(\alpha-b) = \sin\alpha \cdot \cos b - \cos\alpha \cdot \sin b$
$\sin(\alpha+b) = \sin\alpha \cdot \cos b + \cos\alpha \cdot \sin b$!

Άσκηση 4. Λύσεις: Δίνεται η εξίσωση:

είναι εξίσωση 2ου βαθμού ως προς τον άγνωστο x

$x^2+bx+4=0$, με συντελεστές $\alpha=1$, $\beta=b$ και $\gamma=+4=4$

▶ 1/ Για να έχει το τριώνυμο δύο πραγματικές ρίζες, πρέπει:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow \beta^2-4\alpha\gamma>0$$
$$\Leftrightarrow b^2-4\cdot1\cdot4>0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{b^2-16>0}$$

• Λύνουμε την εξίσωση: $b^2-16=0 \Leftrightarrow b^2=16 \Leftrightarrow b=\pm\sqrt{16}=\pm4$

• Πίνακας Προσήμου:

b	$-\infty$	-4		$+4$	$+\infty$
b^2-16	$+$	0	$-$	0	$+$

(*)

άρα $\Delta>0 \Leftrightarrow b^2-16>0$, όταν $b\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

δηλαδή: $b<-4$ ή $b>4$

▶ 2/ Για να έχει το τριώνυμο μία διπλή ρίζα, πρέπει:

$$\Delta=0 \Leftrightarrow b^2-16=0 \Leftrightarrow b^2=16 \Leftrightarrow b=\pm\sqrt{16}=\pm4.$$

▶ 3/ Για να μην έχει το τριώνυμο πραγματικές ρίζες πρέπει:

$$\Delta<0 \Leftrightarrow b^2-16<0 \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} -4<b<4$$ δηλαδή $b\in(-4,4)$

4/ Το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών του είναι ίσο με 8:

- Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης, ισούται με:

$$S = x_1+x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{b}{1} = -b.$$

- Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης, ισούται με:

$$P = x_1\cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{1} = 4.$$

Τύποι του Vieta (**)

Για να είναι $\boxed{x_1^2+x_2^2=8} \iff (x_1+x_2)^2 - 2\cdot x_1\cdot x_2 = 8$

$$\overset{(**)}{\iff} S^2 - 2\cdot P = 8$$

$$\iff (-b)^2 - 2\cdot 4 = 8$$

$$\iff (-b)\cdot(-b) - 8 = 8$$

$$\iff +b^2 = 8+8 = 16$$

άρα: $b = \pm\sqrt{16} = \pm 4.$

Άσκηση 5. Λύσεις:

α) Θα βρούμε το πεδίο ορισμού των ακόλουθων συναρτήσεων:

▶ $g_1(x) = \ln\left(\dfrac{1}{-x^2+3x-2}\right)$

• Πρέπει: $\boxed{-x^2+3x-2 \neq 0}$

Για $-1\cdot x^2+3x-2=0$ (είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού ως προς x με συντελεστές $\alpha=-1$, $\beta=3$, $\gamma=-2$)

Διακρίνουσα: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=3^2-4\cdot(-1)\cdot(-2)=9-8=1>0$

Λύσεις: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\dfrac{-3\pm\sqrt{1}}{2\cdot(-1)}=\dfrac{-3\pm1}{-2}$

$x_1=\dfrac{-3+1}{-2}=\dfrac{-2}{-2}=1$ & $x_2=\dfrac{-3-1}{-2}=\dfrac{-4}{-2}=2$

οι λύσεις της εξίσωσης

Οπότε: $-x^2+3x-2\neq0$ για $\boxed{x\neq1 \text{ και } x\neq2}$

• Ακόμη, πρέπει:

$$\frac{1}{-x^2+3x-2} > 0 \iff -x^2+3x-2 > 0 \quad (*)$$

/ είναι ανίσωση 2ου βαθμού με άγνωστο το x.

Η εξίσωση $-x^2+3x-2=0$, έχει λύσεις $x=1$ και $x=2$.

Άρα, κάνοντας Πίνακα Προσήμου για την ανίσωση $(*)$, έχουμε:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-x^2+3x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

άρα, $-x^2+3x-2 > 0$, όταν $x \in (1,2)$.

Εν τέλει, το Πεδίο Ορισμού της $g_1(x)$ είναι το ακόλουθο διάστημα:

$$x \in (1,2).$$

- $f_2(x) = \sqrt{2x^2 - x - 1}$

Πρέπει: $\boxed{2x^2 - x - 1 \geq 0}$ (**) / είναι ανίσωση 2ου βαθμού με άγνωστο το x.

Πρωτίστως, λύνουμε την ακόλουθη δευτεροβάθμια, ως προς x, εξίσωση:

$$2x^2 - 1x - 1 = 0$$

με συντελεστές: $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$.

Διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 1 + 8 = 9 > 0$

Λύσεις: $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2\cdot 2} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$

&

$x_1 = \dfrac{1+3}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

$x_2 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{2}{4} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} -\dfrac{1}{2}$

είναι οι λύσεις της εξίσωσής μας.

Ο ακόλουθος Πίνακας Προσήμου μας δίνει τις λύσεις της ανίσωσης (**) :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

άρα $2x^2-x-1 \geq 0$, όταν $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$

$(x \leq -1/2$ ή $x \geq 1)$

Εν τέλει το Πεδίο Ορισμού της $g_2(x)$ είναι το απόλαυθο διάστημα:

$$x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$$

Προσδιορίζουμε τη συνάρτηση:

$$g_1(g_2(x)) =$$

$$= \ln\left[\frac{1}{-(g_2(x))^2 + 3\cdot g_2(x) - 2}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{1}{-\sqrt{2x^2-x-1}^{\,\cancel{2}} + 3\cdot\sqrt{2x^2-x-1} - 2}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{1}{-|2x^2-x-1| + 3\cdot\sqrt{2x^2-x-1} - 2}\right], \text{ με: } \sqrt{2x^2-x-1}^{\,\cancel{2}} = |2x^2-x-1|$$

β) Δίνεται η συνάρτηση:

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{1-x}}, \quad f : (0,1) \to (0,+\infty)$$

• Η f είναι "1-1":

Έχουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in (0,1)$, ισχύει ότι:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2}$$

κάνουμε $\Leftrightarrow$ σταυρωτά γινόμενα ("χιαστί" γινόμενα)

$$x_1 \cdot (1-x_2) = x_2 \cdot (1-x_1)$$

$$\Leftrightarrow x_1 - \cancel{x_1 \cdot x_2} = x_2 - \cancel{x_2 \cdot x_1}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

άρα, η f είναι "1-1" για κάθε $x_1, x_2 \in (0,1)$.

• Η f είναι "επί", διότι για κάθε $y \in (0,+\infty)$ υπάρχει ένα $x \in (0,1)$ έτσι ώστε: $y = f(x) = \frac{x}{1-x}$.

Εύρεση του τύπου της αντίστροφης συνάρτησης:

$$\boxed{f^{-1}: (0,+\infty) \longrightarrow (0,1)}$$

• Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της f, θέτουμε $y=f(x)$ και λύνουμε ως προς x. Έχουμε λοιπόν:

Κάνουμε σταυρωτά "χιαστί" γινόμενα

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{y}{1} \Leftrightarrow y\cdot(1-x) = 1\cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - y\cdot x = x \Leftrightarrow -y\cdot x - x = -y \Leftrightarrow y\cdot x + 1x = y \Leftrightarrow$$

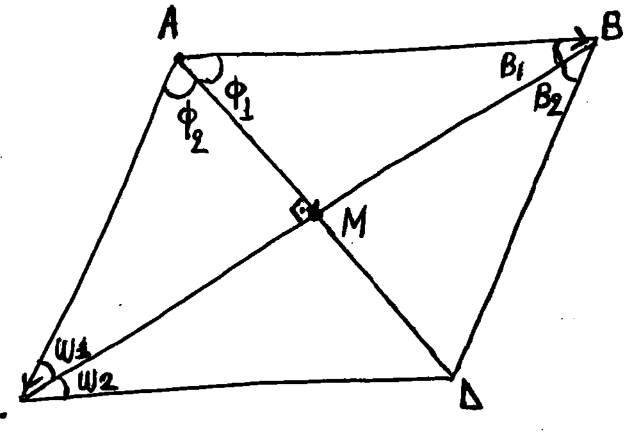
$$\Leftrightarrow (y+1)\cdot x = y \Leftrightarrow \frac{\cancel{(y+1)}\cdot x}{\cancel{y+1}} = \frac{y}{y+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{y}{y+1}}, \quad y \in (0,+\infty)$$

Επομένως, $f^{-1}(y) = \frac{y}{y+1}$, $y\in(0,+\infty)$, οπότε η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η συνάρτηση:

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x\in(0,+\infty)}.$$

Άσκηση 6. Λύσεις:



- Έχουμε ότι: $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\vec{AM}\cdot\vec{AB}}{|\vec{AM}|\cdot|\vec{AB}|} = \dfrac{\vec{AM}\cdot\vec{A\Gamma}}{|\vec{AM}|\cdot|\vec{A\Gamma}|}}$ (1)

- Ακόμη: $\boxed{\vec{AM} = \dfrac{1}{2}\cdot(\vec{AB}+\vec{A\Gamma})}$ (2)

Η (1) μέσω της (2), δίνει:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(\vec{AB}+\vec{A\Gamma})\cdot\vec{AB}}{\cancel{|\vec{AM}|}\cdot|\vec{AB}|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(\vec{AB}+\vec{A\Gamma})\cdot\vec{A\Gamma}}{\cancel{|\vec{AM}|}\cdot|\vec{A\Gamma}|} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{|\vec{AB}|^{\cancel{2}}}{\cancel{|\vec{AB}|}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|\vec{A\Gamma}|^{\cancel{2}}}{\cancel{|\vec{A\Gamma}|}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}}{|\vec{A\Gamma}|} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot|\vec{AB}| - \frac{1}{2}\cdot|\vec{A\Gamma}| = \frac{1}{2}\cdot(\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB})\cdot\left(\frac{1}{|\vec{A\Gamma}|} - \frac{1}{|\vec{AB}|}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\left(|\vec{AB}|-|\vec{A\Gamma}|\right)=\cancel{\frac{1}{2}}\cdot(\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB})\cdot\frac{|\vec{AB}|-|\vec{A\Gamma}|}{|\vec{A\Gamma}|\cdot|\vec{AB}|}$$

Έστω ότι: $|\vec{AB}|\neq|\vec{A\Gamma}|$, τότε:

$$|\vec{AB}|-|\vec{A\Gamma}|=\frac{\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}}{|\vec{A\Gamma}|\cdot|\vec{AB}|}\cdot\left(|\vec{AB}|-|\vec{A\Gamma}|\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(|\vec{AB}|-|\vec{A\Gamma}|\right)-\frac{\left(|\vec{AB}|-|\vec{A\Gamma}|\right)\cdot\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}}{|\vec{A\Gamma}|\cdot|\vec{AB}|}=0\Leftrightarrow$$

$$\left(|\vec{AB}|-|\vec{A\Gamma}|\right)\cdot\left(1-\frac{\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}}{|\vec{A\Gamma}|\cdot|\vec{AB}|}\right)=0\Leftrightarrow$$

άρα: $1-\dfrac{\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}}{|\vec{A\Gamma}|\cdot|\vec{AB}|}=0\Leftrightarrow\dfrac{\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}}{|\vec{A\Gamma}|\cdot|\vec{AB}|}=\dfrac{1}{1}$

άρα με σταυρωτά "χιαστί" γινόμενα έχουμε ότι:

$$\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}=|\vec{A\Gamma}|\cdot|\vec{AB}|$$

άρα: $\vec{AB}=\lambda\cdot\vec{A\Gamma}$, με $\lambda>0$ (Άτοπο)

Οπότε: $|\vec{AB}|=|\vec{A\Gamma}|$, άρα $\overset{\triangle}{A\Gamma B}$ ισοσκελές τρίγωνο, άρα $\hat{\omega}_1=\hat{B}_1$

Ομοίως: $|\vec{\Gamma\Delta}|=|\vec{\Delta B}|$, άρα $\overset{\triangle}{\Gamma\Delta B}$ ισοσκελές τρίγωνο, άρα $\hat{\omega}_2=\hat{B}_2$

Αφού $\overset{\triangle}{A\Gamma B}=\overset{\triangle}{\Gamma\Delta B}$, άρα: $\boxed{\hat{\omega}_1=\hat{\omega}_2}$ και $\boxed{\hat{B}_1=\hat{B}_2}$. άρα το ζητούμενο αποδείχθη.

Άσκηση 7. Λύσεις:

Έχουμε τα ακόλουθα διανύσματα:

$\vec{a} = (1,-1,0)$, $\vec{b} = (1,2,1)$, $\vec{c} = (1,-3,-1)$

α) • $|\vec{a}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$.

• $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c} = (1,-1,0)+(1,2,1)-(1,-3,-1)$

$= [1+1-1, -1+2\overbrace{-(-3)}^{+}, 0+1\overbrace{-(-1)}^{+}]$

$= (1,4,2)$

• $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}_{3\times3} \end{array}$ / αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς την 1η γραμμή του πίνακα μας

$= +\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}_{2\times2} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{2\times2} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}_{2\times2}$

$= \vec{i}\cdot(-1-0) - \vec{j}\cdot(1-0) + \vec{k}\cdot[2\overbrace{-(-1)}^{+}]$

$= -1\cdot\vec{i} - 1\cdot\vec{j} + 3\cdot\vec{k} = (-1,-1,3)$

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{b} = (1,-1,0)\cdot(1,2,1)$

$= 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot 1$

$= 1-2+0 = -1.$

- $\vec{b}\cdot(\vec{\alpha}\times\vec{c}) = ;$

Βρίσκουμε πρωτίστως: $\vec{\alpha}\times\vec{c} = \begin{array}{ccc} + & - & + \\ \end{array}$ $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}_{3\times 3}$

αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς την $1^{η}$ γραμμή του πίνακά μας.

$= +\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}_{2\times 2} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}_{2\times 2} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}_{2\times 2}$

$= \vec{i}\cdot(1-0) - \vec{j}\cdot(-1-0) + \vec{k}\cdot(-3+1)$

$= 1\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} - 2\cdot\vec{k} = (1,1,-2).$

Άρα $\vec{b}\cdot(\vec{\alpha}\times\vec{c}) = (1,2,1)\cdot(1,1,-2)$

$= 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot(-2)$

$= 1 + \cancel{2} - \cancel{2}$

$= 1.$

β) • Εμβαδόν παραλληλογράμμου με πλευρές τα $\vec{\alpha}, \vec{b}$:

$$E = |\vec{\alpha} \times \vec{b}|$$

$$= |(-1,-1,3)|$$

$$= \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+3^2}$$

$$= \sqrt{1+1+9}$$

$$= \sqrt{11} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

• Όγκος στερεού με ακμές τα $\vec{\alpha}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$V = |\vec{\alpha} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = ;$$

όπου:
$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}_{3\times 3} \end{array}$$

αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς την 1η γραμμή του πίνακά μας.

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}_{2\times 2} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}_{2\times 2} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \vec{i} \cdot (-2+3) - \vec{j} \cdot (-1-1) + \vec{k} \cdot (-3-2)$$

$$= 1 \cdot \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k} = (1, 2, -5)$$

άρα: $\vec{\alpha} \cdot (b \times c) = (1, -1, 0) \cdot (1, 2, -5) = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-5)$
$= 1 - 2 + 0 = -1.$

Οπότε: $V = |\vec{\alpha} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |(-1)| = +1 = 1$ κυβική μονάδα.

γ) Γράφουμε το διάνυσμα $(3,5,3)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{b},\vec{c}$, έτσι ώστε:

$$\boxed{\kappa\cdot\vec{\alpha}+\lambda\cdot\vec{b}+\mu\cdot\vec{c}=(3,5,3)} \Leftrightarrow$$

$$\kappa\cdot(1,-1,0)+\lambda\cdot(1,2,1)+\mu\cdot(1,-3,-1)=(3,5,3) \Leftrightarrow$$

$$(\kappa,-\kappa,0)+(\lambda,2\lambda,\lambda)+(\mu,-3\mu,-\mu)=(3,5,3) \Leftrightarrow$$

$$(\kappa+\lambda+\mu,\ -\kappa+2\lambda-3\mu,\ 0+\lambda-\mu)=(3,5,3) \Leftrightarrow$$

Άρα, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}\kappa+\lambda+\mu&=3\\ -\kappa+2\lambda-3\mu&=5\\ \lambda-\mu&=3\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}\kappa+\lambda+\mu&=3\\ -\kappa+2\lambda-3\mu&=5\\ \lambda&=\mu+3\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned}\kappa+\mu+3+\mu&=3\\ -\kappa+2\cdot(\mu+3)-3\mu&=5\\ \lambda&=\mu+3\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}\kappa+2\mu&=3-3\\ -\kappa+2\mu+6-3\mu&=5\\ \lambda&=\mu+3\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned}\kappa+2\mu&=0\\ -\kappa-\mu&=5-6\\ \lambda&=\mu+3\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}\kappa&=-2\mu\\ -(-2\mu)-\mu&=-1\\ \lambda&=\mu+3\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}\kappa&=-2\mu\\ 2\mu-\mu&=-1\Leftrightarrow\mu=-1\\ \lambda&=\mu+3\end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned}\kappa&=-2\cdot(-1)=+2=2\\ \mu&=-1\\ \lambda&=-1+3=2\end{aligned}\right\}$$

Άρα, το διάνυσμα $(3,5,3)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha},\vec{b},\vec{c}$:

$$(3,5,3)=2\cdot\vec{\alpha}+2\cdot\vec{b}-1\cdot\vec{c}$$

Άσκηση 8. Λύσεις:

α) Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ και τον πίνακα

$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}_{2\times2}$, έχουμε τα ακόλουθα:

▸ $\boxed{A \cdot X = X \cdot A} \Leftrightarrow \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}} = \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}} \cdot \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$

$$\Leftrightarrow \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} x_1+x_3 & x_2+x_4 \\ 0-x_3 & 0-x_4 \end{bmatrix}} = \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} x_1+0 & x_1-x_2 \\ x_3+0 & x_3-x_4 \end{bmatrix}}.$$

(οι πολλαπλασιασμοί ορίζονται διότι: πλήθος στηλών $1^{ου}$ πίνακα = πλήθος γραμμών $2^{ου}$ πίνακα = 2)

▸ Άρα, από την ισότητα αυτή συμπεραίνουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \cancel{x_1}+x_3 = \cancel{x_1} \\ \cdot\ x_2+x_4 = x_1-x_2 \\ \cdot\ -x_3 = x_3 \\ \cdot\ -x_4 = x_3-x_4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 = 0 \\ 2\cdot x_2 = x_1-x_4 \\ -2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0 \\ -x_4 = 0-x_4 \Leftrightarrow -x_4+x_4 = 0 \Leftrightarrow 0=0 \text{ ισχύει} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

άρα: $\left.\begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 = \dfrac{x_1-x_4}{2} \\ \text{με } x_1, x_4 \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$ (είναι δύο ελεύθεροι άγνωστοι)

Άρα: $X = \begin{bmatrix} x_1 & \dfrac{x_1-x_4}{2} \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}_{2\times2}$

Διπαραμετρική απειρία λύσεων

Ένας 2×2 πίνακας X που ικανοποιεί τη σχέση $A\cdot X \neq XA$ είναι ο πίνακας $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

Όντως, διότι:

- $A\cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} =$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 2 & 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 - 1\cdot 2 & 0\cdot 0 - 1\cdot 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

- $X\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2} =$

Οι πολλαπλασιασμοί ορίζονται, διότι: πλήθος στηλών 1ου πίνακα = πλήθος γραμμών 2ου πίνακα = 2

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot (-1) \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot 1 + 1\cdot (-1) \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

Όντως, λοιπόν για $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

είναι: $A\cdot X \neq X\cdot A$

β) Δίνονται οι πίνακες:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}, \quad C = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \\ a & b \end{bmatrix}_{3\times2}$$

• $C \cdot B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \\ a & b \end{bmatrix}_{3\times2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$

πλήθος στηλών C = πλήθος γραμμών B = 2

$$= \begin{bmatrix} x\cdot1-y\cdot1 & -x+2y & 0+y \\ z\cdot1-w\cdot1 & -z+2w & 0+w \\ a\cdot1-b\cdot1 & -a+2b & 0+b \end{bmatrix}_{3\times3} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} x-y & -x+2y & y \\ z-w & -z+2w & w \\ a-b & -a+2b & b \end{bmatrix}_{3\times3} \underset{C_1 \leftrightarrow 1\cdot C_3+C_1}{\overset{C_2 \leftrightarrow -2C_3+C_2}{\sim}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} x & -x+0 & y \\ z & -z+0 & w \\ a & -a+0 & b \end{bmatrix}_{3\times3} \overset{C_1 \leftrightarrow 1\cdot C_2+C_1}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & -x & y \\ 0 & -z & w \\ 0 & -a & b \end{bmatrix}_{3\times3}$$

με: $\det(C\cdot B) = \begin{vmatrix} 0 & -x & y \\ 0 & -z & w \\ 0 & -\alpha & b \end{vmatrix}_{3\times 3} =$

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς την 1η γραμμή του πίνακά μας.

$= 0 - (-x)\cdot \begin{vmatrix} 0 & w \\ 0 & b \end{vmatrix}_{2\times 2} + y\cdot \begin{vmatrix} 0 & -z \\ 0 & -\alpha \end{vmatrix}_{2\times 2}$

$= 0 + x\cdot(0-0) + y\cdot(0-0)$

$= 0$, άρα ο πίνακας $C\cdot B$ δεν είναι αντιστρέψιμος ανεξαρτήτως επιλογής των παραμέτρων x, y, z, w, α, b.

Άσκηση 9 Λύσεις: Έχουμε το γραμμικό σύστημα ως ακολούθως:

$$\left.\begin{aligned} x+2y &= -1 \\ x-y+3\lambda z &= 2 \\ 2\lambda x+y+3z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

, το οποίο γράφεται υπό τη μορφή πινάκων ως εξής:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3\lambda \\ 2\lambda & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times1}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times1}}_{\vec{b}}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Με τη Μέθοδο Οριζουσών Crammer, υπολογίζουμε τις ορίζουσες των παρακάτω πινάκων:

1^{ov}/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3\lambda \\ 2\lambda & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$, με $\det A = \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3\lambda \\ 2\lambda & 1 & 3 \end{vmatrix}_{3\times3}$ /ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς την $1^{η}$ γραμμή του πίνακα)

$$= +1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3\lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix}_{2\times2} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3\lambda \\ 2\lambda & 3 \end{vmatrix}_{2\times2} + 0$$

$$= +1\cdot(-3-3\lambda) - 2\cdot(3-6\lambda^2) = -3-3\lambda-6+12\lambda^2 =$$

$$= 12\lambda^2-3\lambda-9 = \boxed{3\cdot(4\lambda^2-\lambda-3)}$$

2ον/ $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3\lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$, με $\det A_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3\lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{3\times3} \end{array} =$

ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς την $1^{η}$ γραμμή του πίνακά μας

$$= \overset{(-)}{+}(-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 3\lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix}_{2\times2} - 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3\lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix}_{2\times2} + 0 =$$

$$= -1\cdot(-3-3\lambda) - 2\cdot(6-3\lambda)$$

$$= +3+3\lambda-12+6\lambda = -9+9\lambda = \boxed{9\cdot(\lambda-1)}$$

3ον/ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3\lambda \\ 2\lambda & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$, με $\det A_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3\lambda \\ 2\lambda & 1 & 3 \end{vmatrix}_{3\times3} \end{array} =$

ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς την $1^{η}$ γραμμή του πίνακά μας

$$= +1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3\lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix}_{2\times2} \overset{+}{-}(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3\lambda \\ 2\lambda & 3 \end{vmatrix}_{2\times2} + 0$$

$$= 6-3\lambda + 1\cdot(3-6\lambda^2) = 6-3\lambda+3-6\lambda^2 = -6\lambda^2-3\lambda+9 =$$

$$= \boxed{-3\cdot(2\lambda^2+\lambda-3)}$$

4ον/ $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3}$, με $\det A_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2\lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}_{3\times3} \end{array} =$

ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς την 1η γραμμή του πίνακά μας.

$$= +1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{2\times2} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2\lambda & 1 \end{vmatrix}_{2\times2} \overset{(-)}{+} (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2\lambda & 1 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= -1-2-2\cdot(1-4\lambda)-1\cdot(1+2\lambda)$$

$$= -3-2+8\lambda-1-2\lambda = 6\lambda-6 = \boxed{6\cdot(\lambda-1)}$$

α) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, για εκείνες τις τιμές $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα:

- $\det A = 0 \Leftrightarrow 3\cdot(4\lambda^2-\lambda-3)=0 \overset{\text{για } \lambda=1}{\Longleftrightarrow} \det A = 3\cdot(4-1-3)=0$
- $\det A_1 = 0 \Leftrightarrow 9\cdot(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow$ για $\lambda=1$: $\det A_1 = 9\cdot(1-1)=0$
- $\det A_2 = 0 \Leftrightarrow -3\cdot(2\lambda^2+\lambda-3)=0 \Leftrightarrow$ για $\lambda=1$: $\det A_2 = -3\cdot\underbrace{(2+1-3)}_{=0}$
- $\det A_3 = 0 \Leftrightarrow 6\cdot(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow$ για $\lambda=1$: $\det A_3 = 6\cdot(1-1)=0$

Συνεπώς, για $\lambda=1$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Ποιες;

Το γραμμικό σύστημα για $\lambda=1$ γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=-1\\ x-y+3z&=2\\ 2x+y+3z&=1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x&=-2y-1\\ -2y-1-1y+3z&=2\\ 2\cdot(-2y-1)+y+3z&=1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x&=-2y-1\\ -3y+3z&=3\\ -4y-2+1y+3z&=1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x&=-2y-1\\ 3z=3+3y &\overset{:3}{\Leftrightarrow} z=1+y\\ -3y+3z=3 &\overset{:3}{\Leftrightarrow} z=1+y \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x&=-2y-1\\ z&=y+1\\ y&\in\mathbb{R} \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \begin{aligned}(x,y,z)&=(-2y-1,\,y+0,\,y+1)\\ &=(-2y,1y,1y)+(-1,0,1)\\ &=y\cdot(-2,1,1)+(-1,0,1),\ \text{με } y\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

είναι ο ελεύθερος άγνωστος του γραμμικού συστήματος

~ Μονοπαραμετρική Απειρία Λύσεων.
(αόριστο γραμμικό σύστημα)

β) Το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση, όταν:

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow 3\cdot(4\lambda^2-\lambda-3)\neq 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2-\lambda-3\neq 0$$

Για $4\lambda^2-\lambda-3=0$ (εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού ως προς λ, με συντελεστές: $\alpha=4,\ \beta=-1,\ \gamma=-3$)

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot4\cdot(-3)=1+48=49>0$

άρα: $\lambda_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{49}}{2\cdot4}=\dfrac{+1\pm7}{8}$, $\lambda_1=\dfrac{1+7}{8}=8:8=1$, $\lambda_2=\dfrac{1-7}{8}=-\dfrac{6}{8}\begin{matrix}:2\\:2\end{matrix}=-\dfrac{3}{4}$

άρα: $\boxed{4\lambda^2-\lambda-3=4\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda+3/4)}$

Οπότε, είναι $\det A\neq0$, όταν $\lambda\neq1$ και $\lambda\neq-\dfrac{3}{4}$. Σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση (x,y,z) με:

- $$x=\frac{\det A_1}{\det A}=\frac{9\cdot(\lambda-1)}{3\cdot(4\lambda^2-\lambda-3)}=\frac{9\cdot\cancel{(\lambda-1)}}{3\cdot4\cdot\cancel{(\lambda-1)}\cdot(\lambda+\frac{3}{4})}=\frac{3}{4\cdot(\lambda+\frac{3}{4})}=\frac{3}{4\lambda+3}$$ ///

- $$y=\frac{\det A_2}{\det A}=\frac{-\cancel{3}\cdot(2\lambda^2+\lambda-3)}{\cancel{3}\cdot(4\lambda^2-\lambda-3)}=\frac{-2\lambda^2-\lambda+3}{4\lambda^2-\lambda-3}$$

όπου: $-2\lambda^2-\lambda+3=0$ (εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού ως προς λ, με συντελεστές $\alpha=-2,\beta=-1,\gamma=3$)

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot(-2)\cdot3=1+24=25>0$

άρα: $\lambda_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{25}}{2\cdot(-2)}=\dfrac{1\pm5}{-4}$, $\lambda_1=\dfrac{1+5}{-4}=-\dfrac{6}{4}\begin{matrix}:2\\:2\end{matrix}=-\dfrac{3}{2}$, $\lambda_2=\dfrac{1-5}{-4}=\dfrac{-4}{-4}=1$

Άρα: $-2\lambda^2-\lambda+3=-2\cdot(\lambda+\frac{3}{2})\cdot(\lambda-1)=(-2\lambda-3)\cdot(\lambda-1)$.

Οπότε: $y = \dfrac{detA_2}{detA} = \dfrac{(-2\lambda-3)\cdot\cancel{(\lambda-1)}}{4\cdot\cancel{(\lambda-1)}\cdot(\lambda+3/4)} = \dfrac{-2\lambda-3}{4\lambda+3}$

• $z = \dfrac{detA_3}{detA} = \dfrac{\cancel{6}^{2}\cdot\cancel{(\lambda-1)}}{\cancel{3}\cdot 4\cdot\cancel{(\lambda-1)}\cdot(\lambda+3/4)} = \dfrac{2}{4\lambda+3}$

$detA$: $3\cdot(4\lambda^2-\lambda-3)$

Άρα: $\boxed{(x,y,z) = \left(\dfrac{3}{4\lambda+3}, \dfrac{-2\lambda-3}{4\lambda+3}, \dfrac{2}{4\lambda+3}\right), \text{ με } \lambda\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{4}, 1\right\}}$

(γ) Υπάρχουν τιμές $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να μην έχει λύσεις, δηλαδή το σύστημα να είναι αδύνατον; Ποιες;

Για $\lambda = -\frac{3}{4}$, έχουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x+2y &= -1 \\ x-y-\tfrac{9}{4}\cdot z &= 2 \\ -\tfrac{6}{4}x+y+3z &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+2y &= -1 \\ x-y-2{,}25z &= 2 \\ -1{,}5x+y+3z &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -1-2y \\ -1-2y-1y-2{,}25z &= 2 \\ -1{,}5\cdot(-1-2y)+y+3z &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= -1-2y \\ -3y-2{,}25z &= 2+1 \\ 1{,}5+3y+1y+3z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= -1-2y \\ -3y-2{,}25z &= 3 \\ 4y+3z &= 1-1{,}5 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= -1-2y \\ -3y &= 2{,}25z+3 \\ 4y+3z &= -0{,}5 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= -1-2y \\ y &= \frac{2{,}25\cdot z}{-3}+\frac{3}{-3} \\ 4y+3z &= -0{,}5 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= -1-2y \\ y &= -0{,}75z-1 \\ 4\cdot(-0{,}75z-1)+3z &= -0{,}5 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= -1-2y \\ y &= -0{,}75z-1 \\ -\cancel{3z}-4+\cancel{3z} &= -0{,}5 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= -1-2y \\ y &= -0{,}75z-1 \\ -4 &= -0{,}5 \quad \text{(Αδύνατον)} \end{aligned}\right\}$$

Άρα, για $\lambda = -\frac{3}{4}$ το γραμμικό σύστημα **ΔΕΝ** έχει λύσεις (άρα, το γραμμικό σύστημα είναι αδύνατον).

Λύσεις:

Άσκηση 10. Θα λύσουμε με τη Μέθοδο Απαλοιφής του Gauss (με γραμμοπράξεις) το γραμμικό σύστημα που ακολουθεί, ως εξής:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-y+3z=2 \\ 2x+y+3z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \cdot(-1) \quad \cdot(-2) \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 0x-2y+2z=2 \\ 0x-1y+1z=1 \end{array}\right\} \text{αλλαγή γραμμών} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ -y+z=1 \\ -2y+2z=2 \end{array}\right\} \cdot(-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ -y+z=1 \\ 0+0=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ z=y+1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-y-z \\ z=y+1 \\ \text{με } y\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

Κλιμακωτή Μορφή

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-y-1(y+1) \\ z=y+1 \\ \text{με } y\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-y-y-1=-2y-1 \\ z=y+1 \\ \text{με } y\in\mathbb{R} \end{array}\right\}$$

Οπότε, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$(x,y,z) = (-2y-1,\ y+0,\ y+1)$$

$$= (-2y, 1y, 1y) + (-1,0,1) = y\cdot(-2,1,1) + (-1,0,1)$$

με $y\in\mathbb{R}$ (είναι ο ελεύθερος άγνωστος του γραμμικού συστήματος)

(Μονοπαραμετρική Απειρία Λύσεων) ~ αόριστο γραμμικό σύστημα