

1^η Εργασία ΠΛΗ 12 (2021-2022)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΡΝΟΣ

Άσκηση 1.

A. Έχουμε: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ και $B = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

• $A \cdot B \cdot A = ?$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{18}$$

/ αριθμός στηλών A
= αριθμός γραμμών B = 3

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 & -5 - 1 + 0 & 3 + 3 + 0 \\ 0 + 2 - 8 & 0 - 1 + 6 & 0 + 3 + 0 \\ 8 + 6 - 8 & -10 - 3 + 16 & 6 + 9 + 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{18}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -6 & 6 \\ -6 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \frac{1}{18}$$



Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Πότε:

$$A \cdot B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 6 \\ -6 & 15 & 3 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \left/ \begin{array}{l} \text{πλήθος} \\ \text{στηλών} \\ A \cdot B \end{array} = \begin{array}{l} \text{πλήθος} \\ \text{γραμμών} \\ A \end{array} = 3 \right.$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 + 0 + 6 \cdot 2 & 6 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 6 \cdot 0 - 6 \cdot 2 + 6 \cdot 2 \\ -6 \cdot 1 + 15 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & -6 \cdot 1 + 15 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & -6 \cdot 0 + 15 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \\ 6 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 15 \cdot 2 & 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 15 \cdot 3 & 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 15 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 18 & 0 \\ 0 & 18 & 36 \\ 36 & 54 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

• $B \cdot A \cdot B = ?$

$$B \cdot A = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \left/ \begin{array}{l} \text{πλήθος} \\ \text{στηλών } B \end{array} = \begin{array}{l} \text{πλήθος} \\ \text{γραμμών } A \end{array} = 3 \right.$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 0 + 3 \cdot 2 & 4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 4 \cdot 0 - 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 0 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \\ -4 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & -4 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & -4 \cdot 0 + 8 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 8 & -4 \\ 8 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 16 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Πότε:

$$B \cdot A \cdot B = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 8 & -4 \\ 8 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 16 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{πλινθος} \\ \text{στηλών } B \cdot A \\ = \text{πλινθος γραμμών } B \\ = 3. \end{array}$$

$$= \frac{1}{18^2} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 8 & -4 \\ 8 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{18^2} \cdot \begin{pmatrix} 10 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 16 & -50 - 8 - 32 & 30 + 24 + 0 \\ 32 + 20 - 16 & -40 - 10 + 32 & 24 + 30 + 0 \\ -16 + 8 - 64 & 20 - 4 + 128 & -12 + 12 + 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{18^2} \cdot \begin{pmatrix} 72 & -90 & 54 \\ 36 & -18 & 54 \\ -72 & 144 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{3 \times 3}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{72}{18 \cdot 18} & \frac{-90}{18 \cdot 18} & \frac{54}{18 \cdot 18} \\ \frac{36}{18 \cdot 18} & \frac{-18}{18 \cdot 18} & \frac{54}{18 \cdot 18} \\ \frac{-72}{18 \cdot 18} & \frac{144}{18 \cdot 18} & \frac{0}{18 \cdot 18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{18} & \frac{-5}{18} & \frac{3}{18} \\ \frac{2}{18} & \frac{-1}{18} & \frac{3}{18} \\ \frac{-4}{18} & \frac{8}{18} & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{3 \times 3}}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\begin{aligned} \bullet (A \cdot B)^T &= \left[\frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -6 & 6 \\ -6 & 15 & 3 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \right]^T \\ &= \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -6 & 6 \\ -6 & 15 & 3 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{3 \times 3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (B \cdot A)^T &= \left[\frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 8 & -4 \\ 8 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 16 \end{pmatrix} \right]^T \\ &= \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 8 & -4 \\ 8 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 16 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{3 \times 3}} \end{aligned}$$

$$\bullet B \cdot A = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 8 & -4 \\ 8 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 16 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{3 \times 3}}$$

$$\bullet A \cdot B = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -6 & 6 \\ -6 & 15 & 3 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{3 \times 3}}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$A \cdot B \cdot A = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$(A \cdot B)^T = A \cdot B = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 6 \\ -6 & 15 & 3 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$(B \cdot A)^T = B \cdot A = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 10 & 8 & -4 \\ 8 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 16 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$B \cdot A \cdot B = B = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

B) Δίνεται: $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\gamma_3 \leftrightarrow -2\gamma_1 + \gamma_3$
 $\sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -10 \end{pmatrix}$

$\gamma_2 \leftrightarrow 4\gamma_2$
 $\sim$
 $\gamma_3 \leftrightarrow 3\gamma_2$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 12 & -4 \\ 0 & 12 & -30 \end{pmatrix}$

$\gamma_3 \leftrightarrow -1\gamma_2 + \gamma_3$
 $\sim$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -26 \end{pmatrix}$

Χρήσιμος Μαρφί

$\gamma_2 \leftrightarrow \frac{1}{12}\gamma_2$
 $\sim$
 $\gamma_3 \leftrightarrow -\frac{1}{26}\gamma_3$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\gamma_1 \Leftrightarrow 2 \cdot \gamma_2 + \gamma_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{διδότι:} \\ \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{12-8}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ \text{διδότι } \text{eucl}(1,3)=3 \end{array} \right.$$

$$\gamma_1 \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \gamma_3 + \gamma_1$$

$$\gamma_2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \gamma_3 + \gamma_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αντικείμενο
Μηχανισμός
Μορφή

Βαθμός του E :

Βρίσκουμε ότι η μηχανιστική μορφή του E είναι η ακόλουθη:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -26 \end{pmatrix}, \text{ μηχανισμός ηλίκας με } 3 \text{ μη μηδενικές γραμμές}$$

άρα $\text{rank } E = 3$ (βαθμός του E).

Γ) Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας:

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 1 \\ -10 & 2 & -1 & -2 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Τα διανύσματα στηλών είναι τα: $(3, -10, 6, 3)$, $(0, 2, 1, 0)$,
 $(-3, -1, 2, -3)$ και $(1, -2, 3, 9)$.

Υπολόγισε και δώσε την ορίζουσα με γραμμές τα συχνηστευμένα διανύσματα.

$$\begin{vmatrix} 3 & -10 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_4 \\ \sim \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -10 & 6 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \gamma_3 \leftrightarrow \gamma_4 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -10 & 6 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \gamma_3 \leftrightarrow -3 \cdot \gamma_1 + \gamma_3 \\ \sim \\ \gamma_4 \leftrightarrow 3 \cdot \gamma_1 + \gamma_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -24 \\ 0 & -7 & 11 & 24 \end{vmatrix} \sim$$

$$\begin{matrix} \gamma_3 \leftrightarrow 2 \cdot \gamma_2 + \gamma_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -24 \\ 0 & -7 & 11 & 24 \end{vmatrix} \begin{matrix} \gamma_4 \leftrightarrow \frac{7}{2} \cdot \gamma_2 + \gamma_4 \\ \sim \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -24 \\ 0 & 0 & \frac{29}{2} & 24 \end{vmatrix}$$

Διότι:

$$\frac{7}{2} + \frac{11}{1} = \frac{7}{2} + \frac{22}{2} = \frac{7+22}{2} = \frac{29}{2}$$

$$\text{με } \text{EKK}(1,2) = 2$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\gamma_4 \Leftrightarrow \frac{29}{2} \cdot \gamma_3 + \gamma_4$$

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -324 \end{vmatrix}$$

άνω τριγωνικός
πίνακας

• διότι: $\frac{29}{2} \cdot (-24) + 24 = -\frac{29 \cdot 24}{2} + 24 = -\frac{696}{2} + 24 = -348 + 24 = -324$

Πότε:

$$\begin{vmatrix} 3 & -10 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-324) = \underline{\underline{648 \neq 0}}$$

εν λόγω
άρα, τα διανύσματα συνδίνονται είναι όντως γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

6 Βαθμός (rank) πίνακα F :

Έχουμε: $F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 1 \\ -10 & 2 & -1 & -2 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_4} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 9 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \\ -10 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$\gamma_2 \leftarrow -1 \cdot \gamma_1 + \gamma_2$
 $\sim$
 $\gamma_3 \leftarrow 2 \cdot \gamma_1 + \gamma_3$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ -10 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

Συνεχίζουμε τις γραμμοπράξεις

μέχρις ότου φέρουμε τον πίνακα F

σε Υπερκανονική Μορφή.

Ευτελείωντας γραμμοπράξεις.

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\leftrightarrow 10 \cdot \gamma_1 \\ \sim \\ \gamma_4 &\leftrightarrow 3 \cdot \gamma_4 \end{aligned} \begin{pmatrix} 30 & 0 & -30 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ -30 & 6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \gamma_4 &\leftrightarrow 1 \cdot \gamma_1 + \gamma_4 \\ \sim \end{aligned} \begin{pmatrix} 30 & 0 & -30 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & -33 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &\leftrightarrow \gamma_3 \\ \sim \end{aligned} \begin{pmatrix} 30 & 0 & -30 & 10 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & -33 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 &\leftrightarrow \gamma_4 \\ \sim \end{aligned} \begin{pmatrix} 30 & 0 & -30 & 10 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & -33 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 &\leftrightarrow -6 \cdot \gamma_2 + \gamma_3 \\ \sim \end{aligned} \begin{pmatrix} 30 & 0 & -30 & 10 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -81 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{όχι πηγαίω} \\ \text{πίνακας} \end{array}$$

Άρα, οι μηδενικές γραμμές του διγραμμάτιου πίνακα είναι ζέρους.
 Άρα: $\text{rank } F = 4$



Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Λύση 2.

A) Έχουμε ότι $A^3 + 3A^2 - 3I = 4A \Leftrightarrow$

$$A^3 + 3A^2 - 4A = 3I \Leftrightarrow$$

$$A \cdot (A^2 + 3A - 4I) = 3I \Leftrightarrow$$

$$A \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (A^2 + 3A - 4I) \right] = I$$

Πότε είναι αντιστρέψιμος διότι μέσω της σχέσης $A \cdot A^{-1} = I$, απεδείχθη ότι:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot (A^2 + 3A - 4I)$$

ή ισοδύναμα: $A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot A^2 + \frac{1}{1} \cdot A - \frac{4}{3} \cdot I$
 $= \frac{1}{3} \cdot A^2 + A - \frac{4}{3} \cdot I$ ///

B) $B = A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$ (3 στήλες A = 3 στήλες A)

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 - 2 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 1 \cdot (-3) & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 - 1 \cdot 0 & 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \\ -3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 - 3 \cdot (-3) & -3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 - 3 \cdot 0 & -3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 18 & 16 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Υπολογίστε τον πίνακα $\text{adj} B$:

$$\text{adj} B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}^T, \text{ όπου:}$$

$$\bullet B_{11} = + \begin{vmatrix} 16 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 48 - 0 = 48$$

$$\bullet B_{12} = - \begin{vmatrix} 18 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -(54 - 30) = -24$$

$$\bullet B_{13} = + \begin{vmatrix} 18 & 16 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 96 = -96$$

$$\bullet B_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\bullet B_{22} = + \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -15 + 24 = 9$$

$$\bullet B_{23} = - \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\bullet B_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 16 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 64 = 64$$

$$\bullet B_{32} = - \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 18 & 5 \end{vmatrix} = -(-25 + 72) = -47$$

$$\bullet B_{33} = + \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 18 & 16 \end{vmatrix} = -80$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\underline{\text{Άρα:}} \quad \text{adj } B = \begin{pmatrix} 48 & -24 & -96 \\ 0 & 9 & 0 \\ 64 & -47 & -80 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 48 & 0 & 64 \\ -24 & 9 & -47 \\ -96 & 0 & -80 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Γ) Έχουμε: $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -10 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ και $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

ii) Έχουμε ότι:

$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -10 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \gamma_1 \leftrightarrow \frac{1}{3} \gamma_1 \\ \sim \\ \gamma_3 \leftrightarrow \frac{1}{3} \gamma_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -10 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$

$\gamma_2 \leftrightarrow 10\gamma_1 + \gamma_2$
 $\sim$
 $\gamma_3 \leftrightarrow -1\gamma_1 + \gamma_3$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 Είναι άνω τριγωνικός πίνακας
αρα:

$\det C = 1 \cdot 2 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \gamma_3 \leftrightarrow -3\gamma_1 + \gamma_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$

$\gamma_3 \leftrightarrow 3\gamma_2 + \gamma_3$
 $\sim$
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$
 Είναι άνω τριγωνικός πίνακας
αρα: $\det D = 1 \cdot 2 \cdot (-15) = \underline{\underline{-30 \neq 0}}$

ii) • Αφού $\det C = 0$, άρα ο πίνακας C δεν είναι αντιστρέψιμος.

• Αφού $\det D = -30 \neq 0$, άρα ο πίνακας D είναι αντιστρέψιμος.

Υπολογίζουμε τον πίνακα D^{-1} :

$$\boxed{D^{-1} = \frac{1}{\det D} \cdot \text{adj} D} \quad (*)$$

όπου:

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -30 \quad (\text{βρέθηκε από πριν})$$

$$\text{adj} D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}^T, \text{ με:}$$

$$D_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

$$D_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -(0+3) = -3$$

$$D_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0-6 = -6$$

$$D_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -(-6-0) = 6$$

$$D_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3-9 = -12$$

$$D_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -(0-6) = +6 = 6$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$D_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8$$

$$D_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 0) = +1 = 1$$

$$D_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

Αρα: $\text{adj } D = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -6 \\ 6 & -12 & 6 \\ -8 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 6 & -8 \\ -3 & -12 & 1 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Οότε: $D^{-1} = \frac{1}{\det D} \cdot \text{adj } D =$

$$= \frac{-1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 6 & -8 \\ -3 & -12 & 1 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix} =$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$= \begin{pmatrix} -6/-30 & 6/-30 & -8/-30 \\ -3/-30 & -12/-30 & -1/30 \\ -6/-30 & 6/-30 & -2/30 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 & 4/15 \\ 1/10 & 2/5 & -1/30 \\ 1/5 & -1/5 & -1/15 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3$$

Άσκηση 3.

A.) Δίνεται το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y - z &= 4 \\ x - 5y + 3z &= 3 \\ 5x + y + z &= 41 \end{aligned} \right\}$$

Λαμβάνουμε τον ακόλουθο επαυξημένο πίνακα, τον οποίον φέρνουμε σε αλγεβρική μορφή με χρήση κατάλληλων γραμμικών πράξεων και τη Μέθοδο

Αναλοφής Gauss:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 41 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 41 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \gamma_2 \leftrightarrow -2\gamma_1 + \gamma_2 \\ \sim \\ \gamma_3 \leftrightarrow -5\gamma_1 + \gamma_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 13 & -7 & -2 \\ 0 & 26 & -14 & 26 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \gamma_3 \leftrightarrow -2\gamma_2 + \gamma_3 \\ \sim \end{array}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 13 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{array} \right) \quad \text{Αικατερίνη Μαρφει}$$

Άρα:

$$\left. \begin{array}{l} 1x - 5y + 3z = 3 \\ 0 + 13y - 7z = -2 \\ 0 = 30 \text{ (αδύνατον)} \end{array} \right\}$$

Το σύστημα δεν έχει καμία λύση (είναι αδύνατον).

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

B) Δίνεται το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + y + z &= 1 \\ x + 5y - 4z &= -1 \end{aligned} \right\}$$

Λαμβάνουμε τον ακόλουθο επαυξημένο πίνακα, τον οποίον φέρνουμε σε αλγεβρική μορφή με χρήση κατάλληλων γραμμικών πράξεων και τη Μέθοδο

Ανάλυσης Gauss:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -4 & -1 \end{array} \right) \quad \begin{aligned} & \gamma_2 \Rightarrow -2 \cdot \gamma_1 + \gamma_2 \\ & \gamma_3 \Rightarrow -1 \cdot \gamma_1 + \gamma_3 \end{aligned}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{array} \right) \quad \gamma_3 \Rightarrow 1 \cdot \gamma_2 + \gamma_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{Αλγεβρική Μορφή}$$

Άρα, έχουμε ότι:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 3z = 1 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = z - 2y \\ -3y = 1 - 3z \Rightarrow y = -\frac{1}{3} + z \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = z - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} + z\right) \\ y = -\frac{1}{3} + z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = z + \frac{2}{3} - 2z \\ y = -\frac{1}{3} + z \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = -z + \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} + z \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Μονοπαραμετρική
Απειρίτως λύσεων
με $z \in \mathbb{R}$ (ελεύθερος
αγνώστος)

Οι λύσεις (x, y, z) είναι:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \left(-z + \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} + z, z\right) \\ &= (-z, z, z) + \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) = z \cdot (-1, 1, 1) + \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) \\ &\quad \text{με } z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Γ) Έχουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y + z &= 3 \\ -3x + \alpha y + 2z &= 8 \\ 1x - 3y + 4z &= 4\alpha \end{aligned} \right\}$$

Λαμβάνουμε τον ακόλουθο επαυξημένο πίνακα, τον οποίον φέρνουμε σε αθιμακωτή μορφή με χρήση κατάλληλων γραμμωπράξεων και τη Μέθοδο Αφαίρεσης Gauss:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & \alpha & 2 & 8 \\ 1 & -3 & 4 & 4\alpha \end{array} \right) \xrightarrow{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 4\alpha \\ -3 & \alpha & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &\leftrightarrow 3 \cdot \gamma_1 + \gamma_2 \\ \gamma_3 &\leftrightarrow -2 \cdot \gamma_1 + \gamma_3 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 4\alpha \\ 0 & \alpha-9 & 14 & 12\alpha+8 \\ 0 & 9 & -7 & -8\alpha+3 \end{array} \right) \xrightarrow{\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_3} \sim$$

$$\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 4\alpha \\ 0 & 9 & -7 & -8\alpha+3 \\ 0 & \alpha-9 & 14 & 12\alpha+8 \end{array} \right)$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\gamma_3 \Leftrightarrow 2 \cdot \gamma_2 + \gamma_3 \quad \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 4\alpha \\ 0 & 9 & -7 & -8\alpha+3 \\ 0 & \alpha+9 & 0 & -4\alpha+14 \end{array} \right)$$

Ενδεύ:

$$\left. \begin{array}{l} x - 3y + 4z = 4\alpha \\ 9y - 7z = -8\alpha + 3 \\ (\alpha + 9) \cdot y = -4\alpha + 14 \end{array} \right\}$$

• 1^{ov} | Αν $\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -9$, τότε έχουμε:

$$x - 3y + 4z = -36$$

$$9y - 7z = 75$$

$$0 \cdot y = 50 \Leftrightarrow 0 = 50 \text{ (αδύνατον)}$$

Άρα, για $\alpha = -9$
το σύστημα είναι
αδύνατον (όχι λύσεις)

• 2^{ov} | Αν $\alpha + 9 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -9$, τότε έχουμε:

$$x - 3y + 4z = 4\alpha$$

$$9y - 7z = -8\alpha + 3$$

$$y = \frac{-4\alpha + 14}{\alpha + 9}$$

$$x = 4\alpha + 3y - 4z$$

$$\Leftrightarrow -7z = -8\alpha + 3 - 9y$$

$$y = \frac{-4\alpha + 14}{\alpha + 9}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Οπότε:

$$\bullet x = 4a + 3y - 4z$$

$$\bullet z = \frac{8}{7} \cdot a - \frac{3}{7} + \frac{9}{7} \cdot y = \frac{8}{7} \cdot a - \frac{3}{7} + \frac{9}{7} \cdot \left(\frac{-4a+14}{a+9} \right)$$

$$\bullet y = \frac{-4a+14}{a+9}$$

άρα:

$$\bullet x = 4a + 3y - 4z$$

$$\bullet y = \frac{-4a+14}{a+9}$$

$$\bullet z = \frac{8a-3}{7} + \frac{126-36a}{7a+63}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \bullet x = 4a + 3 \cdot \left(\frac{14-4a}{a+9} \right) - 4 \cdot \left(\frac{8a-3}{7} + \frac{126-36a}{7a+63} \right) =$$

$$= 4a + \frac{42-12a}{a+9} + \frac{-32a+12}{7} + \frac{-504+144a}{7a+63}$$

$$\bullet y = \frac{-4a+14}{a+9}$$

$$\bullet z = \frac{8a-3}{7} + \frac{126-36a}{7a+63}$$

για $a \neq -9$.

Άσκηση 4.

A) i) Έχουμε το σύνολο:

$$U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 7y + z - 1 = 0 \} \text{ το οποίο } \underline{\underline{\text{δεν}} \text{ είναι}}$$

υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$, διότι το μηδενικό στοιχείο $(0, 0, 0)$

δεν ικανοποιεί τη δέσμευση $3x + 7y + z - 1 = 0$.

Όντως, διότι:

$$3 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 0 - 1 = 0 + 0 + 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

ii) Έχουμε το σύνολο:

$$V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2x^2 - y = 0 \} \neq \emptyset$$

1ον/ Ελέγχουμε εάν το μηδενικό στοιχείο $(0, 0) \in V$.

Όντως ανήκει, διότι: $0^4 + 2 \cdot 0^2 - 0 = \underline{\underline{0}}$, ισχύει.

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$v_1 = (x_1, y_1) \text{ και } v_2 = (x_2, y_2)$$

2^{ον}/ Ελέγχουμε εάν για δύο τυχαία στοιχεία $v_1, v_2 \in V$ ισχύει ότι: $v_1 + v_2 \in V$.

Έχουμε δοινόν: $v_1 \in V$, άρα: $\boxed{x_1^4 + 2x_1^2 - y_1 = 0} \quad (1)$

$v_2 \in V$, άρα: $\boxed{x_2^4 + 2x_2^2 - y_2 = 0} \quad (2)$

Οότε: $v_1 + v_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (\underbrace{x_1 + x_2}_x, \underbrace{y_1 + y_2}_y)$

Για να είναι: $v_1 + v_2 \in V$, πρέπει να ικανοποιείται η ακόλουθη ανίσωση:

$$x^4 + 2x^2 - y = 0, \text{ δηλαδή:}$$

$$(x_1 + x_2)^4 + 2 \cdot (x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 \cdot [(x_1 + x_2)^2 + 2] - (y_1 + y_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) \cdot (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2) - (y_1 + y_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_1^4} + 2x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + \underline{2x_1^2} + 2x_1^3x_2 + 4x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2^3 + 4x_1x_2 + x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2^3 + \underline{x_2^4} + \underline{2x_2^2} - \underline{y_1} - \underline{y_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1^4 + 2x_1^2 - y_1) + (x_2^4 + 2x_2^2 - y_2) + 2x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + 2x_1^3x_2 + 4x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2^3 + 4x_1x_2 + x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2^3 = 0$$

$$\stackrel{(1), (2)}{\Leftrightarrow} 0 + 0 + 4x_1^3x_2 + 5x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2^3 + 4x_1x_2 + 2x_1^2x_2^2 = 0$$

δεν ισχύει για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Άρα, το σύνολο $V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2x^2 - y = 0 \}$

ΔΕΝ είναι διανormaτικός υπόχωρος του διανormaτικού χώρου $\mathbb{R}^2$.

Εναλλακτικός τρόπος:

• Έστω $(x_1, y_1) \in V$ να είναι το $(1, 3)$. Όντως $(1, 3) \in V$, αφού:

$$1^4 + 2 \cdot 1^2 - 3 = 3 - 3 = 0$$

& $(x_2, y_2) \in V$ να είναι το $(-1, 3)$. Όντως $(-1, 3) \in V$, αφού:

$$(-1)^4 + 2 \cdot (-1)^2 - 3 = 3 - 3 = 0$$

Όμως: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (1, 3) + (-1, 3) = (1-1, 3+3) = (0, 6)$

έχει ότι: $0^4 + 2 \cdot 0^2 - 6 = -6 \neq 0$, άρα το άθροισμα

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \notin V$ άρα το V δεν είναι διανormaτικός
υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

iii) Ξέρουμε το συνολο:

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \geq 0 \} \quad , \text{όπου:}$$

• 1^{ov}/ Το $(0, 0, 0) \in W$ διότι: $0 + 0 + 0 = 0$, ισχύει:

• 2^{ov}/ Αν $W_1 = (x_1, y_1, z_1) \in W$, με $x_1 + y_1 + z_1 \geq 0$ και

$$W_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W, \text{ με } x_2 + y_2 + z_2 \geq 0$$

$$\text{τότε: } W_1 + W_2 = (\underbrace{x_1 + x_2}_X, \underbrace{y_1 + y_2}_Y, \underbrace{z_1 + z_2}_Z) \in W, \text{ διότι:}$$

$$X + Y + Z =$$

$$= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$$

$$= (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) \geq 0$$

άρα ισχύει ότι $W_1 + W_2 \in W$.

• 3^{ov}/ Αν $W = (x, y, z) \in W$, με $x + y + z \geq 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$

τότε $\lambda \cdot W = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ με $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda \cdot (x + y + z) \geq 0 \text{ ή } \leq 0$
 διότι, δεν ξέρουμε το πρόσημο του $\lambda \in \mathbb{R}$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\text{Άρα, το } W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \geq 0 \}$$

Δεν είναι υποχώρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

B] Έχουμε το σύνολο:

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x+y & 3y \\ y & x \\ 3x & x-y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

• 1^{ον} / Να αρχικά, έχουμε ότι: $X \neq \emptyset$

• 2^{ον} / Ελέγχουμε εάν το μηδενικό στοιχείο ανήκει στον X .

Όντως ανήκει, διότι για $x=0, y=0$, είναι:

$$X = \begin{pmatrix} 0+0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in X$$

16X16

• 3^{ον} / Ελέγχουμε εάν για δύο τυχαία στοιχεία:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix} \in X$$

διότι:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1 + y_1 \\ \alpha_2 &= 3 \cdot y_1 \\ \alpha_3 &= y_1 \\ \alpha_4 &= x_1 \\ \alpha_5 &= 3x_1 \\ \alpha_6 &= x_1 - y_1 \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 \end{pmatrix} \in X$$

διότι:

$$\begin{aligned} b_1 &= x_2 + y_2, \quad b_2 = 3 \cdot y_2, \quad b_3 = y_2, \\ b_4 &= x_2, \quad b_5 = 3x_2, \quad b_6 = x_2 - y_2 \end{aligned}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Πότε:

$$A+B = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 + \beta_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 & \alpha_4 + \beta_4 \\ \alpha_5 + \beta_5 & \alpha_6 + \beta_6 \end{pmatrix} \in X \quad \text{γιατί:}$$

$$\bullet \alpha_1 + \beta_1 = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2 = \underbrace{(X_1 + X_2)}_X + \underbrace{(Y_1 + Y_2)}_Y = X + Y$$

$$\bullet \alpha_2 + \beta_2 = 3 \cdot Y_1 + 3 \cdot Y_2 = 3 \cdot \underbrace{(Y_1 + Y_2)}_Y = 3 \cdot Y$$

$$\bullet \alpha_3 + \beta_3 = \underbrace{Y_1 + Y_2}_Y = Y$$

$$\bullet \alpha_4 + \beta_4 = \underbrace{X_1 + X_2}_X = X$$

$$\bullet \alpha_5 + \beta_5 = 3 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 = 3 \cdot \underbrace{(X_1 + X_2)}_X = 3 \cdot X$$

$$\bullet \alpha_6 + \beta_6 = X_1 - Y_1 + (X_2 - Y_2) = \underbrace{(X_1 + X_2)}_X - \underbrace{(Y_1 + Y_2)}_Y = X - Y$$

Άρα: $(A+B) \in X.$

4^α/ Ελέγχουμε εάν για ένα τυχαίο στοιχείο $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix} \in X$

$$\text{με: } \left. \begin{aligned} \alpha_1 &= X + Y \\ \alpha_2 &= 3 \cdot Y \\ \alpha_3 &= Y \\ \alpha_4 &= X \\ \alpha_5 &= 3X \\ \alpha_6 &= X - Y \end{aligned} \right\}$$

ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ότι:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot \alpha_1 & \lambda \cdot \alpha_2 \\ \lambda \cdot \alpha_3 & \lambda \cdot \alpha_4 \\ \lambda \cdot \alpha_5 & \lambda \cdot \alpha_6 \end{pmatrix} \in X.$$

$$\begin{aligned} \text{Όπως ανήκει, αφού: } & \begin{pmatrix} \lambda \cdot (X+Y) & \lambda \cdot (3 \cdot Y) \\ \lambda \cdot Y & \lambda \cdot X \\ \lambda \cdot 3X & \lambda \cdot (X-Y) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \lambda X + \lambda Y & 3 \cdot \lambda Y \\ \lambda Y & \lambda X \\ 3 \cdot \lambda X & \lambda X - \lambda Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X+Y & 3Y \\ Y & X \\ 3X & X-Y \end{pmatrix} \in X \end{aligned}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Πότε, το σύνολο X είναι υπόχωρος του διανυσματικού

χώρου $M_{3,2}(\mathbb{R})$.

► Βρίσκουμε τη βάση του υπόχωρου X :

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x+y & 3y \\ y & x \\ 3x & x-y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{δηλαδή} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \\ 3x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 3y \\ y & 0 \\ 0 & -y \end{pmatrix}$$

$$= x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ με } x, y \in \mathbb{R}$$

Πάτες

$$X = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

— είναι οι γεννήτορες του X —

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Ελέγχαμε εάν είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, ως ακολουθώς:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0_{3 \times 2}, \text{ για } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \\ 3\alpha & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 3\beta \\ \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 3\beta \\ \beta & \alpha \\ 3\alpha & \alpha - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ 3\beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ 3\alpha = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array} \right\} \text{ μωαδική λύση}$$

Άρα, είναι όπως γραμμικά ανεξάρτητα.

Οπότε, βάσει του X:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ με } \dim X = 2$$

διαβάστε

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Αδυναμία S.

A) Έχουμε: $u_1 = (1, -1, 2)$, $u_2 = (-2, 2, -4)$, $u_3 = (1, 2, 3)$,
 $u_4 = (2, 4, 5)$

• Έχουμε: $S_1 = \{u_1, u_2\}$ όπου είδαμε το $(1, 0, 0)$.
 Σκεπώς, για να είναι τα στοιχεία $(1, -1, 2)$, $(-2, 2, -4)$, $(1, 0, 0)$, βάση του $\mathbb{R}^3$, πρέπει αυτά να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Δηλαδή, πρέπει:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Έχουμε: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

αναπτύσσουμε την αρίθμηση ως προς την 1^η γραμμή του πίνακά μας.

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (0 - 0) + 1 \cdot (0 + 4) + 2 \cdot (0 - 2)$$

$$= 4 - 4 = 0, \text{ αρα δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αρα} \\ \text{δεν μπορεί το } S_1 \text{ να επεκταθεί σε βάση} \\ \text{του } \mathbb{R}^3.$$

- Έχουμε: $S_2 = \{u_3, u_4\}$, όπου εισάγουμε το $(1, 0, 0)$.

Τωρα, για να είναι τα στοιχεία $u_3 = (1, 2, 3)$ και $u_4 = (2, 4, 5)$ και $(1, 0, 0)$ βάση του $\mathbb{R}^3$, πρέπει αυτά να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ανάλογα, πρέπει:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Έχουμε:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ανσπώσουμε την πρώτη ως προς την δεύτερη και την τρίτη.

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0 - 0) - 2 \cdot (0 - 5) + 3 \cdot (0 - 4)$$

$$= 10 - 12 = -2 \neq 0, \text{ άρα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα}$$

Άρα, η ζητούμενη επένταξη είναι $\eta = \{u_3, u_4, (1, 0, 0)\}$

Αυτή δεν είναι μοναδική, διότι στη θέση του $(1, 0, 0)$, μπορούμε να βάλουμε το $(0, 1, 0)$.

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

B) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

• ΧΩΡΟΣ ΓΡΑΜΜ.ΩΝ:

$$A = \text{span} \{ (1, -1, 1), (1, 1, 1) \} \rightarrow \text{οι γεννήτορες του } A.$$

Για να δείξουμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι, έχουμε:

$$\lambda_1 \cdot (1, -1, 1) + \lambda_2 \cdot (1, 1, 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0)$$

Άρα, έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ -(-\lambda_2) + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

Άρα: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$, οπότε τα $(1, -1, 1), (1, 1, 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα είναι η βάση γραμμών του A .

Άρα: $A = \text{span} \{ (1, -1, 1), (1, 1, 1) \}$, με $\dim(\text{ROW } A) = 2$.

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

• ΧΩΡΟΣ ΣΤΗΛΩΝ:

Έχουμε τις στήλες: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και λαμβάνουμε τον ακόλουθο πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad (*)$$

Επείτα, με γραμμικές και εφαρμογές τη Μέθοδο Αναίρεσης Gauss, φέρνουμε τον πίνακα (*) σε Ανωγώνι Μικτού Μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \leftrightarrow -1 \cdot \gamma_1 + \gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\gamma_2 \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \leftrightarrow 1 \cdot \gamma_2 + \gamma_1} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Τα οδοιπορικά στοιχεία "απόδοσης" βρίσκονται στην 1^η και 2^η στήλη του αρχικού πίνακα A.

Αντρέας Ολιγαρκής
Μαθητής

Άρα, η 1^{η} και η 2^{η} στήλη του αρχικού πίνακα A αποτελούν τη βάση του δυομετρήσιμου χώρου σπηλιών. Άρα:

$$\text{Βάση } X : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{με } \dim(\text{COL}X) = 2.$$

• ΜΗΔΕΝΟΧΩΡΟΣ ΤΟΥ A :

Έχουμε: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ και το αντίστοιχο ^{γραμμικό} σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\} \text{ ως το } \text{Σύστημα:}$$

Λαμβάνουμε τον αντίστοιχο επανσημένο πίνακα και εφαρμόζοντας γραμμοπράξεις καταλήγουμε στην Αβελική του Μερφι με τη Μέθοδο Αναλογίας του Γκαους. Έχουμε λοιπόν:

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\gamma_2 \leftrightarrow -1\gamma_1 + \gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{άρα: } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y + 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{με } z \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Μαθηματάρχης
Αγγελική Λύδερη

Οι λύσεις (x, y, z) είναι:

$$(x, y, z) =$$

$$= (-z, 0, z)$$

$= z \cdot (-1, 0, 1)$, με $z \in \mathbb{R}$ (ελεύθερη άγνωστη) / Βάση = $\{(-1, 0, 1)\}$,
και η διάσταση του μηδενικού ισούται με 1.

Γ/ Έχουμε: $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$ και $W = \{(x, y, z) : x - y = 0, y - z = 0\}$

i) • ΒΑΣΗ & ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ U :

Έχουμε: $x - y + z = 0 \Leftrightarrow x = y - z$

Άρα: $(x, y, z) =$

$= (y - z, y, z)$

$= (y, y, 0) + (-z, 0, z)$

$= y \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (-1, 0, 1)$, με $y, z \in \mathbb{R}$ (ελεύθεροι άγνωστοί)

Διαφομετρική Ανεξάρτητα Λύσεων

Άρα $(1, 1, 0), (-1, 0, 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα;

$\lambda_1 \cdot (1, 1, 0) + \lambda_2 \cdot (-1, 0, 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + 0, 0 + \lambda_2) = 0 \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix} \right\}$

Άρα τα $(1, 1, 0), (-1, 0, 1)$ είναι βάση του U. Άρα Βάση U = $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

4' dim U = 2.

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

• Βάση & Διάνυσμα του W :

Έχουμε: $x - y = 0, y - z = 0$, δηλαδή:

$$\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \quad \text{ΜΟΝΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΡΕΙΡΙΑ} \\ \text{ΛΥΣΕΩΝ} \\ \text{ΜΕ } z \in \mathbb{R} \text{ (ελεύθερος} \\ \text{αγνώστος)}$$

Αρα: $(x, y, z) = (z, z, z)$
 $= z \cdot (1, 1, 1), \text{ με } z \in \mathbb{R}$

Οπότε: $\text{Βάση } W = \{ (1, 1, 1) \} \text{ με } \dim W = 1.$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

• Βάση & Διάσταση του $U \cap W$:

$$U \cap W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0, x = y, y = z \}$$

όπου:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x = y \\ y = z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x = z \\ y = z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x - \cancel{z} + \cancel{z} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ x = z \\ y = z \end{array} \right\}$$

άρα: $x = 0, y = 0, z = 0$

Οπότε: Βάση $U \cap W$: $\{ (0, 0, 0) \}$

άρα: $\dim(U \cap W) = 0$.

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

• Βάση & διαστάση του $U+W$:

Αφού: $U = \text{span} \{ (1, 1, 0), (-1, 0, 1) \}$ και $W = \{ (1, 1, 1) \}$

άρα: $U+W = \text{span} \{ (1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1) \}$, δηλαδή:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \gamma_2 \leftrightarrow 1 \cdot \gamma_1 + \gamma_2 \\ \gamma_3 \leftrightarrow -1 \cdot \gamma_1 + \gamma_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αλγεβρικοί Μαθηματικά

Οι μη μηδενικές γραμμές του αλγεβρικού πίνακα αποτελούν μία βάση του $U+W$,
άρα:

Βάση του $(U+W)$: $\{ (1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1) \}$

& $\dim(U+W) = 3.$

Ή ισοδύναμα, έχουμε ότι:

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$= 2 + 1 - 0 = 3 - 0 = 3$$

ii) Για να είναι $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, πρέπει:

• 1^{ov} $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(U+W) \Leftrightarrow 3 = 3$, ισχύει

• 2^{ov} $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim U + \dim W \Leftrightarrow 3 = 2 + 1$, ισχύει

Όπως δόθηκε $\boxed{\mathbb{R}^3 = U \oplus W}$