ΛΥΣΕΙΣ 1ης ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΔΕΟ 13 (2021 – 2022)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ερώτημα Α

Η συνάρτηση είναι πρωτοβάθμια και είναι της μορφής: f(x) = y = α·x + β, με α = 4 και β =-12. Η γραφική της παράσταση έχει τη μορφή μίας ευθείας γραμμής.

Θα προσδιορίσουμε αλγεβρικά τα σημεία, όπου η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τους άξονες x και y.

- Για x = 0, έχουμε: $y = 4 \cdot 0 - 12 = 0 - 12 = -12$

Οπότε, το σημείο τομής με τον άξονα των y, είναι το Κ(0, -12).

- Για y = 0, έχουμε: $0 = 4x - 12 \Leftrightarrow -4x = -12 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \frac{-12}{-4} = 3$

Οπότε, το σημείο τομής με τον άξονα των x, είναι το Λ(3, 0).

Ερώτημα Β

Θα προσδιορίσουμε το σημείο τομής των συναρτήσεων: **f(x) = 4x -12** και **g(x) = - 4x + 4**, εξισώνοντας τους τύπους των δύο συναρτήσεων:

$$4x - 12 = -4x + 4 \Leftrightarrow 4x + 4x = 12 + 4 \Leftrightarrow 8x = 16 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \frac{\mathbf{16}}{8} = 2$$

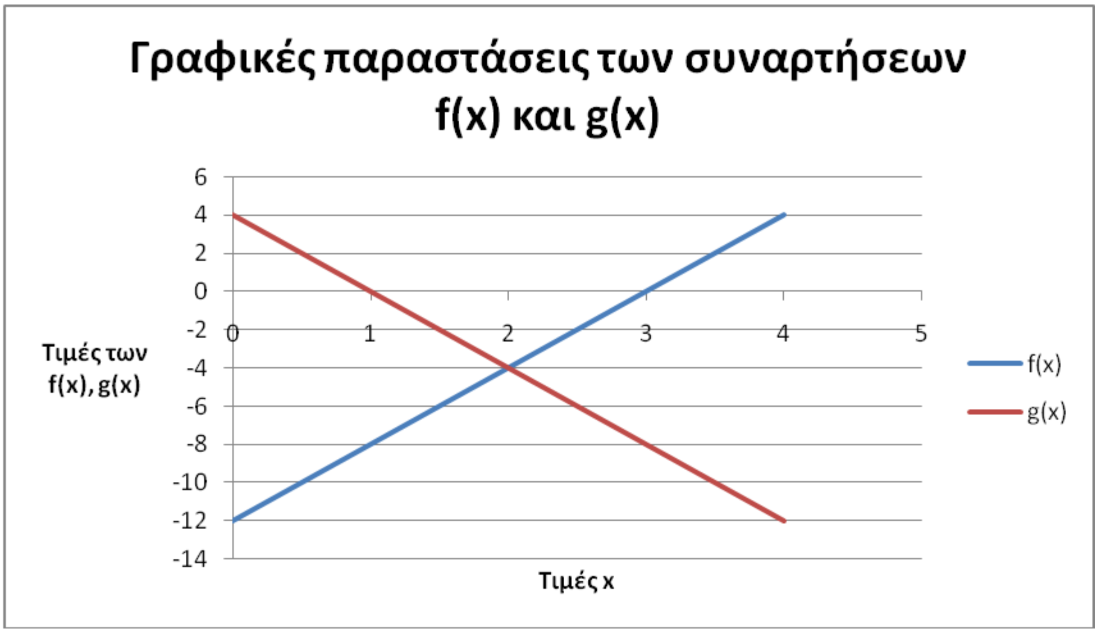
Αντικαθιστώντας την τιμή x = 2, σε όποια από τις δύο συναρτήσεις επιθυμούμε, θα προσδιορίσουμε και την τιμή του y. Έχουμε λοιπόν: **y = 4x - 12 = 4·2 – 12 = 8 – 12 = -4**

Συνεπώς, το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων είναι το:

Μ (2, -4)

Μέσω του προγράμματος Excel, προέκυψε ο πίνακας τιμών και το ακόλουθο κοινό διάγραμμα των συναρτήσεων f(x) και g(x) για τιμές $0 \le x \le 4$, από όπου επαληθεύεται το σημείο ισορροπίας που βρήκαμε προηγουμένως με τρόπο αλγεβρικό.

x	f(x)	g(x)
0	-12	4
1	-8	0
2	**-4**	**-4**
3	0	-8
4	4	-12



Ερώτημα Γ

Γνωρίζουμε ότι η ευθεία διέρχεται από το σημείο (2, 0) και έχει κλίση ίση με -2. Η ευθεία, έχει τη μορφή λοιπόν: $y = \alpha \cdot x + \beta$, όπου α = -2. Άρα, λαμβάνουμε την ακόλουθη μορφή:

$y = -2 \cdot x + \beta$. **Βρίσκουμε λοιπόν και το β ως ακολούθως**:

Για x = 2 και y = 0, αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ευθείας, λαμβάνουμε τα ακόλουθα:

$$0 = -2 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow -1 \cdot \beta = -4 \Leftrightarrow \beta = \frac{-4}{-1} = 4$$

Τελικά, η ζητούμενη εξίσωση ευθείας είναι η: $y = -2 \cdot x + 4$

Ερώτημα Δ

Η ευθεία μας έχει τη μορφή $y = \alpha \cdot x + \beta$ και διέρχεται από τα σημεία (-1, -8) και (2, 4).

Α΄ τρόπος:

- Για x = -1 και y = -8 είναι: $-8 = \alpha \cdot (-1) + \beta$
- Για x = 2 και y = 4 είναι: $4 = \alpha \cdot 2 + \beta$

Λύνοντας το σύστημα των δύο παραπάνω σχέσεων, θα προσδιορίσουμε τις τιμές των α και β. Έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} -8 = -a + \beta \\ 4 = 2a + \beta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 8 + \beta \\ 4 = 2 \cdot (8 + \beta) + \beta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 8 + \beta \\ 4 = 16 + 2\beta + \beta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 8 + \beta \\ 4 = 16 + 3\beta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 8 + \beta \\ -3\beta = 16 - 4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 8 + \beta \\ -3\beta = 12 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 8 + \beta \\ \beta = \frac{12}{-3} = -4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 8 + (-4) = 8 - 4 = 4 \\ \beta = -4 \end{Bmatrix}$$

Συνεπώς, η εξίσωση της συνάρτησης, η οποία διέρχεται από τα δύο δοθέντα σημεία της Άσκησης μας, είναι η: **y = 4x - 4**

Β΄ τρόπος:

Η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$
\begin{aligned}
y &= y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \\
&= -8 + \frac{4-(-8)}{2-(-1)} \cdot [x-(-1)] \\
&= -8 + \frac{4+8}{2+1} \cdot (x+1) \\
&= -8 + \frac{12}{3} \cdot (x+1) \\
&= -8 + 4 \cdot (x+1) \\
&= -8 + 4x + 4 = \\
&= -4 + 4x
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, η εξίσωση της συνάρτησης, η οποία διέρχεται από τα δύο δοθέντα σημεία της Άσκησης μας, είναι η: **y = 4x - 4**

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έχουμε τη συνάρτηση παραγωγής Q(L), όπου L είναι οι μονάδες εργασίας και Q(L) είναι η παραγόμενη ποσότητα προϊόντος. Δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$Q(L) = 50L - \frac{1}{2} \cdot L^3$$

Ερώτημα Α

- Για τη συνάρτηση παραγωγής πρέπει: $L \geq 0$
- Ακόμη, πρέπει:

$$Q(L) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$50L - \frac{1}{2} \cdot L^3 \geq 0 \Leftrightarrow 100L - L^3 \geq 0 \Leftrightarrow L \cdot \left(100 - L^2\right) \geq 0$$

Αφού $L \geq 0$, αρκεί και:

$$100 - L^2 \geq 0 \Leftrightarrow -L^2 \geq -100 \Leftrightarrow L^2 \leq 100 \Leftrightarrow L \leq \sqrt{100} \Leftrightarrow L \leq 10$$

Οπότε, το ζητούμενο πεδίο ορισμού είναι: $\mathbf{0 \leq L \leq 10}$ ή ισοδύναμα $L \in [0,\ 10]$.

Ερώτημα Β

- Για την παραγωγή L = 8 μονάδων εργασίας, το κόστος ισούται με:

  TC = 300 · 8 = 2.400 χρηματικές μονάδες

- Σε αυτήν την περίπτωση η παραγόμενη ποσότητα προϊόντος, ισούται με:

$$Q(8) = 50 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 8^3 = 400 - 0,5 \cdot 512 = 400 - 256 = 144 \text{ μονάδες προϊόντος}$$

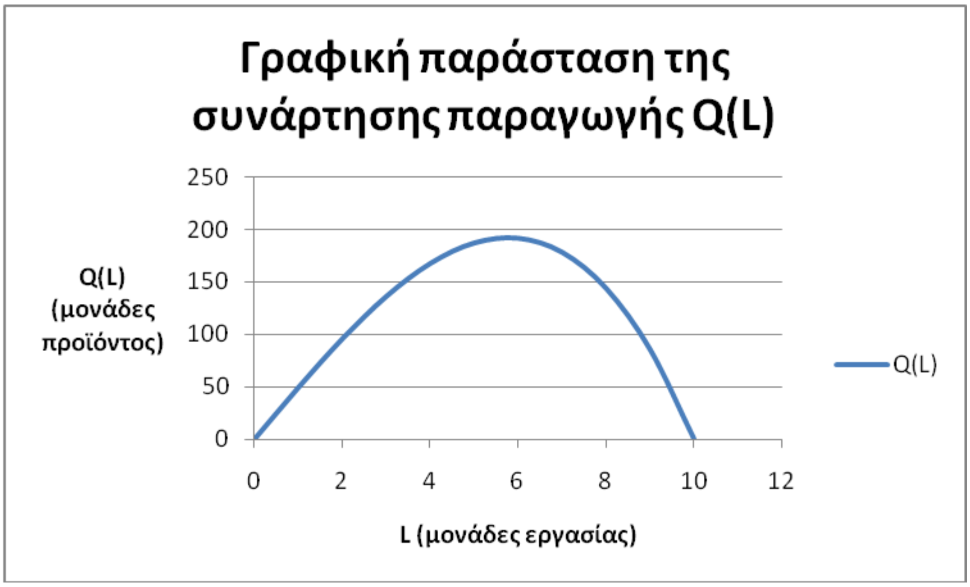
Άρα, το ζητούμενο μέσο κόστος (Average Cost – AC) εργασίας ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος, ισούται με:

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{2.400}{144} = 2.400 : 144 = 16,667 \text{ χρηματικές μονάδες}$$

Ερώτημα Γ

Μέσω του προγράμματος Excel, προέκυψε ο πίνακας τιμών και η ακόλουθη γραφική παράσταση της συνάρτησης παραγωγής Q(L), για τιμές $0 \leq L \leq 10$:

L (μονάδες εργασίας)	Q(L) (παραγόμενη ποσότητα προϊόντος)
0	0
1	49.5
2	96
3	136.5
4	168
5	187.5
6	192
7	178.5
8	**144**
9	85.5
10	0



ΑΣΚΗΣΗ 3

Ερώτημα Α

Δίνονται οι δύο ακόλουθες συναρτήσεις:

- $Q_D = 20 - P$ (συνάρτηση ζήτησης)
- $Q_S = -15 + 3P$ (συνάρτηση προσφοράς)

Θα προσδιορίσουμε το σημείο ισορροπίας της αγοράς, ως ακολούθως. Έχουμε λοιπόν:

$$
\begin{aligned}
Q_D = Q_S &\Leftrightarrow 20 - P = -15 + 3P \\
&\Leftrightarrow -P - 3P = -15 - 20 \\
&\Leftrightarrow -4P = -35 \\
&\Leftrightarrow P = \frac{-35}{-4} = 8,75
\end{aligned}
$$

Οπότε, η τιμή ισορροπίας ισούται με P = 8,75 νομισματικές μονάδες, ενώ η ποσότητα ισορροπίας ισούται με: $Q = 20 - P = 20 - 8,75 = 11,25$ φυσικές μονάδες.

<u>Άρα, το σημείο ισορροπίας της αγοράς είναι το</u>: **(P, Q) = (8,75 , 11,25)**

Ερώτημα Β

i) Λύνουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(x^2 - 5x + 6\right) = 0$$

Η παραπάνω σχέση ικανοποιείται όταν:

- **x = 0 ή**
- $x^2 - 5x + 6 = 0$

  Η $x^2 - 5x + 6$ είναι μία εξίσωση 2ου βαθμού ως προς x, με συντελεστές

  α = 1, b = -5, c = +6. Αφού η Διακρίνουσα είναι ίση με:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0,$$

  οπότε, υπάρχουν δύο λύσεις:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Οπότε, η αρχική εξίσωση έχει λύσεις τις: **x = 0, x = 2, x = 3**

ii) Παραγοντοποιούμε την ακόλουθη παράσταση:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= x^3 + x^2 - 9x - 9 \\ &= x^2 \cdot (x+1) - 9 \cdot (x+1) \\ &= (x^2 - 9) \cdot (x+1) \\ &= (x-3) \cdot (x+3) \cdot (x+1) \end{aligned}$$

iii) Λύνουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} &\mathrm{A} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3) \cdot (x+3) \cdot (x+1) = 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται όταν:

- $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$
- $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$
- $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Οπότε, η ζητούμενη εξίσωση έχει λύσεις τις: **x = -3, x = -1, x = 3**

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ερώτημα Α

Έχουμε τη συνάρτηση TR των εσόδων:

$$TR(Q)=\ln\left(Q^2-Q-6\right)$$

i) Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης των εσόδων, πρέπει να ισχύουν τα ακόλουθα:

- $Q\geq 0$
- $Q^2-Q-6>0$

Έχουμε μία ανίσωση 2ου βαθμού ως προς Q, όπου για να τη λύσουμε, βρίσκουμε κατ' αρχήν τις λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης:

Είναι μία εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς Q, η $Q^2-Q-6=0$, με συντελεστές α = 1, b = -1, c = -6. Έχουμε λοιπόν τα ακόλουθα:

Αφού η Διακρίνουσα είναι $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)=1+24=25>0$, οπότε, υπάρχουν δύο λύσεις:

$$Q_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\cdot1}=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=3>0,\ \text{δεκτή}$$

$$Q_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\cdot1}=\frac{1-5}{2}=\frac{-4}{2}=-2<0,\ \text{απορρίπτεται}$$

Ο ακόλουθος πίνακας προσήμου μας δίνει τις τιμές Q, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ανίσωση $Q^2-Q-6>0$. Έχουμε λοιπόν:

Q	0		3		$+\infty$
Q^2-Q-6		-	0	+	

Η ανίσωση μας λοιπόν $Q^2-Q-6>0$, έχει λύσεις τις $Q\in(3,\ +\infty)$.

- $\ln\left(Q^2-Q-6\right)\geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(Q^2-Q-6\right)\geq \ln 1 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow Q^2-Q-6\geq 1 \Leftrightarrow Q^2-Q-7\geq 0$

  Έχουμε μία ανίσωση 2ου βαθμού ως προς Q, όπου για να τη λύσουμε, βρίσκουμε κατ' αρχήν τις λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης:

  Είναι μία εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς Q, η $Q^2-Q-7=0$, με συντελεστές α = 1, b = -1, c = -7. Έχουμε λοιπόν τα ακόλουθα:

  Αφού η Διακρίνουσα είναι $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-7)=1+28=29>0$,

  οπότε, υπάρχουν δύο λύσεις:

  $$Q_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)+\sqrt{29}}{2\cdot 1}=\frac{1+5,385}{2}=\frac{6,385}{2}=3,1925>0, \text{ δεκτή}$$

  $$Q_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)-\sqrt{29}}{2\cdot 1}=\frac{1-5,385}{2}=\frac{-4,385}{2}=-2,1925<0, \text{ απορρίπτεται}$$

  Ο ακόλουθος πίνακας προσήμου μας δίνει τις τιμές Q, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ανίσωση $Q^2-Q-7>0$. Έχουμε λοιπόν:

Q	0	3,1925	$+\infty$
Q^2-Q-7	-	0	+

Η ανίσωση μας λοιπόν $Q^2-Q-7\geq 0$, έχει λύσεις τις $Q\in[3,1925,\ +\infty)$.

Οπότε, το ζητούμενο πεδίο ορισμού είναι οι τιμές Q ≥ 3,1925 ή ισοδύναμα το διάστημα $Q\in[3,1925,\ +\infty)$

ii) Για τη δοθείσα συνάρτηση συνολικού κόστους TC = ln(Q – 3), υπολογίζουμε το νεκρό σημείο της επιχείρησης εξισώνοντας τα έσοδα TR με τα έξοδα (κόστη) TC, ως ακολούθως:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T\Pi} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{T}R = TC \Leftrightarrow \ln\left(Q^2 - Q - 6\right) = \ln\left(Q - 3\right) \\
\Leftrightarrow Q^2 - Q - 6 = Q - 3 \\
\Leftrightarrow Q^2 - Q - 6 - Q + 3 = 0 \\
\Leftrightarrow Q^2 - 2Q - 3 = 0
\end{aligned}
$$

Έχουμε μία εξίσωση 2ου βαθμού ως προς Q, όπου βρίσκουμε τις λύσεις της. **Έχουμε λοιπόν ότι η** $Q^2 - 2Q - 3 = 0$ είναι **μία εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς Q**, με συντελεστές α = 1, b = -2, c = -3. Άρα:

Αφού η Διακρίνουσα είναι $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$,

οπότε, υπάρχουν δύο λύσεις:

$$Q_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 > 0, \text{ δεκτή}$$

$$Q_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 < 0, \text{ απορρίπτεται}$$

Ωστόσο, υπό τον περιορισμό ότι Q – 3 > 0, δηλαδή Q > 3, άρα στη συγκεκριμένη περίπτωση η λύση Q = 3 που βρήκαμε τελικά απορρίπτεται και εν τέλει δεν υφίσταται νεκρό σημείο για την επιχείρηση.

Ερώτημα Β

Έχουμε τη συνάρτηση ζήτησης: $Q_D = 10 - P \Leftrightarrow P = 10 - Q_d$

Η συνάρτηση ΤΠ των κερδών, προσδιορίζεται ως ακολούθως:

$$\text{ΤΠ} = TR - TC$$

όπου:

- **Συνολικά Έσοδα**: TR = $P \cdot Q = (10 - Q) \cdot Q = 10Q - Q^2$
- **Συνολικά Έξοδα (Κόστη)**: TC = $VC + FC = 8Q + 1$

i) Η συνάρτηση των κερδών είναι η:

$$\begin{aligned}\text{ΤΠ} &= TR - TC = \\ &= 10Q - Q^2 - (8Q + 1) \\ &= 10Q - Q^2 - 8Q - 1 \\ &= -Q^2 + 2Q - 1 = -(Q^2 - 2Q + 1) = -(Q - 1)^2 \leq 0\end{aligned}$$

Το πεδίο τιμών της συνάρτησης των κερδών είναι μηδενικά (για Q = 1 φυσική μονάδα) ή αρνητικά (ζημία) για **οποιαδήποτε άλλη** ποσότητα $Q \geq 0$. Δηλαδή, το πεδίο τιμών της συνάρτησης των κερδών είναι το διάστημα τιμών των κερδών ΤΠ ≤ 0.

ii) Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η επιχείρηση εάν παράγει Q = 1 φυσική μονάδα, τότε θα έχει μηδενικά κέρδη (ΤΠ = 0), ειδάλλως για οποιαδήποτε άλλη ποσότητα παραγωγής $Q \geq 0$, θα έχει αρνητικά κέρδη (ζημία).