ΑΡΝΟΣ βιβλία με στόχο!

# Άλγεβρα
## Τετράδιο Σπουδής
### α τεύχος

**Προετοιμασία για Πανελλήνιες - Πανεπιστήμιο**

**β'** Λυκείου

ΑΡΝΟΣ Online Education

JOHN NAPIER
1550-1617 ΜΧ

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ & ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

**100%** επιτυχία **Μέθοδος ΑΡΝΟΣ**

**Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο για Διδασκαλία & Μελέτη**

## Τετράδιο Σπουδής - Γιατί;

Το Τετράδιο Σπουδής ΑΡΝΟΣ είναι βασισμένο στη Μέθοδο ΑΡΝΟΣ, ένα σύστημα μάθησης με Στόχους – Υλοποίηση – Πιστοποίηση.
Βοηθάει το μαθητή να οικοδομήσει τη σκέψη του βήμα-βήμα, απλά και κατανοητά. Είναι Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο βάσει του οποίου γίνεται η διδασκαλία στο online μάθημα με «φυσικό» τρόπο. Ο δάσκαλος γράφει και υπογραμμίζει παράλληλα με το μαθητή.

Το Τετράδιο Σπουδής αποτελείται από:

- Οπτικοποιημένη Θεωρία με ροή & συνέχεια
- Ασκήσεις για Διδασκαλία και Εξάσκηση
- Συνδυαστικές και Επαναληπτικές Ασκήσεις
- Θέματα Προσομοίωσης Εξετάσεων

### Πιστοποίηση Γνώσεων

Σε προγραμματισμένες ημερομηνίες διεξάγονται online ή/και δια ζώσης **Επαναληπτικά Τεστ Αξιολόγησης** στα οποία ο μαθητής πιστοποιεί και επαληθεύει τις γνώσεις του.

## Για τους Γονείς

**Πώς ο γονέας μπορεί να έχει εικόνα και εποπτεία στην πρόοδο του παιδιού του;**
Το Τετράδιο Σπουδής είναι σχεδιασμένο με τέτοιον τρόπο για τη βήμα – βήμα εξάσκηση του μαθητή, μεταβαίνοντας με ασφάλεια από τα πιο απλά στα πιο σύνθετα. Επίσης, είναι ένας φυσικός τρόπος ο Γονέας να ελέγχει την πρόοδο του παιδιού του.

### Πώς γίνεται η εποπτεία από το γονέα;

Σε κάθε μάθημα ελέγχει την ορθότητα των λύσεων, την κατανόηση και τη συμμετοχή του παιδιού στα μαθήματα.

### Διδασκαλία στον ΑΡΝΟ σημαίνει:

- Απεριόριστη μελέτη με video lessons
- Αυτομάθηση στο App Arnos Learn
- Coaching εξατομικευμένο
- Μοτίβα Μάθησης και Εξάσκησης
- Κάθε Απορία για εμάς είναι Πρόκληση!

# Μέθοδος ΑΡΝΟΣ

Η **Μέθοδος ΑΡΝΟΣ** οδηγεί κάθε μαθητή, ανεξαρτήτως γνώσεων ή επιπέδου, να μελετά από το επίπεδο όπου αισθάνεται άνετα, ώστε να διαμορφώσει γερές βάσεις για μάθηση.

**Live Διδασκαλία** Το online μάθημα γίνεται με φυσικό τρόπο, γιατί συνδυάζει την Τεχνολογία, το Πνεύμα, την Οργάνωση και την Εμπειρία.

**Τετράδιο Σπουδής** Είναι ο οδηγός για τη διδασκαλία του μαθήματος, την εξάσκηση του μαθητή και την πραγματοποίηση της online διδασκαλίας με Λόγο, Εικόνα και Παρατήρηση.

**Καθηγητής** Είναι ο σκηνοθέτης της διδακτικής πράξης, ο οποίος δρα σε ένα οργανωμένο εκπαιδευτικό οικοσύστημα με Στόχους, Μαθησιακό Πλάνο και Ευθύνη.

***«Μέθοδος ΑΡΝΟΣ... το κατασταλαγμα μιας πορείας 35 ετών με εκπαιδευτικές και εκδοτικές επιτυχίες, με ταξίδια πολιτισμού, συμμετοχή σε Διεθνείς Εκθέσεις και αποτυχίες... μα, κυρίως, η παρακαταθήκη του ζευγολάτη πατέρα - Αρνού.»***

Γιάννης Π. Κρόκος

ΑΡΝΟΣ Online Education

Σολωμού 29, Αθήνα 210 38 22 157 | 210 38 22 495

arnos.gr | info@arnos.gr

# Τετράδιο Σπουδής

1ο Τεύχος

# Άλγεβρα Β΄ Λυκείου

ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- Οδηγός για τη Διδασκαλία του Καθηγητή
- Οδηγός για τη Μελέτη του Μαθητή
- Διδασκαλία Online με φυσικό τρόπο
- Τόπος Εποπτείας Προόδου από το Γονέα
- Διδασκαλία με Πιστοποιημένους Καθηγητές ΑΡΝΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2022

ΑΡΝΟΣ
Online Education

# Άλγεβρα Β΄ Λυκείου – Λύσεις 1ου Τετραδίου Σπουδής



**Συντακτική Ομάδα Κέντρου ΑΡΝΟΣ**

**Διευθυντής σειράς:** Ιωάννης Π. Κρόκος

**Συνεργάστηκαν:** Σταύρος Παπαδόπουλος
Ιωάννης Μαρδάκης
Βασίλειος Τσιλιβής

**ΑΡΝΟΣ ONLINE EDUCATION**

ΑΡΝΟΣ Online Education

# Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

# Κεφάλαιο 1 : Συστήματα

## 1.1. Γραμμικά Συστήματα

### Λύσεις

**Άσκηση 1 – Λύση**

i. Το Σύστημα αποτελείται από δύο ευθείες για τις οποίες θα βρούμε τη σχετική τους θέση στο επίπεδο. Επιλύουμε το Σύστημα με τις τρείς μεθόδους ως εξής:

a) Με τη μέθοδο της αντικατάστασης $(ως\ προς\ τη\ μεταβλητη\ y)$ παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\left.\begin{matrix} 2x+y=8 \\ 3x-2y=1 \end{matrix}\right\} => \left.\begin{matrix} y=8-2x \\ 3x-2y=1 \end{matrix}\right\} => \left.\begin{matrix} y=8-2x \\ 3x-2(8-2x)=1 \end{matrix}\right\} =>$$

$$\left.\begin{matrix} y=8-2x \\ 3x-16+4x=1 \end{matrix}\right\} => \left.\begin{matrix} y=8-2x \\ 7x=17 \end{matrix}\right\} => \left.\begin{matrix} y=8-2x \\ x=\frac{17}{7} \end{matrix}\right\} => \left.\begin{matrix} y=8-2\cdot\frac{17}{7} \\ x=\frac{17}{7} \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} y=\frac{22}{7} \\ x=\frac{17}{7} \end{matrix}\right\}$$

Το Σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=\left(\frac{17}{7},\frac{22}{7}\right)$.

b) Πολλαπλασιάζοντας στο Σύστημα την 1η εξίσωση με τον συντελεστή 2, διατηρώντας ανέπαφη την 2η εξίσωση, δημιουργούμε ισοδύναμο Σύστημα με αντίθετους συντελεστές στην μεταβλητή $y$. Απαλοίφουμε την μεταβλητή $y$ προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις ως εξής:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=8 \\ 3x-2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (2)\cdot 2x+y=8 \\ 3x-2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+2y=16 \\ 3x-2y=1 \end{array}\right\}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$7x+0y=17 \quad \text{άρα} \quad x=\frac{17}{7}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή της μεταβλητής $x$ σε μία από τις δύο εξισώσεις και παίρνουμε την τιμή της μεταβλητής $y$. Οπότε έχουμε:

$$2\cdot\frac{17}{7}+y=8$$
$$\frac{34}{7}+y=8$$
$$34+7y=56$$
$$7y=22 \quad \text{άρα} \quad y=\frac{22}{7}$$

Το Σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=\left(\frac{17}{7},\frac{22}{7}\right)$.

c) Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος και την υπολογίζουμε ως εξής:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=2(-2)-3\cdot 1=-7\neq 0$$ {Το Σύστημα έχει μοναδική λύση}

Υπολογίζουμε τις $D_x, D_y$ και παίρνουμε:

$$D_x=\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=8\cdot(-2)-1\cdot 1=-17$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot 1-8\cdot 3=-22$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{17}{7},\frac{22}{7}\right)$

ii. Το Σύστημα αποτελείται από δύο ευθείες για τις οποίες θα βρούμε τη σχετική τους θέση στο επίπεδο. Επιλύουμε το Σύστημα με τις τρείς μεθόδους ως εξής:

a) Με τη μέθοδο της αντικατάστασης $(\omega\varsigma\; \pi\rho o\varsigma\; \tau\eta\; \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\eta\; x)$ παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\left.\begin{matrix} 6x = y+2 \\ x-2y=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 6(2y+3) = y+2 \\ x=2y+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 12y+18 = y+2 \\ x=2y+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 12y - y = -18+2 \\ x=2y+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 11y = -16 \\ x=2y+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = \frac{-16}{11} \\ x=2y+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} y = \frac{-16}{11} \\ x=2\cdot(\frac{-16}{11})+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = \frac{-16}{11} \\ x=\frac{1}{11} \end{matrix}\right\}$$

Το Σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y) = \left(\frac{1}{11}, \frac{-16}{11}\right)$.

b) Πολλαπλασιάζοντας στο Σύστημα την 1η εξίσωση με τον συντελεστή $(-2)$, διατηρώντας ανέπαφη την 2η εξίσωση, δημιουργούμε ισοδύναμο Σύστημα με αντίθετους συντελεστές στην μεταβλητή $y$. Απαλοίφουμε την μεταβλητή $y$ προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις ως εξής:

$$\left.\begin{matrix} 6x - y = 2 \\ x-2y=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (-2)\cdot 6x - y = 2 \\ x-2y=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -12x+2y = -4 \\ x-2y=3 \end{matrix}\right\}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$-11x + 0y = -1 \quad \text{άρα} \quad x = \frac{-1}{-11} = \frac{1}{11}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή της μεταβλητής $x$ σε μία από τις δύο εξισώσεις και παίρνουμε την τιμή της μεταβλητής $y$. Οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{11} - 2y = 3$$
$$1 - 22y = 33$$
$$22y = -32 \quad \text{άρα} \quad y = \frac{-32}{22} = \frac{-16}{11}$$

Το Σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y) = \left(\frac{1}{11}, \frac{-16}{11}\right)$.

c) Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος και την υπολογίζουμε ως εξής:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) = -11 \neq 0$$ {Το Σύστημα έχει μοναδική λύση}

Υπολογίζουμε τις $D_x, D_y$ και παίρνουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = -1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 16$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{1}{11}, \frac{-16}{11}\right)$.

**Άσκηση 2 – Λύση**

i. Το Σύστημα αποτελείται από δύο ευθείες για τις οποίες θα βρούμε τη σχετική τους θέση στο επίπεδο. Επιλύουμε το Σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών. Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών του Συστήματος ως εξής:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ \frac{1}{4} & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) + 4 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Υπολογίζουμε τις $D_x, D_y$και παίρνουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-4) = 4$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Το Σύστημα είναι αδύνατο διότι $D = 0, D_x \neq 0, D_y \neq 0$.

ii. Το Σύστημα αποτελείται από δύο ευθείες για τις οποίες θα βρούμε τη σχετική τους θέση στο επίπεδο. Επιλύουμε το Σύστημα αφού αρχικά απαλείψουμε τους παρανομαστές της 2ης εξίσωσης. Παίρνουμε το ισοδύναμο Σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} 4x - y = 2 \\ 4x - y = 2 \end{array}\right\}$$

Οι ευθείες που παριστά το Σύστημα συμπίπτουν οπότε θα είναι αόριστο με άπειρες λύσεις που θα δίνονται από το ζεύγος $(x, y) = (x, 4x - 2)$.

**Άσκηση 3 – Λύση**

i. Παρατηρούμε ότι το Σύστημα των δύο ευθειών έχει ήδη την μεταβλητή $y$ με αντίθετους συντελεστές. Οπότε προσθέτουμε απευθείας τις δύο εξισώσεις και παίρνουμε:

$$2x + 0y = 10 \quad \text{άρα} \quad 2x = 10\text{ , οπότε } \quad x = \frac{10}{2} = 5$$

Με αντικατάσταση της τιμής της μεταβλητής $x = 5$ σε μία από τις δύο εξισώσεις υπολογίζουμε και την τιμή της μεταβλητής $y$, ως εξής:

$$5 - y = 8 \quad \text{άρα} \quad y = -3$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x, y) = (5, -3)$.

ii. Για να λύσουμε γραφικά το Σύστημα πρέπει να χαράξουμε σε κοινό Σύστημα Συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών.
Το σημείο τομής τους (αν αυτό υπάρχει) θα είναι το ζεύγος $(x, y)$ που αντιστοιχεί στη μοναδική λύση του Συστήματος.
Δημιουργούμε πίνακα τιμών για κάθε μια ευθεία με τουλάχιστον δύο σταθερά σημεία ως εξής:

- Για την ευθεία $(\varepsilon_1)$: $x - y = 8$

| $x$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|
| $y$ | $-4$ | $-3$ |

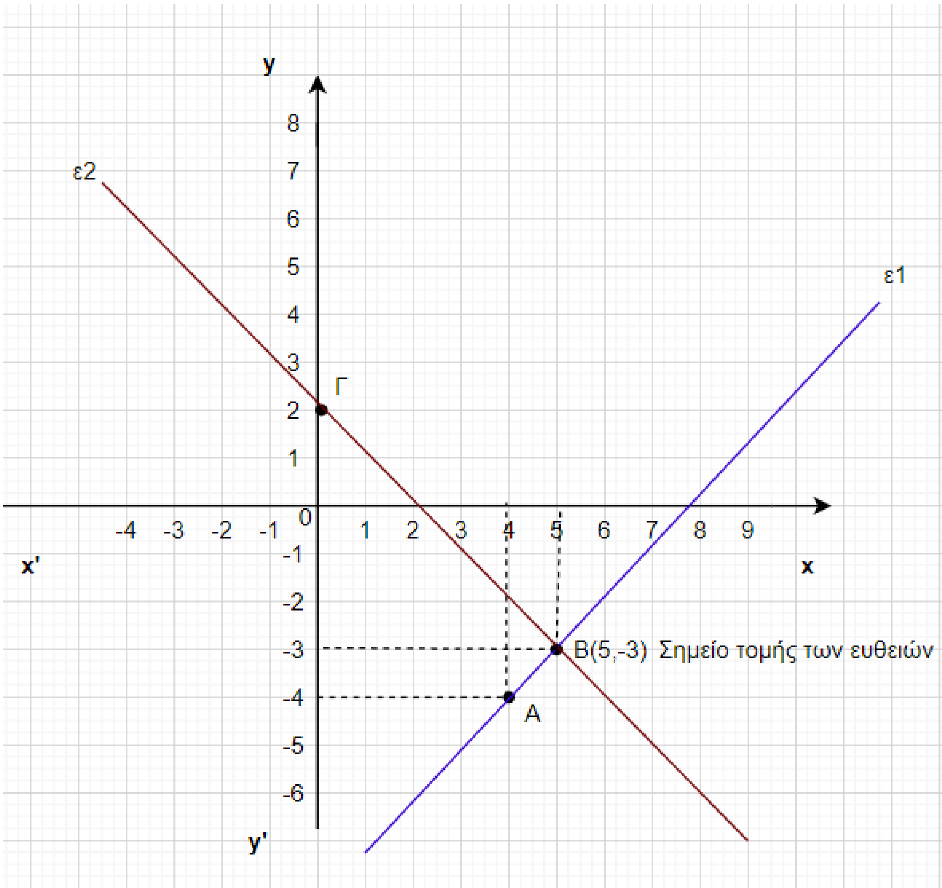
Τα σημεία $A(4, -4)$ $και$ $B(5, -3)$

- Για την ευθεία $(\varepsilon_2)$: $x + y = 2$

| $x$ | $0$ | $5$ |
|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $-3$ |

Τα σημεία $\Gamma(0,2)$ $και$ $B(5,-3)$

Η κοινή γραφική παράσταση έχει τη μορφή:




Η λύση του Συστήματος είναι το σημείο τομής των ευθειών, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (5, -3)$

**Άσκηση 4 – Λύση**

i. Θα λύσουμε το Σύστημα των δύο ευθειών με τη μέθοδο των οριζουσών. Σχηματίζουμε και υπολογίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών ως εξής:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 9 \neq 0$$ {Το Σύστημα έχει μοναδική λύση}

Υπολογίζουμε τις $D_x, D_y$ και παίρνουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 11 \cdot (-1) = 9$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 4 \cdot 11 - 1 \cdot (-1) = 45$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = (1,5)$.

ii. Για να λύσουμε γραφικά το Σύστημα πρέπει να χαράξουμε σε κοινό Σύστημα Συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών. Το σημείο τομής τους (αν αυτό υπάρχει) θα είναι το ζεύγος $(x, y)$ που αντιστοιχεί στη μοναδική λύση του Συστήματος. Δημιουργούμε πίνακα τιμών για κάθε μια ευθεία με τουλάχιστον δύο σταθερά σημεία ως εξής:

- Για την ευθεία $(\varepsilon_1)$: $4x - y = -1$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 1 | 5 |

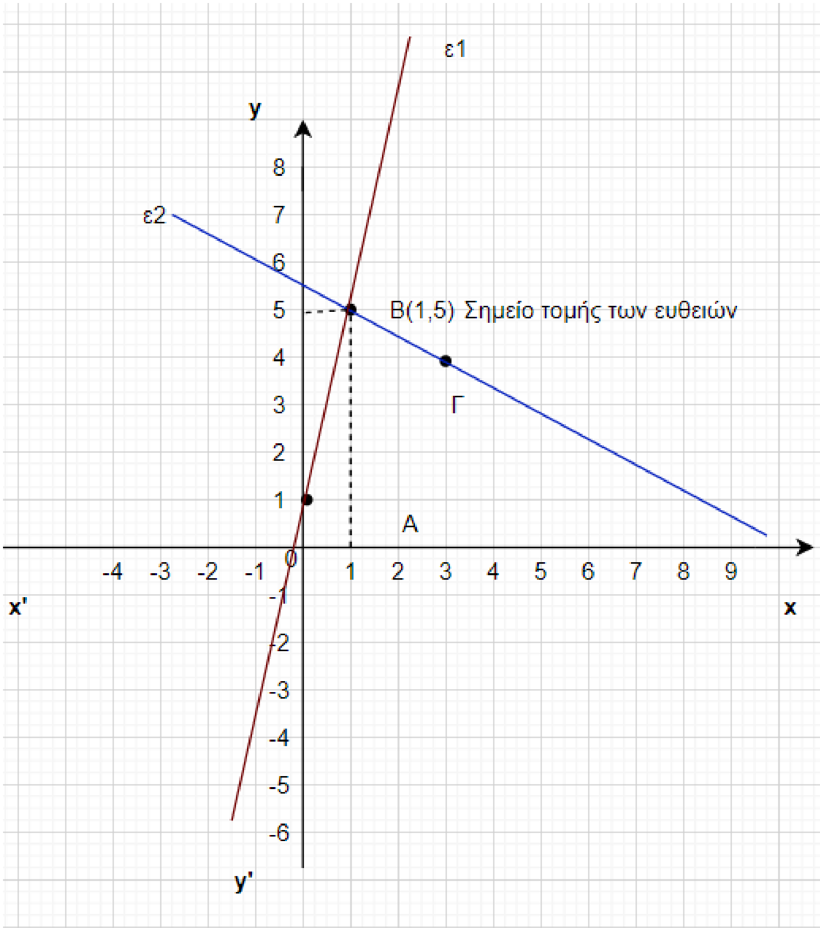
Τα σημεία $A(0,1)$ $και$ $B(1,5)$

- Για την ευθεία $(\varepsilon_2)$: $x + 2y = 11$

| $x$ | 1 | 3 |
|---|---|---|
| $y$ | 5 | 4 |

Τα σημεία $\Gamma(3,4)$ $και$ $B(1,5)$

Η κοινή γραφική παράσταση έχει τη μορφή:




Η λύση του Συστήματος είναι το σημείο τομής των ευθειών, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (1,5)$

**Άσκηση 5 – Λύση**

Απαλοίφουμε τους παρανομαστές της 1ης εξίσωσης και παίρνουμε το ισοδύναμο Σύστημα :

$$\left.\begin{array}{r}3x-2y=6\\ x+y=7\end{array}\right\}$$

i. Θα λύσουμε το Σύστημα των δύο ευθειών με τη μέθοδο των ορίζουσών. Σχηματίζουμε και υπολογίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών ως εξής:

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\cdot 1-1\cdot(-2)=5\neq 0$$ {Το Σύστημα έχει μοναδική λύση}

Υπολογίζουμε τις $D_x, D_y$ και παίρνουμε:

$$D_x=\begin{vmatrix}6 & -2\\ 7 & 1\end{vmatrix}=6\cdot 1-7\cdot(-2)=20$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & 7\end{vmatrix}=3\cdot 7-6\cdot 1=15$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=(4,3)$.

ii. Για να λύσουμε γραφικά το Σύστημα πρέπει να χαράξουμε σε κοινό Σύστημα Συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών. Το σημείο τομής τους (αν αυτό υπάρχει) θα είναι το ζεύγος $(x,y)$ που αντιστοιχεί στη μοναδική λύση του Συστήματος. Δημιουργούμε πίνακα τιμών για κάθε μια ευθεία με τουλάχιστον δύο σταθερά σημεία ως εξής:

- Για την ευθεία $(\varepsilon_1)$: $3x-2y=6$

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 4 |
| $y$ | $-3$ | 3 |

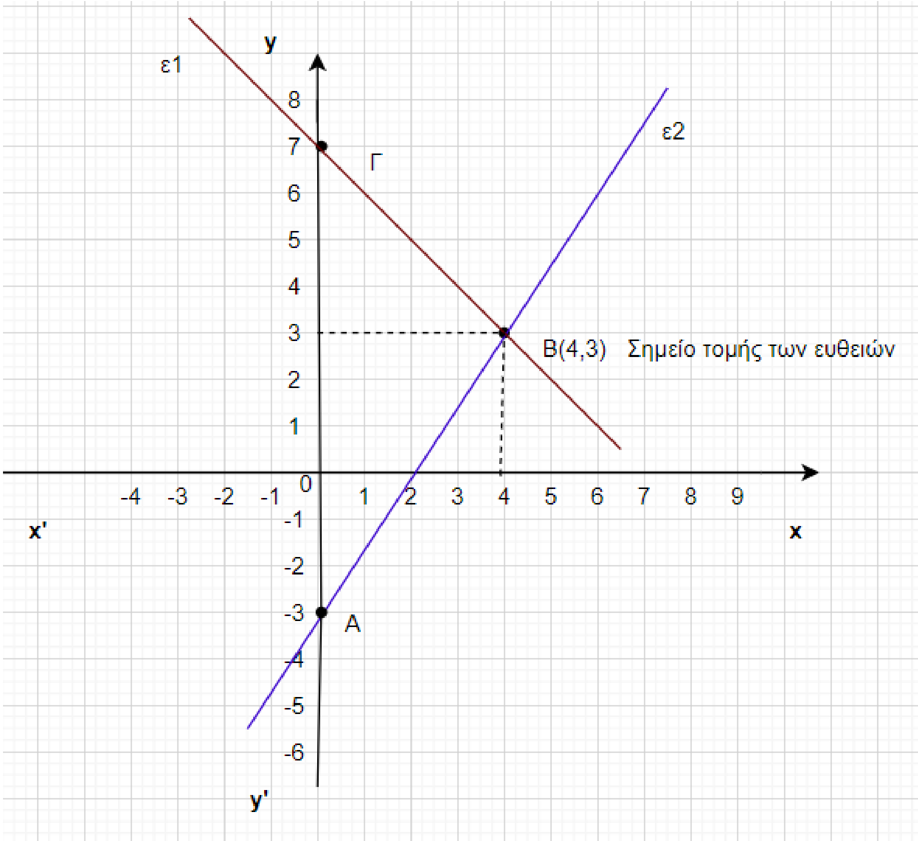
Τα σημεία $A(0,-3)$ *και* $B(4,3)$

- Για την ευθεία $(\varepsilon_2)$: $x+y=7$

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 4 |
| $y$ | 7 | 3 |

Τα σημεία $\Gamma(0,7)$ *και* $B(4,3)$

Η κοινή γραφική παράσταση έχει τη μορφή:




Η λύση του Συστήματος είναι το σημείο τομής των ευθειών, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (4{,}3)$

## Άσκηση 6 – Λύση

i. Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων και υπολογίζουμε ως εξής:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -9 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-6) - 2 \cdot (-9) = -18 + 18 = 0$$

Το Σύστημα θα είναι αόριστο ή αδύνατο. Υπολογίζουμε και την ορίζουσα $D_x$ και έχουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -6 \cdot 10 - 2 \cdot 5 = -60 - 10 = -70 \neq 0$$

Το Σύστημα είναι αδύνατο και οι εξισώσεις που το αποτελούν είναι ευθείες παράλληλες στο επίπεδο.

ii. Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων και υπολογίζουμε ως εξής:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = 6 \cdot 11 - 8 \cdot (-7) = 66 + 56 = 122 \neq 0$$

Το Σύστημα θα έχει μοναδική λύση.

iii. Παρατηρούμε ότι αν διαιρέσουμε την $2^η$ εξίσωση του συστήματος με τον αριθμό 3, παίρνουμε την $1^η$ εξίσωση. Οι ευθείες που αποτελούν το Σύστημα συμπίπτουν οπότε το Σύστημα είναι αόριστο.

**Άσκηση 7 – Λύση**

Έστω $x$ ο αριθμός των χαρτονομισμάτων με αξία 20€ και $y$ ο αριθμός των χαρτονομισμάτων με αξία 50€ αντίστοιχα. Από τα δεδομένα του προβλήματος σχηματίζουμε τις εξής σχέσεις:

- Το πλήθος των χαρτονομισμάτων είναι 10 άρα: $x + y = 10$
- Το συνολικό ποσό είναι 320€ άρα: $20x + 50y = 320$ ή $απλοποιώντας$ $2x + 5y = 32$

Λύνουμε το Σύστημα $\left.\begin{matrix} 2x + 5y = 32 \\ x + y = 10 \end{matrix}\right\}$ με τη μέθοδο των οριζουσών. Υπολογίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών και υπολογίζουμε ως εξής:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -3 \text{ \{Το Σύστημα έχει μοναδική λύση\}}$$

Υπολογίζουμε τις $D_x, D_y$ και παίρνουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} 32 & 5 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = 32 \cdot 1 - 5 \cdot 10 = -18$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 32 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 - 32 \cdot 1 = -12$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = (6,4)$.
Διαθέτει 6 χαρτονομίσματα αξίας 20€ και 4 χαρτονομίσματα αξίας 50€.

**Άσκηση 8 – Λύση**

Έστω $x$ ο όγκος σε $mL$ από το πρώτο βαρέλι και $y$ ο όγκος σε $mL$ από το δεύτερο. Το 1ο βαρέλι έχει περιεκτικότητα $14\%$ σε αλκοόλ, δηλαδή $14\ ml$ αλκοόλ ανα $100\ ml$. Οπότε στα $x\ mL$ θα έχουμε: $\frac{14x}{100} = 0{,}14x\ mL$ αλκοόλ.

Ομοίως από το 2ο βαρέλι το αλκοόλ θα είναι: $\frac{11{,}5y}{100} = 0{,}115y\ mL$ αλκοόλ.

Συνολικά θα έχουμε: $0{,}14x + 0{,}115y\ mL$ αλκοόλ στην τελική ανάμειξη.

Για να προκύψει διάλυμα με περιεκτικότητα 12% θα πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$$(x+y)12 = 100(0{,}14x + 0{,}115y\ )$$

$$12x + 12y = 14x + 11{,}5y$$

$$2x = 0{,}5y$$

$$4x = y$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει την αναλογία των όγκων της ανάμειξης.

**Άσκηση 9 – Λύση**

i. Θα επιλύσουμε το Σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών. Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών και υπολογίζουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -(\sqrt{7}-1) \\ \sqrt{7}+1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 + \left(\sqrt{7}-1\right) \cdot \left(\sqrt{7}+1\right) = 6 + (7-1) = 12$$

Υπολογίζουμε τις $D_x, D_y$και παίρνουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -(\sqrt{7}-1) \\ \sqrt{7}+1 & 1 \end{vmatrix} = D = 12$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ \sqrt{7}+1 & \sqrt{7}+1 \end{vmatrix} = 6 \cdot \left(\sqrt{7}+1\right) - 6 \cdot \left(\sqrt{7}+1\right) = 0$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = (1{,}0)$.

ii. Θα επιλύσουμε το Σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών. Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών και υπολογίζουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - \left(\sqrt{3}-1\right) \cdot \left(\sqrt{3}+1\right) = 2 - (3-1) = 0$$

Υπολογίζουμε τις $D_x, D_y$ και παίρνουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 & 1 \end{vmatrix} = D = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(\sqrt{3}+1\right) - 2 \cdot \left(\sqrt{3}+1\right) = 0$$

Το Σύστημα είναι αόριστο αφού ισχύει: $D = D_x = D_y = 0$.

## Άσκηση 10 – Λύση

**Αποδεικνύουμε το ευθύ:**

Έστω ότι το Σύστημα έχει μοναδική λύση. Τότε θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι διάφορη του μηδέν. Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών και υπολογίζουμε:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha} \cdot \beta - \frac{1}{\beta} \cdot \alpha = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta}$$

Οπότε θα πρέπει να ισχύει $\boldsymbol{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta} \neq 0}$ δηλαδή $\boldsymbol{\beta^2 - \alpha^2 \neq 0}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\beta^2 - \alpha^2 \neq 0$$

$$\beta^2 \neq \alpha^2$$

$$\sqrt{\beta^2} \neq \sqrt{\alpha^2}$$

$$|\beta| \neq |\alpha|$$

**Αποδεικνύουμε το αντίστροφο:**

Έστω ότι ισχύει $|\beta| \neq |\alpha|$ τότε θα ισχύει και $\beta^2 \neq \alpha^2$. Από τον υπολογισμό της ορίζουσας καταλήγουμε $D = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha} \cdot \beta - \frac{1}{\beta} \cdot \alpha = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta}$ οπότε $D \neq 0$ και το Σύστημα έχει μοναδική λύση.

Για να βρούμε το κοινό σημείο υπολογίζουμε τις $D_x, D_y$ και παίρνουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\beta} \\ 1 & \beta \end{vmatrix} = 1 \cdot \beta - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta^2 - 1}{\beta}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha} \cdot 1 - \alpha = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha}$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος θα είναι:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{\frac{\beta^2 - 1}{\beta}}{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta}}, \frac{\frac{1 - \alpha^2}{\alpha}}{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta}}\right) = \left(\frac{\alpha(\beta^2 - 1)}{\beta^2 - \alpha^2}, \frac{\beta(1 - \alpha^2)}{\beta^2 - \alpha^2}\right)$$

**Άσκηση 11 – Λύση**

Σε κάθε παραμετρικό Σύστημα σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών και εξετάζουμε για ποιες τιμές της παραμέτρου αυτή μηδενίζεται.
Για τις τιμές αυτές εξετάζουμε και τις τιμές που παίρνουν οι ορίζουσες $D_x$ και $D_y$ και συμπεραίνουμε αν το Σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο. Για τις υπόλοιπες τιμές της παραμέτρου για τις οποίες ισχύει $D \neq 0$, θα έχουμε μοναδική (παραμετρική) λύση την οποιά και θα υπολογίζουμε.
Για το δεδομένο Σύστημα έχουμε:

- $D = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha \cdot 1 - 1 = \alpha - 1$
  Η ορίζουσα των συντελεστών μηδενίζεται όταν $\alpha = 1$.

- Υπολογίζουμε τις παραμετρικές τιμές των οριζουσών $D_x$ $και$ $D_y$
  $D_x = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \alpha \cdot 1 - 1 \cdot 2 = \alpha - 2$

  $D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \alpha \cdot 2 - \alpha \cdot 1 = 2\alpha - \alpha = \alpha$

**1η περίπτωση:** Αν $\alpha = 1$ τότε $D = 0, D_x = -1$ $και$ $D_y = 1$ οπότε το Σύστημα είναι αδύνατο.

**2η περίπτωση:** Αν $\alpha \neq 1$ τότε $D \neq 0$ και το Σύστημα έχει μοναδική λύση που θα δίνεται από $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = (\frac{\alpha-2}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1})$ για κάθε α $\in R - \{1\}$.

## Άσκηση 12 – Λύση

Θυμίζουμε από την Γεωμετρία Α' Λυκείου ότι τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου και προς αυτόν, είναι μεταξύ τους ίσα. Οπότε ισχύουν οι σχέσεις:

- $A\Gamma + y = AB + x$ δηλαδή $\boldsymbol{\beta + y = \gamma + x}$
- $B\Gamma = x + y$ δηλαδή $\boldsymbol{x + y = \alpha}$

Θεωρώντας γνωστές τις πλευρές του Τριγώνου $AB\Gamma$ δημιουργούμε, με αγνώστους τα τμήματα $x$ $και$ $y$, το Σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x - y = \beta - \gamma \\ x + y = \alpha \end{aligned}\right\}$$

Θα επιλέξουμε να προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις αφού στη μεταβλητή $y$ υπάρχουν ήδη αντίθετοι συντελεστές. Παίρνουμε την εξίσωση ως προς την μεταβλητή $x$:

$$2x + 0y = \alpha + \beta - \gamma \ \text{ άρα: } \quad x = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$$

Υπολογίζουμε και την τιμή της μεταβλητής $y$ από την 2η εξίσωση του συστήματος αντικαθιστώντας $x = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$ και παίρνουμε:

$$y = \alpha - \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} = \frac{2\alpha - \alpha - \beta + \gamma}{2} = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}$$

Η μοναδική λύση του Συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = \left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}, \frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\right)$.

**Άσκηση 13 – Λύση**

a) Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών και υπολογίζουμε την παραμετρική τιμή της:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 8 \\ \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\cdot(\lambda+3) - 8\lambda = \lambda^2 + 4\lambda + 3 - 8\lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

Λύνουμε την εξίσωση $\boldsymbol{D = 0}$:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \text{άρα} \quad (\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

Οπότε $\lambda = 1$ ή $\lambda = 3$.

Υπολογίζουμε τις παραμετρικές τιμές των οριζουσών $D_x$ $και$ $D_y$:

$$D_x = \begin{vmatrix} 4\lambda & 8 \\ 3\lambda-1 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 4\lambda\cdot(\lambda+3) - 8\cdot(3\lambda-1) = 4\lambda^2 + 12\lambda - 24\lambda + 8 =$$

$$= 4\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 4(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 4\lambda \\ \lambda & 3\lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\cdot(3\lambda-1) - 4\lambda^2 = 3\lambda^2 - \lambda + 3\lambda - 1 - 4\lambda^2 =$$

$$= -\lambda^2 + 2\lambda - 1 = -(\lambda-1)^2$$

**1η περίπτωση:** Αν $\lambda = 1$ τότε $D = 0, D_x = 0$ $και$ $D_y = 0$ οπότε το Σύστημα είναι αόριστο και λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 8y = 4 \\ x + 4y = 2 \end{aligned}\right\}$$

το οποίο αποτελείται από συμπίπτουσες ευθείες και ειδικά από την ευθεία $x + 4y = 2$.

Οι γενικές του λύσεις θα δίνονται από το ζεύγος $(x, y) = \left(x, \frac{2-x}{4}\right)$.

**2η περίπτωση:** Αν $\lambda = 3$ τότε $D = 0, D_x = 8$ $και$ $D_y = -4$ οπότε το Σύστημα είναι αδύνατο.

**3η περίπτωση:** Για κάθε $\lambda \neq 1$ $και$ $\lambda \neq 3$ το Σύστημα θα έχει μοναδική λύση που θα δίνεται από:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{4(\lambda-2)}{\lambda-3}, \frac{-(\lambda-1)}{\lambda-3}\right) \text{ για κάθε } \lambda \in R - \{1,3\}.$$

b) Σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών και υπολογίζουμε την παραμετρική τιμή της:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & \lambda \\ 2\lambda & 18 \end{vmatrix} = 4 \cdot 18 - 2\lambda \cdot \lambda = 72 - 2\lambda^2 = 2(6-\lambda)(6+\lambda)$$

Λύνουμε την εξίσωση $\boldsymbol{D = 0}$:

$$2(6-\lambda)(6+\lambda) = 0 \quad \text{άρα } \lambda = 6 \text{ ή } \lambda = -6$$

Υπολογίζουμε τις παραμετρικές τιμές των οριζουσών $D_x$ $και$ $D_y$:

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & \lambda \\ -27 & 18 \end{vmatrix} = 9 \cdot 18 + 27\lambda = 27(\lambda + 6)$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 2\lambda & -27 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-27) - 18\lambda = -18(\lambda + 6)$$

**1η περίπτωση:** Αν $\lambda = -6$ τότε $D = 0, D_x = 0 \; και \; D_y = 0$ οπότε το Σύστημα είναι αόριστο και λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\left.\begin{aligned} 4x - 6y = 9 \\ -12x + 18y = -27 \end{aligned}\right\}$$

το οποίο αποτελείται από συμπίπτουσες ευθείες και ειδικά από την ευθεία $4x - 6y = 9$.

Οι γενικές του λύσεις θα δίνονται από το ζεύγος $(x, y) = \left(x, \frac{4x-9}{6}\right)$.

**2η περίπτωση:** Αν $\lambda = 6$ τότε $D = 0$, $D_x = 324 \; και \; D_y = -216$ οπότε το Σύστημα είναι αδύνατο.

**3η περίπτωση:** Για κάθε $\lambda \neq 6 \; και \; \lambda \neq -6$ το Σύστημα θα έχει μοναδική λύση που θα δίνεται από τους τύπους:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{27}{2(6-\lambda)}, \frac{-9}{6-\lambda}\right) \text{ για κάθε } \lambda \in R - \{-6, 6\}$$

**Άσκηση 14 – Λύση**

Αρχικά θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες $D_x$ $και$ $D_y$ με τις παραμετρικές τιμές τους:

- $D = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 \cdot \alpha - \alpha = \alpha^3 - \alpha = \alpha(\alpha-1)(\alpha+1)$

- $D_x = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} = 1 \cdot \alpha - \alpha^2 = \alpha(1-\alpha)$

- $D_y = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 \cdot \alpha - 1 = \alpha^3 - 1 = (\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)$

α) Για να έχει το Σύστημα μοναδική λύση πρέπει να ισχύει $D \neq 0$ ή $\alpha(\alpha-1)(\alpha+1) \neq 0$ δηλαδή για τις τιμές: $\alpha \neq 0$ $και$ $\alpha \neq 1$ $και$ $\alpha \neq -1$

β) Θα πρέπει να βρούμε τις παραμετρικές λύσεις του Συστήματος για $\alpha \neq 0$ $και$ $\alpha \neq 1$ $και$

$\alpha \neq -1$ :

$$x_o = \frac{D_x}{D} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)} = \frac{-1}{\alpha+1}$$

$$y_o = \frac{D_y}{D} = \frac{(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)} = \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)}$$

Για την λύση αυτή πρέπει να ισχύει:

$2x_o + 3y_o = 3$

$\frac{-2}{\alpha+1} + \frac{3(\alpha^2+\alpha+1)}{\alpha(\alpha+1)} = 3$

$\frac{-2\alpha}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{3\alpha^2+3\alpha+3}{\alpha(\alpha+1)} = 3$

$\frac{3\alpha^2+\alpha+3}{\alpha(\alpha+1)} = 3$

$3\alpha^2 + \alpha + 3 = 3\alpha^2 + 3\alpha$

$2\alpha = 3$ άρα $\alpha = \frac{3}{2}$

γ) Για να είναι το Σύστημα αδύνατο θα πρέπει να ισχύει $D = 0$ και τουλάχιστον μία από τις $D_x$ $και$ $D_y$ να είναι διάφορη του μηδέν. Οπότε το Σύστημα είναι αδύνατο για $\alpha = 0$ ή $\alpha = -1$ διότι έχουμε:

- Για $\alpha = 0$: $D = 0, D_x = 0$ και $D_y = -1$
- Για $\alpha = -1$: $D = 0, D_x = -2$ και $D_y = -2$

***Για $\boldsymbol{\alpha = 1}$ το Σύστημα είναι αόριστο γιατί ισχύει: $\boldsymbol{D = 0, D_x = 0}$ και $\boldsymbol{D_y = 0}$**

**Άσκηση 15 – Λύση**

Αρχικά θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες $D_x$ $και$ $D_y$ με τις παραμετρικές τιμές τους.

- $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & -\beta^2 \end{vmatrix} = -\beta^2\alpha - \alpha^2\beta = -\alpha\beta(\beta + \alpha) \neq 0$ αφού οι αριθμοί $\alpha$ $και$ $\beta$ είναι

  ομόσημοι

- $D_x = \begin{vmatrix} 2\alpha & \beta \\ \alpha^2 + \beta^2 & -\beta^2 \end{vmatrix} = -2\alpha\beta^2 - \beta(\alpha^2 + \beta^2) = -2\alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 - \beta^3 =$

  $-\beta(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = -\beta(\alpha + \beta)^2$

- $D_y = \begin{vmatrix} \alpha & 2\alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 + \beta^2 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha^3 = \alpha(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha^2) = \alpha(\beta^2 - \alpha^2) =$

  $\alpha(\beta - \alpha)(\alpha + \beta)$

Θα βρούμε τις παραμετρικές λύσεις του Συστήματος από τους τύπους:

$$x_o = \frac{D_x}{D} = \frac{-\beta(\alpha + \beta)^2}{-\alpha\beta(\beta + \alpha)} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$$

$$y_o = \frac{D_y}{D} = \frac{\alpha(\beta - \alpha)(\alpha + \beta)}{-\alpha\beta(\beta + \alpha)} = \frac{\alpha - \beta}{\beta}$$

Για τις λύσεις αυτές πρέπει να ισχύει:

$x_o + y_o \geq 2$

$\frac{\alpha+\beta}{\alpha} + \frac{\alpha-\beta}{\beta} \geq 2$ {Πολλαπλασιάζουμε τους όρους με $\alpha\beta > 0$}

$\alpha\beta\frac{(\alpha+\beta)}{\alpha} + \alpha\beta\frac{(\alpha-\beta)}{\beta} \geq 2\alpha\beta$

$\beta(\alpha+\beta) + \alpha(\alpha-\beta) - 2\alpha\beta \geq 0$

$\alpha\beta + \beta^2 - \alpha\beta + \alpha^2 - 2\alpha\beta \geq 0$

$\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta \geq 0$

$(\alpha-\beta)^2 \geq 0$

η οποία ισχύει για κάθε $\alpha, \beta \in R$.

**Άσκηση 16 – Λύση**

Αρχικά θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 3\lambda-2 & -(\lambda-2) \end{vmatrix} = -(\lambda+1)\cdot(\lambda-2) + 3\lambda - 2 = -\lambda^2 + \lambda + 2 + 3\lambda - 2 = 4\lambda - \lambda^2 =$$

$$= \lambda(4-\lambda)$$

Η ορίζουσα των συντελεστών μηδενίζεται για $\lambda = 0$ ή $\lambda = 4$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda = 0$ το Σύστημα γίνεται: $\left.\begin{matrix} x - y = -1 \\ -2x + 2y = 6 \end{matrix}\right\}$

  Υπολογίζουμε την ορίζουσα $D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4 \neq 0$ και το Σύστημα είναι αδύνατο.

- Αν $\lambda = 4$ το Σύστημα γίνεται: $\left.\begin{matrix} 5x - y = 3 \\ 10x - 2y = 6 \end{matrix}\right\}$ και παρατηρούμε ότι η $2^η$ εξίσωση προκύπτει από την $1^η$ αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό 2. Οπότε το Σύστημα είναι αόριστο αφού οι δύο εξισώσεις συμπίπτουν.

  Για την τιμή $\lambda = 4$ Το $(\Sigma_2)$ γίνεται: $\left.\begin{matrix} 3x + y = 7 \\ 6x + 2y = 8 \end{matrix}\right\}$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 0$$

Υπολογίζουμε την τιμή της ορίζουσας $D_x$:

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 8 = 6 \neq 0$$

Οπότε όταν το $(\Sigma_1)$ είναι αόριστο (για την τιμή της παραμέτρου $\lambda = 4$) το $(\Sigma_2)$ είναι αδύνατο.

**Άσκηση 17 – Λύση**

i.
$$\left.\begin{array}{ll} [E_1] & 2x - y + 3z = -9 \\ [E_2] & x + 3y - z = 10 \\ [E_3] & 3x + y - z = 8 \end{array}\right\}$$

Με κατάλληλες γραμμοπράξεις θα απαλείψουμε την μεταβλητή $z$ καταλήγοντας σε ένα Σύστημα $2x2$ με μεταβλητές $x\ και\ y$.

- $E_1 + 3 \cdot E_2 \Rightarrow \quad 5x + 8y = 21\ (1)$
- $E_3 - E_2 \Rightarrow \quad 2x - 2y = -2\ (2)$

Δημιουργούμε το $2x2$ Σύστημα με μεταβλητές $x\ και\ y$:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 8y = 21 \\ 2x - 2y = -2 \end{array}\right\}$$

το οποίο θα λύσουμε με τη μέθοδο των οριζουσών. Αρχικά σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - 8 \cdot 2 = -26 \neq 0$$

Υπολογίζουμε τις τιμές των οριζουσών $D_x\ και\ D_y$:

$$D_x = \begin{vmatrix} 21 & 8 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 21 \cdot (-2) + 8 \cdot 2 = -26$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 21 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - 2 \cdot 21 = -52$$

Το Σύστημα θα έχει μοναδική λύση που θα δίνεται από:

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{-26}{-26},\frac{-52}{-26}\right)=(1,2).$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές στην $E_1$ και λαμβάνουμε τα ακόλουθα:

$2x-y+3z=-9$

$2\cdot 1-2+3z=-9$

$3z=-9$ άρα $z=\frac{-9}{3}=-3$

Η τριάδα της λύσης είναι: $(x,y,z)=(1,2,-3)$

ii. $$\left.\begin{array}{lr} [E_1] & 5x+5y-z=0 \\ [E_2] & 10x+5y+2z=0 \\ [E_3] & 5x+15y-9z=0 \end{array}\right\}$$

Με κατάλληλες γραμμοπράξεις θα απαλείψουμε την μεταβλητή $z$ καταλήγοντας σε ένα Σύστημα $2x2$ με μεταβλητές $x$ $και$ $y$.

- $2\cdot E_1+E_2 \Rightarrow 20x+15y=0$ (1)
- $9\cdot E_1-E_3 \Rightarrow 40x+30y=0$ (2)

Δημιουργούμε το $2x2$ Σύστημα με μεταβλητές $x$ $και$ $y$:

$$\left.\begin{array}{r} 20x+15y=0 \\ 40x+30y=0 \end{array}\right\}$$

το οποίο θα λύσουμε με τη μέθοδο των οριζουσών. Αρχικά σχηματίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών:

$$D=\begin{vmatrix}20 & 15\\40 & 30\end{vmatrix}=20\cdot 30-15\cdot 40=0$$

Υπολογίζουμε τις τιμές των οριζουσών $D_x$ $και$ $D_y$:

$$D_x=\begin{vmatrix}0 & 15\\0 & 30\end{vmatrix}=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix}20 & 0\\40 & 0\end{vmatrix}=0$$

Το Σύστημα είναι αόριστο και οι γενικές λύσεις θα προκύψουν από:

$$5x + 5y - z = 0 \; και \; 20x + 15y = 0$$

- $20x + 15y = 0 \; τότε \; y = \frac{-4}{3}x$
- Άρα $5x + 5y - z = 0 \; τότε \; z = 5x + 5\left(\frac{-4}{3}x\right) = \frac{-5}{3}x$

Η γενική λύση θα είναι: $(x, y, z) = (x, \frac{-4}{3}x, \frac{-5}{3}x)$

**Άσκηση 18 – Λύση**

i. Αρχικά θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες $D_x \; και \; D_y$ με τις παραμετρικές τιμές τους.

- $D = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = (1-a)(1+a)$

- $D_x = \begin{vmatrix} 1-a & -1 \\ a-\alpha^2 & -a \end{vmatrix} = (1-\alpha)(-\alpha) + a - \alpha^2 = \alpha^2 - \alpha + a - \alpha^2 = 0$

- $D_y = \begin{vmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1 & a-\alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha - \alpha^2) - (1-\alpha) = \alpha^2 - \alpha^3 - 1 + \alpha =$

  $= \alpha^2(1-\alpha) - (1-\alpha) = (1-\alpha)(\alpha^2 - 1) = -(\alpha-1)^2(\alpha+1)$

Λύνουμε την εξίσωση $D = 0$ και παίρνουμε:

$$(1-a)(1+a) = 0 \quad άρα \quad \boldsymbol{\alpha = -1} \text{ ή } \boldsymbol{\alpha = 1}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha = -1$ έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ οπότε το Σύστημα είναι αόριστο και παίρνει τη μορφή:

  $$\left.\begin{matrix} -x - y = 2 \\ x + y = -2 \end{matrix}\right\}$$

  Το Σύστημα αποτελείται από ευθείες που συμπίπτουν και ειδικά την ευθεία $x + y = -2$.
  Η γενική λύση του Συστήματος θα είναι:

  $$(x, y) = (x, -2 - x) \;\; για \; κάθε \; x \in R$$

- Αν $\alpha = 1$ έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ οπότε το είναι αόριστο και το Σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\left.\begin{matrix} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{matrix}\right\}$$

Το Σύστημα αποτελείται από ευθείες που συμπίπτουν και ειδικά την ευθεία $x = y$. Η γενική λύση του Συστήματος θα είναι:$(x, y) = (x, x)\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in R$

- Για $\alpha \neq 1\ \kappa\alpha\iota\ \alpha \neq -1$ έχουμε $D \neq 0$ και το Σύστημα έχει μοναδική λύση που δίνεται από τους τύπους:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = (0, \alpha - 1)$$

ii. Αρχικά θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες $D_x\ \kappa\alpha\iota\ D_y$ με τις παραμετρικές τιμές τους.

$$\bullet D = \begin{vmatrix} (\alpha-1)^2 & (\alpha^2-1) \\ 2\alpha-1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+1) - (\alpha^2-1) \cdot (2\alpha-1) =$$

$$= (\alpha-1)(\alpha+1)[(\alpha-1) - (2\alpha-1)] = -\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)$$

$$\bullet D_x = \begin{vmatrix} (\alpha+1)^2 & (\alpha^2-1) \\ \alpha^2-1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = (\alpha+1)^2 \cdot (\alpha+1) - (\alpha^2-1) \cdot (\alpha^2-1) =$$

$$= (\alpha+1)^2[(\alpha+1) - (\alpha-1)^2] = (\alpha+1)^2[\alpha+1-\alpha^2+2\alpha-1] =$$

$$= (\alpha+1)^2(-\alpha^2+3\alpha) = \alpha(\alpha+1)^2(3-\alpha)$$

$$\bullet D_y = \begin{vmatrix} (\alpha-1)^2 & (\alpha+1)^2 \\ 2\alpha-1 & \alpha^2-1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2(\alpha^2-1) - (\alpha+1)^2(2\alpha-1) =$$

$$= (\alpha+1)[(\alpha-1)^3 - (\alpha+1)(2\alpha-1)] =$$

$$= (\alpha+1)[\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 - 2\alpha^2 + \alpha - 2\alpha + 1] =$$

$$= (\alpha+1)(\alpha^3 - 5\alpha^2 + 2\alpha) = \alpha(\alpha+1)(\alpha^2 - 5\alpha + 2)$$

Λύνουμε την εξίσωση $D = 0$ και παίρνουμε:

$$-\alpha(\alpha-1)(\alpha+1) = 0 \quad \text{άρα} \quad \boldsymbol{\alpha = -1} \text{ ή } \boldsymbol{\alpha = 1} \text{ ή } \boldsymbol{\alpha = 0}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha = -1$ έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ και το Σύστημα είναι αόριστο και παίρνει τη μορφή:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 0y = 0 \\ -3x + 0y = 0 \end{array}\right\}$$

  Το Σύστημα αποτελείται από ευθείες που συμπίπτουν και ειδικά την ευθεία $x = 0$.
  Η γενική λύση του Συστήματος θα είναι: $(x, y) = (0, y)\ για\ κάθε\ y \in R$

- Αν $\alpha = 1$ έχουμε $D = 0, D_x = 8, D_y = -4$ οπότε το Σύστημα είναι αδύνατο.

- Αν $\alpha = 0$ έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ και το Σύστημα είναι αόριστο και παίρνει τη μορφή:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \end{array}\right\}$$

  Το Σύστημα αποτελείται από ευθείες που συμπίπτουν και ειδικά την ευθεία $x - y = 1$.
  Η γενική λύση του Συστήματος θα είναι:

$$(x, y) = (x, x - 1)\ για\ κάθε\ x \in R$$

- Αν $\alpha \neq 1\ και\ \alpha \neq -1$ τοτε $D \neq 0$ τότε το Σύστημα έχει μοναδική λύση που θα δίνεται από τους τύπους:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{\alpha(\alpha+1)^2(3-\alpha)}{-\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)}, \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha^2-5\alpha+2)}{-\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)}\right)$$

$$= \left(\frac{(\alpha-3)(\alpha+1)}{\alpha-1}, \frac{-(\alpha^2-5\alpha+2)}{\alpha-1}\right).$$

**Άσκηση 19 – Λύση**

Αρχικά θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες $D_x$ $και$ $D_y$ με τις παραμετρικές τιμές τους.

- $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta = \alpha\beta(\beta - \alpha)$
- $D_x = \begin{vmatrix} \alpha^2\beta & \beta \\ \alpha\beta^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = \alpha^2\beta^3 - \alpha\beta^3 = \alpha\beta^3(\alpha - 1)$
- $D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2\beta \\ \alpha^2 & \alpha\beta^2 \end{vmatrix} = \alpha^2\beta^2 - \alpha^4\beta = \alpha^2\beta(\beta - \alpha^2)$

Λύνουμε την εξίσωση $D = 0$ και παίρνουμε:

$$\alpha\beta(\beta - \alpha) = 0 \text{ άρα } \boldsymbol{\alpha = \beta} \text{ ή } \boldsymbol{\alpha = 0} \text{ ή } \boldsymbol{\beta = 0}$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

**1η περίπτωση:**
Αν $\alpha = 0$ $και$ $\beta = 0$ έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ οπότε το Σύστημα είναι αόριστο και επαληθεύται για κάθε ζεύγος $(x, y)$ $με$ $x, y \in R$

**2η περίπτωση:**
Αν $\alpha = 0$ $και$ $\beta \neq 0$ έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ οπότε το Σύστημα θα έχει τη μορφή $\left.\begin{matrix} \beta y = 0 \\ \beta^2 y = 0 \end{matrix}\right\}$
άρα θα είναι αόριστο και επαληθεύται για κάθε ζεύγος $(x, 0)$ $για$ $κάθε$ $x \in R$

**3η περίπτωση:**
Αν $\alpha \neq 0$ $και$ $\beta = 0$ έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ οπότε το Σύστημα θα έχει τη μορφή $\left.\begin{matrix} \alpha x = 0 \\ \alpha^2 x = 0 \end{matrix}\right\}$
άρα θα είναι αόριστο και επαληθεύται για κάθε ζεύγος $(0, y)$ $για$ $κάθε$ $y \in R$

**4η περίπτωση:**
Αν $\alpha = \beta \neq 0$ έχουμε $D = 0, D_x = \alpha^4(\alpha - 1), D_y = \alpha^3(\alpha - \alpha^2) = \alpha^4(1 - \alpha)$
Στην περίπτωση αυτή πρέπει να εξετάσουμε την υποπερίπτωση $\alpha = \beta = 1$ $και$ $την$ $\alpha = \beta \neq 1$

- Αν $\alpha = \beta = 1$ τότε καταλήγουμε σε $D = 0, \ \ D_x = 0, \ \ D_y = 0$ και έχουμε το ισοδύναμο Σύστημα $\left.\begin{matrix} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\}$ δηλαδή στην ευθεία $\boldsymbol{x + y = 1}$.

  Ειναι αόριστο και οι γενικές λύσεις του Συστήματος θα δίνονται από το ζεύγος:

  $$(x, y) = (x, 1 - x) \ για \ κάθε \ \ x \ \in R.$$

- Αν $\alpha = \beta \neq 1$ τότε καταλήγουμε σε $D = 0, D_x \neq 0, D_y \neq 0$ και το Σύστημα είναι αδύνατο.

**5η περίπτωση:**
Αν $\alpha \neq \beta \neq 0$ έχουμε $D \neq 0$ τότε το Σύστημα έχειμοναδική λύση που δίνεται από τους τύπους:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{\alpha\beta^3(\alpha - 1)}{\alpha\beta(\beta - \alpha)}, \frac{\alpha^2\beta(\beta - \alpha^2)}{\alpha\beta(\beta - \alpha)}\right) = \left(\frac{\beta^2(\alpha - 1)}{\beta - \alpha}, \frac{\alpha(\beta - \alpha^2)}{\alpha(\beta - \alpha)}\right)$$

**Άσκηση 20 – Λύση**

Αρχικά θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες $D_x \ και \ D_y$ με τις παραμετρικές τιμές τους.

- $D = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda + 2 - \lambda = 2 \neq 0$ {Το Σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε λ$\in R$}
- $D_x = \begin{vmatrix} 3\lambda & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\lambda + 1$
- $D_y = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 3\lambda \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} = -\lambda - 2 - 3\lambda^2 = -(3\lambda^2 + \lambda + 2)$

Το Σύστημα θα έχει μοναδική λύση που θα δίνεται από:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = (\frac{3\lambda + 1}{2}, \frac{-(3\lambda^2 + \lambda + 2)}{2})$$

Για τη μοναδική λύση του Συστήματος θα ισχύει:

$x_o = \frac{D_x}{D} = \frac{3\lambda + 1}{2}$

$y_o = \frac{D_y}{D} = \frac{-(3\lambda^2 + \lambda + 2)}{2}$

Για την παράμετρο $\lambda$ ισχύει: $1 < \lambda < 2$. Οπότε με τις ιδιότητες ανισώσεων παίρνουμε:

- $1 < \lambda < 2$

  $3 \cdot 1 < 3\lambda < 3 \cdot 2$

  $3 + 1 < 3\lambda + 1 < 6 + 1$

  $\frac{4}{2} < \frac{3\lambda+1}{2} < \frac{7}{2}$

  $2 < x_o < \frac{7}{2}$

- Το τριώνυμο $-(3\lambda^2 + \lambda + 2)$ έχει Διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4(-3)(-2) = -23 < 0$. Το πρόσημο του θα είναι αρνητικό για κάθε $\lambda \in (1,2)$ εφόσον ικανοποιούνται οι συνθήκες: $\Delta < 0 \; \kappa\alpha\iota \; \alpha < 0$.
  Οπότε καταλήγουμε στο εξής:

$$-(3\lambda^2 + \lambda + 2) < 0 \quad \text{άρα} \quad \frac{-(3\lambda^2+\lambda+2)}{2} < 0 \quad \text{οπότε} \quad y_o < 0$$

**Άσκηση 21 – Λύση**

Αρχικά για να έχει νόημα η 1η εξίσωση του Συστήματος θα πρέπει να έχουμε τον περιορισμό:

$$\boldsymbol{\alpha \neq \beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha \neq -\beta}$$

Θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες $D_x, D_y$ με τις παραμετρικές τιμές τους.

- $D = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha+\beta} & \frac{1}{\alpha-\beta} \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{\alpha+\beta} - \frac{1}{\alpha-\beta} = \frac{-(\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} = \frac{-\alpha+\beta-\alpha-\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} = \frac{-2\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$

- $D_x = \begin{vmatrix} 2\alpha & \frac{1}{\alpha-\beta} \\ 4\alpha\beta & -1 \end{vmatrix} = -2\alpha - \frac{4\alpha\beta}{\alpha-\beta} = \frac{-2\alpha(\alpha-\beta)-4\alpha\beta}{\alpha-\beta} = \frac{-2\alpha^2+2\alpha\beta-4\alpha\beta}{\alpha-\beta} = \frac{-2\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha-\beta} = \frac{-2\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}$

- $D_y = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha+\beta} & 2\alpha \\ 1 & 4\alpha\beta \end{vmatrix} = \frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta} - 2\alpha = \frac{4\alpha\beta-2\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} = \frac{4\alpha\beta-2\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \frac{2\alpha\beta-2\alpha^2}{\alpha+\beta} = \frac{2\alpha(\beta-\alpha)}{\alpha+\beta}$

Λύνουμε την εξίσωση $D=0$ και παίρνουμε:

$$\frac{-2\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=0 \quad \text{άρα} \quad -2\alpha=0 \ \text{ οπότε } \ \alpha=0$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

**1η Περίπτωση:**

Αν $\alpha=0 \ και \ \beta \neq 0 \ (λόγω \ του \ αρχικού \ περιορισμού)$ θα έχουμε έχουμε $D=0$, $D_x=0, D_y=0$. Το Σύστημα είναι αόριστο και θα παίρνει τη μορφή $\left.\begin{matrix} \frac{x}{\beta}-\frac{y}{\beta}=0 \\ x-y=0 \end{matrix}\right\}$.

Παρατηρούμε ότι η 1η εξίσωση προκύπτει από τη 2η, πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με την ποσότητα $\frac{1}{\beta}$.

Οπότε θα ισχύει $x=y$ και οι γενικές λύσεις του Συστήματος θα δίνονται από το ζεύγος:

$$(x,y)=(x,x) \ για \ κάθε \ \ x \ \in R \,.$$

**2η Περίπτωση:**

Αν $\alpha \neq 0 \ και \ \alpha \neq \beta, \alpha \neq -\beta \ (λόγω \ του \ αρχικού \ περιορισμού)$ θα έχουμε έχουμε

$$D \neq 0, \quad D_x \neq 0, \quad D_y \neq 0$$

Το Σύστημα έχει μοναδική λύση που θα προκύπτει από τους ακόλουθους τύπους:

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{\frac{-2\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}}{\frac{-2\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}},\frac{\frac{2\alpha(\beta-\alpha)}{\alpha+\beta}}{\frac{-2\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}}\right)=((\alpha+\beta)^2,(\alpha-\beta)^2)$$

**Άσκηση 22 – Λύση**

Θα υπολογίσουμε την παραμετρική τιμή της ορίζουσας των συντελεστών καθως και τις ορίζουσες $D_x, D_y$ με τις παραμετρικές τιμές τους.

- $D = \begin{vmatrix} \alpha^2+\beta^2 & \alpha^2-\beta^2 \\ \alpha+\beta & \alpha-\beta \end{vmatrix} = (\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)-(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta) =$
$= \alpha^3-\alpha^2\beta+\beta^2\alpha-\beta^3-\alpha^3-\alpha^2\beta+\beta^2\alpha+\beta^3 = -2\alpha^2\beta+2\beta^2\alpha = 2\alpha\beta(\beta-\alpha)$

- $D_x = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha^2-\beta^2 \\ \alpha & \alpha-\beta \end{vmatrix} = \alpha^2(\alpha-\beta)-\alpha(\alpha^2-\beta^2) = \alpha(\alpha-\beta)[\alpha-(\alpha+\beta)] = \alpha\beta(\beta-\alpha)$

- $D_y = \begin{vmatrix} \alpha^2+\beta^2 & \alpha^2 \\ \alpha+\beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha^2+\beta^2)-\alpha^2(\alpha+\beta) = \alpha[\alpha^2+\beta^2-\alpha(\alpha+\beta)] =$

$= \alpha[\alpha^2+\beta^2-\alpha^2-\alpha\beta] = \alpha\beta(\beta-\alpha)$

Λύνουμε την εξίσωση $D=0$ και λαμβάνουμε τα ακόλουθα:

$$2\alpha\beta(\beta-\alpha) = 0 \quad \text{άρα} \quad \alpha=0 \;\text{ ή }\; \beta=0 \;\text{ ή }\; \alpha=\beta$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

**1η Περίπτωση:**

Αν $\alpha=0$ $και$ $\beta\neq 0$ θα έχουμε έχουμε $D=0, D_x=0, D_y=0$. Το Σύστημα είναι αόριστο και θα παίρνει τη μορφή: $\left.\begin{matrix} \beta^2x-\beta^2y=0 \\ \beta x-\beta y=0 \end{matrix}\right\}$.

Παρατηρούμε ότι η 1η εξίσωση προκύπτει από τη 2η, πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με την ποσότητα $\beta$.

Οπότε θα ισχύει $x=y$ και οι γενικές λύσεις του Συστήματος θα δίνονται από το ακόλουθο ζεύγος:

$$(x,y)=(x,x) \; για \; κάθε \; x\in R$$

**2η Περίπτωση:**

Αν $\beta = 0\ και\ \alpha \neq 0$ θα έχουμε έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$. Το Σύστημα είναι αόριστο και θα παίρνει τη μορφή $\left.\begin{matrix} \alpha^2 x + \alpha^2 y = \alpha^2 \\ \alpha x + \alpha y = \alpha \end{matrix}\right\}$ ή $\left.\begin{matrix} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\}$.

Οπότε θα ισχύει $y = 1 - x$ και οι γενικές λύσεις του Συστήματος θα δίνονται από το ακόλουθο ζεύγος:

$$(x, y) = (x, 1 - x)\ για\ κάθε\ x \in R$$

**3η Περίπτωση:**

Αν $\alpha = \beta = 0$ θα έχουμε έχουμε $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$. Το Σύστημα είναι αόριστο και επαληθεύεται για κάθε ζεύγος $(x, y)\ οταν\ x, y\ \in R$.

**4η Περίπτωση:**

Αν $\alpha = \beta \neq 0$ θα έχουμε έχουμε $D = 0,\ D_x = 0,\ D_y = 0$. Το Σύστημα είναι αόριστο και λαμβάνει τη μορφή: $\left.\begin{matrix} 2\alpha^2 x = \alpha^2 \\ 2\alpha x = \alpha \end{matrix}\right\}$ ή $\left.\begin{matrix} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$ και επαληθεύεται για κάθε ζεύγος:

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, y\right) για\ κάθε\ y\ \in R$$

**5η Περίπτωση:**

Αν $\alpha \neq \beta \neq 0$ θα έχουμε έχουμε $D \neq 0, D_x \neq 0, D_y \neq 0$. Το Σύστημα έχει μοναδική λύση που θα προκύπτει από τους ακόλουθους τύπους:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{\alpha\beta(\beta - \alpha)}{2\alpha\beta(\beta - \alpha)}, \frac{\alpha\beta(\beta - \alpha)}{2\alpha\beta(\beta - \alpha)}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

## 1.2. Μη Γραμμικά Συστήματα

## Λύσεις

### Άσκηση 1 – Λύση

Το Σύστημα αποτελείται από τις εξισώσεις $\boldsymbol{C_1}: \boldsymbol{x^2+y^2=5}$, $\boldsymbol{C_2}: \boldsymbol{x+y=3}$. Η καμπύλη $C_1$ στο επίπεδο, παριστά κύκλο με κέντρο $K(0,0)$ και ακτίνας $\rho=\sqrt{5}\ \mu o\nu \acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$.

Αντίστοιχα η εξίσωση $C_2$ είναι μια ευθεία στο επίπεδο. Θα μετασχηματίσουμε το Σύστημα ως εξής:

$x+y=3$

$(x+y)^2=3^2$

$x^2+2xy+y^2=9$

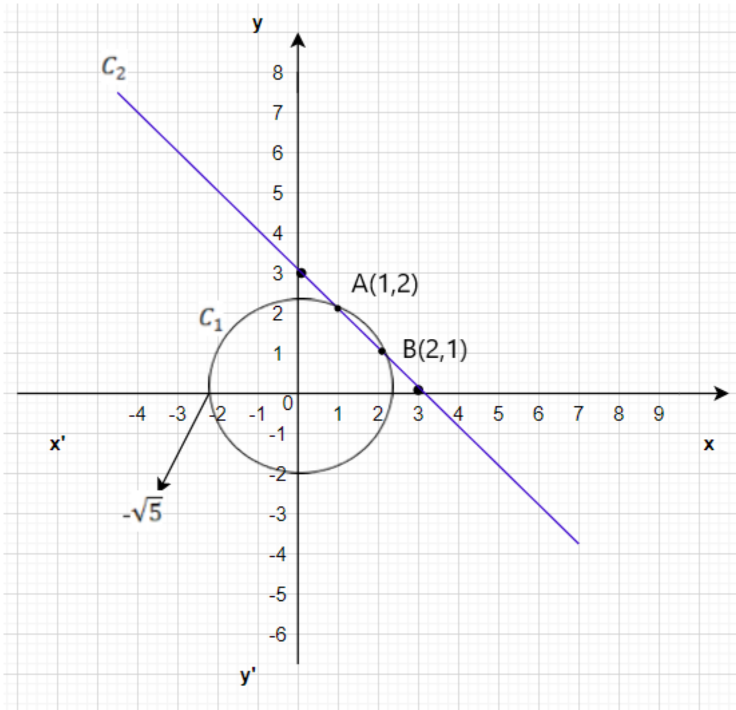
$2xy+5=9$

$xy=2$

Παίρνουμε το ισοδύναμο Σύστημα: $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ xy=2 \end{array}\right\}$.Οι λύσεις του Συστήματος προκύπτουν από την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης: $Z^2-\alpha\cdot Z+\beta=0$ με $\alpha=3, \beta=2$. Οπότε παίρνουμε:

$Z^2-3\cdot Z+2=0$ η οποία έχει λύσεις: $\boldsymbol{x=1, y=2}$ ή $\boldsymbol{y=1, x=2}$.

Το Σύστημα έχει λύσεις τα ζεύγη : $(x, y) = (1,2)$ *και* $(x, y) = (2,1)$ .Οι λύσεις του Συστήματος αντιστοιχούν στα σημεία τομής των καμπυλών $C_1$ *και* $C_2$στο επίπεδο, όπως φαίνεται και στο παρακάτω γράφημα:




**Άσκηση 2 – Λύση**

i. Το Σύστημα αποτελείται από δύο καμπύλες: $\boldsymbol{C_1: y = 2x^2 + x + 1, C_2: y = 3x + 1}$. Η καμπύλη $C_1$ στο επίπεδο, παριστά μια παραβολή και η εξίσωση $C_2$ είναι μια ευθεία στο επίπεδο. Θα λύσουμε το Σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης ή πιο απλά θα εξισώσουμε τα δεύτερα μέλη αφού τα πρώτα είναι ίσα. Προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς την μεταβλητή $x$ την οποία επιλύουμε ως εξής:

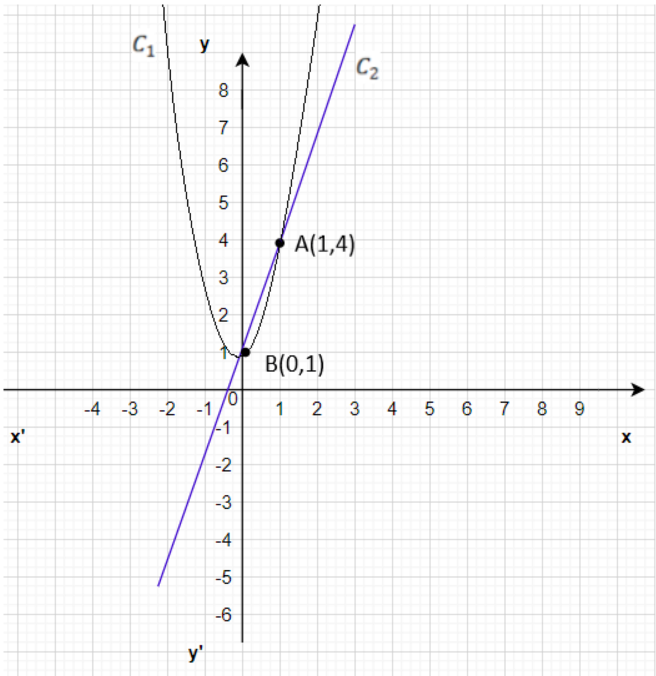
$$2x^2 + x + 1 = 3x + 1$$
$$2x^2 + x + 1 - 3x - 1 = 0$$
$$2x^2 - 2x = 0$$
$$2x(x - 1) = 0$$

Η οποία έχει λύσεις: $\boldsymbol{x = 0}$ ή $\boldsymbol{x = 1}$. Βρίσκουμε τις τιμές που αντιστοιχούν στην μεταβλητή $y$ αντικαθιστώντας στην εξίσωση της $C_2$ τις τιμές της μεταβλητής $x$.

Οπότε παίρνουμε:

- Για $x = 0, έχουμε: y = 3 \cdot 0 + 1 = 1$
- Για $x = 1, έχουμε: y = 3 \cdot 1 + 1 = 4$

Το Σύστημα έχει λύσεις τα ζεύγη:$(x, y) = (0,1)\ και\ \ (x, y) = (1,4)$ .Οι λύσεις του Συστήματος αντιστοιχούν στα σημεία τομής $A(1,4)\ και\ B(0,1)$ των καμπυλών $C_1$ , $C_2$ στο επίπεδο, όπως φαίνεται και στο παρακάτω γράφημα:




ii. Το Σύστημα αποτελείται από δύο καμπύλες: $\boldsymbol{C_1}: \boldsymbol{x^2 + y^2 = 5}, \boldsymbol{C_2}: \boldsymbol{xy = 3}.$ Η καμπύλη $C_1$ στο επίπεδο, παριστά κύκλο με κέντρο $K(0,0)$ και ακτίνας $\rho = \sqrt{5}\ μονάδες$ και η εξίσωση $C_2$ είναι μια υπερβολή στο επίπεδο.
Διπλασιάζοντας την εξίσωση της καμπύλης $C_2$ και προσθέτοντας κατά μέλη με την εξίσωση της $C_1$ παίρνουμε:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 6$$

$$(x + y)^2 = 11$$

$$\boldsymbol{x + y = \sqrt{11}}\ \text{ή}\ \boldsymbol{x + y = -\sqrt{11}}$$

Έχουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

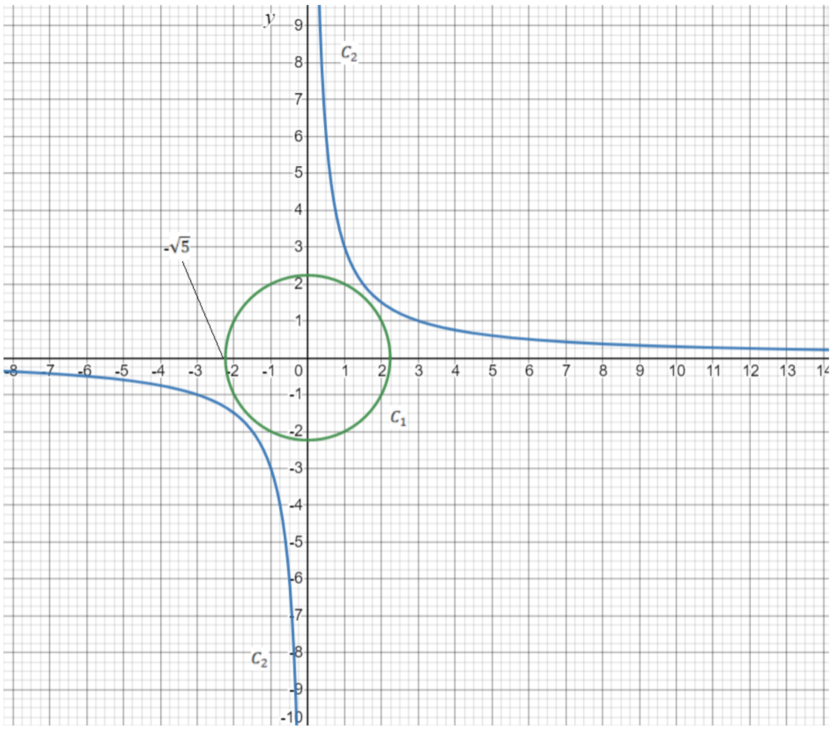
- Έχουμε ότι $\mathrm{x}+\mathrm{y}=\sqrt{11}$ και $xy=3$. Λύνουμε την εξίσωση $Z^2-a\cdot Z+\beta=0$ με $\alpha=\sqrt{11}, \beta=3$ *και* παίρνουμε:

  $Z^2-\sqrt{11}\cdot Z+3=0$ η οποία είναι αδύνατη.

- Έχουμε ότι $\mathrm{x}+\mathrm{y}=-\sqrt{11}$ και $xy=3$. Λύνουμε την εξίσωση $Z^2-a\cdot Z+\beta=0$ με $\alpha=-\sqrt{11}, \beta=3$ *και* παίρνουμε:

  $Z^2+\sqrt{11}\cdot Z+3=0$ η οποία είναι αδύνατη.

Οπότε το αρχικό Σύστημα είναι αδύνατο και οι καμπύλες στο επίπεδο δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, όπως ακριβώς φαίνεται στο παρακάτω γράφημα:



iii. Το Σύστημα αποτελείται από δύο καμπύλες: $\boldsymbol{C_1: xy = 5, C_2: y = 2x - 9}$. Η καμπύλη $C_1$ στο επίπεδο, παριστά μια υπερβολή και η εξίσωση $C_2$ είναι μια ευθεία στο επίπεδο. Θα λύσουμε το Σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης της μεταβλητής $y$ στην εξίσωση της καμπύλης $C_1$. Προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς την μεταβλητή $x$ την οποία επιλύουμε ως εξής:

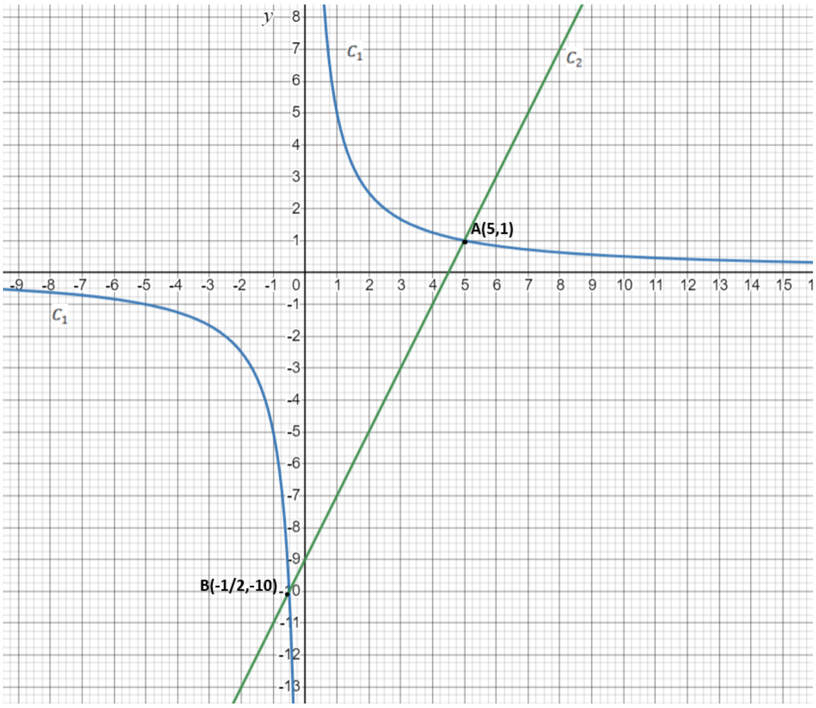
$$x(2x-9)=5$$
$$2x^2-9x-5=0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει λύσεις τις: $\boldsymbol{x = 5}$ ή $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$

Βρίσκουμε τις τιμές που αντιστοιχούν στην μεταβλητή $y$ αντικαθιστώντας στην εξίσωση της $C_2$ τις τιμές της μεταβλητής $x$. Οπότε παίρνουμε:

- Για $x = 5, έχουμε: y = 2 \cdot 5 - 9 = 1$
- Για $x = -\frac{1}{2}, έχουμε: y = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 9 = -10$

Το Σύστημα έχει λύσεις τα ζεύγη:$(x,y) = (5,1)\ και\ (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, -10\right)$.Οι λύσεις του Συστήματος αντιστοιχούν στα σημεία τομής $A(5,1)\ και\ B(-\frac{1}{2}, -10)$ των καμπυλών $C_1$ , $C_2$ στο επίπεδο, όπως φαίνεται και στο παρακάτω γράφημα:



**Άσκηση 3 – Λύση**

**(α)** Η παραβολή θα έχει δύο κοινά σημεία με την ευθεία όταν το Σύστημα τους έχει λύση και συγκεκριμένα δύο ακριβώς ζεύγη της μορφής $(x, y)$. Θα αντικαταστήσουμε την τιμή

$y = 3x + k$ στην εξίσωση της παραβολής και η δευτεροβάθμια εξίσωση που θα προκύψει ως προς την μεταβλητή $x$, θα πρέπει να έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις. Απαραίτητη προυπόθεση θεωρούμε ότι η Διακρίνουσα πρέπει να είναι μεγαλύτερη του μηδέν. Συνοψίζοντας έχουμε:

$3x + k = x^2 + x + 1$ {Αντικατάσταση της $y = 3x + k$ στην εξίσωση $y = x^2 + x + 1$}

$x^2 - 2x + 1 - k = 0$

$\Delta > 0$

$4 - 4(1 - k) > 0$

$4 - 4 + 4k > 0$

$k > 0$ Για κάθε θετικό $k$,η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο ακριβώς σημεία.

**(β)** Η παραβολή θα έχει ενα κοινό σημείο με την ευθεία όταν το Σύστημα τους έχει λύση και συγκεκριμένα ένα ακριβώς ζεύγος της μορφής $(x, y)$. Η δευτεροβάθμια εξίσωση που προέκυψε ως προς την μεταβλητή $x$, θα πρέπει να έχει μια διπλή λύση. Απαραίτητη προυπόθεση θεωρούμε ότι η Διακρίνουσα πρέπει να είναι ίση του μηδέν. Οπότε έχουμε:

$\Delta = 0$

$4 - 4(1 - k) = 0$

$4 - 4 + 4k = 0$

$k = 0$ Συγκεκριμένα η ευθεία $y = 3x$ ειναι εφαπτομένη στην παραβολή στο σημείο $A(1,3)$ που είναι και η λύση του Συστηματος για $k = 0$.

**(γ)** Η παραβολή δεν θα έχει κανένα κοινό σημείο με την ευθεία όταν το Σύστημα τους θα είναι αδύνατο. Η δευτεροβάθμια εξίσωση που προέκυψε ως προς την μεταβλητή $x$, θα πρέπει να είναι αδύνατη στο $R$. Απαραίτητη προυπόθεση θεωρούμε ότι η Διακρίνουσα πρέπει να είναι μικρότερη του μηδέν. Οπότε έχουμε:

$\Delta < 0$

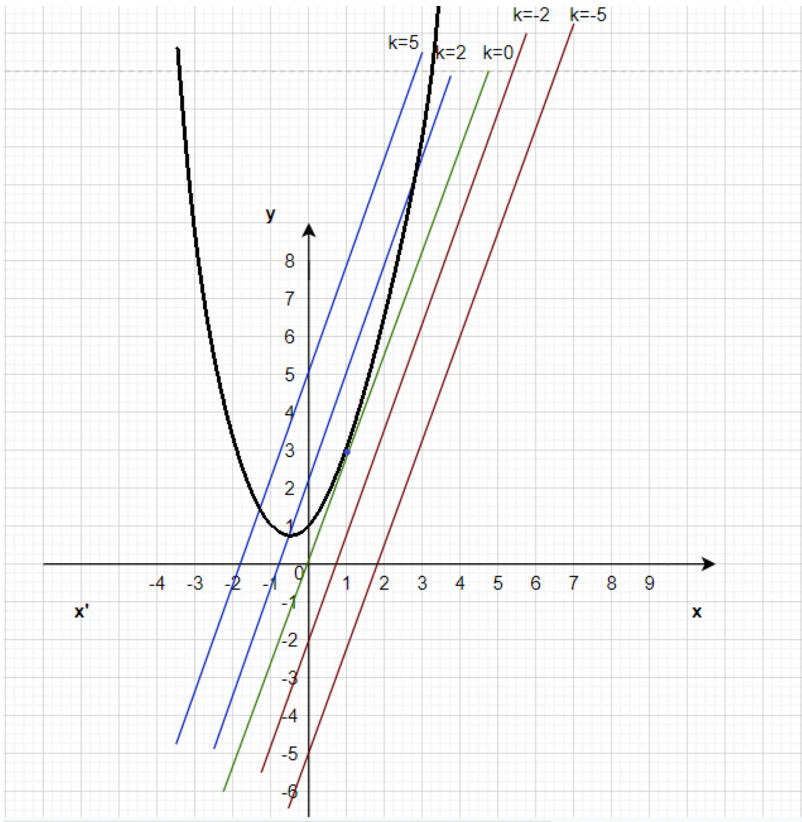
$4-4(1-k)<0$

$4-4+4k<0$

$k<0$ Για κάθε αρνητικό $k$,η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κανενα κοινό σημείο.

Συνοψίζουμε γραφικά τη διερεύνηση του παραπάνω Συστήματος,

θεωρώντας τις οικογένειες των ευθειών $y=3x+k$ για τιμές $k>0, k=0, και\ k<0$ ως προς τη σχετική τους θέση με την παραβολή $y=x^2+x+1$ ως εξής:



**Άσκηση 4 – Λύση**

**(α)** Έστω $x$ το μήκος του Ορθογωνίου και $y$ το πλάτος του. Από τον ορισμό της Περιμέτρου παίρνουμε την σχέση: $\boldsymbol{2x + 2y = 20}$ ή απλούστερα : $\boldsymbol{x + y = 10}$. Από τον ορισμό του Εμβαδού του Ορθογωνίου παίρνουμε τη σχέση: $\boldsymbol{xy = k^2}$. Δημιουργούμε το $2x2$ μη γραμμικό Σύστημα με την εξής μορφή: $\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ xy = k^2 \end{array}\right\} x, y > 0 \ (1)$

Το Σύστημα πρέπει να είναι συμβιβαστό δηλαδή να έχει τουλάχιστον μια λύση, οπότε αντικαθιστώντας όπου $y = 10 - x$ στην εξίσωση της υπερβολής $xy = k^2$, παίρνουμε μια παραμετρική δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς την μεταβλητή $x$.

Αντικαθιστούμε και παίρνουμε:

$$xy = k^2$$

$$x(10 - x) = k^2$$

$$10x - x^2 = k^2$$

$$x^2 - 10x + k^2 = 0$$

Για να έχει λύσεις η εξίσωση θα πρέπει η Διακρίνουσα να είναι μεγαλύτερη ή ιση του μηδέν. Παίρνουμε την συνθήκη:

$$\Delta \geq 0$$

$$100 - 4k^2 \geq 0$$

$$4(5 - k)(5 + k) \geq 0$$

Η ανισότητα επαληθεύεται όταν $k \ \in [-5,5]$ $όμως$ $λ$όγω του περιορισμού $k > 0$ καταλήγουμε ότι οι δυνατές τιμές στην περιπτωσή μας, βρίσκονται στο διάστημα $(0,5]$.

**(β)** Στην περίπτωση που έχουμε Τετράγωνο θα ισχύει $x = y$ και από τη σχέση

$x + y = 10$ καταλήγουμε ότι $x = y = 5cm$. Οπότε θα ισχύει: $k^2 = 25$ και παίρνουμε $k = 5$.

**Άσκηση 5 – Λύση**

Το Σύστημα αποτελείται από τις εξισώσεις $\boldsymbol{C_1}$: $\mathbf{4x^2-9y^2=-77}$ , $\boldsymbol{C_2}$: $\mathbf{2x+3y=11}$. Η καμπύλη $C_1$ στο επίπεδο παριστάνει μια υπερβολή. Αντίστοιχα η εξίσωση $C_2$ είναι μια ευθεία στο επίπεδο. Θα μετασχηματίσουμε το Σύστημα παρατηρώντας ότι η παράσταση $4x^2-9y^2=-77$ αναλύεται στο γινόμενο:

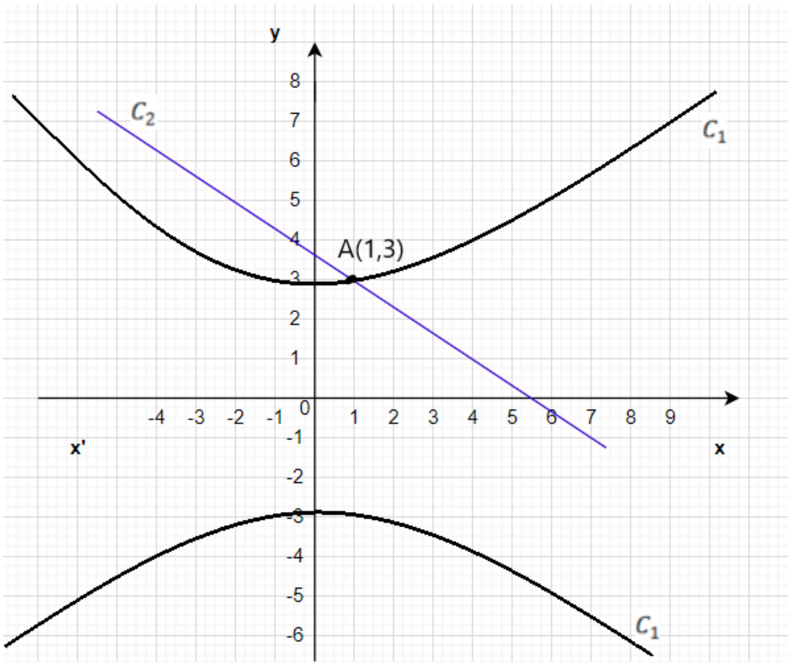
$$4x^2-9y^2=-77$$

$$(2x-3y)(2x+3y)=-77 \text{ \{Λόγω της εξίσωσης } C_2\text{\}}$$

$$(2x-3y)\cdot 11=-77$$

$$2x-3y=-7$$

Δημιουργούμε το ισοδύναμο Σύστημα: $\left.\begin{matrix}2x+3y=11\\2x-3y=-7\end{matrix}\right\}$ στο οποίο αν προσθέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις παίρνουμε: $4x+0y=4$ από την οποία παίρνουμε $x=1$. Για την τιμή αυτή υπολογίζουμε την τιμή της μεταβλητής $y$, η οποία είναι $y=3$. Το ισοδύναμο Σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(1,3)$ που είναι μοναδική λύση και του αρχικού Συστήματος. Η υπερβολή τέμνεται με την ευθεία στο σημείο $A(1,3)$ όπως επαληθεύει και το παρακάτω γράφημα:



**Άσκηση 6 – Λύση**

Το Σύστημα αποτελείται από τις εξισώσεις $\boldsymbol{C_1}: \boldsymbol{x^3 + y^3 = 1}$ , $\boldsymbol{C_2}: \boldsymbol{x + y = 1}$. Θα μετασχηματίσουμε το Σύστημα παρατηρώντας ότι η παράσταση $x^3 + y^3 = 1$ αναλύεται στο γινόμενο:

$x^3 + y^3 = 1$

$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 1$ {Λόγω της εξίσωσης $C_2$}

$1 \cdot (x^2 - xy + y^2) = 1$

$x^2 - xy + y^2 = 1 \ (C_3)$

Η εξίσωση $C_3$ στο επίπεδο παριστάνει μια έλλειψη και δημιουργούμε το ισοδύναμο Σύστημα:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$$

Αντικαθιστούμε την $y = 1 - x$ στην εξίσωση της έλλειψης, οπότε παίρνουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς $x$ ως εξής:

$x^2 - x(1 - x) + (1 - x)^2 = 1$

$x^2 - x + x^2 + 1 - 2x + x^2 = 1$

$3x^2 - 3x = 0$

$3x(x - 1) = 0$

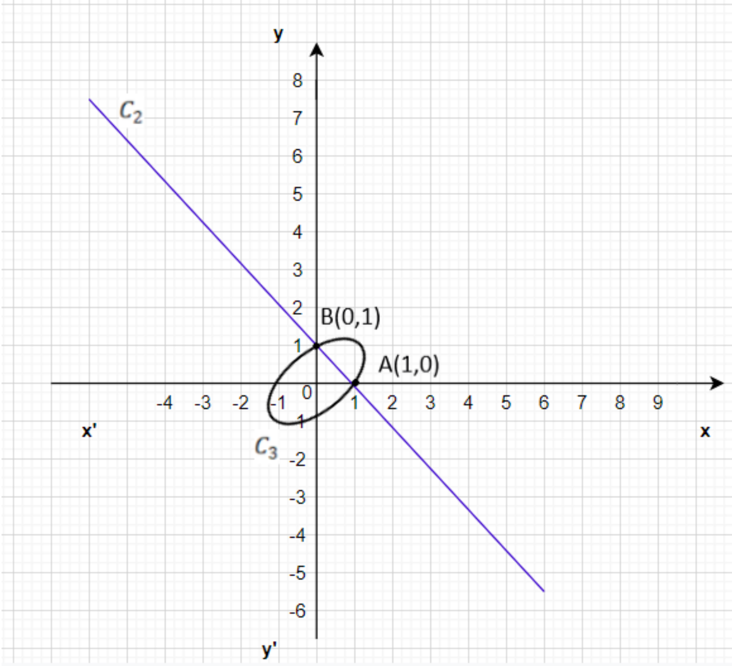
Οι λύσεις της εξίσωσης είναι $\boldsymbol{x = 0}$ ή $\boldsymbol{x = 1}$

Έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

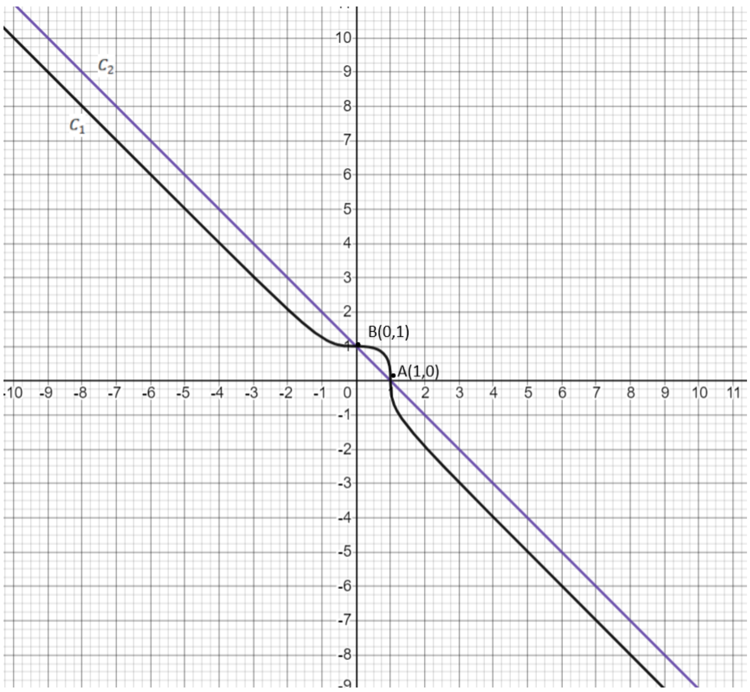
- Για $x = 0$ παίρνουμε: $y = 1 - 0 = 1$
- Για $x = 1$ παίρνουμε: $y = 1 - 1 = 0$

Οπότε το ισοδύναμο Σύστημα (οπότε και το αρχικό) έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη $(x, y) = (1,0)$ και $(x, y) = (0,1)$.

Γραφικά επαληθεύουμε τις λύσεις ως σημεία τομής των καμπυλών $B(0,1), BA(1,0)$, αρχικά για το ισοδύναμο Σύστημα των καμπλυλών $C_3$ και $C_2$:




Επαληθεύουμε γραφικα τις λύσεις του αρχικού Συστήματος ως σημεία τομής των καμπυλών $C_2$και $C_1$ δηλαδή τα σημεία $B(0,1)$ $και$ $A(1,0)$ ως εξής:



**Άσκηση 7 – Λύση**

Το Σύστημα αποτελείται από δύο καμπύλες: $\boldsymbol{C_1: 2x + y + xy = 7, C_2: xy(2x + y) = 6}$. Η καμπύλη $C_1$ στο επίπεδο, παριστά μια υπερβολή και η εξίσωση $C_2$ είναι μια καμπύλη στο επίπεδο. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αλλαγής μεταβλητής θέτοντας $2x + y = k$ και $xy = \omega$.

Το αρχικό Σύστημα μετασχηματίζεται στο ισοδύναμο με την εξής μορφή: $\left.\begin{aligned}\omega + k &= 7\\ \omega k &= 6\end{aligned}\right\}$

Λύνουμε την εξίσωση $Z^2 - \alpha \cdot Z + \beta = 0$ με $\alpha = 7, \beta = 6$ *και* παίρνουμε:

$Z^2 - 7 \cdot Z + 6 = 0$ η οποία έχει λύσεις $k = 1, \omega = 6$ ή $k = 6, \omega = 1$. Δηλαδή επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές, παίρνουμε δύο συστήματα της μορφής:

$$\left.\begin{aligned}2x + y &= 1\\ xy &= 6\end{aligned}\right\}(\Sigma_1) \text{ και } \left.\begin{aligned}2x + y &= 6\\ xy &= 1\end{aligned}\right\}(\Sigma_2)$$

- Για την επίλυση του $(\Sigma_1)$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της υπερβολής όπου $y = 1 - 2x$ και παίρνουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς την μεταβλητή $x$, ως εξής:

  $x(1 - 2x) = 6$
  $x - 2x^2 = 6$
  $2x^2 - x + 6 = 0$

  Η εξίσωση είναι αδύνατη στο $R$ και δεν προκύπτουν λύσεις του ισοδύναμου και του αρχικού Συστήματος.

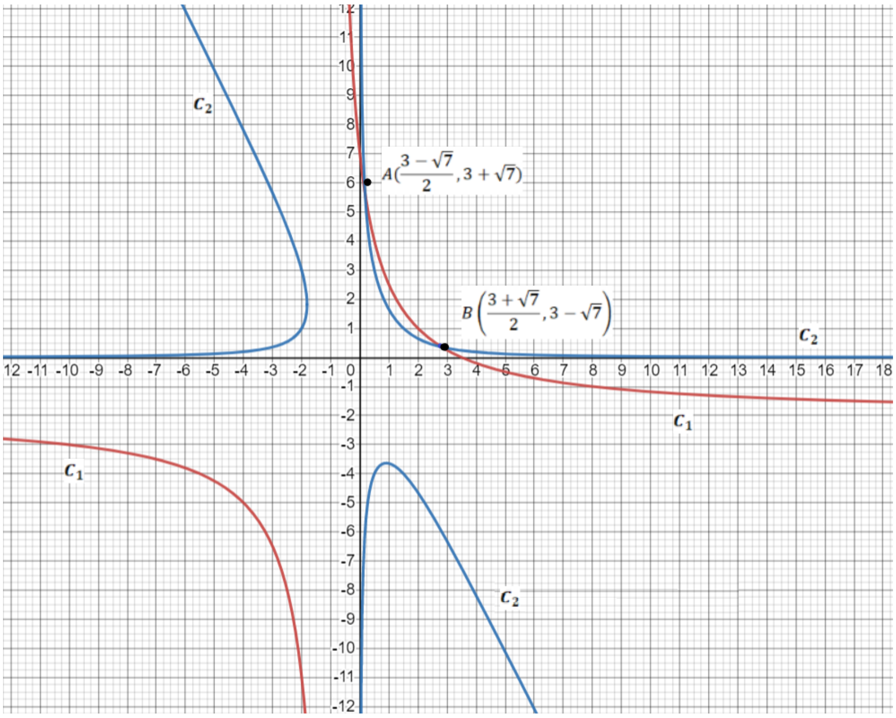
- Για την επίλυση του $(\Sigma_2)$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση της υπερβολής όπου $y = 6 - 2x$ και παίρνουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς την μεταβλητή $x$, ως εξής:

  $x(6 - 2x) = 1$
  $6x - 2x^2 = 1$
  $2x^2 - 6x + 1 = 0$

  *Η εξίσωση έχει λύσεις*: $x = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$ ή $x = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$

- $Για\ x = \frac{3-\sqrt{7}}{2}\ παίρνουμε: y = 6 - 2\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right) = 3 + \sqrt{7}$
- Για $x = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$ παίρνουμε: $y = 6 - 2\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right) = 3 - \sqrt{7}$

Το ισοδύναμο σύστημα έχει λύσεις τα ζεύγη: $(x, y) = (\frac{3-\sqrt{7}}{2}, 3 + \sqrt{7})$ και $(x, y) = (\frac{3+\sqrt{7}}{2}, 3 - \sqrt{7})$
Αυτό σημαίνει πως το αρχικό Σύστημα έχει λύσεις τα παραπάνω ζεύγη και γεωμετρικα σημαίνει πως οι καμπύλες $C_1\ και\ C_2$ τέμνονται στα σημεία $A(\frac{3-\sqrt{7}}{2}, 3 + \sqrt{7})$ και $B\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}, 3 - \sqrt{7}\right)$, όπως επαληθεύεται από την παρακάτω γραφική παράσταση:



**Άσκηση 8 – Λύση**

Για να έχει νόημα το Σύστημα θα πρέπει να ισχύει $\boldsymbol{x \neq y}$. Παρατηρούμε ότι η 2η εξίσωση μετα από πράξεις για $(x, y) \neq (0,0)$, απλοποιείται ως εξής:

$$1-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0$$

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1$$

$$x^2-y^2=x^2+y^2$$

$$2y^2=0$$

$$y=0$$

Το ισοδύναμο Σύστημα θα είναι: $\left.\begin{array}{c}\frac{4}{x-y}-\frac{y}{(x-y)^2}=\lambda \\ y=0\end{array}\right\}$

Αντικαθιστούμε την τιμή $y=0$ στην 1η εξίσωση και για $x \neq 0$, παίρνουμε:

$$\frac{4}{x}=\lambda$$

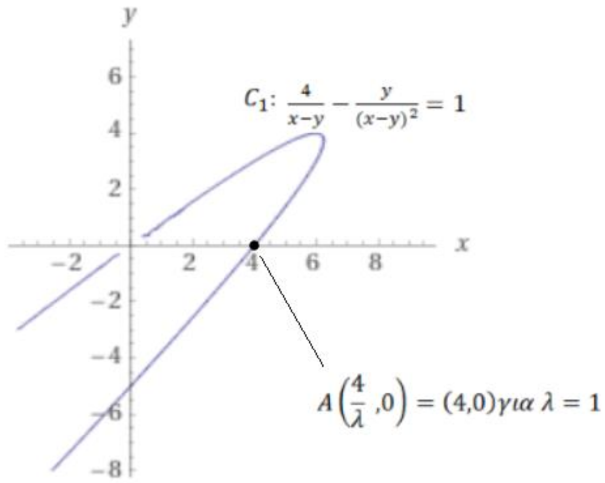
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda \neq 0$ τότε $x=\frac{4}{\lambda}$ και το Σύστημα έχει παραμετρικές λύσεις της μορφής:

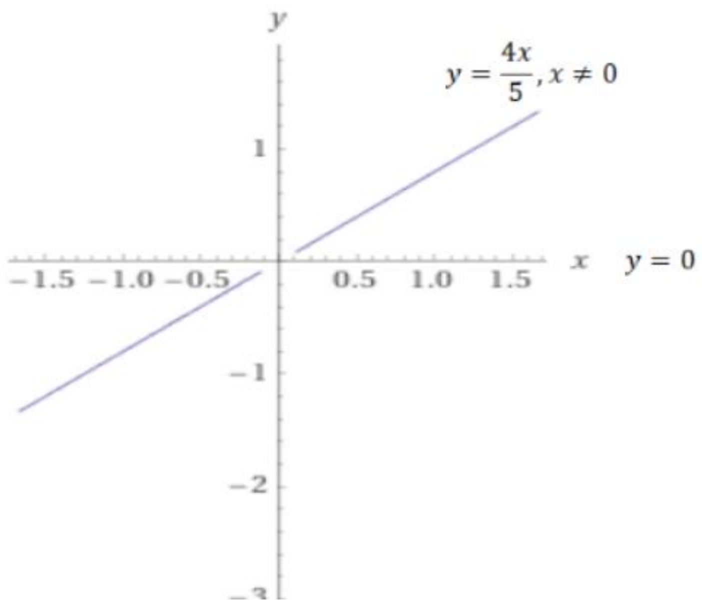
  $(x, y)=\left(\frac{4}{\lambda}, 0\right)$ και γεωμετρικά μας δίνει τα σημεία τομής της καμπύλης

  $C_1$: $\frac{4}{x-y}-\frac{y}{(x-y)^2}=\lambda$ με τον άξονα $x'x$, εξαιρώντας το σημείο $O(0,0)$ λόγω περιορισμού.

  Ενδεικτικά παραθέτουμε την γραφική παράσταση της καμπύλης $C_1$ για την τιμή $\lambda=1$:




- Αν $\lambda = 0$ τότε το Σύστημα παίρνει τη μορφή: $\left.\begin{matrix} \frac{4}{x-y}-\frac{y}{(x-y)^2}=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$ και για $\boldsymbol{x \neq y}$ με πράξεις στην 1η εξίσωση, καταλήγει στο ισοδύναμο: $\left.\begin{matrix} y=\frac{4x}{5} \\ y=0 \end{matrix}\right\}$ και καθίσταται αδύνατο λόγω του περιορισμού $(x,y) \neq (0,0)$.Στο παρακάτω γράφημα φαίνεται και γεωμετρικά ότι η ευθεία $y=\frac{4x}{5}, x \neq 0$ και η ευθεία $y = 0$($\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}$ $o$ $\acute{\alpha}\xi o\nu\alpha\varsigma$ $x'x$) δεν έχουν κανένα κοινό σημείο:



**Άσκηση 9 – Λύση**

Το Σύστημα αποτελείται από δύο καμπύλες: $\boldsymbol{C_1}: \boldsymbol{x^3 + y = 2}, \boldsymbol{C_2}: \boldsymbol{y^3 + x = 2}$. Εξισώνοντας τα 2α μέλη (αφού τα πρώτα είναι ίσα) καταλήγουμε στην εξίσωση:

$x^3 + y = y^3 + x$

$x^3 - y^3 + y - x = 0$

$(\mathrm{x} - \mathrm{y})(\mathrm{x}^2 + xy + y^2) - (x - y) = 0$

$(\mathrm{x} - \mathrm{y})(\mathrm{x}^2 + xy + y^2 - 1) = 0$

Οπότε καταλήγουμε ότι: $\mathrm{x} = \mathrm{y}$ ή $\mathrm{x}^2 + xy + y^2 = 1$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\mathrm{x} = \mathrm{y}$ το ισοδύναμο Σύστημα γράφεται: $\left.\begin{matrix} x^3 + y = 2 \\ x = y \end{matrix}\right\} (\Sigma_1)$ ή $\left.\begin{matrix} y^3 + x = 2 \\ x = y \end{matrix}\right\} (\Sigma_2)$

  Επιλέγοντας το Σύστημα $(\Sigma_1)$ με την μέθοδο της αντικατάστασης καταλήγουμε σε μια τριτοβάθμια εξίσωση ως προς την μεταβλητή $x$, ως εξής:

  $$\begin{aligned} &x^3 + x = 2 \\ &x^3 + x - 2 = 0 \\ &x^3 - 1 + x - 1 = 0 \\ &(x - 1)(\,\mathrm{x}^2 + x + 1) + (x - 1) = 0 \\ &(x - 1)(\mathrm{x}^2 + x + 2) = 0 \end{aligned}$$

  Μοναδική λύση παίρνουμε: $\mathrm{x} = 1$ διότι το τριώνυμο δεν έχει ρίζες στο $R$.

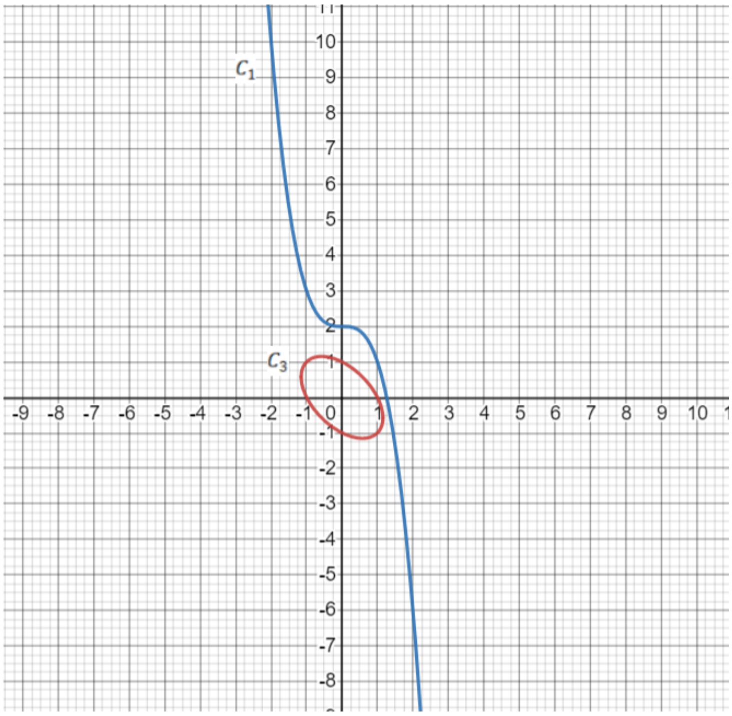
  Οπότε για $\mathrm{x} = 1$ παίρνουμε και $\mathrm{y} = 1$. Η λύση του ισοδύναμου άρα και του αρχικού Συστήματος θα είναι το ζεύγος τιμών: $(x, y) = (1,1)$ και είναι το σημείο τομής των καμπυλών $C_1$ και $C_2$ στο επίπεδο.

  ***Στην ιδια λύση καταλήγουμε, λόγω συμμετρίας αν επιλέξουμε το $(\boldsymbol{\Sigma_2})$.**

- Αν $x^2+xy+y^2=1\ (C_3)$ το ισοδύναμο Σύστημα γράφεται: $\left.\begin{array}{r} x^3+y=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{array}\right\}(\Sigma_1)$ ή

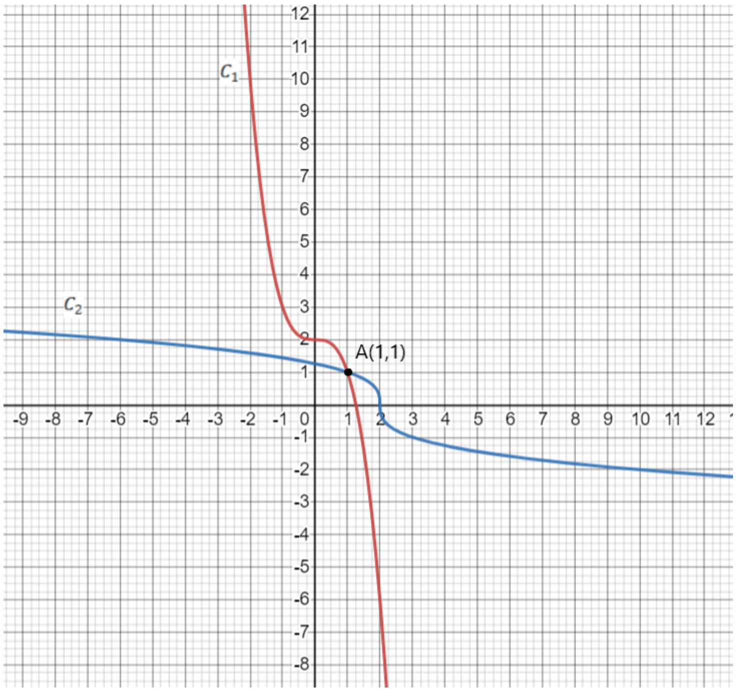
$\left.\begin{array}{r} y^3+x=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{array}\right\}(\Sigma_2)$. Η καμπύλη $C_3$,παριστάνει στο επίπεδο μια έλλειψη.

Επιλέγοντας το Σύστημα $(\Sigma_1)$ διαπιστώνουμε γραφικά ότι είναι αδύνατο, σύμφωνα με το παρακάτω γράφημα:




***Στο ιδιο συμπέρασμα καταλήγουμε, λόγω συμμετρίας αν επιλέξουμε το $(\Sigma_2)$.**

Συνοψίζοντας, μοναδική λύση του αρχικού συστήματος αποτελεί το ζεύγος $(x, y) = (1,1)$ που αντιστοιχεί στο σημείο τομής $A(1,1)$ των καμπυλών $C_1$ και $C_2$, όπως επαληθεύεται στο παρακάτω γράφημα:




**Άσκηση 10 – Λύση**

Το Σύστημα αποτελείται από δύο καμπύλες: $\boldsymbol{C_1: x^3 + x^2 - y = 1, C_2: y^3 + y^2 - x = 1}$. Εξισώνοντας τα 2$^{\alpha}$ μέλη (αφού τα πρώτα είναι ίσα) καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$x^3 + x^2 - y = y^3 + y^2 - x$$

$$x^3 - y^3 + x^2 - y^2 - y + x = 0$$

$$(\mathrm{x} - \mathrm{y})(\mathrm{x}^2 + xy + y^2) + (x - y)(x + y) + (x - y) = 0$$

$$(\mathrm{x} - \mathrm{y})(\mathrm{x}^2 + xy + y^2 + x + y + 1) = 0$$

Οπότε καταλήγουμε ότι: $\mathrm{x} = \mathrm{y}$ ή $\mathrm{x}^2 + xy + y^2 + x + y + 1 = 0$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x = y$ το ισοδύναμο Σύστημα γράφεται: $\left.\begin{matrix} x^3+x^2-y=1 \\ x=y \end{matrix}\right\}(\Sigma_1)$ ή $\left.\begin{matrix} y^3+y^2-x=1 \\ x=y \end{matrix}\right\}(\Sigma_2)$

  Επιλέγοντας το Σύστημα $(\Sigma_1)$ με την μέθοδο της αντικατάστασης καταλήγουμε σε μια τριτοβάθμια εξίσωση ως προς την μεταβλητή $x$, ως εξής:

  $$\begin{aligned} &x^3+x^2-x=1 \\ &x^3+x^2-x-1=0 \\ &x^2(x+1)-(x+1)=0 \\ &(x^2-1)(x+1)=0 \\ &(x-1)(x+1)^2=0 \end{aligned}$$

  Οι λύσεις της εξίσωσης είναι: $x=1$ ή $x=-1$. Δεδομένου ότι $x = y$ προκύπτουν τα ζεύγη των λύσεων:

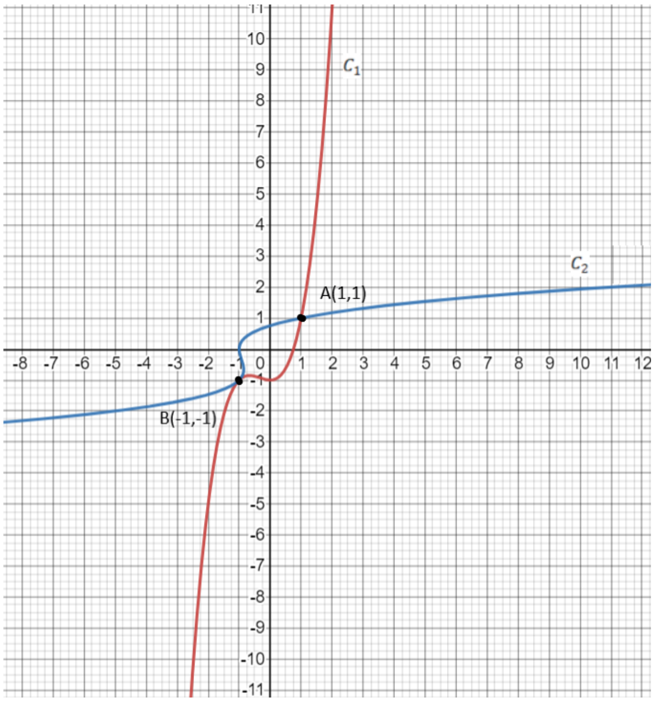
  $(x,y)=(1,1)$ και $(x,y)=(-1,-1)$ τα οποία αντιστοιχούν στα σημεία τομής στο επίπεδο, των καμπυλών $C_1$ και $C_2$.

- Στην περίπτωση που ισχύει $x^2+xy+y^2+x+y+1=0$ παρατηρούμε ότι με κατάλληλες πράξεις, η σχέση μετασχηματίζεται ως εξής:

  $$\begin{aligned} &x^2+xy+y^2+x+y+1=0 \\ &2x^2+2xy+2y^2+2x+2y+2=0 \\ &x^2+2xy+y^2+x^2+2x+1+y^2+2y+1=0 \\ &(x+y)^2+(y+1)^2+(x+1)^2=0 \end{aligned}$$

  Θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις: $x=-y$ και $x=-1$ και $y=-1$ το οποίο είναι αδύνατο.

Συνοψίζοντας καταλήγουμε ότι το αρχικό Σύστημα των καμπυλών $C_1$ και $C_2$ έχει λύσεις τα ζεύγη $(x, y) = (1,1)$ και $(x, y) = (-1, -1)$ και γεωμετρικά αντιστοιχούν στα σημεία τομής $A(1,1)$ και $B(-1, -1)$ των καμπυλών στο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακατω γράφημα:



# Κεφάλαιο 2 : Ιδιότητες Συναρτήσεων

## 2.1. Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες Συνάρτησης

### Λύσεις

#### Άσκηση 1 - Λύση

Μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. Αντίστοιχα, μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. Με άλλα λόγια, όταν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, η γραφική της παράσταση ανέρχεται, ενώ, όταν είναι γνησίως φθίνουσα, η γραφική της παράσταση κατέρχεται. Συνεπώς, βασιζόμενοι στις δοθείσες γραφικές παραστάσεις συμπεραίνουμε ότι:

- Η f στο $\Delta_1 = (-\infty, 1)$ είναι γνησίως αύξουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα ανέρχεται και στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$, γιατί στο διάστημα αυτό κατέρχεται.
- Η g στο $\Delta_1 = (-\infty, -1)$ είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα κατέρχεται, στο $\Delta_2 = [-1, 3)$ είναι γνησίως αύξουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα κατέρχεται και στο $\Delta_3 = [3, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα κατέρχεται.
- Η h στο $\Delta_1 = (-\infty, -3)$ είναι γνησίως αύξουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα ανέρχεται, στο $\Delta_2 = [-3, 0)$ είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα κατέρχεται, στο $\Delta_3 = [0, 3)$ είναι γνησίως αύξουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα ανέρχεται και στο $\Delta_4 = [3, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί σε αυτό το διάστημα κατέρχεται.

- Η p είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της Δ, καθώς ανέρχεται σε οποιοδήποτε διάστημα.

**Άσκηση 2 - Λύση**

- Η f παρουσιάζει ένα ολικό ακρότατο, το 2 το οποίο είναι ολικό μέγιστο στη θέση $x_0 = 1$.
- Η g παρουσιάζει δύο ολικά ακρότατα, το -2 το οποίο είναι ολικό ελάχιστο στη θέση $x_1 = -1$ και το 0 το οποίο είναι ολικό μέγιστο στη θέση $x_2 = 3$.
- Η h παρουσιάζει δύο ολικά ακρότατα, το 2 το οποίο είναι ολικό μέγιστο σε δύο θέσεις, τις $x_1 = -3$ και $x_2 = 3$ και το -2 το οποίο είναι ολικό ελάχιστο στη θέση $x_3 = 0$.
- Η p δεν παρουσιάζει κανένα ολικό ακρότατο.

**Σημείωση:**

Τα (ολικά) ακρότατα μιας συνάρτησης εντοπίζονται πάντα στα σημεία στα οποία αλλάζει η μονοτονία της συνάρτησης. Για παράδειγμα, η συνάρτηση p δεν παρουσιάζει κανένα ακρότατο, διότι δεν αλλάζει ποτέ η μονοτονία της.

Επίσης, ένας ακόμη τρόπος να εντοπίσουμε τα (ολικά) ακρότατα μιας συνάρτησης είναι μέσω της γραφικής της παράστασης, όπου εντοπίζονται στα σημεία εκείνα στα οποία η γραφική παράσταση αλλάζει, δηλαδή παύει να ανέρχεται και ξεκινά να κατέρχεται ή και το ανάποδο.

**Άσκηση 3 - Λύση**

Η συνάρτηση $f : [-6, 6] \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει δύο ολικά ακρότατα, το 2 και το -2, όπου το 2 είναι ολικό μέγιστο και εντοπίζεται στις θέσεις $x_1 = -2$ και $x_2 = 6$ και το -2 είναι ολικό ελάχιστο και εντοπίζεται στις θέσεις $x_3 = -6$ και $x_4 = 2$.

**Άσκηση 4 - Λύση**

α)

$$f(x) = x^2 + 4x + 6 = x^2 + 4x + 4 + 2 = (x+2)^2 + 2$$

Η $f$ είναι άθροισμα μη αρνητικών όρων, οπότε η μικρότερη τιμή που μπορεί να λάβει σε όλο το πεδίο ορισμού της θα είναι αναγκαστικά για την τιμή εκείνη του x που μηδενίζει τον όρο που περιέχει το x. Συνεπώς, έχουμε: $(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$.

Άρα, η $f$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -2$.

β)

$$f(x) = -x^2 + 1$$

Η $f$ ορίζεται σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών και, καθώς το $x^2$ είναι πάντα μη αρνητικός όρος, συνεπάγεται ότι το $-x^2$ θα είναι πάντα μη θετικός. Οπότε, η μέγιστη τιμή της εντοπίζεται για $x = 0$, καθώς για οποιαδήποτε άλλη τιμή η συνάρτηση θα μηδενίζεται ή θα επιστρέφει αρνητικές τιμές. Άρα, η $f$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$.

γ)

$$f(x) = \frac{6x}{x^2 + 9} = \frac{6x}{x^2 + 9 + 6x - 6x} = \frac{6x}{6x + (x-3)^2}$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής είναι πάντα μικρότερος από τον παρονομαστή, καθώς ο παρονομαστής είναι άθροισμα μη αρνητικών όρων και μάλιστα ο ένας εκ των δύο είναι ίσος με τον αριθμητή του κλάσματος. Οπότε, προκειμένου να βρούμε που παρουσιάζει η συνάρτηση τη μέγιστη τιμή της, συμπεραίνουμε ότι πρέπει ο αριθμητής να γίνει ίσος με τον παρονομαστή. Δηλαδή, $(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$. Άρα, η $f$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 3$.

δ)

$$f(x) = \frac{5}{x^2 + 7}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι πάντα θετική, καθώς ο όρος $x^2$ είναι πάντα μη αρνητικός, με αποτέλεσμα και ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος να είναι θετικοί. Άρα, η συνάρτηση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, οπότε για κάθε τιμή του πεδίου ορισμού της ο παρονομαστής θα αυξάνεται, με αποτέλεσμα το κλάσμα να ελαττώνεται. Επομένως, η $f$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$.

**ΚΟΛΠΟ!!!**

Πολλές φορές θα χρειάζεται να συγκρίνουμε όρους μεταξύ τους, προκειμένου να καταλήξουμε σε κάποιο αποτέλεσμα. Όταν έχουμε κλάσμα, προσπαθούμε να βγάλουμε κάποια σύγκριση μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή, προκειμένου να μπορούμε να προβλέπουμε κάθε φορά την αυξομείωση του κλάσματος.

Επίσης, προσέχουμε μήπως μπορούμε να δημιουργήσουμε με προσθαφαίρεση όρων άθροισμα ή διαφορά στο τετράγωνο(γνωστή ταυτότητα δηλαδή)!

**Άσκηση 5 - Λύση**

Μια συνάρτηση f : A → ℝ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0$ ε A, εάν για κάθε x ε A ισχύει f(x)≥f($x_0$).

α)

Επειδή η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση και άθροισμα μη αρνητικών όρων, συμπεραίνουμε ότι θα ισχύει f(x)≥0 για κάθε x ε [-5, 2]. Άρα, επειδή f(x) = x^2 + 3, το x = 0 θα είναι η μικρότερη κατ΄ απόλυτη τιμή του πεδίου ορισμού της που παίρνει και επομένως εκεί η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Για x = 0: $f(0) = 0^2 + 3 = 3.$

β)

Το x = -5 είναι η μεγαλύτερη κατ΄ απόλυτη τιμή που παίρνει η f στο πεδίο ορισμού της. Άρα, στο x = -5 παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

Για x = -5: $f(-5) = (-5)^2 + 3 = 28$

**Άσκηση 6 - Λύση**

Μία συνάρτηση f: A → ℝ λέγεται άρτια, αν για κάθε x ∈ A ισχύει ότι –x ∈ A και f(–x) = f(x) και περιττή αντίστοιχα, αν για κάθε x ∈ A ισχύει ότι –x ∈ A και f(–x) = −f(x). Οπότε, προκειμένου να αποφανθούμε, εξετάζουμε τι συμβαίνει στη θέση $-x$.

α)

$$f(x) = 5x^2 + 7x^8 \Rightarrow f(-x) = 5(-x)^2 + 7(-x)^8 = 5x^2 + 7x^8 \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

⇒ Η f είναι άρτια.

β)

$$g(x) = -x^7 + 2x^3 \Rightarrow g(-x) = -(-x)^7 + 2(-x)^3 = x^7 - 2x^3 = -(-x^7 + 2x^3)$$
$$\Rightarrow g(-x) = g(x) \Rightarrow$$

Η g είναι περιττή.

γ)

$$h(x) = |x| - |x|^3 \Rightarrow h(-x) = |-x| - |-x|^3 = |x| - |x|^3$$

$\Rightarrow h(-x) = h(x) \Rightarrow$ Η h είναι άρτια.

δ)

$$\varphi(x) = \frac{3x}{5 + x^2} \Rightarrow \varphi(-x) = \frac{3(-x)}{5 + (-x)^2} = \frac{-3x}{5 + x^2} \Rightarrow$$

$\varphi(-x) = -\varphi(x) \Rightarrow$ Η $\varphi$ είναι περιττή.

ε)

$$p(x) = x^2 + 3x \Rightarrow p(-x) = (-x)^2 + 3(-x) = x^2 - 3x \Rightarrow$$

$p(-x) \neq p(x), -p(x) \Rightarrow$ Η $p$ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

στ)

$$q(x) = (x-1)^2 \Rightarrow q(-x) = (-x-1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow$$

$q(-x) \neq q(x), -q(x) \Rightarrow$ Η $q$ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

ζ)

$$r(x) = x-2 \Rightarrow r(-x) = -x-2 \Rightarrow r(-x) \neq r(x), -r(x) \Rightarrow$$

Η $r$ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

η)

$$s(x) = \frac{1}{x^2+x^4+1} \Rightarrow s(-x) = \frac{1}{(-x)^2+(-x)^4+1} = \frac{1}{x^2+x^4+1} \Rightarrow$$

$s(-x) = s(x) \Rightarrow$ Η $s$ είναι άρτια.

**Άσκηση 7 - Λύση**

α)

$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$Η $f$ είναι περιττή.

β)

$$g(x) = \frac{1}{x^2-1} \Rightarrow g(-x) = \frac{1}{(-x)^2-1} = \frac{1}{x^2-1} \Rightarrow g(-x) = g(x) \Rightarrow$$

Η $g$ είναι άρτια.

γ)

$$h(x) = \frac{x^3}{x-5} \Rightarrow h(-x) = \frac{(-x)^3}{-x-5} = \frac{-x^3}{-(x+5)} = \frac{x^3}{x+5} \Rightarrow$$

$h(-x) \neq h(x), -h(x) \Rightarrow$ Η $h$ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

δ)

$\varphi(x) = \frac{x^3-x^2}{x-1} \Rightarrow \varphi(-x) = \frac{(-x)^3-(-x)^2}{-x-1} = \frac{-x^3-x^2}{-x-1} = \frac{x^3+x^2}{x+1} \Rightarrow \varphi(-x) \neq \varphi(x), -\varphi(x) \Rightarrow$

Η $\varphi$ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

ε)

$$p(x) = \sqrt{x-4} \Rightarrow p(-x) = \sqrt{-x-4} \Rightarrow$$

$p(-x) \neq p(x), -p(x) \Rightarrow$ Η $p$ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

στ)

$$q(x) = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow q(-x) = \sqrt{9-(-x)^2} = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow$$

$q(-x) = q(x) \Rightarrow$ Η $q$ είναι άρτια.

**Άσκηση 8 - Λύση**

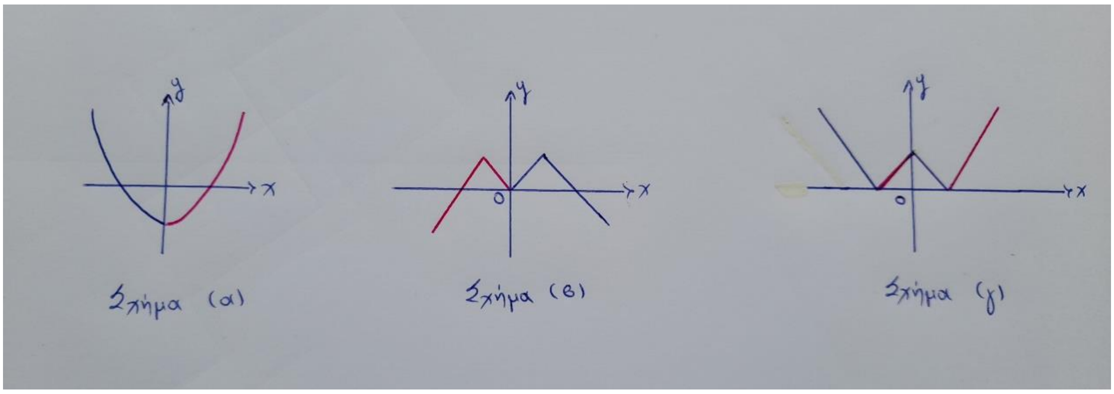
Προκειμένου να εξετάσουμε μια συνάρτηση και να διαπιστώσουμε, αν είναι άρτια ή περιττή, εξετάζουμε ως προς τι είναι συμμετρική. Μια άρτια συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, ενώ μια περιττή συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων O(0,0). Άρα, με βάση τις δοθείσες γραφικές παραστάσεις, συμπεραίνουμε ότι:

- Η f είναι άρτια.
- Η g είναι περιττή.
- Η h δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.
- Η φ είναι περιττή.
- Η p δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.
- Η q είναι άρτια.

**Άσκηση 9 - Λύση**

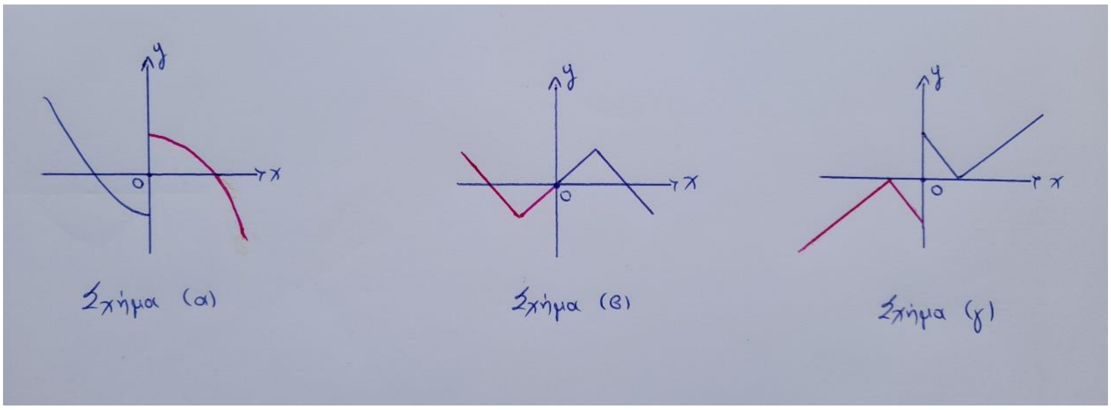
Μια συνάρτηση καλείται άρτια, όταν είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Οπότε:



**Άσκηση 10 - Λύση**

Μια συνάρτηση καλείται περιττή, όταν είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων Ο(0,0). Οπότε:

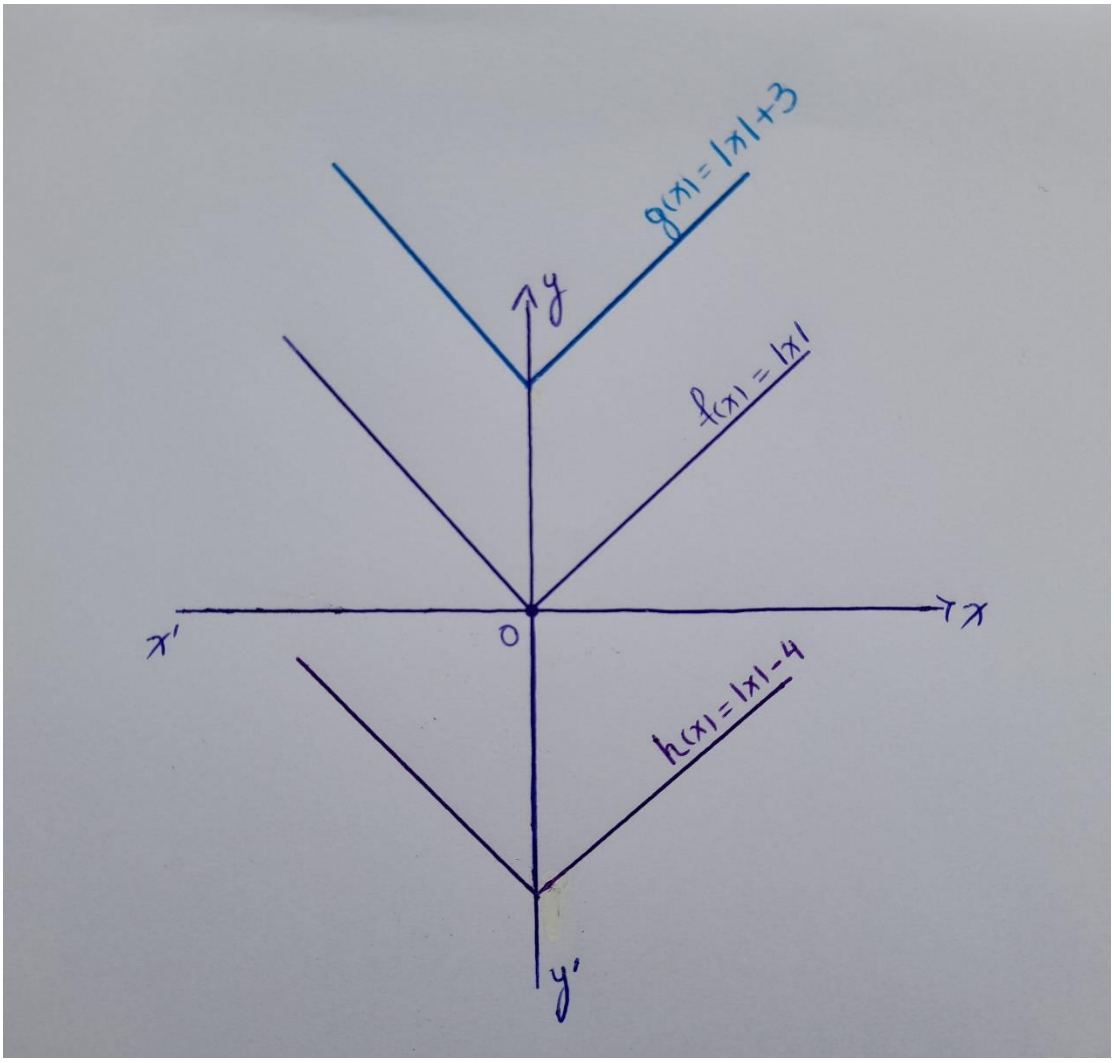


## 2.2. Κατακόρυφη – Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

### Λύσεις

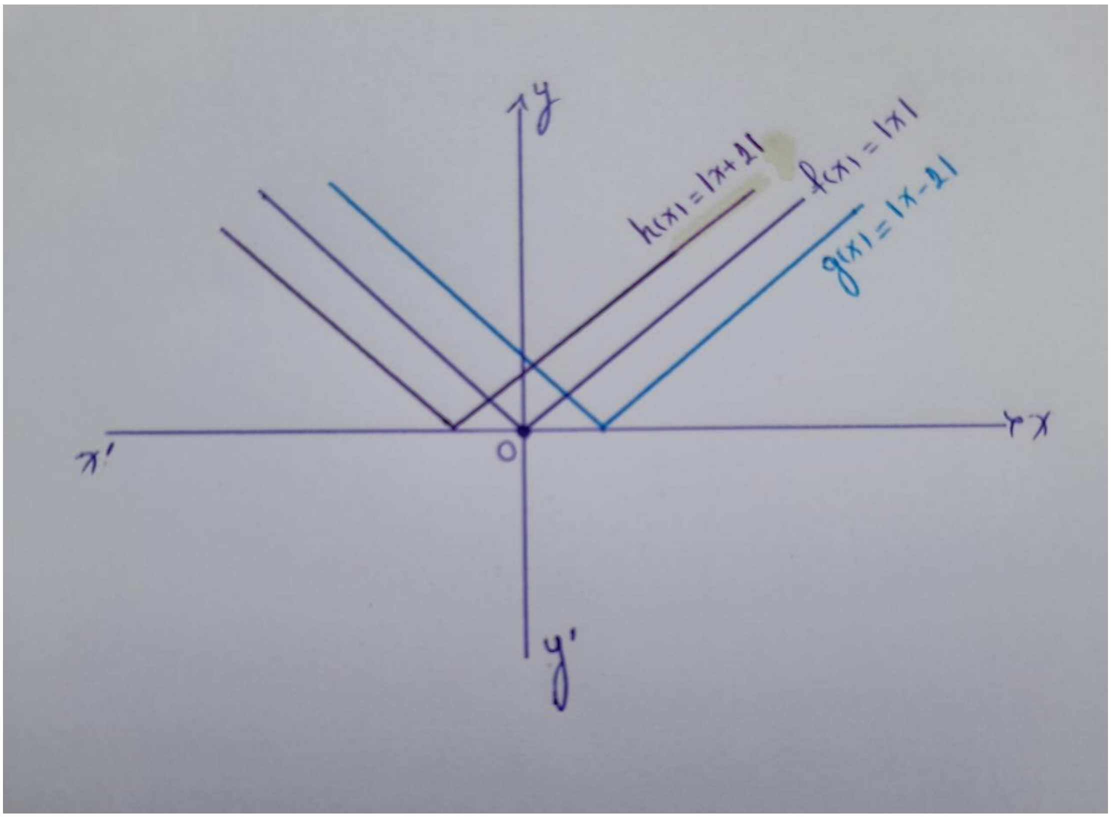
**Άσκηση 1 - Λύση**

Οι συναρτήσεις g και h αποτελούν κατακόρυφες μετατοπίσεις της συνάρτησης f προς τα πάνω κατά 3 μονάδες και προς τα κάτω κατά 4 μονάδες αντίστοιχα.



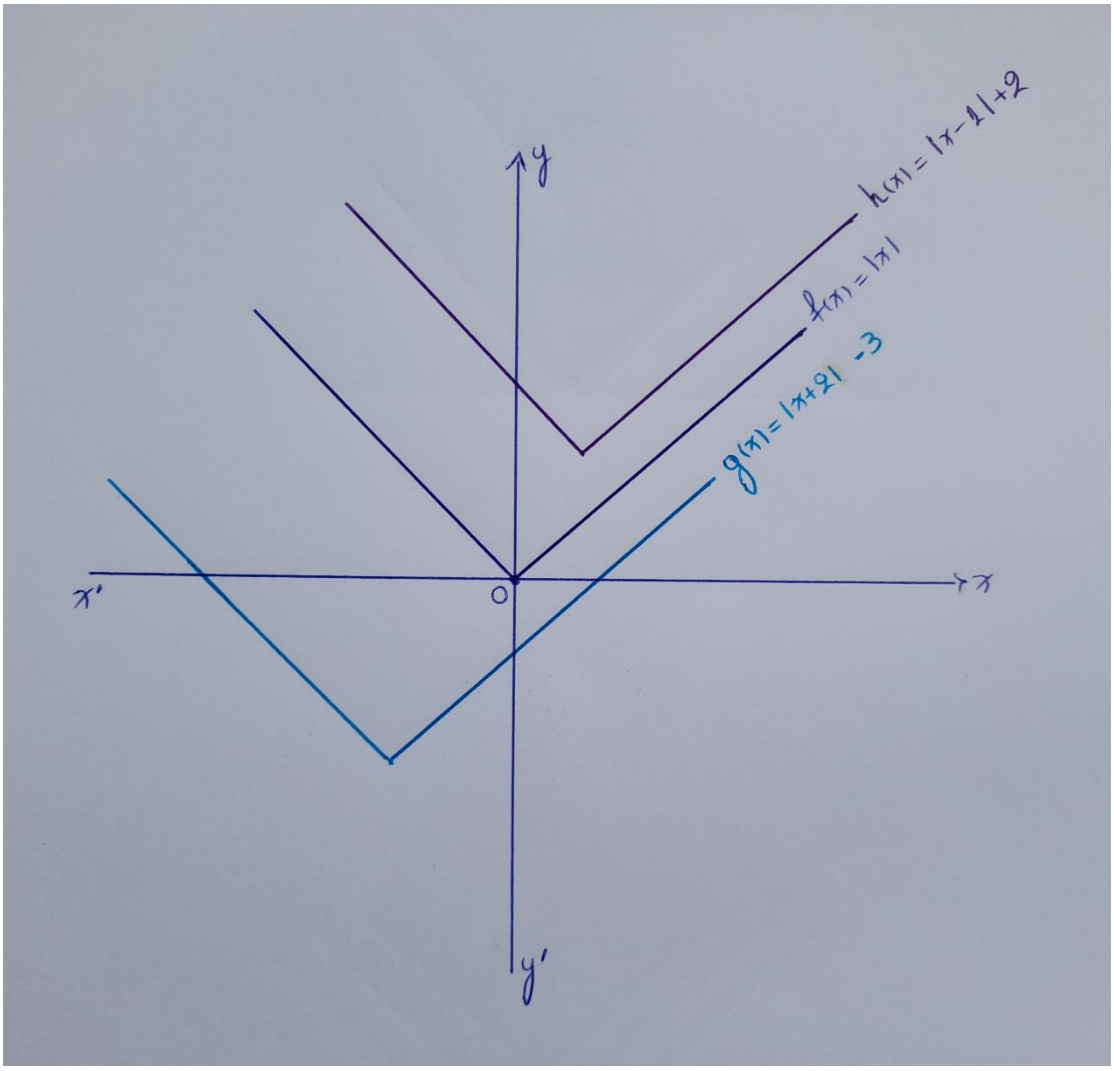
**Άσκηση 2 - Λύση**

Οι συναρτήσεις g και h αποτελούν οριζόντιες μετατοπίσεις της συνάρτησης f προς τα δεξιά κατά 1 μονάδα και προς τα αριστερά κατά 1 μονάδα αντίστοιχα.



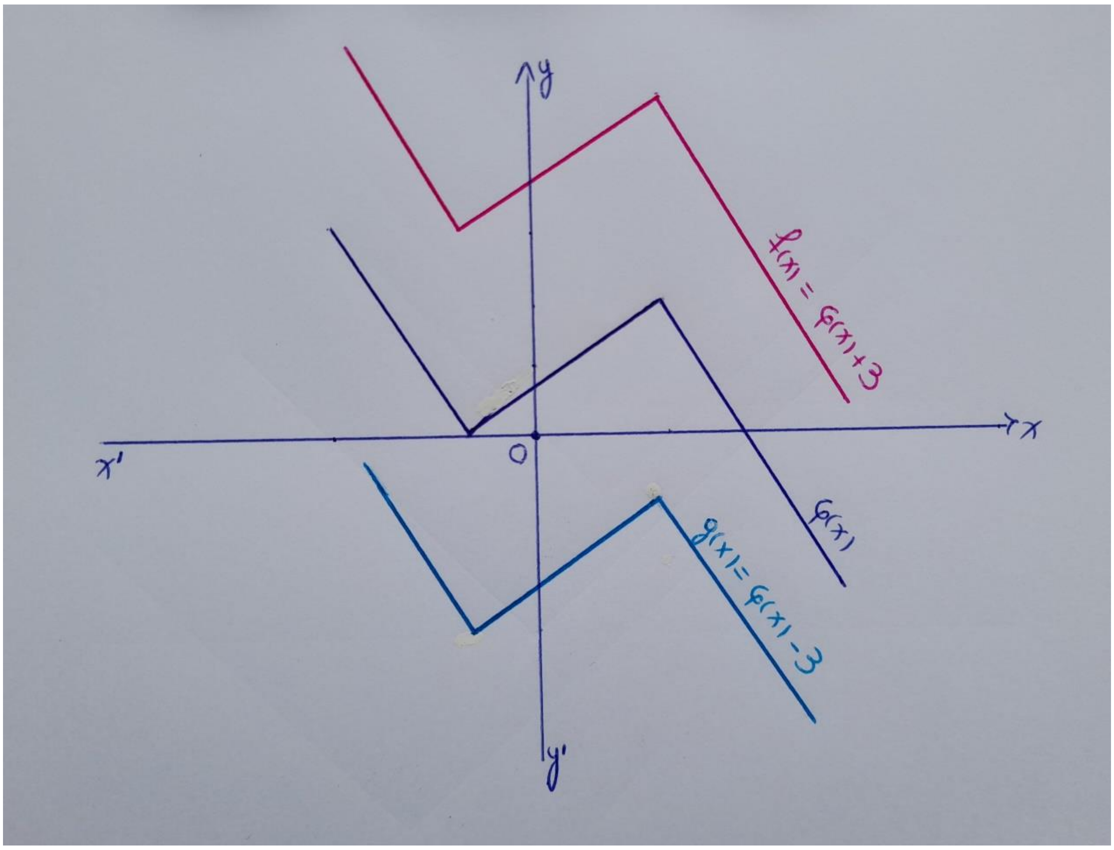
**Άσκηση 3 - Λύση**

Οι συναρτήσεις g και h αποτελούν οριζόντια μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και έπειτα κάθετη μετατόπιση κατά 3 μονάδες προς τα κάτω της f και οριζόντια μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και έπειτα κάθετη μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα πάνω της f αντίστοιχα.

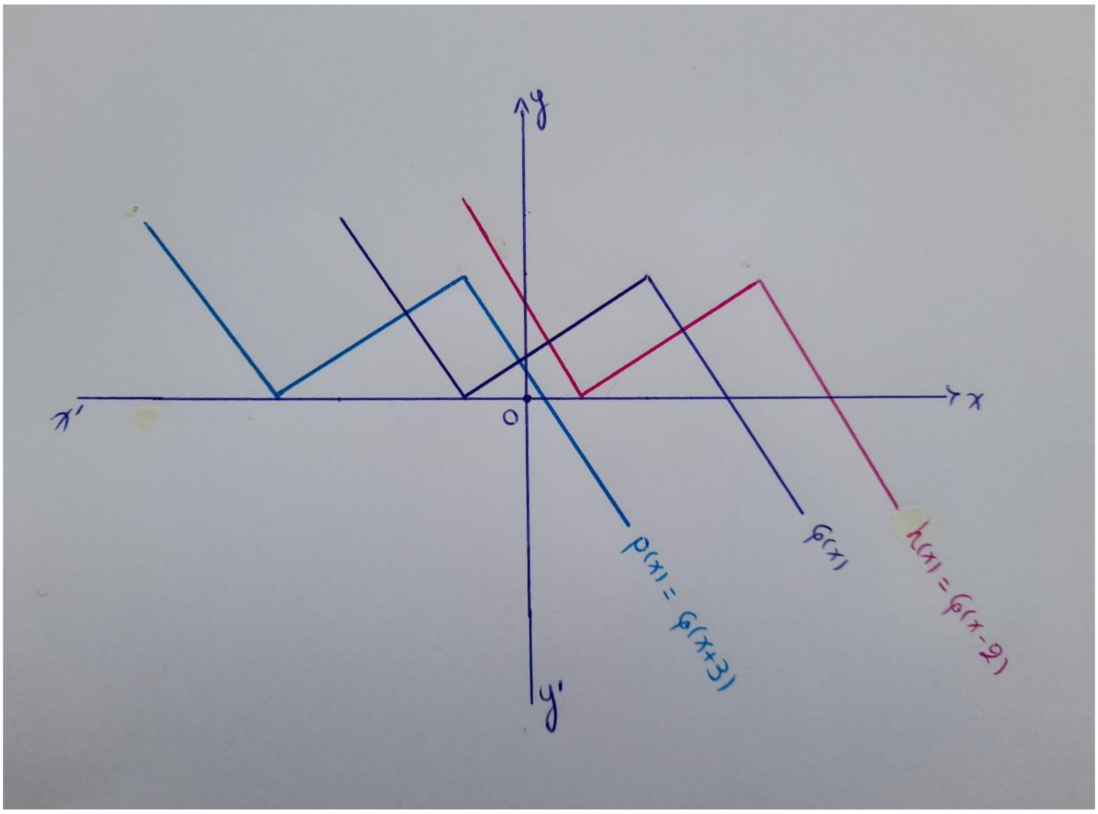


**Άσκηση 4 - Λύση**

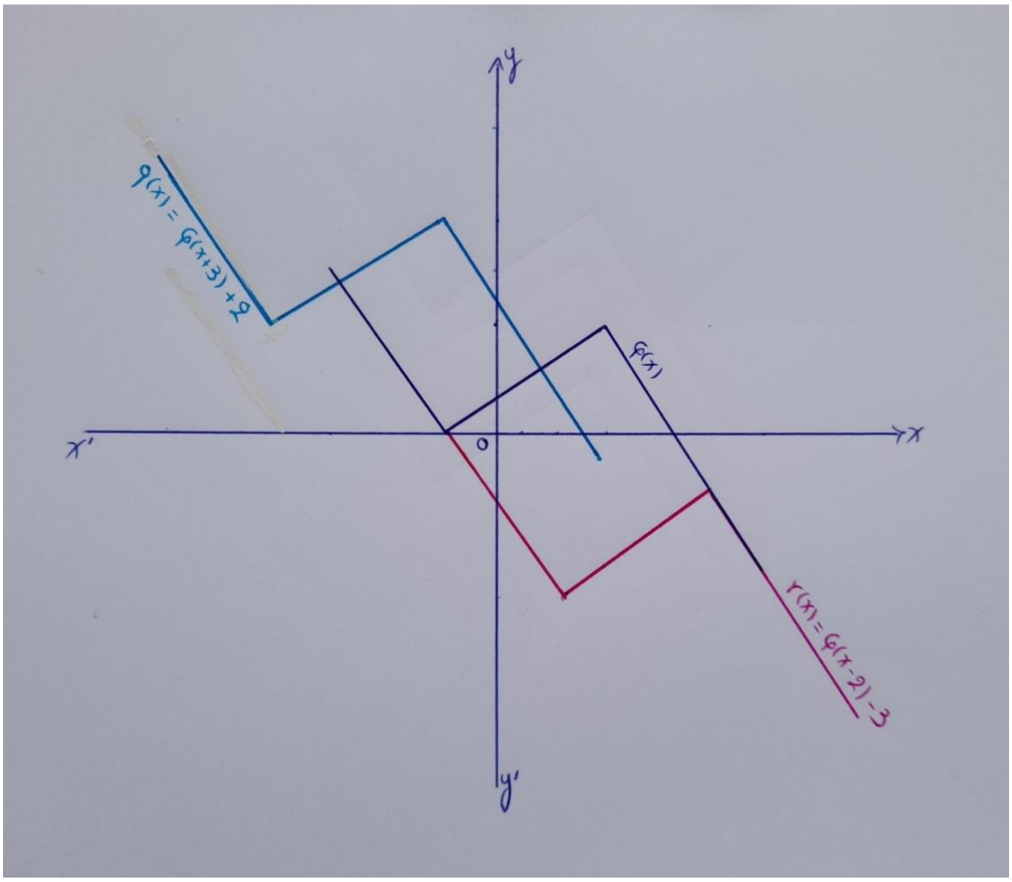
α) Οι συναρτήσεις f και g αποτελούν κατακόρυφες μετατοπίσεις της συνάρτησης φ κατά 3 μονάδες προς τα πάνω και προς τα κάτω αντίστοιχα.



β) Οι συναρτήσεις h και p αποτελούν οριζόντιες μετατοπίσεις της συνάρτησης φ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά αντίστοιχα.



γ) Οι συναρτήσεις r και q αποτελούν οριζόντια μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και έπειτα κάθετη μετατόπιση κατά 3 μονάδες προς τα κάτω της συνάρτησης φ και οριζόντια μετατόπιση κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και έπειτα κάθετη μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα πάνω της συνάρτησης φ αντίστοιχα.



**Άσκηση 5 - Λύση**

$\varphi(x) = 3x^2 - 2x + 1$

α)

$f(x) = 3(x+1)^2 - 2(x+1) + 1 - 3 = 3x^2 + 6x + 3 - 2x - 2 - 2 \Rightarrow$

$f(x) = 3x^2 + 4x - 1$

β)

$f(x) = 3(x+3)^2 - 2(x+3) + 1 + 2 = 3x^2 + 18x + 27 - 2x - 6 + 3 \Rightarrow$

$f(x) = 3x^2 + 16x + 24$

γ)

$f(x) = 3(x-2)^2 - 2(x-2) + 1 - 1 = 3x^2 - 12x + 12 - 2x + 4 \Rightarrow$

$f(x) = 3x^2 - 14x + 16$

δ)

$f(x) = 3(x-1)^2 - 2(x-1) + 1 + 5 = 3x^2 - 6x + 3 - 2x + 2 + 6 \Rightarrow$

$f(x) = 3x^2 - 8x + 11$

# Κεφάλαιο 3 : Τριγωνομετρία

## 3.1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

## Λύσεις

**Άσκηση 1 – Λύση**

Η μετατροπή σε $rad$ θα γίνει με χρήση του τύπου: $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180^o}}$ ή $\boldsymbol{\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi}$. Για κάθε μία από τις γωνίες έχουμε:

- Για $\mu = 30^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{30^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{1}{6} \cdot \pi = \frac{\pi}{6}\ rad$
- Για $\mu = 45^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{45^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{1}{4} \cdot \pi = \frac{\pi}{4}\ rad$
- Για $\mu = 60^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{60^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{1}{3} \cdot \pi = \frac{\pi}{3}\ rad$
- Για $\mu = 90^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{90^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{2}\ rad$
- Για $\mu = 120^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{120^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{2}{3} \cdot \pi = \frac{2\pi}{3}\ rad$
- Για $\mu = 180^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{180^o}{180^o} \cdot \pi = \pi\ rad$
- Για $\mu = 270^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{270^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{3}{2} \cdot \pi = \frac{3\pi}{2}\ rad$

**Άσκηση 2 – Λύση**

Με χρήση του τύπου: $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180^o}}$ ή $\boldsymbol{\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi}$, για κάθε μία από τις γωνίες έχουμε:

- Για $\mu = 36^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{36^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{1}{5} \cdot \pi = \frac{\pi}{5}\ rad$
- Για $\mu = 22{,}5^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{22{,}5^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{1}{8} \cdot \pi = \frac{\pi}{8}\ rad$
- Για $\mu = 18^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{18^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{1}{10} \cdot \pi = \frac{\pi}{10}\ rad$
- Για $\mu = 15^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{15^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{1}{12} \cdot \pi = \frac{\pi}{15}\ rad$
- Για $\mu = 20^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{20^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{1}{9} \cdot \pi = \frac{\pi}{9}\ rad$
- Για $\mu = 72^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{72^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{2}{5} \cdot \pi = \frac{2\pi}{5}\ rad$

**Άσκηση 3 – Λύση**

Με χρήση του τύπου: $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180^o}}$ ή $\boldsymbol{\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi}$, για κάθε μία από τις γωνίες έχουμε:

- Για $\mu = 1.845^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{1.845^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{1.845^o:45}{180^o:45} \cdot \pi = \frac{41}{4} \cdot \pi = \frac{41\pi}{4}\ rad$
- Για $\mu = -1.740^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{-1.740^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{-1.740^o:60}{180^o:60} \cdot \pi = \frac{-29}{3} \cdot \pi = \frac{-29\pi}{3}\ rad$

**Άσκηση 4 – Λύση**

Με χρήση του τύπου: $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180^o}}$ ή $\boldsymbol{\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi}$, για κάθε μία από τις γωνίες έχουμε:

- Για $\mu = 3.800^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{3.800^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{3.800^o:20}{180^o:20} \cdot \pi = \frac{190}{9} \cdot \pi = \frac{190\pi}{9}\ rad$
- Για $\mu = 1.815^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{1.815^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{1.815^o:15}{180^o:15} \cdot \pi = \frac{121}{12} \cdot \pi = \frac{121\pi}{12}\ rad$
- Για $\mu = 2.000^o$ παίρνουμε: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{2.000^o}{180^o} \cdot \pi = \frac{2.000^o:20}{180^o:20} \cdot \pi = \frac{100}{9} \cdot \pi = \frac{100\pi}{9}\ rad$

**Άσκηση 5 – Λύση**

Η μετατροπή σε *μοίρες* θα γίνει με χρήση του τύπου: $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180^o}}$ ή $\boldsymbol{\mu = \frac{\alpha \cdot 180^o}{\pi}}$. Για κάθε μία από τις γωνίες έχουμε:

- Για $\alpha = \frac{\pi}{12}\ rad$ παίρνουμε: $\mu = \frac{\alpha \cdot 180^o}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{12} \cdot 180^o}{\pi} = \frac{\pi \cdot 15^o}{\pi} = 15^o$
- Για $\alpha = \frac{\pi}{15}\ rad$ παίρνουμε: $\mu = \frac{\alpha \cdot 180^o}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{15} \cdot 180^o}{\pi} = \frac{\pi \cdot 12^o}{\pi} = 12^o$
- Για $\alpha = \frac{\pi}{18}\ rad$ παίρνουμε: $\mu = \frac{\alpha \cdot 180^o}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{18} \cdot 180^o}{\pi} = \frac{\pi \cdot 10^o}{\pi} = 10^o$
- Για $\alpha = \frac{3\pi}{4}\ rad$ παίρνουμε: $\mu = \frac{\alpha \cdot 180^o}{\pi} = \frac{\frac{3\pi}{4} \cdot 180^o}{\pi} = \frac{3\pi \cdot 45^o}{\pi} = 3 \cdot 45^o = 135^o$
- Για $\alpha = \frac{5\pi}{6}\ rad$ παίρνουμε: $\mu = \frac{\alpha \cdot 180^o}{\pi} = \frac{\frac{5\pi}{6} \cdot 180^o}{\pi} = \frac{5\pi \cdot 30^o}{\pi} = 3 \cdot 50^o = 150^o$

***Στην περίπτωση αυτή μπορούμε απευθείας να ορίσουμε $\boldsymbol{\pi = 180^o}$ και να βρούμε τη γωνία σε μοίρες.**

**Π.χ.** $\boldsymbol{\frac{\pi}{12}\ rad\ αντιστοιχούν\ σε\ \frac{180^o}{12} = 15^o}$

**Άσκηση 6 – Λύση**

Η μετατροπή σε *μοίρες* θα γίνει με χρήση του τύπου: $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180^o}}$ ή $\boldsymbol{\mu=\frac{\alpha\cdot 180^o}{\pi}}$. Για κάθε μία από τις γωνίες έχουμε:

- Για $\alpha=\frac{\pi}{9}\ rad$ παίρνουμε: $\mu=\frac{\alpha\cdot 180^o}{\pi}=\frac{\frac{\pi}{9}\cdot 180^o}{\pi}=\frac{\pi\cdot 20^o}{\pi}=20^o$
- Για $\alpha=\frac{300\pi}{18}\ rad$ παίρνουμε: $\mu=\frac{\alpha\cdot 180^o}{\pi}=\frac{\frac{300\pi}{18}\cdot 180^o}{\pi}=\frac{300\pi\cdot 10^o}{\pi}=3.000^o$
- Για $\alpha=\frac{352\pi}{5}\ rad$ παίρνουμε: $\mu=\frac{\alpha\cdot 180^o}{\pi}=\frac{\frac{352\pi}{5}\cdot 180^o}{\pi}=\frac{352\pi\cdot 36^o}{\pi}=12.672^o$
- Για $\alpha=\frac{31\pi}{10}\ rad$ παίρνουμε: $\mu=\frac{\alpha\cdot 180^o}{\pi}=\frac{\frac{31\pi}{10}\cdot 180^o}{\pi}=\frac{31\pi\cdot 18^o}{\pi}=558^o$

**Άσκηση 7 – Λύση**

Η μετατροπή σε *μοίρες* θα γίνει με χρήση του τύπου: $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180^o}}$ ή $\boldsymbol{\mu=\frac{\alpha\cdot 180^o}{\pi}}$. Για κάθε μία από τις γωνίες έχουμε:

- Για $\alpha=\frac{-35\pi}{18}\ rad$ παίρνουμε: $\mu=\frac{\alpha\cdot 180^o}{\pi}=\frac{\frac{-35\pi}{18}\cdot 180^o}{\pi}=\frac{-35\pi\cdot 10^o}{\pi}=-350^o$
- Για $\alpha=\frac{43\pi}{4}\ rad$ παίρνουμε: $\mu=\frac{\alpha\cdot 180^o}{\pi}=\frac{\frac{43\pi}{4}\cdot 180^o}{\pi}=\frac{43\pi\cdot 45^o}{\pi}=1.935^o$

**Άσκηση 8 – Λύση**

Σκεφτόμαστε ως εξής:

- Το μήκος του κύκλου αντιστοιχεί σε περιφέρεια πλήρους γωνίας μέτρου $360^o$. Το μήκος τότε υπολογίζεται από τον τύπο: $L = 2\pi \cdot r$

- Το μήκος του κύκλου επίκεντρης γωνίας μέτρου $\omega^o$, αντιστοιχεί σε περιφέρεια κύκλου μήκους $S$.

Οπότε δημιουργούμε τον λόγο: $S = 2\pi \cdot r \cdot \frac{\omega^o}{360^o}$. Επιλύοντας τον τύπο ως προς $\omega^o$, παίρνουμε:

$$\boldsymbol{\omega^o = \frac{360^o \cdot S}{2\pi \cdot r} = \frac{180^o \cdot S}{\pi \cdot r}}$$

Ο οποίος μας δίνει την έκφραση της επίκεντρης γωνίας σε μοίρες.

Με χρήση του τύπου: $\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi$ θέτοντας όπου $\mu = \omega^o = \frac{180^o \cdot S}{\pi \cdot r}$, παίρνουμε:

$$\alpha = \frac{\mu}{180^o} \cdot \pi = \frac{\frac{180^o \cdot S}{\pi \cdot r}}{180^o} \pi = \frac{180^o \cdot S \cdot \pi}{180^o \cdot \pi \cdot r} = \frac{S}{r}$$

Οπότε η έκφραση της γωνίας σε ακτίνια δίνεται από τον τύπο: $\boldsymbol{\alpha = \frac{S}{r}}$

**Άσκηση 9 – Λύση**

Θα εκφράσουμε τις γωνίες σε ακέραια πολλαπλάσια του αριθμού $360^o$ χρησιμοποιώντας τον τύπο της Ευκλείδιας διαίρεσης και θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους:

- $\eta\mu(k \cdot 360^o + \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^o + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\varepsilon\varphi(k \cdot 360^o + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$
- $\sigma\varphi(k \cdot 360^o + \omega) = \sigma\varphi\omega$

Η γωνία $1.845^o$ γράφεται: $1.845^o = 5 \cdot\ 360^o +\ 45^o$, οπότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι:

- $\eta\mu(5 \cdot\ 360^o +\ 45^o) = \eta\mu45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu(5 \cdot\ 360^o +\ 45^o) = \sigma\upsilon\nu45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\varepsilon\varphi(5 \cdot\ 360^o +\ 45^o) = \varepsilon\varphi45^o = 1$
- $\sigma\varphi(5 \cdot\ 360^o +\ 45^o) = \sigma\varphi45^o = 1$

Η γωνία $3.630^o$ γράφεται: $3.630^o = 10 \cdot\ 360^o +\ 30^o$, οπότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι:

- $\eta\mu(10 \cdot\ 360^o +\ 30^o) = \eta\mu30^o = \frac{1}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu(10 \cdot\ 360^o +\ 30^o) = \sigma\upsilon\nu30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\varepsilon\varphi(10 \cdot\ 360^o +\ 30^o) = \varepsilon\varphi30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sigma\varphi(10 \cdot\ 360^o +\ 30^o) = \sigma\varphi30^o = \sqrt{3}$

Η γωνία $1.500^o$ γράφεται: $1.500^o = 4 \cdot 360^o + 60^o$, οπότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι:

- $\eta\mu(4 \cdot 360^o + 60^o) = \eta\mu 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu(4 \cdot 360^o + 60^o) = \sigma\upsilon\nu 60^o = \frac{1}{2}$
- $\varepsilon\varphi(4 \cdot 360^o + 60^o) = \varepsilon\varphi 60^o = \sqrt{3}$
- $\sigma\varphi(4 \cdot 360^o + 60^o) = \sigma\varphi 60^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**Άσκηση 10 – Λύση**

Οι αρνητικές γωνίες προκύπτουν κατά την περιστροφή του ημιάξονα $Ox$ κατά την αρνητική φορά (κίνηση των δεικτών του ρολογιού). Αρνητικές γωνίες μεγαλύτερες των $360^o$ προκύπτουν με $k$ πλήρεις περιστροφές και όποιο υπόλοιπο έχουμε. Λόγω συμμετρίας μπορούμε να βρούμε την τελική γωνία ως μέτρο και σε ποιο τεταρτημοριο ανήκει.

- Η γωνία $1.845^o$ γράφεται: $1.845^o = 5 \cdot 360^o + 45^o$, ενώ η αντίστοιχη αρνητική θα είναι $-1.845^o = -(5 \cdot 360^o + 45^o)$. Διαγράφουμε δηλαδή 5 πλήρεις κύκλους κατά την αρνητική φορά και η πλευρά της γωνίας βρίσκεται $45^o$ σε σχέση με τον άξονα $Ox$ και στο 4ο τεταρτημόριο. Οπότε λόγω συμμετρίας και γνωρίζοντας ότι στο 4ο τεταρτημόριο ισχύουν: $\boldsymbol{\eta\mu\omega < 0, \varepsilon\varphi\omega < 0, \sigma\varphi\omega < 0 \ \kappa\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\omega > 0}$ καταλήγουμε ότι:

$$\eta\mu(-1.845^o) = \eta\mu(-(5 \cdot 360^o + 45^o) = -\eta\mu 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sigma\upsilon\nu(-1.845^o) = \sigma\upsilon\nu(-(5 \cdot 360^o + 45^o) = \sigma\upsilon\nu 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\varepsilon\varphi(-1.845^o) = \varepsilon\varphi(-(5 \cdot 360^o + 45^o) = -\varepsilon\varphi 45^o = -1$$
$$\sigma\varphi(-1.845^o) = \sigma\varphi(-(5 \cdot 360^o + 45^o) = -\sigma\varphi 45^o = -1$$

- Η γωνία $420^o$ γράφεται: $420^o = 1 \cdot 360^o + 60^o$, ενώ η αντίστοιχη αρνητική θα είναι $-420^o = -(1 \cdot 360^o + 60^o)$. Διαγράφουμε δηλαδή 1 πλήρη κύκλου κατά την αρνητική φορά και η πλευρά της γωνίας βρίσκεται $60^o$ σε σχέση με τον άξονα $Ox$ και στο 4ο τεταρτημόριο.

  Οπότε λόγω συμμετρίας και γνωρίζοντας ότι στο 4ο τεταρτημόριο ισχύουν:

  $\boldsymbol{\eta\mu\omega < 0, \varepsilon\varphi\omega < 0, \sigma\varphi\omega < 0\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\omega > 0}$ καταλήγουμε ότι:

  $\eta\mu(-420^o) = \eta\mu(-(1 \cdot 360^o + 60^o) = -\eta\mu 60^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

  $\sigma\upsilon\nu(-420^o) = \sigma\upsilon\nu(-(1 \cdot 360^o + 60^o) = \sigma\upsilon\nu 60^o = \frac{1}{2}$

  $\varepsilon\varphi(-420^o) = \varepsilon\varphi(-(1 \cdot 360^o + 60^o) = -\varepsilon\varphi 60^o = -\sqrt{3}$

  $\sigma\varphi(-420^o) = \sigma\varphi(-(1 \cdot 360^o + 60^o) = -\sigma\varphi 60^o = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

- Η γωνία $765^o$ γράφεται: $765^o = 2 \cdot 360^o + 45^o$, ενώ η αντίστοιχη αρνητική θα είναι $-765^o = -(2 \cdot 360^o + 45^o)$. Διαγράφουμε δηλαδή 2 πλήρεις κύκλους κατά την αρνητική φορά και η πλευρά της γωνίας βρίσκεται $45^o$ σε σχέση με τον άξονα $Ox$ και στο 4ο τεταρτημόριο.

  Οπότε λόγω συμμετρίας και γνωρίζοντας ότι στο 4ο τεταρτημόριο ισχύουν:

  $\boldsymbol{\eta\mu\omega < 0, \varepsilon\varphi\omega < 0, \sigma\varphi\omega < 0\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\omega > 0}$ καταλήγουμε ότι:

  $\eta\mu(-765^o) = \eta\mu(-(2 \cdot 360^o + 45^o) = -\eta\mu 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

  $\sigma\upsilon\nu(-765^o) = \sigma\upsilon\nu(-(2 \cdot 360^o + 45^o) = \sigma\upsilon\nu 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  $\varepsilon\varphi(-765^o) = \varepsilon\varphi(-(2 \cdot 360^o + 45^o) = -\varepsilon\varphi 45^o = -1$

  $\sigma\varphi(-765^o) = \sigma\varphi(-(2 \cdot 360^o + 45^o) = -\sigma\varphi 45^o = -1$

**Άσκηση 11 – Λύση**

Το Τρίγωνο $ABH$ είναι Ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά $AB$. Από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, οξείας γωνίας, σε Ορθογώνιο Τρίγωνο παίρνουμε:

- $\sigma\upsilon\nu\widehat{\mathrm{B}} = \frac{BH}{AB}$
  $\sigma\upsilon\nu 60^o = \frac{BH}{1}$
  $BH = \frac{1}{2}\,m$

- $\eta\mu\widehat{\mathrm{B}} = \frac{AH}{AB}$
  $\eta\mu 60^o = \frac{AH}{1}$
  $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}\,m$

Επιπλέον η γωνία $\hat{\Gamma}$ ισούται με $30^o$ ως συμπληρωματική της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$. Οπότε η πλευρά $B\Gamma$ θα ισούται με $2\,m$ καθώς είναι διπλάσια της πλευράς $AB$, διότι σε κάθε Ορθογώνιο Τρίγωνο η απέναντι κάθετη από γωνία μέτρου $30^o$ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Επιπλέον από το Ορθογώνιο Τρίγωνο $A\Gamma H$ με υποτείνουσα την πλευρά $A\Gamma$,παίρνουμε:

- $\eta\mu\widehat{\Gamma} = \frac{AH}{A\Gamma}$
  $\eta\mu 30^o = \frac{AH}{A\Gamma}$
  $\frac{1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{A\Gamma}$
  $A\Gamma = \sqrt{3}\,m$

- $\sigma\upsilon\nu\widehat{\Gamma} = \frac{H\Gamma}{A\Gamma}$
  $\sigma\upsilon\nu 30^o = \frac{H\Gamma}{A\Gamma}$
  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H\Gamma}{\sqrt{3}}$
  $H\Gamma = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}m$

**Άσκηση 12 – Λύση**

Το Τρίγωνο $ΒΔΓ$ είναι ισοσκελές οπότε θα ισχύει $ΒΓ = ΒΔ$ $(1)$. Επιπλέον και το Τρίγωνο $ΒΔΑ$ είναι ισοσκελές και θα ισχύει $ΒΔ = ΔΑ$ $(2)$. Οπότε καταλήγουμε ότι $ΒΓ = ΔΑ$. Η αποδεικτέα σχέση γίνεται:

i. $ΒΓ + ΓΔ = ΑΔ + ΓΔ = ΑΓ$

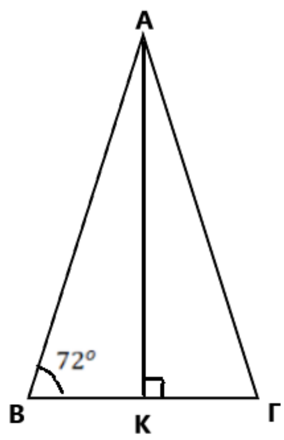
ii. Από το Θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου στο Τρίγωνο $ΑΒΓ$ παίρνουμε την ισότητα:

$$\frac{ΓΔ}{ΔΑ} = \frac{ΒΓ}{ΑΒ} \xRightarrow[ΓΔ=ΑΓ-ΒΓ]{\substack{ΔΑ=ΒΓ\\ΑΒ=ΑΓ}} \frac{ΑΓ-ΒΓ}{ΒΓ} = \frac{ΒΓ}{ΑΓ}$$

Οπότε εκτελώντας τις πράξεις παίρνουμε:

$$\frac{ΑΓ}{ΒΓ} - \frac{ΒΓ}{ΒΓ} = \frac{ΒΓ}{ΑΓ}$$
$$\frac{ΑΓ}{ΒΓ} - 1 = \frac{ΒΓ}{ΑΓ} \ (3)$$

Φέρνουμε το ύψος $ΑΚ$ και έχουμε το παρακάτω σχήμα:




Στο παραπάνω σχήμα ισχύει: $συνφ = \frac{ΒΚ}{ΑΒ} \xRightarrow[ΑΒ=ΑΓ]{ΒΚ=\frac{ΒΓ}{2}} συνφ = \frac{ΒΓ}{2ΑΓ}$ δηλαδή: $\boldsymbol{2συνφ} = \boldsymbol{\frac{ΒΓ}{ΑΓ}} = \boldsymbol{x}$.

Η σχέση (3) γράφεται:

$$\frac{1}{x} - 1 = x$$

$$1 + x = \frac{1}{x}$$

iii. Από τη σχέση $1 + x = \frac{1}{x}$ εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς την μεταβλητή $x \neq 0$, ως εξής:

$$1 + x = \frac{1}{x}$$
$$x + x^2 = 1$$
$$x^2 + x - 1 = 0$$

Η εξίσωση έχει λύσεις: $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \cong -1{,}62$ ή $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cong 0{,}62$. Για το συνημίτονο οξείας γωνίας γνωρίζουμε ότι ισχύει η ανισότητα: $0 < συνφ < 1$ οπότε δεκτή η λύση: $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cong 0{,}62$

Υπολογίζουμε το συνημίτονο των $72^o$ αντικαθιστώντας στην λύση $x = 2συν72^o$ και παίρνουμε:

$$x \cong 0{,}62$$
$$2συν72^o \cong 0{,}62$$
$$συν72^o \cong 0{,}31$$

**Άσκηση 13 – Λύση**

i. Στο Ορθογώνιο Τρίγωνο $ΓΚΔ$,με υποτείνουσα την $ΓΔ$ ισχύει: $ημφ = \frac{ΚΔ}{ΓΔ}$ . Στο Ορθογώνιο Τρίγωνο $ΓΑΔ$,με υποτείνουσα την $ΓΔ$ ισχύει: $ημφ = \frac{ΑΔ}{ΓΔ}$. Από τις δύο σχέσεις παίρνουμε την ισότητα $\frac{ΑΔ}{ΓΔ} = \frac{ΚΔ}{ΓΔ}$ από την οποία καταλήγουμε στην ισότητα: $\boldsymbol{ΑΔ = ΚΔ}.(\mathbf{1})$

Στο Ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΔΚ$ γνωρίζουμε ότι $\widehat{\mathrm{B}} = 45^o$, οπότε είναι ισοσκελές. Τότε θα ισχύει: $\boldsymbol{ΚΔ = ΒΚ}.(\mathbf{2})$

Συνοψίζοντας από τις σχέσεις $(1) και (2)$ θα ισχύει: $\boldsymbol{ΑΔ = ΚΔ = ΒΚ}$

ii. Στο Ορθογώνιο Τρίγωνο $ΓΚΔ$,με υποτείνουσα την $ΓΔ$ ισχύει: $συνφ = \frac{ΚΓ}{ΓΔ}$ . Στο Ορθογώνιο Τρίγωνο $ΓΑΔ$,με υποτείνουσα την $ΓΔ$ ισχύει: $συνφ = \frac{ΑΓ}{ΓΔ}$. Από τις δύο σχέσεις παίρνουμε την ισότητα $\frac{ΑΓ}{ΓΔ} = \frac{ΚΓ}{ΓΔ}$ από την οποία καταλήγουμε στην ισότητα: $\boldsymbol{ΑΓ = ΚΓ}.(\mathbf{1})$

iii. Στο ορθογώνιο Τρίγωνο $ΒΚΔ$ με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος παίρνουμε:

$$ΒΔ^2 = ΒΚ^2 + ΔΚ^2$$
$$ΒΔ^2 = 2ΔΚ^2$$
$$ΒΔ = ΔΚ\sqrt{2}$$

Από το Θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου στο Τρίγωνο $ΑΒΓ$, παίρνουμε το λόγο:

$$\frac{ΒΔ}{ΔΑ} = \frac{ΒΓ}{ΑΓ} \xRightarrow[ΚΓ=ΑΓ]{\substack{ΒΔ=ΔΚ\sqrt{2} \\ ΔΑ=ΔΚ}} \frac{ΔΚ\sqrt{2}}{ΔΚ} = \frac{ΒΓ}{ΚΓ} \xRightarrow[ΒΚ=ΔΚ]{ΒΓ=ΒΚ+ΚΓ} \sqrt{2} = \frac{ΔΚ+ΚΓ}{ΚΓ}(1)$$

Από το Ορθογώνιο Τρίγωνο $ΔΚΓ$ και τον ορισμό της εφαπτομένης παίρνουμε τη σχέση:

$$εφφ = \frac{ΔΚ}{ΚΓ}$$

Μετασχηματίζουμε τη σχέση $(1)$ και παίρνουμε:

$$\sqrt{2} = \frac{ΔΚ}{ΚΓ} + \frac{ΚΓ}{ΚΓ}$$
$$\sqrt{2} = εφφ + 1$$
$$εφφ = \sqrt{2} - 1 \cong 0{,}41$$

## 3.2. Βασικές Τριγωνομετρικές ταυτότητες

## Λύσεις

### Άσκηση 1 – Λύση

Με χρήση της ταυτότητας $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ και αντικατάσταση, παίρνουμε:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + συν^2x = 1$$

$$\frac{1}{9} + συν^2x = 1$$

$$συν^2x = 1 - \frac{1}{9}$$

$$συν^2x = \frac{8}{9}$$

$$συνx = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Δεχόμαστε τη λύση $\mathbf{συνx} = -\frac{\mathbf{2\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$, αφού η γωνία βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο και ισχύει $συνx < 0$.

Επιπλέον ισχύει: $εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ και $σφx = \frac{συνx}{ημx} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$

**Άσκηση 2 – Λύση**

Με χρήση της ταυτότητας $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ και αντικατάσταση, παίρνουμε:

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + συν^2x = 1$$

$$\frac{1}{16} + συν^2x = 1$$

$$συν^2x = 1 - \frac{1}{16}$$

$$συν^2x = \frac{15}{16}$$

$$\text{συνx} = \pm\sqrt{\frac{15}{16}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Δεχόμαστε τη λύση $\boldsymbol{συνx} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, αφού η γωνία βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο και ισχύει

$\text{συνx} > 0$. Επιπλέον ισχύει: $εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$ και $σφx = \frac{συνx}{ημx} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} = -\sqrt{15}$

**Άσκηση 3 – Λύση**

Με χρήση της ταυτότητας $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ και αντικατάσταση, παίρνουμε:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + ημ^2x = 1$$

$$\frac{1}{9} + ημ^2x = 1$$

$$ημ^2x = 1 - \frac{1}{9}$$

$$ημ^2x = \frac{8}{9}$$

$$\text{ημx} = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Δεχόμαστε τη λύση $\boldsymbol{ημx} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, αφού η γωνία βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο και ισχύει

$\text{ημx} < 0$. Επιπλέον ισχύει: $εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$ και $σφx = \frac{συνx}{ημx} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

**Άσκηση 4 – Λύση**

Με χρήση της ταυτότητας $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ και αντικατάσταση, παίρνουμε:

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + ημ^2x = 1$$

$$\frac{1}{25} + ημ^2x = 1$$

$$ημ^2x = 1 - \frac{1}{25}$$

$$ημ^2x = \frac{24}{25}$$

$$\text{ημx} = \pm\sqrt{\frac{24}{25}} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Δεχόμαστε τη λύση $\mathbf{ημx} = -\frac{\mathbf{2\sqrt{6}}}{\mathbf{5}}$**,** αφού η γωνία βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο και ισχύει

$\text{ημx} < 0.$

Επιπλέον ισχύει: $εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}{-\frac{1}{5}} = 2\sqrt{6}$ και $σφx = \frac{συνx}{ημx} = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$

**Άσκηση 5 – Λύση**

Με χρήση της ταυτότητας $εφx = \frac{ημx}{συνx}$ παίρνουμε:

$$4 = \frac{ημx}{συνx}$$

$$ημx = 4συνx \ (1)$$

Με χρήση της ταυτότητας $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ και αντικατάσταση, παίρνουμε:

$$(4συνx)^2 + συν^2x = 1$$

$$16συν^2x + συν^2x = 1$$

$$17συν^2x = 1$$

$συν^2x = \frac{1}{17}$

$συνx = \pm\sqrt{\frac{1}{17}} = \pm\frac{\sqrt{17}}{17}$

Δεχόμαστε τη λύση $\boldsymbol{συνx} = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, αφού η γωνία βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο και ισχύει $συνx < 0$.

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και έχουμε: $ημx = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$

Επιπλέον ισχύει: $εφx \cdot σφx = 1$ οπότε $σφx = \frac{1}{εφx} = \frac{1}{4}$

**Άσκηση 6 – Λύση**

Με χρήση της ταυτότητας $εφx = \frac{ημx}{συνx}$ παίρνουμε:

$5 = \frac{ημx}{συνx}$

$ημx = 5συνx$ (1)

Με χρήση της ταυτότητας $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ και αντικατάσταση, παίρνουμε:

$(5συνx)^2 + συν^2x = 1$

$25συν^2x + συν^2x = 1$

$26συν^2x = 1$

$συν^2x = \frac{1}{26}$

$συνx = \pm\sqrt{\frac{1}{26}} = \pm\frac{\sqrt{26}}{26}$

Δεχόμαστε τη λύση $\boldsymbol{συνx} = \frac{\sqrt{26}}{26}$, αφού η γωνία βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο και ισχύει $συνx > 0$.

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και έχουμε: $ημx = \frac{5\sqrt{26}}{26}$

Επιπλέον ισχύει: $εφx \cdot σφx = 1$ οπότε $σφx = \frac{1}{εφx} = \frac{1}{5}$

**Άσκηση 7 – Λύση**

Με χρήση της ταυτότητας $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ παίρνουμε:

$$3 = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = 3\eta\mu x \ (1)$$

Με χρήση της ταυτότητας $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ και αντικατάσταση, παίρνουμε:

$$(3\eta\mu x)^2 + \eta\mu^2 x = 1$$

$$9\eta\mu^2 x + \eta\mu^2 x = 1$$

$$10\eta\mu^2 x = 1$$

$$\eta\mu^2 x = \frac{1}{10}$$

$$\mathrm{\eta\mu x} = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Δεχόμαστε τη λύση $\boldsymbol{\eta\mu x} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{10}}$**,** αφού η γωνία βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο και ισχύει

$\mathrm{\eta\mu x} > 0.$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και έχουμε: $\sigma\upsilon\nu x = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Επιπλέον ισχύει: $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$ οπότε $\varepsilon\varphi x = \frac{1}{\sigma\varphi x} = \frac{1}{3}$

**Άσκηση 8 – Λύση**

Με χρήση της ταυτότητας $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ παίρνουμε:

$$-4 = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = -4\eta\mu x \ (1)$$

Με χρήση της ταυτότητας $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ και αντικατάσταση, παίρνουμε:

$$(-4\eta\mu x)^2 + \eta\mu^2 x = 1$$

$$16\eta\mu^2 x + \eta\mu^2 x = 1$$

$$17\eta\mu^2 x = 1$$

$$\eta\mu^2 x = \frac{1}{17}$$

$$\text{ημx} = \pm\sqrt{\frac{1}{17}} = \pm\frac{\sqrt{17}}{17}$$

Δεχόμαστε τη λύση $\mathbf{ημx} = \frac{\sqrt{17}}{17}$**,** αφού η γωνία βρίσκεται στο 2$^{o}$ τεταρτημόριο και ισχύει

ημx $> 0$. Αντικαθιστούμε στη σχέση $(1)$ και έχουμε: $\sigma\upsilon\nu x = \frac{-4\sqrt{17}}{17}$

Επιπλέον ισχύει: $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$ οπότε $\varepsilon\varphi x = \frac{1}{\sigma\varphi x} = -\frac{1}{4}$

**Άσκηση 9 – Λύση**

Για κάθε μία από τις ισότητες, υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη, παίρνουμε:

- $x^2 = r^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\varphi$
- $y^2 = r^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \eta\mu^2\varphi$
- $z^2 = r^2 \cdot \eta\mu^2\theta$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις τρείς ισότητες, έχουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\varphi + r^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \eta\mu^2\varphi + r^2 \cdot \eta\mu^2\theta =$$

$$r^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta(\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi) + r^2 \cdot \eta\mu^2\theta = r^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta + r^2 \cdot \eta\mu^2\theta = r^2(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) = r^2$$

**Άσκηση 10 – Λύση**

i. Κάνοντας πράξεις στο αριστερό μέλος της ισότητας, παίρνουμε:

$$(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+1)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1)=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2-1^2=$$
$$\eta\mu^2x+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2x-1=2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)-1 \;=$$
$$2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+1-1=2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$$

ii. Με το χιαστί γινόμενο η ισότητα παίρνει τη μορφή:

$$(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+1)\sigma\upsilon\nu x=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1)(\eta\mu x+1)$$
$$\cancel{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}-\sigma\upsilon\nu^2x+\cancel{\sigma\upsilon\nu x}=\eta\mu^2x+\cancel{\eta\mu x}+\cancel{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}+\cancel{\sigma\upsilon\nu x}-\cancel{\eta\mu x}-1$$
$$\eta\mu^2x-1=-\sigma\upsilon\nu^2x$$
$\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$ **που ισχύει**.

**Άσκηση 11 – Λύση**

i. Εκτελώντας τις πράξεις στο αριστερό μέλος της ισότητας, έχουμε:

$$(1-\varepsilon\varphi\alpha)^2+(1-\sigma\varphi\alpha)^2=1-2\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi^2\alpha+1-2\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi^2\alpha=$$
$$1+\varepsilon\varphi^2\alpha+1+\sigma\varphi^2\alpha-2(\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}+1+\frac{1}{\varepsilon\varphi^2\alpha}-2\left(\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}\right)=$$
$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}+\frac{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}{\varepsilon\varphi^2\alpha}-2\left(\frac{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\alpha}\right)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}+\frac{1}{\eta\mu^2\alpha}-2\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\alpha}=(\frac{1}{\eta\mu\alpha}-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha})^2$$

ii. Εκτελώντας τις πράξεις στο αριστερό μέλος της ισότητας, έχουμε:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha}+\frac{\eta\mu\alpha}{1-\sigma\varphi\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}+\frac{\eta\mu\alpha}{1-\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}+\frac{\eta\mu\alpha}{\frac{\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}+\frac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}=$$
$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}-\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}=\frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}=\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha$$

**Άσκηση 12 – Λύση**

i. Με το χιαστί γινόμενο η ισότητα γίνεται:

$$(\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta)\varepsilon\varphi\beta=(\sigma\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta)\varepsilon\varphi\alpha$$
$$\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\beta=\sigma\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\alpha$$
$$\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta+1=1+\varepsilon\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\alpha$$ **Που ισχύει**

ii. Εκτελώντας τις πράξεις στο δεξί μέλος της ισότητας, παίρνουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2x(1+(\varepsilon\varphi^2x)^3)=\sigma\upsilon\nu^2x(1+\varepsilon\varphi^2x)(1-\varepsilon\varphi^2x+\varepsilon\varphi^4x)=$$
$$\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2x}(1+\varepsilon\varphi^2x)(1-\varepsilon\varphi^2x+\varepsilon\varphi^4x)=1-\varepsilon\varphi^2x+\varepsilon\varphi^4x$$

**Άσκηση 13 – Λύση**

i. Εκτελώντας τις πράξεις στο αριστερό μέλος της ισότητας, παίρνουμε:

$$((\eta\mu^2x)^3+(\sigma\upsilon\nu^2x)^3)=(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)(\eta\mu^4x-\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^4x)=$$
$$1\cdot(\eta\mu^4x+2\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^4x-3\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x)=$$
$$[(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)^2-3\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x]=$$
$$1-3(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)^2$$

ii. Εκτελώντας τις πράξεις στο αριστερό μέλος της ισότητας, παίρνουμε:

$$\eta\mu^2x\cdot\left(1+\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu^2x}\right)+\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\eta\mu^2x\cdot\left(\frac{\eta\mu^2x}{\eta\mu^2x}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu^2x}\right)+1=$$
$$\eta\mu^2x\cdot\left(\frac{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu^2x}\right)+1=\eta\mu^2x\cdot\left(\frac{1}{\eta\mu^2x}\right)+1=1+1=2$$

**Άσκηση 14 – Λύση**

Παρατηρούμε ότι το κλάσμα $\frac{1+\varepsilon\varphi x}{1+\sigma\varphi x}$ γράφεται: $\frac{1+\varepsilon\varphi x}{1+\sigma\varphi x}=\frac{1+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}=\frac{\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\varepsilon\varphi x$

i. Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1+\varepsilon\varphi^2 x}{1+\sigma\varphi^2 x}=\varepsilon\varphi^2 x$

$$\frac{1+\varepsilon\varphi^2 x}{1+\sigma\varphi^2 x}=\frac{1+\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{1+\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}}=\frac{\frac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\frac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}}=\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\varepsilon\varphi^2 x$$

ii. Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1+\varepsilon\varphi^3 x}{1+\sigma\varphi^3 x}=\varepsilon\varphi^3 x$

$$\frac{1+\varepsilon\varphi^3 x}{1+\sigma\varphi^3 x}=\frac{1+\frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}}{1+\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^3 x}}=\frac{\frac{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}}{\frac{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^3 x}}=\frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}=\varepsilon\varphi^3 x$$

iii. Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1+\varepsilon\varphi^\nu x}{1+\sigma\varphi^\nu x}=\varepsilon\varphi^\nu x$

$$\frac{1+\varepsilon\varphi^\nu x}{1+\sigma\varphi^\nu x}=\frac{1+\frac{\eta\mu^\nu x}{\sigma\upsilon\nu^\nu x}}{1+\frac{\sigma\upsilon\nu^\nu x}{\eta\mu^\nu x}}=\frac{\frac{\eta\mu^\nu x+\sigma\upsilon\nu^\nu x}{\sigma\upsilon\nu^\nu x}}{\frac{\eta\mu^\nu x+\sigma\upsilon\nu^\nu x}{\eta\mu^\nu x}}=\frac{\eta\mu^\nu x}{\sigma\upsilon\nu^\nu x}=\varepsilon\varphi^\nu x$$

**Άσκηση 15 – Λύση**

i. Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο παίρνουμε:

$$(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)^2=\alpha^2$$
$$\sigma\upsilon\nu^2 x-2\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x+\eta\mu^2 x=\alpha^2$$
$$1-2\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x=\alpha^2$$
$$\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x=\frac{1-\alpha^2}{2}$$

ii. Εκτελώντας τις πράξεις παίρνουμε:

$$\frac{1}{\eta\mu x}-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x}=\frac{\alpha}{\frac{1-\alpha^2}{2}}=\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$$

iii. Με τη χρήση της διαφοράς κύβων η παράσταση γίνεται:

$$-(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x+\eta\mu^2 x)=-\alpha\left(1+\frac{1-\alpha^2}{2}\right)=-\alpha(\frac{3-\alpha^2}{2})$$

iv. Εκτελώντας τις πράξεις παίρνουμε:

$$\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\frac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x}=\frac{1}{\frac{1-\alpha^2}{2}}=\frac{2}{1-\alpha^2}$$

**Άσκηση 16 – Λύση**

Η αποδεικτέα σχέση γράφεται: $|\alpha\cdot\eta\mu x+\beta\cdot\sigma\upsilon\nu x|\le|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}|$. Υψώνοντας και τα δύο μέλη (θετικά) στο τετράγωνο, παίρνουμε:

$$(|\alpha\cdot\eta\mu x+\beta\cdot\sigma\upsilon\nu x|)^2\le\left(\left|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right|\right)^2$$

$$\alpha^2\eta\mu^2 x+2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2 x\le\alpha^2+\beta^2$$

$$\alpha^2+\beta^2-\alpha^2\eta\mu^2 x-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x-\beta^2\sigma\upsilon\nu^2 x\ge 0$$

$$\alpha^2(1-\eta\mu^2 x)+\beta^2(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x\ge 0$$

$$\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 x-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x+\beta^2\eta\mu^2 x\ge 0$$

$(\alpha\sigma\upsilon\nu x-\beta\eta\mu x)^2\ge 0$ **που ισχύει για κάθε α,β και $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}$.**

**Άσκηση 17 – Λύση**

Η αποδεικτέα σχέση γράφεται:

$$
\begin{aligned}
A = \eta\mu^8 x + \sigma\upsilon\nu^8 x - 2\eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x + \lambda(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x) \\
&= (\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x)^2 + \lambda(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x) \\
&= \left((\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)(\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)\right)^2 + \lambda(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x) \\
&= (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 + \lambda(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x) \\
&= \eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x - 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + \lambda(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x) \\
&= (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 - 4\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + \lambda((\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 - 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x) \\
&= 1 - 4\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + \lambda(1 - 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x) \\
&= 1 - 4\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + \lambda - 2\lambda \cdot \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 + \lambda - 2(\lambda + 2)\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x
\end{aligned}
$$

Για να είναι η σχέση ανεξάρτητη του $x$ θα πρέπει να ισχύει: $\lambda + 2 = 0$ ή $\lambda = -2$. Για $\lambda = -2$ η τιμή της παράστασης $A$ είναι ίση με $-1$.

**Άσκηση 18 – Λύση**

Για κάθε $\alpha \neq 0$ μετασχηματίζουμε την εξίσωση ως εξής:

$$\mathrm{x}^2 - 2\frac{\alpha+1}{\alpha} \cdot x + \frac{2\alpha+1}{\alpha} = 0$$

Από τους τύπους του Vieta παίρνουμε:

- $S = 2\frac{\alpha+1}{\alpha}$

  $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = 2\frac{\alpha+1}{\alpha}$ (1)

- $P = \frac{2\alpha+1}{\alpha}$

  $\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{2\alpha+1}{\alpha}$ (2)

Υψώνοντας τη σχέση $(1)$ στο τετράγωνο παίρνουμε:

$$(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 4\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^2$$
$$\eta\mu^2\theta + 2\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 4\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$
$$1 + 2\frac{2\alpha+1}{\alpha} = 4\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^2$$
$$\alpha^2 + \alpha^2 \cdot 2\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha}\right) = 4 \cdot \alpha^2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^2$$
$$\alpha^2 + 2\alpha \cdot (2\alpha + 1) = 4(\alpha + 1)^2$$
$$\alpha^2 + 4\alpha^2 + 2\alpha = 4\alpha^2 + 8\alpha + 4$$
$$\alpha^2 - 6\alpha - 4 = 0$$

Η εξίσωση έχει ρίζες: $\boldsymbol{\alpha = 3 - \sqrt{13}}$ ή $\boldsymbol{\alpha = 3 + \sqrt{13}}$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha = 3 + \sqrt{13}$ τότε το άθροισμα των ριζών θα είναι:

$$2\frac{\alpha+1}{\alpha} = 2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = 2 + \frac{2}{3+\sqrt{13}} > 2$$

Η τιμή αυτή απορρίπτεται διότι θα έπρεπε να ισχύει $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta > 2$, που είναι άτοπο.

- Αν $\alpha = 3 - \sqrt{13}$ τότε το άθροισμα των ριζών θα είναι:

$$2\frac{\alpha+1}{\alpha} = 2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = 2 + \frac{2}{3-\sqrt{13}} \cong 2 - 3{,}3 \cong -1{,}3$$

(ικανοποιείται ο περιορισμός $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta \geq -2$)

Επιπλέον το γινόμενο των ριζών θα είναι:

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha} = 2 + \frac{1}{\alpha} = 2 + \frac{1}{3-\sqrt{13}} \cong 2 - 1{,}66 \cong 0{,}34$$

(ικανοποιείται ο περιορισμός $|\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta| \leq 1$)

Δεκτή τιμή της παραμέτρου η: $\boldsymbol{\alpha = 3 - \sqrt{13}}$

- Στην ειδική περίπτωση $\alpha = 0$, η εξίσωση θα είχε τη μορφή: $-2x + 1 = 0$ με λύση $x = \frac{1}{2}$. Τότε θα έπρεπε να ισχύει $\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$ το οποίο είναι άτοπο διότι: $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta \neq 1$

**Άσκηση 19 – Λύση**

Αρχικά βρίσκουμε τις λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, οι οποίες είναι: $x = -2$ ή $x = \frac{5}{2}$. Οπότε θα ισχύει $\varepsilon\varphi\alpha = -2$ αφού η γωνία βρίσκεται στο 2ο Τεταρτημόριο και ισχύει $\varepsilon\varphi\alpha < 0$.

Από τον τύπο $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ παίρνουμε:

$$-2 = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

$$\eta\mu\alpha = -2\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Με χρήση της ταυτότητας $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ και αντικατάσταση, παίρνουμε:

$$(-2\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$$

$$4\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$$

$$5\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1}{5} \text{ άρα } \text{συνα} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Δεκτή η λύση $\text{συνα} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ αφού η γωνία βρίσκεται στο 2ο Τεταρτημόριο και ισχύει $\sigma\upsilon\nu\alpha < 0$.

Οπότε θα ισχύει: $\eta\mu\alpha = 2\frac{\sqrt{5}}{5}$

i. Με αντικατάσταση στην παράσταση, παίρνουμε:

$$\frac{2\frac{\sqrt{5}}{5}+(-\frac{\sqrt{5}}{5})^3}{-\frac{\sqrt{5}}{5}+(2\frac{\sqrt{5}}{5})^3} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}\left(2-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2\right)}{\frac{\sqrt{5}}{5}\left(-1+8\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2\right)} = \frac{2-\frac{1}{5}}{-1+8\cdot\frac{1}{5}} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{9}{3} = 3$$

ii. Με αντικατάσταση στην παράσταση, παίρνουμε:

$$\frac{2+(2\frac{\sqrt{5}}{5})^2}{1-(-\frac{\sqrt{5}}{5})\cdot(2\frac{\sqrt{5}}{5})} = \frac{2+\frac{4}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{\frac{14}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{14}{7} = 2$$

**Άσκηση 20 – Λύση**

Υψώνοντας και τα δύο μέλη της ισότητας στο τετράγωνο, παίρνουμε:

$$\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}-\sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}=2\varepsilon\varphi x$$

$$\left(\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}-\sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}\right)^2=(2\varepsilon\varphi x)^2$$

$$\left(\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}\right)^2-2\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}\cdot\sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}+\left(\sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}\right)^2=4\varepsilon\varphi^2 x$$

$$\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}-2\sqrt{\left(\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}\right)\cdot\left(\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}\right)}+\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}=4\varepsilon\varphi^2 x$$

$$\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}+\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}-2\sqrt{1}=4\varepsilon\varphi^2 x$$

$$\frac{(1+\eta\mu x)\cdot(1+\eta\mu x)}{(1-\eta\mu x)\cdot(1+\eta\mu x)}+\frac{(1-\eta\mu x)\cdot(1-\eta\mu x)}{(1-\eta\mu x)\cdot(1+\eta\mu x)}-2=4\varepsilon\varphi^2 x$$

$$\frac{1+2\eta\mu x+\eta\mu^2 x+1-2\eta\mu x+\eta\mu^2 x-2(1-\eta\mu^2 x)}{1-\eta\mu^2 x}=4\varepsilon\varphi^2 x$$

$$\frac{2+2\eta\mu^2 x-2+2\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=4\varepsilon\varphi^2 x$$

$$\frac{4\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=4\varepsilon\varphi^2 x$$

$4\varepsilon\varphi^2 x=4\varepsilon\varphi^2 x$ **Που ισχύει**

**Άσκηση 21 – Λύση**

Παίρνουμε την ισότητα: $\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}=\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ και υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο. Οπότε παίρνουμε:

$$\left(\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}\right)^2=\left(\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2$$

$$\frac{\left(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)^2+2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}\cdot\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}+\left(\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)^2-2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}\cdot\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}+\left(\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)^2}=\left(\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2$$

$$\frac{1+\sigma\upsilon\nu x+2\sqrt{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}+1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x-2\sqrt{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}+1-\sigma\upsilon\nu x}=\left(\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2$$

$$\frac{2+2\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}}{2-2\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}}=\left(\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2$$

$$\frac{2+2\sqrt{\eta\mu^2 x}}{2-2\sqrt{\eta\mu^2 x}}=\left(\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2$$

$$\frac{2+2|\eta\mu x|}{2-2|\eta\mu x|}=\left(\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2 \xRightarrow{\eta\mu x>0}$$

$$\frac{2+2\eta\mu x}{2-2\eta\mu x}=\frac{(1+\eta\mu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}=\frac{(1+\eta\mu x)^2}{1-\eta\mu^2 x}$$

$$\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}=\frac{(1+\eta\mu x)^2}{(1+\eta\mu x)(1-\eta\mu x)}$$

$$\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}=\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}$$ **Που ισχύει**

Επιπλέον πρέπει να δείξουμε ότι: $\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}$. Με το χιαστί γινόμενο παίρνουμε:

$$(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)=\sigma\upsilon\nu^2 x$$
$$1-\eta\mu^2 x=\sigma\upsilon\nu^2 x$$
$$\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x=1$$ **Που ισχύει.**

**Άσκηση 22 – Λύση**

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης γράφεται:

$$\frac{εφα-εφβ}{εφα(1+εφα\cdot εφβ)}+\frac{\frac{εφ^2γ}{1+εφ^2γ}}{\frac{εφ^2α}{1+εφ^2α}}=\frac{εφα-εφβ}{εφα(1+εφ^2γ)}+\frac{εφ^2γ(1+εφ^2α)}{εφ^2α(1+εφ^2γ)}=\frac{εφ^2α-εφβ\cdot εφα+εφ^2γ(1+εφ^2α)}{εφ^2α(1+εφ^2γ)}=$$

$$\frac{εφ^2α-εφ^2γ+εφ^2γ+εφ^2γ\cdot εφ^2α}{εφ^2α(1+εφ^2γ)}=\frac{εφ^2α+εφ^2γ\cdot εφ^2α}{εφ^2α(1+εφ^2γ)}=\frac{εφ^2α(1+εφ^2γ)}{εφ^2α(1+εφ^2γ)}=1$$ **Που ισχύει.**

**Άσκηση 23 – Λύση**

Παρατηρούμε ότι το κλάσμα $\frac{1-εφx}{1-σφx}$ γράφεται: $\frac{1-εφx}{1-σφx}=\frac{1-\frac{ημx}{συνx}}{1-\frac{συνx}{ημx}}=\frac{\frac{συνx-ημx}{συνx}}{\frac{ημx-συνx}{ημx}}=-\frac{ημx}{συνx}=-εφx$

i. Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1-εφ^3x}{1-σφ^3x}=-εφ^3x$

$$\frac{1-εφ^3x}{1-σφ^3x}=\frac{1-\frac{ημ^3x}{συν^3x}}{1-\frac{συν^3x}{ημ^3x}}=\frac{\frac{συν^3x-ημ^3x}{συν^3x}}{\frac{ημ^3x-συν^3x}{ημ^3x}}=-\frac{ημ^3x}{συν^3x}=-εφ^3x$$

ii. Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1-εφ^5x}{1-σφ^5x}=-εφ^5x$

$$\frac{1-εφ^5x}{1-σφ^5x}=\frac{1-\frac{ημ^5x}{συν^5x}}{1-\frac{συν^5x}{ημ^5x}}=\frac{\frac{συν^5x-ημ^5x}{συν^5x}}{\frac{ημ^5x-συν^5x}{ημ^5x}}=-\frac{ημ^5x}{συν^5x}=-εφ^5x$$

**Άσκηση 24 – Λύση**

Απλοποιούμε την παράσταση με χρήση του τύπου: $(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2-2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=1$ ο οποίος μετασχηματίζεται ως εξής:

$$(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2-2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=1$$

$$(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2-1=2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$$

$$(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+1)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1)=2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$$

$$\frac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+1)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1)}{2}=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$$

Οπότε η ισότητα γίνεται:

$$\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+1}=\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x+\gamma$$

$$\frac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+1)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1)}{2(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+1)}=\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x+\gamma$$

$$\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{2}=\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x+\gamma$$

$$\eta\mu x-2\alpha\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-2\beta\sigma\upsilon\nu x-2\gamma-1=0$$

$$(1-2\alpha)\eta\mu x+(1-2\beta)\sigma\upsilon\nu x-(2\gamma+1)=0$$

Για να ισχύει η ισότητα,δηλαδή η παράσταση να είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής $x$,για κάθε

$x\in R$, Θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις: $\boldsymbol{1-2\alpha=0, 1-2\beta=1\ \kappa\alpha\iota\ 2\gamma=-1}$. Οι λύσεις των εξισώσεων δίνουν: $\boldsymbol{\alpha=\frac{1}{2}, \beta=\frac{1}{2}\ \kappa\alpha\iota\ \gamma=\frac{-1}{2}}$.

**Άσκηση 25 – Λύση**

Υψώνουμε στο τετράγωνο τα δύο μέλη και στις τρείς ισότητες και έχουμε:

- $\sigma\upsilon\nu^2 x = \varepsilon\varphi^2 y$ η οποία γράφεται και: $\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \varepsilon\varphi^2 y$. Με πράξεις καταλήγουμε στην ισότητα: $\varepsilon\varphi^2 y + \varepsilon\varphi^2 y \cdot \varepsilon\varphi^2 x = 1$ (1).

- $\sigma\upsilon\nu^2 y = \varepsilon\varphi^2 z$ η οποία γράφεται και: $\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 y} = \varepsilon\varphi^2 z$. Με πράξεις καταλήγουμε στην ισότητα: $\varepsilon\varphi^2 z + \varepsilon\varphi^2 y \cdot \varepsilon\varphi^2 z = 1$ (2).

- $\sigma\upsilon\nu^2 z = \varepsilon\varphi^2 x$ η οποία γράφεται και: $\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 z} = \varepsilon\varphi^2 x$. Με πράξεις καταλήγουμε στην ισότητα: $\varepsilon\varphi^2 x + \varepsilon\varphi^2 z \cdot \varepsilon\varphi^2 x = 1$ (3).

Η σχέση (1) γίνεται: $\varepsilon\varphi^2 y(1 + \varepsilon\varphi^2 x) = 1$ και καταλήγουμε ότι: $\varepsilon\varphi^2 y = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (2) και με εκτέλεση των πράξεων, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi^2 z + \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} \cdot \varepsilon\varphi^2 z = 1$$

$$\varepsilon\varphi^2 z + \varepsilon\varphi^2 z \cdot \varepsilon\varphi^2 x + \varepsilon\varphi^2 z = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$$

$$2\varepsilon\varphi^2 z + \varepsilon\varphi^2 z \cdot \varepsilon\varphi^2 x - \varepsilon\varphi^2 x = 1 \ (4)$$

Με αφαίρεση της σχέσης (3) από τη σχέση (4) παίρνουμε:

$$2\varepsilon\varphi^2 z + \varepsilon\varphi^2 z \cdot \varepsilon\varphi^2 x - \varepsilon\varphi^2 x - \varepsilon\varphi^2 x - \varepsilon\varphi^2 z \cdot \varepsilon\varphi^2 x = 0$$

$$2\varepsilon\varphi^2 z - 2\varepsilon\varphi^2 x = 0$$

$$2(\varepsilon\varphi z - \varepsilon\varphi x)(\varepsilon\varphi z + \varepsilon\varphi x) = 0$$

Η εξίσωση έχει λύσεις: $\varepsilon\varphi z = \varepsilon\varphi x$ ή $\varepsilon\varphi z = -\varepsilon\varphi x$(απορρίπτεται αφου ισχύει $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$)

Οπότε δεκτή λύση η $\varepsilon\varphi z = \varepsilon\varphi x$ από όπου παίρνουμε: $\boldsymbol{z = x}$ **αφού οι γωνίες βρίσκονται στο 1ο Τεταρτημόριο.** Όμοια δείχνουμε ότι ισχύει και $\boldsymbol{z = y}$ με τελικό συμπέρασμα ότι ισχύει η ισότητα: $\boldsymbol{z = y = x}$

**Άσκηση 26 – Λύση**

Αρχικά υπολογίζουμε τις ποσότητες:

- $\alpha + \beta = 1 + \eta\mu^2\theta + 1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 + 1 + 1 = 3$
- $\alpha^2 = (1 + \eta\mu^2\theta)^2 = 1 + 2\eta\mu^2\theta + \eta\mu^4\theta$
- $\beta^2 = (1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta)^2 = 1 + 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^4\theta$
- $\alpha \cdot \beta = (1 + \eta\mu^2\theta)(1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta) = 1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta + \eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta = 2 + \eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta$

Εκτελώντας τις πράξεις στο αριστερό μέλος της ισότητας, παίρνουμε:

$$2(\alpha^3 + \beta^3) + 9\beta^2 = 2(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) + 9\beta^2 =$$

$$2 \cdot 3(1 + 2\eta\mu^2\theta + \eta\mu^4\theta - 2 - \eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta + 1 + 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^4\theta) + 9(1 + 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^4\theta)$$

$$6(2 + \eta\mu^4\theta - \eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^4\theta) + 9 + 18\sigma\upsilon\nu^2\theta + 9\sigma\upsilon\nu^4\theta =$$

$$6[2 + (\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta)^2 - 3\eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta] + 9 + 18\sigma\upsilon\nu^2\theta + 9\sigma\upsilon\nu^4\theta =$$

$$6[3 - 3(1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta)\sigma\upsilon\nu^2\theta] + 9 + 18\sigma\upsilon\nu^2\theta + 9\sigma\upsilon\nu^4\theta =$$

$$6(3 - 3\sigma\upsilon\nu^2\theta + 3\sigma\upsilon\nu^4\theta) + 9 + 18\sigma\upsilon\nu^2\theta + 9\sigma\upsilon\nu^4\theta =$$

$$18 - 18\sigma\upsilon\nu^2\theta + 18\sigma\upsilon\nu^4\theta + 9 + 18\sigma\upsilon\nu^2\theta + 9\sigma\upsilon\nu^4\theta =$$

$$27 + 27\sigma\upsilon\nu^4\theta = 27(1 + \sigma\upsilon\nu^4\theta)$$

***Για την επίλυση των ασκήσεων,θεωρήσαμε (όπου χρειάζεται), ότι ισχύουν οι περιορισμοί που αφορούν σε ρητές παραστάσεις καθώς και όλοι οι περιορισμοί που αφορούν στον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών.**

## 3.3. Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

### Λύσεις

**Άσκηση 1 – Λύση**

Για τη γωνία $x$ ισχύει $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Αφαιρώντας και στα τρία μέλη την τιμή $\frac{\pi}{2}$, παίρνουμε:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{2} < \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$0 < x - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Θέτουμε: $t = x - \frac{\pi}{2}$ δηλαδή $\boldsymbol{x = t + \frac{\pi}{2}}$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας είναι:

- $\eta\mu x = \eta\mu\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sigma\upsilon\nu t = \sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{2})$
- $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\eta\mu t = -\eta\mu(x - \frac{\pi}{2})$

**Άσκηση 2 – Λύση**

Για τη γωνία $x$ ισχύει $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Αφαιρώντας και στα τρία μέλη την τιμή $\pi$, παίρνουμε:

$$\pi - \pi < x - \pi < \frac{3\pi}{2} - \pi$$

$$0 < x - \pi < \frac{\pi}{2}$$

Θέτουμε: $t = x - \pi$ δηλαδή $\boldsymbol{x = \pi + t}$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας είναι:

- $\eta\mu x = \eta\mu(\pi + t) = -\eta\mu t = -\eta\mu(x - \pi)$
- $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi + t) = -\sigma\upsilon\nu t = -\sigma\upsilon\nu(x - \pi)$

**Άσκηση 3 – Λύση**

Για τη γωνία $x$ ισχύει $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Αφαιρώντας και στα τρία μέλη την τιμή $\frac{3\pi}{2}$, παίρνουμε:

$\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} < x - \frac{3\pi}{2} < 2\pi - \frac{3\pi}{2}$

$0 < x - \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$

Θέτουμε: $t = x - \frac{3\pi}{2}$ δηλαδή $\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{2} + t}$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας είναι:

- $\eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \eta\mu\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\sigma\upsilon\nu t = -\sigma\upsilon\nu(x - \frac{3\pi}{2})$
- $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \eta\mu t = \eta\mu(x - \frac{3\pi}{2})$

**Άσκηση 4 – Λύση**

i. Για τη δοθείσα γωνία ισχύει: $1.230^o = 3 \cdot 360^o + 150^o$, οπότε έχουμε:

- $\eta\mu(1.230^o) = \eta\mu(3 \cdot 360^o + 150^o) = \eta\mu 150^o = \eta\mu(180^o - 30^o) = \eta\mu 30^o = \frac{1}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu(1.230^o) = \sigma\upsilon\nu(3 \cdot 360^o + 150^o) = \sigma\upsilon\nu 150^o = \sigma\upsilon\nu(180^o - 30^o) = -\sigma\upsilon\nu 30^o = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
- $\varepsilon\varphi(1.230^o) = \varepsilon\varphi(3 \cdot 360^o + 150^o) = \varepsilon\varphi 150^o = \varepsilon\varphi(180^o - 30^o) = -\varepsilon\varphi 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sigma\varphi(1.230^o) = \sigma\varphi(3 \cdot 360^o + 150^o) = \sigma\varphi 150^o = \sigma\varphi(180^o - 30^o) = -\sigma\varphi 30^o = -\sqrt{3}$

ii. Για τη δοθείσα γωνία ισχύει: $-2.820^o = -8 \cdot 360^o + 60^o = -(8 \cdot 360^o - 60^o)$, οπότε έχουμε:

- $\eta\mu(-2.820^o) = \eta\mu\big(-(8 \cdot 360^o - 60^o)\big) = -\eta\mu(8 \cdot 360^o - 60^o) = -\eta\mu(-60^o) = \eta\mu 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu(-2.820^o) = \sigma\upsilon\nu\big(-(8 \cdot 360^o - 60^o)\big) = \sigma\upsilon\nu(8 \cdot 360^o - 60^o) = \sigma\upsilon\nu(-60^o) = \sigma\upsilon\nu 60^o = \frac{1}{2}$
- $\varepsilon\varphi(-2.820^o) = \varepsilon\varphi\big(-(8 \cdot 360^o - 60^o)\big) = -\varepsilon\varphi(8 \cdot 360^o - 60^o) = -\varepsilon\varphi(-60^o) = \varepsilon\varphi 60^o$

  $= \sqrt{3}$

- $\sigma\varphi(-2.820^o) = \sigma\varphi\big(-(8\cdot 360^o - 60^o)\big) = -\sigma\varphi(8\cdot 360^o - 60^o) = -\sigma\varphi(-60^o) = \sigma\varphi 60^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**Άσκηση 5 – Λύση**

i. Για τη δοθείσα γωνία ισχύει: $1.845^o = 5\cdot 360^o + 45^o$, οπότε έχουμε:

- $\eta\mu(1.845^o) = \eta\mu(5\cdot 360^o + 45^o) = \eta\mu 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu(1.845^o) = \sigma\upsilon\nu(5\cdot 360^o + 45^o) = \sigma\upsilon\nu 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\varepsilon\varphi(1.845^o) = \varepsilon\varphi(5\cdot 360^o + 45^o) = \varepsilon\varphi 45^o = 1$
- $\sigma\varphi(1.845^o) = \sigma\varphi(5\cdot 360^o + 45^o) = \sigma\varphi 45^o = 1$

ii. Για τη δοθείσα γωνία ισχύει: $-1.305 = -4\cdot 360^o + 135^o = -(4\cdot 360^o - 135^o)$, οπότε έχουμε:

- $\eta\mu(-1.305^o) = \eta\mu\big(-(4\cdot 360^o - 135^o)\big) = -\eta\mu(4\cdot 360^o - 135^o) = -\eta\mu(-135^o) = \eta\mu(135^o) = \eta\mu(180^o - 45^o) = \eta\mu 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\sigma\upsilon\nu(-1.305^o) = \sigma\upsilon\big(-(4\cdot 360^o - 135^o)\big) = \sigma\upsilon\nu(4\cdot 360^o - 135^o) = \sigma\upsilon\nu(-135^o) = \sigma\upsilon\nu(135^o) = \sigma\upsilon\nu(180^o - 45^o) = \sigma\upsilon\nu 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\varepsilon\varphi(-1.305^o) = \varepsilon\varphi\big(-(4\cdot 360^o - 135^o)\big) = -\varepsilon\varphi(4\cdot 360^o - 135^o) = -\varepsilon\varphi(-135^o) = \varepsilon\varphi(135^o) = \varepsilon\varphi(180^o - 45^o) = \varepsilon\varphi 45^0 = 1$

- $\sigma\varphi(-1.305^o) = \sigma\varphi\big(-(4\cdot 360^o - 135^o)\big) = -\sigma\varphi(4\cdot 360^o - 135^o) = -\sigma\varphi(-135^o) = \sigma\varphi(135^o) = \sigma\varphi(180^o - 45^o) = \sigma\varphi 45^0 = 1$

**Άσκηση 6 – Λύση**

i. Για τη δοθείσα γωνία ισχύει: $\frac{185\pi}{6} = \frac{180\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 2 \cdot 15\pi + \frac{5\pi}{6}$, οπότε έχουμε:

- $\eta\mu(\frac{185\pi}{6}) = \eta\mu\left(2 \cdot 15\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \eta\mu\frac{5\pi}{6} = \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu(\frac{185\pi}{6}) = \sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot 15\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\varepsilon\varphi(\frac{185\pi}{6}) = \varepsilon\varphi\left(2 \cdot 15\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\frac{5\pi}{6} = \varepsilon\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sigma\varphi(\frac{185\pi}{6}) = \sigma\varphi\left(2 \cdot 15\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \sigma\varphi\frac{5\pi}{6} = \sigma\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sigma\varphi\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

ii. Για τη δοθείσα γωνία ισχύει: $\frac{21\pi}{4} = \frac{20\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 5\pi + \frac{\pi}{4} = 4\pi + (\pi + \frac{\pi}{4})$, οπότε έχουμε:

- $\eta\mu\left(-\frac{21\pi}{4}\right) = -\eta\mu\left(\frac{21\pi}{4}\right) = -\eta\mu\left(4\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = -\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{21\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{21\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(4\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\varepsilon\varphi\left(-\frac{21\pi}{4}\right) = -\varepsilon\varphi\left(\frac{21\pi}{4}\right) = -\varepsilon\varphi\left(4\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = -\varepsilon\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = -1$
- $\sigma\varphi\left(-\frac{21\pi}{4}\right) = -\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{4}\right) = -\sigma\varphi\left(4\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = -\sigma\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\varphi\frac{\pi}{4} = -1$

**Άσκηση 7 – Λύση**

i. Για τη δοθείσα γωνία ισχύει: $\frac{193\pi}{3} = \frac{192\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 32\pi + \frac{\pi}{3}$, οπότε έχουμε:

- $\eta\mu(\frac{192\pi}{3}) = \eta\mu\left(2 \cdot 32\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu(\frac{192\pi}{3}) = \sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot 32\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- $\varepsilon\varphi(\frac{192\pi}{3}) = \varepsilon\varphi\left(2 \cdot 32\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$
- $\sigma\varphi(\frac{192\pi}{3}) = \sigma\varphi\left(2 \cdot 32\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ii. Για τη δοθείσα γωνία ισχύει: $\frac{132\pi}{8} = \frac{33\pi}{2} = \frac{32\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2 \cdot 8\pi + \frac{\pi}{2}$, οπότε έχουμε:

- $\eta\mu\left(-\frac{33\pi}{2}\right) = -\eta\mu\left(\frac{33\pi}{2}\right) = -\eta\mu\left(2 \cdot 8\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$
- $\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{33\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{33\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot 8\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $\varepsilon\varphi\left(-\frac{33\pi}{2}\right) = -\varepsilon\varphi\left(\frac{33\pi}{2}\right) = -\varepsilon\varphi\left(2 \cdot 8\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\boldsymbol{\delta\varepsilon\nu\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota}$
- $\sigma\varphi\left(-\frac{33\pi}{2}\right) = -\sigma\varphi\left(\frac{33\pi}{2}\right) = -\sigma\varphi\left(2 \cdot 8\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

**Άσκηση 8 – Λύση**

Σε κάθε τρίγωνο ισχύει: $A + B + \Gamma = 180^o$

i. Από την αρχική σχέση παίρνουμε: $180^o - A = B + \Gamma$ οπότε ισχύει:

$$\eta\mu(180^o - A) = \eta\mu(B + \Gamma)$$
$$\eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$$

ii. Από την αρχική σχέση παίρνουμε: $180^o - B = A + \Gamma$ οπότε ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu(180^o - B) = \sigma\upsilon\nu(A + \Gamma)$$
$$-\sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu(A + \Gamma)$$
$$\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu(A + \Gamma) = 0$$

iii. Από την αρχική σχέση παίρνουμε: $\frac{A+B+\Gamma}{2} = 90^o$ οπότε ισχύει:

$$\frac{\Gamma}{2} = 90^o - \frac{A+B}{2}$$
$$\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \eta\mu\left(90^o - \frac{A+B}{2}\right)$$
$$\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

iv. Από την αρχική σχέση παίρνουμε: $\frac{A+B+\Gamma}{2} = 90^o$ οπότε ισχύει:

$$\frac{A+\Gamma}{2} = 90^o - \frac{B}{2}$$

$$\eta\mu\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right) = \eta\mu\left(90^o - \frac{B}{2}\right)$$

$$\eta\mu\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)$$

**Άσκηση 9 – Λύση**

i. $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cdot\eta\mu(\pi+x)+\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cdot\eta\mu(\pi-x)=$

$\eta\mu\left(2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\cdot(-\eta\mu x)+\eta\mu\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\cdot\eta\mu x=$

$-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-\eta\mu x)+\left(-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\cdot\eta\mu x\ =\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x=0$

ii. $\sigma\varphi\alpha+\varepsilon\varphi(180^o+\alpha)+\varepsilon\varphi(90^o+\alpha)+\varepsilon\varphi(180^o+\alpha)=$

$\sigma\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\big(180^o-(90^o-\alpha)\big)+\varepsilon\varphi\alpha=\sigma\varphi\alpha+2\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi(90^o-\alpha)\ =$

$\sigma\varphi\alpha+2\varepsilon\varphi\alpha-\sigma\varphi\alpha=2\varepsilon\varphi\alpha$

iii. $\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu(270^o+\alpha)-\eta\mu(270^o-\alpha)+\sigma\upsilon\nu(180^o+\alpha)=$

$\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\big(360^o-(90^o-\alpha)\big)-\eta\mu\big(180^o+(90^o-\alpha)\big)-\sigma\upsilon\nu\alpha=$

$-\eta\mu(90^o-\alpha)+\eta\mu(90^o-\alpha)=-\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha=0$

iv. $\frac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi-x)}+\frac{\eta\mu(5\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\eta\mu(\pi+x)}-\frac{\eta\mu(-x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\sigma\upsilon\nu(9\pi+x)}=$

$\frac{\eta\mu\left(2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu\big(2\pi+(\pi-x)\big)}+\frac{\eta\mu\big(4\pi+(\pi-x)\big)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)}{-\eta\mu x}-\frac{-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)}{\sigma\upsilon\nu\big(8\pi+(\pi+x)\big)}=$

$\frac{-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu(\pi-x)}+\frac{\eta\mu(\pi-x)\cdot\left(-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)}{-\eta\mu x}-\frac{-\eta\mu x\cdot\left(-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)}{\sigma\upsilon\nu(\pi+x)}=$

$\frac{-\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x}{-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\eta\mu x\cdot(-\eta\mu x)}{-\eta\mu x}-\frac{-\eta\mu x\cdot(-\eta\mu x)}{-\sigma\upsilon\nu x}=\eta\mu x+\eta\mu x+\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu x}=2\eta\mu x+\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu x}$

**Άσκηση 10 – Λύση**

Η παράσταση γράφεται:

$$\frac{\varepsilon\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sigma\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)}{-\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\varepsilon\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\eta\mu\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$\frac{-\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{4})\cdot(-\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right))\cdot(-\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right))\cdot\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6})}{-\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot(-\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right))\cdot(-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right))\cdot(-\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right))}=\frac{-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}=-\frac{\frac{3}{12}}{\frac{3\sqrt{2}}{8}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

**Άσκηση 11 – Λύση**

Για $\kappa=0,1,2,3\ldots$ δημιουργείται η ακολουθία: $\eta\mu 0^{o},\eta\mu\frac{\pi}{6},\eta\mu\frac{\pi}{3},\ \eta\mu\frac{\pi}{2},\ldots$ δηλαδή αύξηση της γωνίας κατά $\frac{\pi}{6}$.

Για $\kappa=12$ έχουμε διαγράψει έναν πλήρη κύκλο και οι τιμές αυτές θα επαναλαμβάνονται λόγω συμμετρίας. Στο διάστημα $[0,2\pi)$ οι τιμές που παίρνει η παράσταση είναι το ημίτονο των $\frac{\pi}{6}rad$ καθώς και το ημίτονο των γωνιών που διαφέρουν κατά $\frac{\pi}{6}rad$.

Οι τιμές αυτές είναι: $0,\pm\frac{1}{2},\pm 1,\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Άσκηση 12 – Λύση**

Για $\kappa=0,1,2,3\ldots$ δημιουργείται η ακολουθία: $\sigma\upsilon\nu 0^{o},\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6},\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3},\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2},\ldots$ δηλαδή αύξηση της γωνίας κατά $\frac{\pi}{6}$. Για $\kappa=12$ έχουμε διαγράψει έναν πλήρη κύκλο και οι τιμές αυτές θα επαναλαμβάνονται λόγω συμμετρίας.

Στο διάστημα $[0,2\pi)$ οι τιμές που παίρνει η παράσταση είναι το συνημίτονο των $\frac{\pi}{6}rad$ καθώς και το συνημίτονο των γωνιών που διαφέρουν κατά $\frac{\pi}{6}rad$. Οι τιμές αυτές είναι: $\pm 1,\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2},0$

**Άσκηση 13 – Λύση**

Το άθροισμα γράφεται:

$\sigma\varphi 1^o + \sigma\varphi 2^o + \cdots + \sigma\varphi 89^o + \sigma\varphi 90^o + \sigma\varphi 91^o + \cdots + \sigma\varphi 178^o + \sigma\varphi 179^o =$

$\sigma\varphi 1^o + \sigma\varphi 2^o + \cdots + \sigma\varphi 89^o + .. + \sigma\varphi(180^o - 89^o) + \cdots + \sigma\varphi(180^o - 2^o) + \sigma\varphi(180^o - 1^o) =$
$\sigma\varphi 1^o + \sigma\varphi 2^o + \cdots + \sigma\varphi 89^o + \sigma\varphi 90^o - \sigma\varphi 89^o - \cdots - \sigma\varphi 2^o - \sigma\varphi 1^o = \sigma\varphi 90^o = 0$

**Άσκηση 14 – Λύση**

Το άθροισμα γράφεται (Προσοχή η εφ$90^o$ δεν βρίσκεται στο αθροισμα αφού δεν ορίζεται):

$\varepsilon\varphi 1^o + \varepsilon\varphi 2^o + \cdots + \varepsilon\varphi 89^o + \varepsilon\varphi 91^o + \cdots + \varepsilon\varphi 178^o + \varepsilon\varphi 179^o =$

$\varepsilon\varphi 1^o + \varepsilon\varphi 2^o + \cdots + \varepsilon\varphi 89^o + \varepsilon\varphi(180^o - 89^o) + \cdots + \varepsilon\varphi(180^o - 2^o) + \varepsilon\varphi(180^o - 1^o) =$
$\varepsilon\varphi 1^o + \varepsilon\varphi 2^o + \cdots + \varepsilon\varphi 89^o - \varepsilon\varphi 89^o - \cdots - \varepsilon\varphi 2^o - \varepsilon\varphi 1^o = 0$

**Άσκηση 15 – Λύση**

Παρατηρούμε ότι οι γωνίες $\frac{\pi}{6} - x \;\kappa\alpha\iota\; \frac{\pi}{3} + x$, έχουν άθροισμα:

$$\frac{\pi}{6} - x + \frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{2}$$

και είναι συμπληρωματικές.

Οπότε $\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{3} + x) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right) = \sigma\varphi(\frac{\pi}{6} - x)$.

Υψώνοντας και τα δύο μέλη της ισότητας, παίρνουμε:

$$\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right)^2 = 3^2$$

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 9$$

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 2\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 9$$

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 2 \cdot 1 + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 9$$

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=9-2$$

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=7$$

**Άσκηση 16 – Λύση**

Η παράσταση μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\frac{\sigma\varphi x}{\sigma\varphi x+\varepsilon\varphi x}=\frac{\frac{\sigma\varphi x}{\sigma\varphi x}}{\frac{\sigma\varphi x}{\sigma\varphi x}+\frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\varphi x}}=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}=\sigma\upsilon\nu^2 x$$

Για κάθε γωνία $x$, όπου ορίζεται η $\sigma\varphi x$ και $\varepsilon\varphi x$ ισχύει $|\sigma\upsilon\nu x|<1$, οπότε $\sigma\upsilon\nu^2 x<1$. Επιπλέον ισχύει και $\sigma\upsilon\nu^2 x>0$ και καταλήγουμε ότι:

$$0<\sigma\upsilon\nu^2 x<1$$

$$0<\frac{\sigma\varphi(\pi+x)}{\sigma\varphi x+\varepsilon\varphi(\pi+x)}<1$$

**Άσκηση 17 – Λύση**

Για κάθε τρίγωνο ισχύει: $A+B+\Gamma=180^o$. Εφόσον το Τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο τότε ορίζεται πάντα η εφαπτομένη των γωνιών του.

i. Ισχύει η σχέση $A+B=180^o-\Gamma$, οπότε:

$$\varepsilon\varphi(A+B)=\varepsilon\varphi(180^o-\Gamma)$$
$$\varepsilon\varphi(A+B)=-\varepsilon\varphi\Gamma$$
$$\varepsilon\varphi(A+B)+\varepsilon\varphi\Gamma=0$$

ii. Ισχύει η σχέση $\frac{A+B}{2}=90^o-\frac{\Gamma}{2}$, οπότε:

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{A+B}{2}\right)=\varepsilon\varphi\left(90^o-\frac{\Gamma}{2}\right)$$
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

iii. Ισχύει η σχέση $\frac{A+B}{2}=90^o-\frac{\Gamma}{2}$, οπότε:

$$\frac{A+B}{2}-\frac{\Gamma}{2}=90^o-\frac{\Gamma}{2}-\frac{\Gamma}{2}$$
$$\frac{A+B-\Gamma}{2}=90^o-\Gamma$$
$$\varepsilon\varphi(\frac{A+B-\Gamma}{2})=\varepsilon\varphi(90^o-\Gamma)$$
$$\varepsilon\varphi(\frac{A+B-\Gamma}{2})=\sigma\varphi\Gamma$$

iv. Ισχύει η σχέση $\frac{A+B}{2}=90^o-\frac{\Gamma}{2}$, οπότε:

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}-\frac{\Gamma}{2}=90^o-\frac{\Gamma}{2}-\frac{\Gamma}{2}$$

$$\frac{A}{2}-\frac{\Gamma}{2}=90^o-\frac{B}{2}-\frac{2\Gamma}{2}$$

$$\frac{A-\Gamma}{2}=90^o-\frac{B+2\Gamma}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu(\frac{A-\Gamma}{2})=\sigma\upsilon\nu(90^o-\frac{B+2\Gamma}{2})$$

$$\sigma\upsilon\nu(\frac{A-\Gamma}{2})=\eta\mu(\frac{B+2\Gamma}{2})$$

**Άσκηση 18 – Λύση**

Το συνημίτονο του αθροίσματος είναι θετικό, άρα θα βρίσκεται στο $1^o$ ή στο $4^o$ Τεταρτημόριο.Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\sigma\upsilon\nu(x+y)>0$ αν ισχύει $x+y\ \in[0,\frac{\pi}{2})$. Για τις γωνίες θα πρέπει να ισχύει: $0<x<\frac{\pi}{2}$ και $0<y<\frac{\pi}{2}$. Η διαφορά $x-y$ θα ανήκει στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ και θα είναι: $\sigma\upsilon\nu(x-y)>0$

- Αν $\sigma\upsilon\nu(x+y)>0$ αν ισχύει $x+y\ \in[\frac{3\pi}{2},2\pi)$.
  Για τις γωνίες θα πρέπει να ισχύει: $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ και $\frac{3\pi}{2}<y<2\pi$. Η διαφορά $x-y$ θα ανήκει στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ και θα είναι: $\sigma\upsilon\nu(x-y)>0$

**Άσκηση 19 – Λύση**

Για κάθε γωνία ισχύει: $|συνx| \leq 1$. Για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει κάθε ένας παράγοντας να ισούται με $+1$ ή $-1$. Το πλήθος των παραγόντων είναι περιττό άρα θα πρέπει ακριβώς ένας παράγοντας να είναι αρνητικός και οι άλλοι θετικοί ή και οι τρείς αρνητικοί.Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Εάν $συν(α-β) = -1, συν(β-γ) = συν(γ-α) = 1$ τότε θα έπρεπε οι γωνίες $α$ και $β$ να είναι παραπληρωματικές ή η διαφορά τους είναι περιττό ακέραιο πολλαπλάσιο του $π$. Η γωνία $β$ είναι ίση με τη γωνία $γ$ (ή διαφέρουν κατά ακέραια πολλαπλάσια του $2π$) και αυτή με τη σειρά της θα είναι ίση με τη γωνία $α$ (ή διαφέρουν κατά ακέραια πολλαπλάσια του $2π$), αφού $συν0^0$ ή $συν2κπ = 1$
  Αυτό είναι άτοπο αφού θα έπρεπε να ισχύει $α = β = γ$ ή $α - β$ πολλαπλάσιο του $2π$.

- Εάν $συν(α-β) = συν(β-γ) = συν(γ-α) = -1$ τότε θα έπρεπε οι γωνίες $α$ και $β$ να είναι παραπληρωματικές ή η διαφορά τους είναι περιττό ακέραιο πολλαπλάσιο του $π$. Η γωνία $β$ παραπηρωματική με τη γωνία $γ$ (ή διαφέρουν κατά περιττά ακέραια πολλαπλάσια του $π$) και αυτή με τη σειρά της θα είναι παραπληρωματική με τη γωνία $α$ (ή διαφέρουν κατά περιττά ακέραια πολλαπλάσια του $π$). Αυτό είναι άτοπο αφού θα έπρεπε να ισχύει $α + β = 180^o$ και $β + γ = 180^o$, το οποίο σημαίνει $α = γ$, άτοπο.

## 3.4. Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

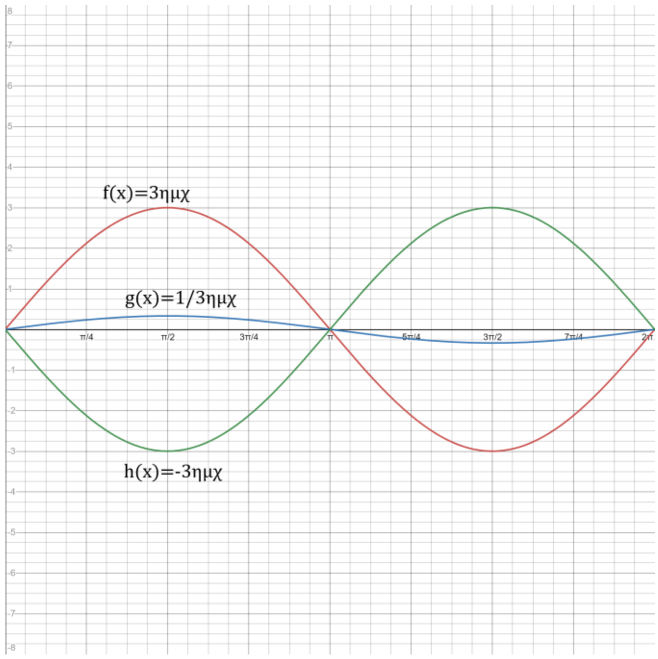
### Λύσεις

**Άσκηση 1 – λύση**

i. Δημιουργούμε ένα κοινο πίνακα τιμών για τις συναρτήσεις οι οποίες είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2\pi$. Ο πίνακας θα έχει τις τιμές $0, \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}, \frac{T}{2} = \pi, \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}, T = 2\pi$ και έχει τη μορφή:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $3$ | $0$ | $-3$ | $0$ |
| $g(x)$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ | $0$ | $-\frac{1}{3}$ | $0$ |
| $h(x)$ | $0$ | $-3$ | $0$ | $3$ | $0$ |

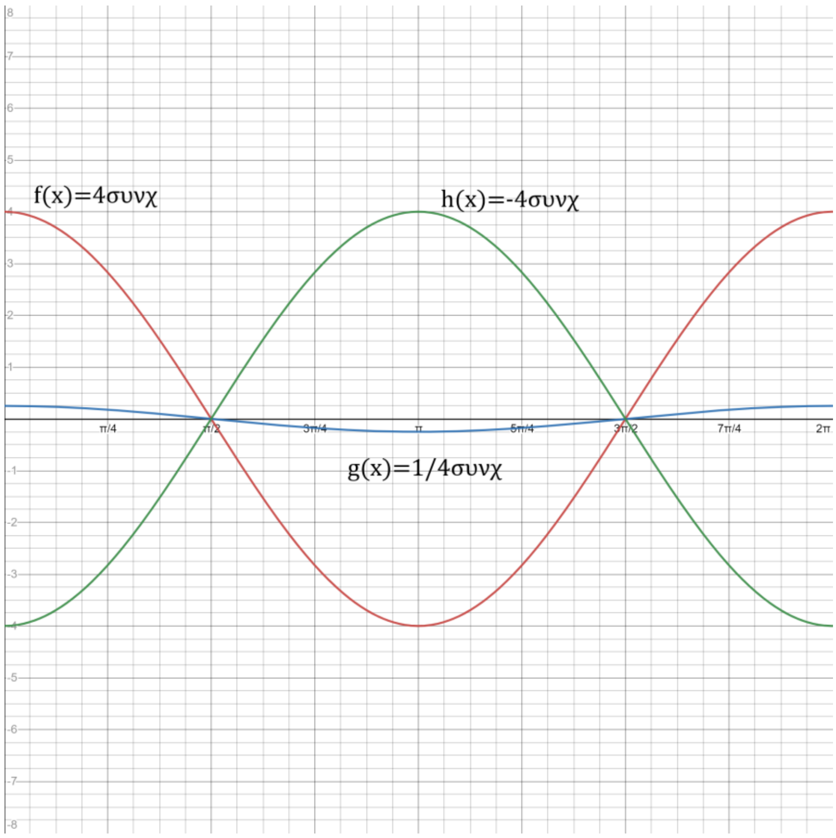
Η κοινή γραφική παράσταση στο διάστημα $[0,2\pi]$ είναι η εξής:



ii. Δημιουργούμε ένα κοινο πίνακα τιμών για τις συναρτήσεις οι οποίες είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2\pi$. Ο πίνακας θα έχει τις τιμές $0, \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}, \frac{T}{2} = \pi, \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}, T = 2\pi$ και έχει τη μορφή:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $4$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $4$ |
| $g(x)$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ | $-\frac{1}{4}$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ |
| $h(x)$ | $-4$ | $0$ | $4$ | $0$ | $-4$ |

Η κοινή γραφική παράσταση στο διάστημα $[0,2\pi]$ είναι η εξής:

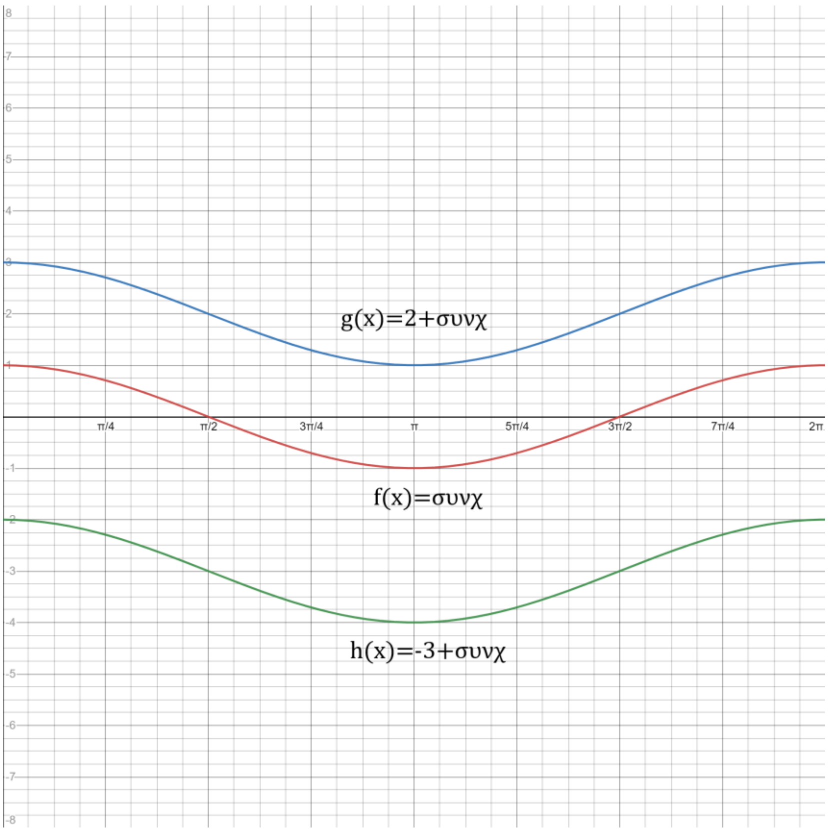


**Άσκηση 2 – Λύση**

Οι συναρτήσεις $g(x)$ $και$ $h(x)$ πρόκύπτουν με παράλληλη μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα πάνω και κατά 3 μονάδες προς τα κάτω αντίστοιχα, από την συνάρτηση $f(x)$. Δημιουργούμε ένα κοινο πίνακα τιμών για τις συναρτήσεις οι οποίες είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2\pi$. Ο πίνακας θα έχει τις τιμές $0, \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}, \frac{T}{2} = \pi, \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}, T = 2\pi$ και έχει τη μορφή:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $g(x)$ | $3$ | $2$ | $1$ | $2$ | $3$ |
| $h(x)$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ |

Η κοινή γραφική παράσταση είναι η εξής:



**Άσκηση 3 – Λύση**

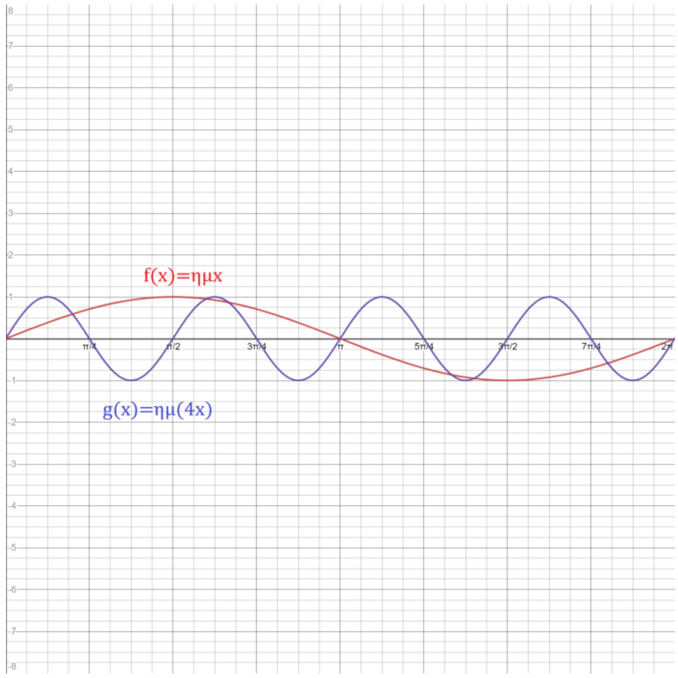
Η συνάρτηση έχει περίοδο $T = 2\pi$ οπότε σε διάστημα μίας περιόδου οι τιμές στον πίνακα θα είναι: $0, \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}, \frac{T}{2} = \pi, \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}, T = 2\pi$. Ο πίνακας θα έχει τη μορφή:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |

Η συνάρτηση $g(x)$ έχει $\omega = 4$ οπότε η περίοδος της θα είναι: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Οπότε οι τιμές σε διάστημα μίας περιόδου στον πίνακα θα είναι: $0, \frac{T}{4} = \frac{\pi}{8}, \frac{T}{2} = \frac{\pi}{4}, \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{8}, T = \frac{\pi}{2}$. Ο πίνακας θα έχει τη μορφή:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |

Στο διάστημα $[0,2\pi]$ η συνάρτηση $g(x)$ θα επαναλαμβάνεται λόγω περιοδικότητας ακριβώς 4 φορές, παίρνοντας επαναλαμβανόμενες τιμές αυξάνοντας κατά $\frac{\pi}{8}$ σε κάθε τιμή.
Η κοινή γραφική παράσταση είναι:



**Άσκηση 4 – Λύση**

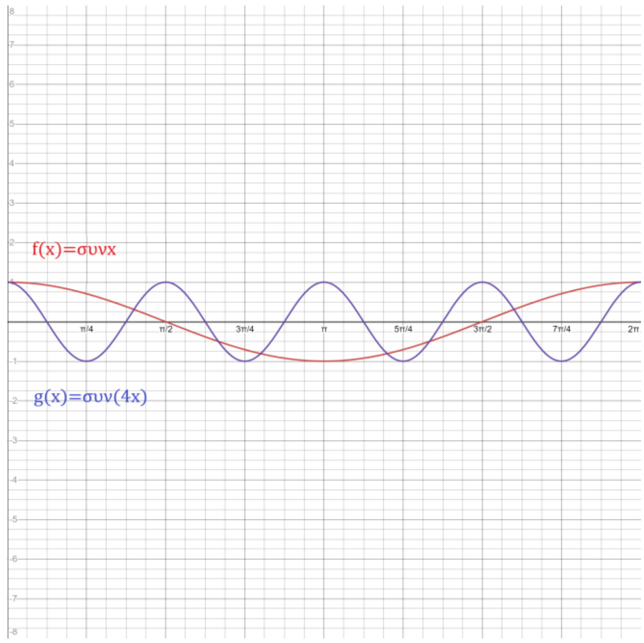
Η συνάρτηση έχει περίοδο $T = 2\pi$ οπότε σε διάστημα μίας περιόδου οι τιμές στον πίνακα θα είναι: $0, \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}, \frac{T}{2} = \pi, \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}, T = 2\pi$. Ο πίνακας θα έχει τη μορφή:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |

Η συνάρτηση $g(x)$ έχει $\omega = 4$ οπότε η περίοδος της θα είναι: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Οπότε οι τιμές σε διάστημα μίας περιόδου στον πίνακα θα είναι: $0, \frac{T}{4} = \frac{\pi}{8}, \frac{T}{2} = \frac{\pi}{4}, \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{8}, T = \frac{\pi}{2}$. Ο πίνακας θα έχει τη μορφή:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |

Στο διάστημα $[0,2\pi]$ η συνάρτηση $g(x)$ θα επαναλαμβάνεται λόγω περιοδικότητας ακριβώς 4 φορές.Η κοινή γραφική παράσταση είναι:



**Άσκηση 5 – Λύση**

i. Για κάθε γωνία $\omega$ ισχύει η σχέση: $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$. Οπότε παίρνουμε:

$$-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$$
$$-4 \leq 4\eta\mu\omega \leq 4$$

Οπότε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι η τιμή 4 και η ελάχιστη τιμή της η τιμή -4.

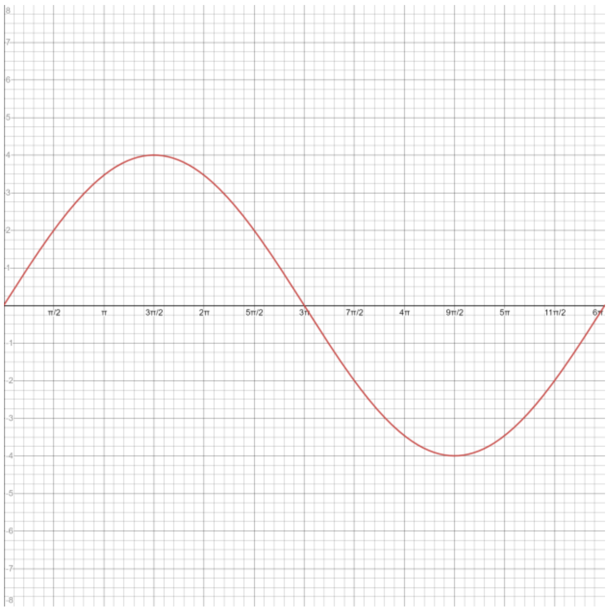
ii. Η συνάρτηση είναι της μορφής $\eta\mu(\omega x)$ με $\omega = \frac{1}{3}$. Από τον τύπο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ παίρνουμε:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

iii. Οπότε οι τιμές σε διάστημα μίας περιόδου στον πίνακα θα είναι: $0, \frac{T}{4} = \frac{3\pi}{2}, \frac{T}{2} = 3\pi, \frac{3T}{4} = \frac{9\pi}{2}, T = 6\pi$. Ο πίνακας θα έχει τη μορφή:

| $x$ | $0$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $3\pi$ | $\frac{9\pi}{2}$ | $6\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $4$ | $0$ | $-4$ | $0$ |

Η γραφική παράσταση σε πλάτος μίας περιόδου είναι:



**Άσκηση 6 – Λύση**

i. Για κάθε γωνία $\omega$ ισχύει η σχέση: $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$. Οπότε παίρνουμε:

$$-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$$
$$-3 \leq 3\eta\mu\omega \leq 3$$

Οπότε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι η τιμή 3 και η ελάχιστη τιμή της η τιμή -3.

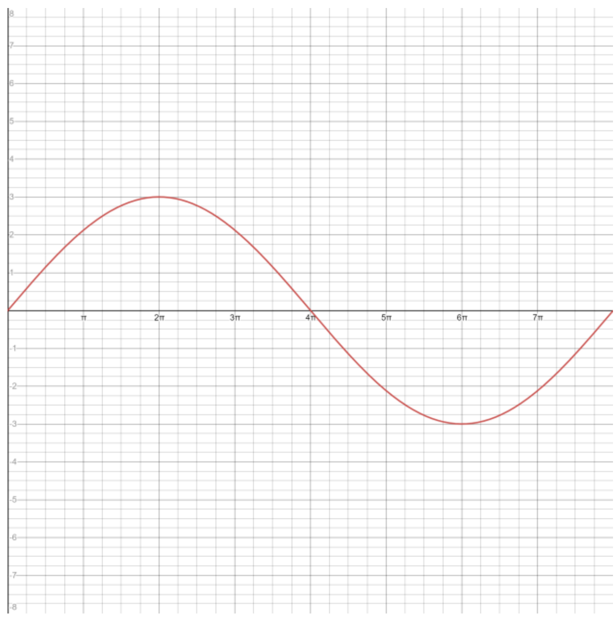
ii. Η συνάρτηση είναι της μορφής $\eta\mu(\omega x)$ με $\omega = \frac{1}{4}$. Από τον τύπο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ παίρνουμε:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$$

iii. Οπότε οι τιμές σε διάστημα μίας περιόδου στον πίνακα θα είναι: $0, \frac{T}{4} = 2\pi, \frac{T}{2} = 4\pi, \frac{3T}{4} = 6\pi, T = 8\pi$. Ο πίνακας θα έχει τη μορφή:

| $x$ | $0$ | $2\pi$ | $4\pi$ | $6\pi$ | $8\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $3$ | $0$ | $-3$ | $0$ |

Η γραφική παράσταση σε πλάτος μίας περιόδου είναι:



**Άσκηση 7 – Λύση**

i. Για κάθε γωνία $\omega$ ισχύει η σχέση: $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$. Οπότε παίρνουμε:

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$$
$$-2 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 2$$

Οπότε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι η τιμή 2 και η ελάχιστη τιμή της η τιμή -2.

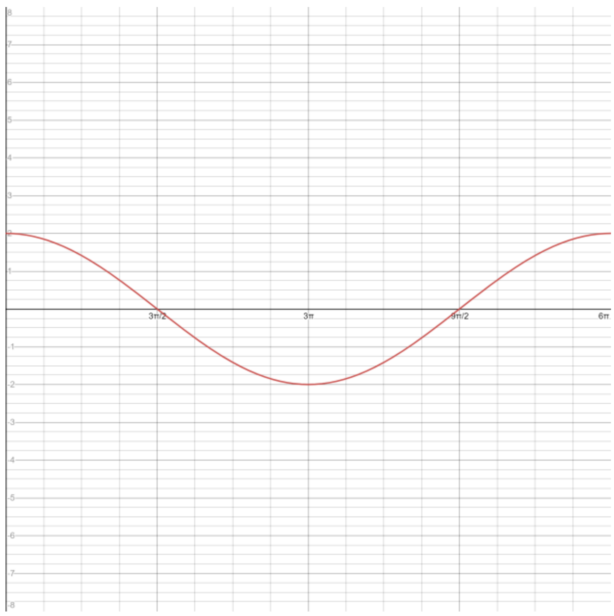
ii. Η συνάρτηση είναι της μορφής $\sigma\upsilon\nu(\omega x)$ με $\omega = \frac{1}{3}$. Από τον τύπο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ παίρνουμε:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

iii. Οπότε οι τιμές σε διάστημα μίας περιόδου στον πίνακα θα είναι: $0, \frac{T}{4} = \frac{3\pi}{2}, \frac{T}{2} = 3\pi, \frac{3T}{4} = \frac{9\pi}{2}, T = 6\pi$. Ο πίνακας θα έχει τη μορφή:

| $x$ | $0$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $3\pi$ | $\frac{9\pi}{2}$ | $6\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | $0$ | $-2$ | $0$ | $2$ |

Η γραφική παράσταση σε πλάτος μίας περιόδου είναι:



**Άσκηση 8 – Λύση**

i. Για κάθε γωνία $\omega$ ισχύει η σχέση: $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$. Οπότε παίρνουμε:

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$$
$$5 \geq -5\sigma\upsilon\nu\omega \geq -5$$
$$-5 \leq -5\sigma\upsilon\nu\omega \leq 5$$

Οπότε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι η τιμή 5 και η ελάχιστη τιμή της η τιμή -5.

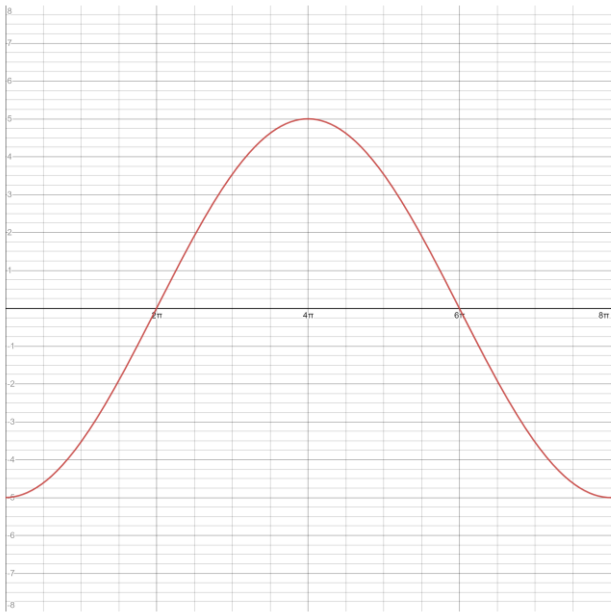
ii. Η συνάρτηση είναι της μορφής $\sigma\upsilon\nu(\omega x)$ με $\omega = \frac{1}{4}$. Από τον τύπο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ παίρνουμε:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$$

iii. Οπότε οι τιμές σε διάστημα μίας περιόδου στον πίνακα θα είναι: $0, \frac{T}{4} = 2\pi, \frac{T}{2} = 4\pi, \frac{3T}{4} = 6\pi, T = 8\pi$. Ο πίνακας θα έχει τη μορφή:

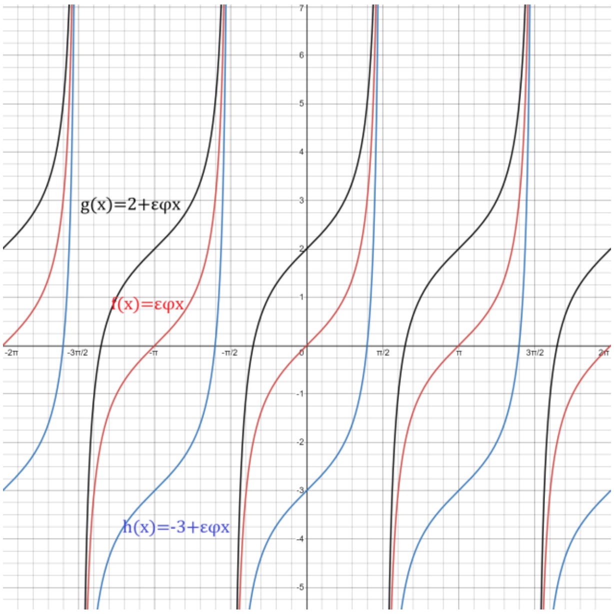
| $x$ | $0$ | $2\pi$ | $4\pi$ | $6\pi$ | $8\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-5$ | $0$ | $5$ | $0$ | $-5$ |

Η γραφική παράσταση σε πλάτος μίας περιόδου είναι:



**Άσκηση 9 –Λύση**

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$. Οι συναρτήσεις $g(x)$ $και$ $h(x)$ προκύπτουν με παράλληλη μεταφορά της συνάρτησης $f(x)$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω και 3 μονάδες προς τα κάτω αντίστοιχα. Οπότε το κοινό γράφημα είναι:




**Άσκηση 10 – Λύση**

Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της συνάρτησης $εφx$, ως εξής:

$$f(x) = σφx = εφ\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -εφ\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Θυμόμαστε ότι για κάθε συνάρτηση $f(x - c)$ έχουμε μετατόπιση της συνάρτησης $f(x)$ κατά $c$ μονάδες δεξιά. Ενώ η συνάρτηση $-f(x)$ είναι συμμετρική με τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς τον άξονα $x'x$. Οπότε το γράφημα της $f(x) = σφx$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε τη συνάρτηση $εφx$ κατά $\frac{\pi}{2}$ μονάδες δεξιά και πάρουμε την συμμετρική της ως προς τον άξονα $x'x$.Το πεδίο ορισμού της προκύπτει από τον περιορισμό $x - \frac{\pi}{2} \neq κ\pi + \frac{\pi}{2}$ $δηλαδή$

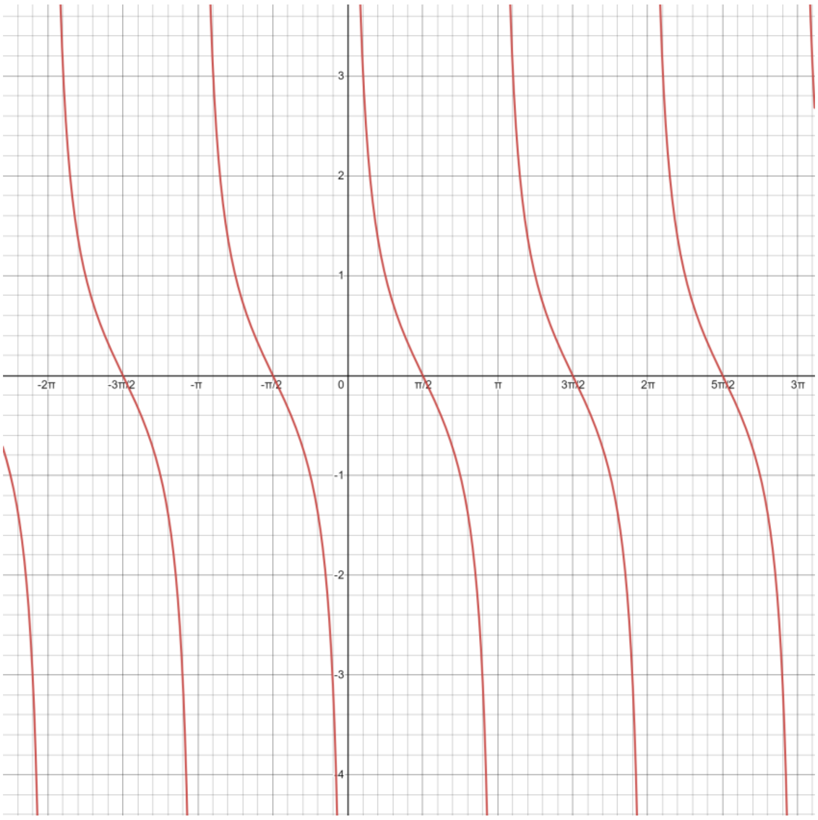
$x \neq κ\pi + \pi = (κ + 1)\pi$ ή $x \neq n\pi$. Οπότε $\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x \in R \,/ x \neq n\pi, n \in Z}\}$

Η συνάρτηση $εφ\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της οπότε η συνάρτηση

$f(x) = σφx$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\boldsymbol{D_f}$.

*****Αν για κάθε $x_1 > x_2 \; ισχύει \; f(x_1) > f(x_2)$ $(\boldsymbol{γν. αυξουσα})$ τότε $-f(x_1) < -f(x_2)$ $(\boldsymbol{γν. φθίνουσα})$

Η γραφικής της παράσταση είναι:



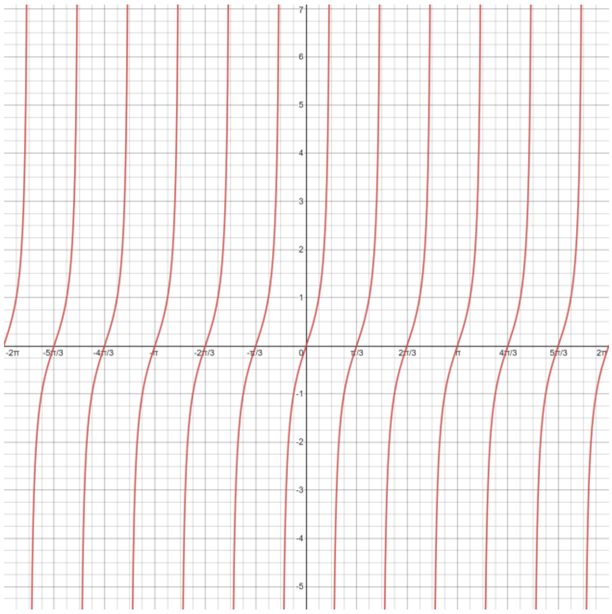

Το γράφημα της καθώς το $x$ διατρέχει το $\boldsymbol{R}$ βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $x = κπ, κ \in Z$.

### Άσκηση 11 – Λύση

Η συνάρτηση είναι της μορφής $\varepsilon\varphi(\omega x)$ οπότε η περίοδος της θα υπολογίζεται με τον τύπο $T = \frac{\pi}{\omega}$.
Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi(3x)$ έχει $\omega = 3$ άρα η περίοδος της θα είναι:

$$T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{3}$$

Το πεδίο ορισμού της είναι: $D_f = \left\{x \in R / x \neq \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \kappa \in Z\right\}$. Η γραφική παράσταση δίνεται ως εξής:




### Άσκηση 12 – Λύση

Οι συναρτήσεις $f(x), g(x)\ \ \kappa\alpha\iota\ h(x)$ έχουν τις εξής κοινές ιδιότητες:

- Είναι περιοδικές
- Έχουν μέγιστο την τιμή 1 και ελάχιστο την τιμή -1.

Η συνάρτηση $f(x)$ έχει περίοδο $T = 2\pi$, οπότε υπολογίζουμε τις περιόδους των άλλων δύο συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τον τύπο: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Για κάθε περίπτωση παίρνουμε:

- Για την συνάρτηση $g(x)$: Ισχύει $\omega = 2$ οπότε $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$
- Για την συνάρτηση $h(x)$: Ισχύει $\omega = 3$ οπότε $T = \frac{2\pi}{3}$

Για κάθε μία συνάρτηση δημιουργούμε πίνακα τιμών που θα περιέχει τις τιμές:

$$0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$$

Οι πίνακες θα έχουν τη μορφή:

i.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |

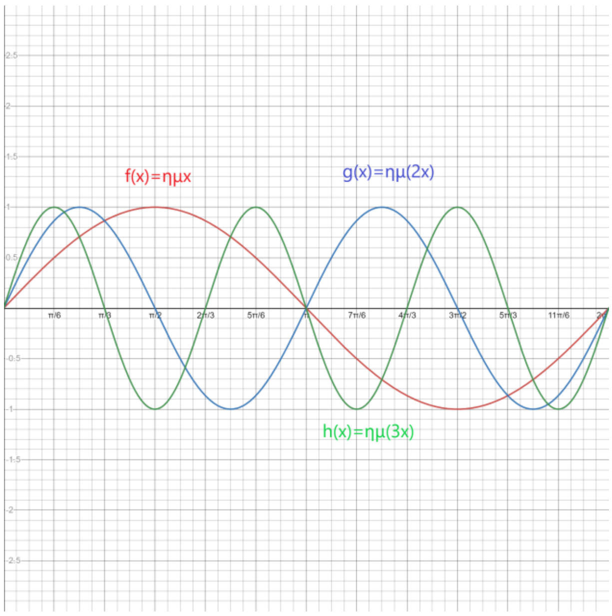
ii.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |

iii.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |

Στο διάστημα $[0,2\pi]$ λόγω συμμετρίας και περιοδικότητας το γράφημα της συνάρτησης $g(x)$ θα έχει 2 ακριβώς επαναλήψεις ενώ της συνάρτησης $h(x)$ ακριβώς 3 επαναλήψεις. Η κοινή γραφική παράσταση είναι:



**Άσκηση 13 – Λύση**

i. Από τον τύπο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ για κάθε μία συνάρτηση έχουμε:

- Για την συνάρτηση $f(x)$: Ισχύει $\omega = \frac{1}{2}$, οπότε $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
- Για την συνάρτηση $g(x)$: Ισχύει $\omega = \frac{1}{3}$ οπότε $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

ii. Για κάθε μία συνάρτηση δημιουργούμε πίνακα τιμών που θα περιέχει τις τιμές:

$0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$

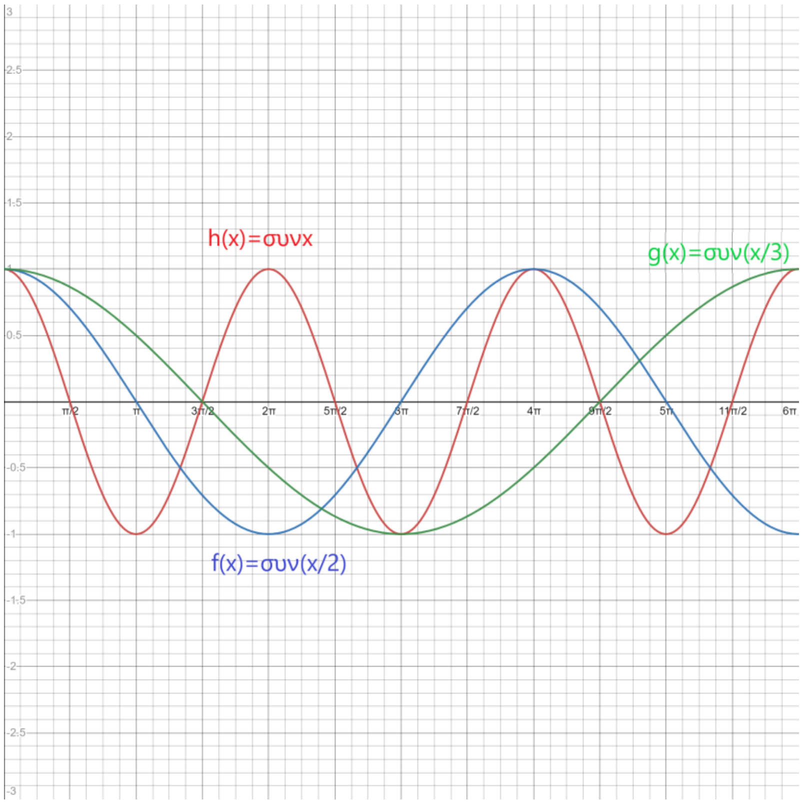
Οι πίνακες θα έχουν τη μορφή:

| $x$ | $0$ | $\pi$ | $2\pi$ | $3\pi$ | $4\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |

| $x$ | $0$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $3\pi$ | $\frac{9\pi}{2}$ | $6\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |

Στο διάστημα $[0,2\pi]$ λόγω συμμετρίας και περιοδικότητας το γράφημα της συνάρτησης $f(x)$ θα έχει $1\frac{1}{2}$ ακριβώς επαναλήψεις ενώ της συνάρτησης $h(x)$ ακριβώς 3 επαναλήψεις. Η κοινή γραφική παράσταση είναι:




**Άσκηση 14 – Λύση**

i. Για κάθε $\kappa \neq 0$ και για κάθε $x \in R$ για το συνημίτονο κάθε γωνίας, ισχύει:

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu(\kappa x) \leq 1$$
$$-\beta \leq \beta \cdot \sigma\upsilon\nu(\kappa x) \leq \beta \quad \{\beta > 0\}$$
$$\alpha - \beta \leq \alpha + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu(\kappa x) \leq \alpha + \beta$$

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι ο αριθμός $\alpha + \beta$ και η ελάχιστη τιμή ο αριθμός $\alpha - \beta$.

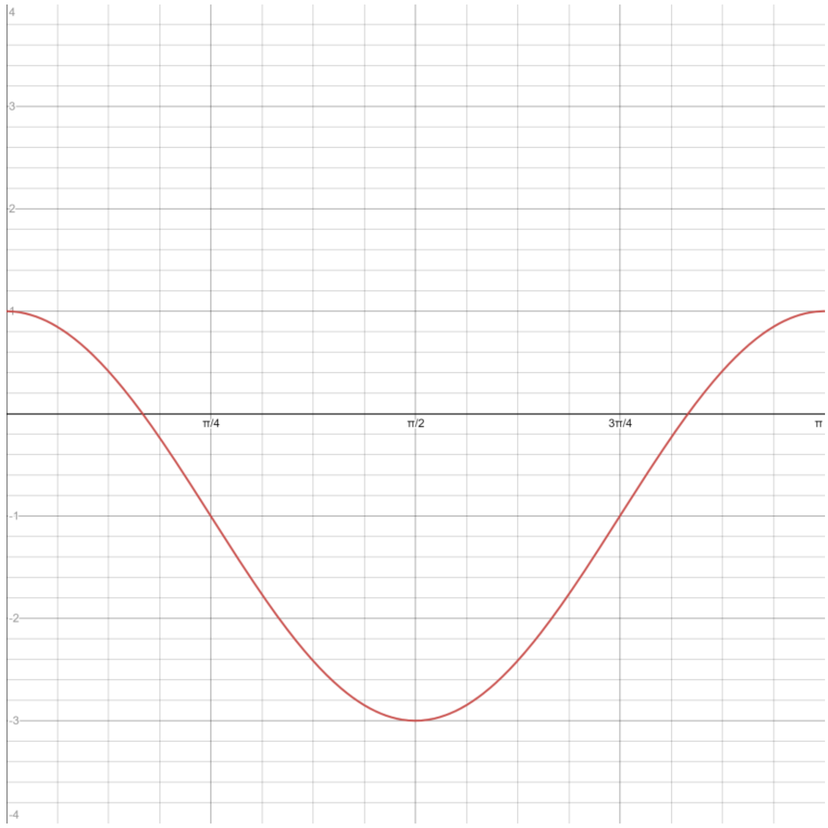
ii. Αντικαθιστώντας τις τιμές $\alpha = -1, \beta = 2 \; \kappa\alpha\iota \; \kappa = 2$ η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = -1 + 2\sigma\upsilon\nu(2x)$$

Η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ και ο πίνακας τιμών της για το πλάτος μίας περιόδου στις τιμές $0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$, είναι ο εξής:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $-1$ | $-3$ | $-1$ | $1$ |

Η γραφική παράσταση σε πλάτος μίας περιόδου είναι:



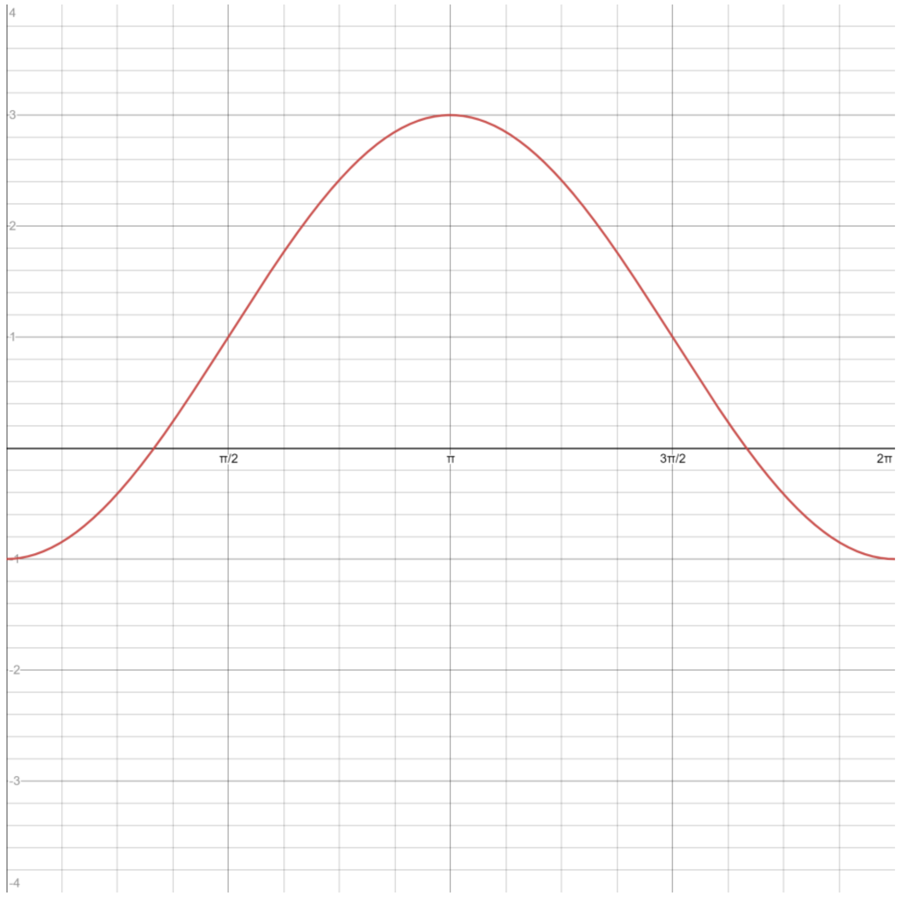
iii. Αντικαθιστώντας τις τιμές $\alpha = 1, \beta = -2\ και\ \kappa = \frac{1}{2}$ η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = 1 - 2\sigma\upsilon\nu x$$

Η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$ και ο πίνακας τιμών της για το πλάτος μίας περιόδου στις τιμές $0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$, είναι ο εξής:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $1$ | $-1$ |

Η γραφική παράσταση σε πλάτος μίας περιόδου είναι:



## 3.5. Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

### Λύσεις

.

**Άσκηση 1 – Λύση**

i. Η εξίσωση γράφεται:

$\eta\mu x = \eta\mu(\frac{3\pi}{2})$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}, \kappa \in Z$$

ii. Η εξίσωση γράφεται:

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\pi$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \pi \\ x = 2\kappa\pi - \pi \end{cases}, \kappa \in Z$$

iii. Η εξίσωση γράφεται:

$\eta\mu x = \eta\mu 0^o$ με λύσεις που δίνονται από τον τύπο:

$x = 2\kappa\pi, \kappa \in Z$

iv. Η εξίσωση γράφεται:

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ή } x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z$$

**Άσκηση 2 – Λύση**

i. Η εξίσωση γράφεται:

$\eta\mu x = \eta\mu\frac{5\pi}{4}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{5\pi}{4}\right) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in Z$$

ii. Η εξίσωση γράφεται:

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in Z$$

iii. Η εξίσωση γράφεται:

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in Z$$

iv. Η εξίσωση γράφεται:

$\eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{3}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \frac{\pi}{3}) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in Z$$

**Άσκηση 3 – Λύση**

i. Η εξίσωση γράφεται:

$\eta\mu x = \eta\mu\frac{7\pi}{6}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in Z$$

ii. Η εξίσωση γράφεται:

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{7\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in Z$$

iii. Η εξίσωση γράφεται:

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in Z$$

iv. Η εξίσωση γράφεται:

$\eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{4}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad ,\kappa \in Z$$

**Άσκηση 4 – Λύση**

i. Η εξίσωση γράφεται:

$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$ με λύσεις που δίνονται από τον τύπο:

$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in Z$

Οι λύσεις αυτές ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varepsilon\varphi x$, διότι $\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$.

ii. Η εξίσωση γράφεται:

$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\frac{\pi}{4}$
$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$
$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$ με λύσεις που δίνονται από τον τύπο:

$\frac{\pi}{2} - x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $x = -\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $x = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in Z$

Οι λύσεις αυτές ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sigma\varphi x$, διότι $n\pi + \frac{\pi}{4} \neq n\pi$.

iii. Η εξίσωση γράφεται:

$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{2\pi}{3}$ με λύσεις που δίνονται από τον τύπο:

$x = \kappa\pi + \frac{2\pi}{3}, \kappa \in Z$

Οι λύσεις αυτές ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varepsilon\varphi x$, διότι $\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

iv. Η εξίσωση γράφεται:

$$\sigma\varphi x=\sigma\varphi\frac{\pi}{6}$$
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$
$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{3})$ με λύσεις που δίνονται από τον τύπο:

$\frac{\pi}{2}-x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3}$ ή $x=-\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$ ή $x=n\pi+\frac{\pi}{6}, n\in Z$

Οι λύσεις αυτές ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sigma\varphi x$, διότι $n\pi+\frac{5\pi}{6}\neq n\pi$.

**Άσκηση 5 – Λύση**

i. Από το γινόμενο των παραστάσεων προκύπτουν οι σχέσεις:

$1+\eta\mu x=0$ ή $2\eta\mu x+\sqrt{3}=0$

- $\eta\mu x=-1$
  $\eta\mu x=\eta\mu\frac{3\pi}{2}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2} \\ x=2\kappa\pi+(\pi-\frac{3\pi}{2}) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2} \\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases}, \kappa\in Z$$

- $2\eta\mu x=-\sqrt{3}$
  $\eta\mu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
  $\eta\mu x=\eta\mu\frac{4\pi}{3}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{4\pi}{3} \\ x=2\kappa\pi+(\pi-\frac{4\pi}{3}) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{4\pi}{3} \\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa\in Z$$

ii. Από το γινόμενο των παραστάσεων προκύπτουν οι σχέσεις:

$2\eta\mu x - \sqrt{2} = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

- $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
  $\eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{4}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad ,\kappa \in Z$$

- $\sigma\upsilon\nu x = -1$
  $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\pi$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \pi \\ x = 2\kappa\pi - \pi \end{cases} \quad ,\kappa \in Z$$

iii. Από το γινόμενο των παραστάσεων προκύπτουν οι σχέσεις:

$1 + \varepsilon\varphi x = 0$ ή $1 + \sqrt{3}\varepsilon\varphi x = 0$

- $\varepsilon\varphi x = -1$
  $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}$ με λύσεις που δίνονται από τον τύπο:

$x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{4}$ $,\kappa \in Z$

Οι λύσεις αυτές ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varepsilon\varphi x$, διότι $\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$.

- $\sqrt{3}\varepsilon\varphi x = -1$
  $\varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
  $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{5\pi}{6}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$x = \kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$ $,\kappa \in Z$

Οι λύσεις αυτές ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varepsilon\varphi x$, διότι $\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$.

iv. Από το γινόμενο των παραστάσεων προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\eta\mu x+\frac{1}{2}=0 \text{ ή } \varepsilon\varphi^2 x-3=0 \text{ ή } \sigma\varphi x+\sqrt{3}=0$$

- $\eta\mu x=-\frac{1}{2}$

$\eta\mu x=\eta\mu\frac{7\pi}{6}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6} \\ x=2\kappa\pi+(\pi-\frac{7\pi}{6}) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6} \\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases} ,\kappa\in Z$$

- $\varepsilon\varphi^2 x-3=0$

$(\varepsilon\varphi x+\sqrt{3})(\varepsilon\varphi x+\sqrt{3})=0$

$\varepsilon\varphi x+\sqrt{3}=0$ ή $\varepsilon\varphi x-\sqrt{3}=0$

**1η περίπτωση:**

$\varepsilon\varphi x=-\sqrt{3}$

$\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{2\pi}{3}$ με λύσεις που δίνονται από τον τύπο:

$$x=\kappa\pi+\frac{2\pi}{3} \quad ,\kappa\in Z$$

Οι λύσεις αυτές ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varepsilon\varphi x$, διότι $\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$.

**2η περίπτωση:**

$\varepsilon\varphi x=\sqrt{3}$

$\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$ με λύσεις που δίνονται από τον τύπο:

$$x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \quad ,\kappa\in Z$$

Οι λύσεις αυτές ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varepsilon\varphi x$, διότι $\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$.

- $\sigma\varphi x = -\sqrt{3}$

  $\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2} - x) = -\sqrt{3}$

  $\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2} - x) = \varepsilon\varphi\frac{2\pi}{3}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

  $\frac{\pi}{2} - x = \kappa\pi + \frac{2\pi}{3}$ ή $x = -\kappa\pi - \frac{\pi}{6} = n\pi - \frac{\pi}{6},\ n \in Z$

Οι λύσεις αυτές ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sigma\varphi x$, διότι $n\pi - \frac{\pi}{6} \neq n\pi$.

**Άσκηση 6 – Λύση**

i. Η εξίσωση γράφεται:

$\sigma\upsilon\nu 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu 5x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} 5x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 5x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = \frac{2\kappa\pi}{5} + \frac{\pi}{30} \\ x = \frac{2\kappa\pi}{5} - \frac{\pi}{30} \end{cases} \quad , \kappa \in Z$$

ii. Η εξίσωση γράφεται:

$\eta\mu\frac{x}{5} = -\frac{1}{2}$

$\eta\mu\frac{x}{5} = \eta\mu\frac{7\pi}{6}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} \frac{x}{5} = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \\ \frac{x}{5} = 2\kappa\pi + (\pi - \frac{7\pi}{6}) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \frac{x}{5} = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \\ \frac{x}{5} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 10\kappa\pi + \frac{35\pi}{6} \\ x = 10\kappa\pi - \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad , \kappa \in Z$$

iii. Για να έχει νόημα η εξίσωση πρέπει $\frac{3x}{7} \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ $\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}$ $x \neq \frac{7\kappa\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}$. Η εξίσωση γράφεται:

$\varepsilon\varphi\frac{3x}{7} = -\sqrt{3}$

$\varepsilon\varphi\frac{3x}{7} = \varepsilon\varphi\frac{2\pi}{3}$ με λύσεις που δίνονται από τον τύπο:

$\frac{3x}{7} = \kappa\pi + \frac{2\pi}{3}$ ή $x = \frac{7\kappa\pi}{3} + \frac{14\pi}{9}, \kappa \in Z$

Εξετάζουμε αν οι λύσεις αυτές βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varepsilon\varphi\frac{3x}{7}$ ως εξής:

$$\frac{7\kappa\pi}{3} + \frac{14\pi}{9} \neq \frac{7\kappa\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}$$

Το οποίο ισχύει.

## Άσκηση 7 – Λύση

i. Η εξίσωση γράφεται:

$\eta\mu 6x = \frac{1}{2}$
$\eta\mu 6x = \eta\mu\frac{\pi}{6}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} 6x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 6x = 2\kappa\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 6x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 6x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \\ x = \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \end{cases}, \kappa \in Z$$

ii. Η εξίσωση γράφεται:

$\sigma\upsilon\nu\frac{x}{5} = -\frac{1}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\frac{x}{5} = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} \frac{x}{5} = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \frac{x}{5} = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 10\kappa\pi + \frac{10\pi}{3} \\ x = 10\kappa\pi - \frac{10\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in Z$$

iii. Για να έχει νόημα η εξίσωση πρέπει $7x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ $\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}$ $x \neq \frac{\kappa\pi}{7} + \frac{\pi}{14}$. Η εξίσωση γράφεται:

$\varepsilon\varphi 7x = \sqrt{3}$
$\varepsilon\varphi 7x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$ με λύσεις που δίνονται από τον τύπο:

$7x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $x = \frac{\kappa\pi}{7} + \frac{\pi}{21}, \kappa \in Z$

Εξετάζουμε αν οι λύσεις αυτές βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $εφx$ ως εξής:

$\frac{κπ}{7}+\frac{π}{21}, \neq \frac{κπ}{7}+\frac{π}{14}$

Το οποίο ισχύει.

**Άσκηση 8 – Λύση**

i. Η εξίσωση γράφεται:

$ημ(x+20^o) = συν(x+50^o)$
$ημ(x+20^o) = ημ(90^o-(x+50^o))$
$ημ(x+20^o) = ημ(40^o-x)$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$\begin{cases} x+20^o = κ\cdot 360^o + 40^o - x \\ x+20^o = κ\cdot 360^o + 180^o - 40^o + x \end{cases}$ ή $\begin{cases} 2x = κ\cdot 360^o + 20^o \\ 0x = κ\cdot 360^o + 120^o (αδύνατη) \end{cases}$ οπότε

καταλήγουμε στη λύση $x = κ\cdot 180^o + 10^o$ , $κ \in Z$.

ii. Η εξίσωση γράφεται:

$ημ\left(x+\frac{π}{4}\right) = -συν\left(\frac{π}{3}-x\right)$
$ημ\left(x+\frac{π}{4}\right) = -ημ\left(\frac{π}{2}-(\frac{π}{3}-x\right))$
$ημ\left(x+\frac{π}{4}\right) = -ημ\left(\frac{π}{6}+x\right)$

$ημ\left(x+\frac{π}{4}\right) = ημ\left(-\frac{π}{6}-x\right)$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$\begin{cases} x+\frac{π}{4} = 2κπ - \frac{π}{6} - x \\ x+\frac{π}{4} = 2κπ + π + \frac{π}{6} + x \end{cases}$ ή $\begin{cases} 2x = 2κπ - \frac{5π}{12} \\ 0x = 2κπ + \frac{11π}{12} (αδύνατη) \end{cases}$ οπότε καταλήγουμε στη λύση $x = κπ - \frac{5π}{24}$ , $κ \in Z$.

iii. Η εξίσωση γράφεται:

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\upsilon\nu x$$
$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$\begin{cases} x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}+x \\ x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\pi+\frac{\pi}{2}-x \end{cases}$ ή $\begin{cases} 0x=2\kappa\pi-\frac{3\pi}{4}\,(\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta) \\ 2x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{4} \end{cases}$ οπότε καταλήγουμε στη λύση $x=\kappa\pi+\frac{5\pi}{8}$ , $\kappa\in Z$.

**Άσκηση 9 – Λύση**

i. Η εξίσωση γράφεται:

$$\varepsilon\varphi x\cdot\eta\mu x+1=\varepsilon\varphi x+\eta\mu x$$
$$\varepsilon\varphi x\cdot\eta\mu x+1-\varepsilon\varphi x-\eta\mu x=0$$
$$\varepsilon\varphi x(\eta\mu x-1)-(\eta\mu x-1)=0$$
$$(\eta\mu x-1)(\varepsilon\varphi x-1)=0$$

Από το γινόμενο προκύπτει:

$\eta\mu x-1=0$ ή $\varepsilon\varphi x-1=0$

- $\eta\mu x-1=0$
  $\eta\mu x=1$
  $\eta\mu x=\eta\mu 0^o$ Οι λύσεις δίνονται από τον τύπο: $x=2\kappa\pi,\kappa\in Z$.

- $\varepsilon\varphi x-1=0$
  $\varepsilon\varphi x=1$
  $\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$ Οι λύσεις δίνονται από τον τύπο: $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\kappa\in Z$. Οι τιμές αυτές ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varepsilon\varphi x$.

ii. Από την τριγωνομετρική ταυτότητα $εφ7x \cdot σφ7x = 1$, για όλες τις τιμές που ορίζονται οι συναρτήσεις, δηλαδή $x \neq \frac{κπ}{7} + \frac{π}{14}$ $και\ x \neq \frac{κπ}{7}$ ,θα πρέπει να ισχύει:

$$εφ2x \cdot σφ7x = εφ7x \cdot σφ7x$$
$$εφ2x \cdot σφ7x - εφ7x \cdot σφ7x = 0$$
$$σφ7x(εφ2x - εφ7x) = 0$$

Από το γινόμενο προκύπτει:

$σφ7x = 0$ ή $εφ2x - εφ7x = 0$

- $σφ7x = 0$
  $εφ(\frac{π}{2} - 7x) = εφ0^o$
  Οι λύσεις δίνονται από τον τύπο: $\frac{π}{2} - 7x = κπ$ ή $x = \frac{nπ}{7} + \frac{π}{14}, n \in Z.$

- $εφ2x - εφ7x = 0$
  $εφ2x = εφ7x$ Οι λύσεις δίνονται από τον τύπο: $2x = κπ + 7x$ ή $5x = -κπ$ ή $x = \frac{nπ}{5}$, $n \in Z$.

iii. Για να έχει νόημα η εξίσωση θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα:

$συνx \neq 0\ δηλαδή\ x \neq 2κπ \pm \frac{π}{2}$ και $ημx \neq -1\ δηλαδή\ \ και\ x \neq 2κπ + \frac{3π}{2}$.

Για τις τιμές που ορίζεται η εξίσωση έχουμε:

$$\frac{1+ημx}{συνx} + \frac{συνx}{1+ημx} = 4$$
$$(1+ημx)^2 + συν^2x = 4(1+ημx)συνx$$
$$1 + 2ημx + ημ^2x + συν^2x = 4συνx + 4συνx \cdot ημx$$
$$2 + 2ημx - 4συνx - 4συνx \cdot ημx = 0$$
$$1 + ημx - 2συνx - 2συνx \cdot ημx = 0$$
$$1 - 2συνx + ημx(1 - 2συνx) = 0$$
$$(1 - 2συνx)(1 + ημx) = 0$$

Από την ισότητα παίρνουμε $ημx = -1$ (απορρίπτεται λόγω περιορισμού) ή $1 - 2συνx = 0$.
Η τελευταία εξίσωση δίνει:

$συνx = \frac{1}{2}$
$συνx = συν\frac{\pi}{3}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$\begin{cases} x = 2κ\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2κ\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$ , $κ \in Z$ οι οποίες είναι δεκτές στον περιορισμό.

**Άσκηση 10 – Λύση**

i. Από την τριγωνομετρική ταυτότητα $ημ^2x = 1 - συν^2x$ η εξίσωση γράφεται:

$1 - συν^2x + συνx + 1 = 0$

$συν^2x - συνx - 2 = 0$

Θέτουμε $ω = συνx$ με $-1 \leq ω \leq 1$ και η εξίσωση γράφεται:

$ω^2 - ω - 2 = 0$ με λύσεις $ω_1 = -1$ ή $ω_2 = 2$ (απορρίπτεται λόγω περιορισμού)

Οπότε μοναδική λύση η $ω_1 = -1$ από την οποία παίρνουμε:

$συνx = -1$

$συνx = συν\pi$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους: $x = 2κ\pi \pm \pi, κ \in Z$.

ii. Από την τριγωνομετρική ταυτότητα $1 - ημ^2x = συν^2x$ η εξίσωση γράφεται:

$1 - ημ^2x + ημx = \frac{5}{4}$

$ημ^2x - ημx + \frac{1}{4} = 0$

Θέτουμε $ω = ημx$ με $-1 \leq ω \leq 1$ και η εξίσωση γράφεται:

$ω^2 - ω + \frac{1}{4} = 0$ με διπλή λύση $ω_1 = \frac{1}{2}$.

Για τη λύση η $\omega_1 = \frac{1}{2}$ παίρνουμε:

$\eta\mu x = \frac{1}{2}$

$\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6}$ με λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \text{ή } \begin{matrix} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{matrix}, \kappa \in Z$$

**Άσκηση 11 – Λύση**

i. Η εξίσωση γράφεται:

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1$$
$$(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1^2$$
$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x = 1$$
$$2\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x = 0$$

Οπότε παίρνουμε $\sigma\upsilon\nu x = 0$ ή $\eta\mu x = 0$

- $\sigma\upsilon\nu x = 0$
  $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2}$
  Οι λύσεις θα δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}, \kappa \in Z$$

- $\eta\mu x = 0$
  $\eta\mu x = \eta\mu 0^o$
  Οι λύσεις θα δίνονται από τον τύπο $x = 2\kappa\pi, \kappa \in Z$.

Εξετάζουμε τις λύσεις αντικαθιστώντας τις τιμές στην αρχική εξίσωση και παίρνουμε:

- $\eta\mu\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$
  $1=1$ **Που ισχύει**

- $\eta\mu(2\kappa\pi)+\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi)$ =1
  1=1 **Που ισχύει**

- $\eta\mu\left(2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\right)=1$ δηλαδή $-1=1$ **Άτοπο**

Οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους γενικούς τύπους $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ και $x=2\kappa\pi, \kappa\in Z$

ii. Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο παιρνουμε:

$$\left(\sqrt{3}\cdot\eta\mu x\right)^2=(2+\sigma\upsilon\nu x)^2$$
$$3\eta\mu^2x=4+4\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2x$$
$$3(1-\sigma\upsilon\nu^2x)=4+4\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2x$$
$$3-3\sigma\upsilon\nu^2x=4+4\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2x$$
$$4\sigma\upsilon\nu^2x+4\sigma\upsilon\nu x+1=0$$
$$(2\sigma\upsilon\nu x+1)^2=0$$
$$2\sigma\upsilon\nu x+1=0$$
$$\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}$$
$$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$$

Οι λύσεις θα δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3} \\ x=2\kappa\pi-\frac{2\pi}{3} \end{cases}, \kappa\in Z$$

Εξετάζουμε τις λύσεις αντικαθιστώντας τις τιμές στην αρχική εξίσωση και παίρνουμε:

- $\sqrt{3}\cdot\eta\mu\left(2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=2+\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$
  $\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2-\frac{1}{2}$
  $\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ **Που ισχύει**

- $\sqrt{3}\cdot\eta\mu\left(2\kappa\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=2+\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi-\frac{2\pi}{3}\right)$

  $\sqrt{3}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}=2-\frac{1}{2}$ **Άτοπο**

  Η λύση της εξίσωσης δίνεται από το γενικό τύπο $x=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3},\kappa\in Z$

**Άσκηση 12 – Λύση**

i. Για να έχει νόημα η εξίσωση θα πρέπει να ισχύει$x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in Z$. Η εξίσωση γράφεται:

$$\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x-2\sigma\upsilon\nu x=0$$
$$1-2\sigma\upsilon\nu x=0$$
$$\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}$$
$$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$$

Οι λύσεις θα δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}\end{cases},\kappa\in Z$$

ii. Για να έχει νόημα η εξίσωση θα πρέπει να ισχύει $\sigma\upsilon\nu^2x\neq 0$ δηλαδή $x\neq 2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2},\kappa\in Z\ (\pi o\upsilon\ \kappa\alpha\lambda\acute{\upsilon}\pi\tau\varepsilon\iota\ \kappa\alpha\iota\ \tau o\nu\ \pi\varepsilon\rho\iota o\rho\iota\sigma\mu\acute{o}\ \tau\eta\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma\ \varepsilon\varphi x)$. Η εξίσωση γράφεται:

$$1+\varepsilon\varphi^2x-2\varepsilon\varphi x=4$$
$$(\varepsilon\varphi x-1)^2=2^2$$
$$\varepsilon\varphi x-1=2\text{ ή }\varepsilon\varphi x-1=-2$$
$$\varepsilon\varphi x=3\text{ ή }\varepsilon\varphi x=-1$$

- $\varepsilon\varphi x=-1$

  $\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}$

  Οι λύσεις θα δίνονται από τον τύπο $x=\kappa\pi+\frac{3\pi}{4},\kappa\in Z$.

- $εφx = 3$ {Από τους πίνακες των τριγωνομετρικών αριθμών}
  $εφx \cong εφ72^o$
  $εφx \cong εφ\frac{2π}{5}$

  Οι λύσεις θα δίνονται από τον τύπο $x = κπ + \frac{2π}{5}, κ \in Z$.

**Άσκηση 13 – Λύση**

i. Για να έχει νόημα η εξίσωση θα πρέπει να ισχύουν:

- $2x \neq κπ + \frac{π}{2}$
  $x \neq \frac{κπ}{2} + \frac{π}{4}$

- $\frac{π}{3} + 3x \neq κπ$
  $x \neq \frac{κπ}{3} - \frac{π}{9}$

Η εξίσωση γράφεται:

$$εφ2x = εφ\left(\frac{π}{2} - \left(\frac{π}{3} + 3x\right)\right)$$
$$εφ2x = εφ\left(\frac{π}{6} - 3x\right)$$

Οι λύσεις θα δίνονται από τον τύπο:

$2x = κπ + \frac{π}{6} - 3x$ ή $5x = κπ + \frac{π}{6}$ ή $x = \frac{κπ}{5} + \frac{π}{30}, κ \in Z$.

Εξετάζουμε αν οι λύσεις αυτές βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $εφ2x$ ως εξής:

$$\frac{κπ}{5} + \frac{π}{30} \neq \frac{κπ}{2} + \frac{π}{4}$$
$$6κ + 1 \neq 15κ + \frac{15}{2}$$
$$-9κ \neq \frac{13}{2}$$
$$κ \neq \frac{-13}{18}$$

Το οποίο ισχύει αφού $κ \in Z$.

Ομοίως θα πρέπει:

$$\frac{\kappa\pi}{5}+\frac{\pi}{30}\neq\frac{\kappa\pi}{3}-\frac{\pi}{9}$$
$$6\kappa+1\neq 10\kappa-\frac{30}{9}$$
$$-4\kappa\neq-\frac{39}{9}$$
$$\kappa\neq\frac{39}{36}$$

Το οποίο ισχύει αφού $\kappa\in Z$.

ii. $\sigma\upsilon\nu 6x=-\eta\mu 5x$
$\sigma\upsilon\nu 6x=\eta\mu(-5x)$
$\sigma\upsilon\nu 6x=\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+5x)$

Οι λύσεις θα δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases}6x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}+5x\\6x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}-5x\end{cases}\text{ή}\begin{cases}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\\11x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}\text{ ή }\begin{cases}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\\x=\frac{2\kappa\pi}{11}-\frac{\pi}{22}\end{cases},\kappa\in Z$$

**Άσκηση 14 – Λύση**

i. Για να έχει νόημα η εξίσωση θα πρέπει να ισχύουν:

- $3x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$
  $x\neq\frac{\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$

- $\frac{\pi}{4}+2x\neq\kappa\pi$
  $x\neq\frac{\kappa\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

Η εξίσωση γράφεται:

$$\varepsilon\varphi 3x=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right)$$
$$\varepsilon\varphi 3x=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$$

Οι λύσεις θα δίνονται από τον τύπο:
$3x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}-2x$ ή $5x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$ ή $x=\frac{\kappa\pi}{5}+\frac{\pi}{20},\kappa\in Z$

Εξετάζουμε αν οι λύσεις αυτές βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $εφ3x$ ως εξής:

$$\frac{κπ}{5}+\frac{π}{20} \neq \frac{κπ}{3}+\frac{π}{6}$$
$$12κ+3 \neq 20κ+10$$
$$-8κ \neq 7$$
$$κ \neq \frac{-7}{8}$$

Το οποίο ισχύει αφού $κ \in Z$.

Ομοίως θα πρέπει:

$$\frac{κπ}{5}+\frac{π}{20} \neq \frac{κπ}{2}-\frac{π}{8}$$
$$8κ+2 \neq 20κ-5$$
$$-12κ \neq -7$$
$$κ \neq \frac{7}{12}$$

Το οποίο ισχύει αφού $κ \in Z$.

ii. $συν\frac{x}{2} = -ημ5x$

$συν\frac{x}{2} = ημ(-5x)$

$συν\frac{x}{2} = συν(\frac{π}{2}+5x)$

Οι λύσεις θα δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = 2κπ+\frac{π}{2}+5x \\ \frac{x}{2} = 2κπ-\frac{π}{2}-5x \end{cases} ή \begin{cases} \frac{-9x}{2} = 2κπ+\frac{π}{2} \\ \frac{11x}{2} = 2κπ-\frac{π}{2} \end{cases} ή \begin{cases} x = -\frac{4κπ}{9}-\frac{π}{9} \\ x = \frac{4κπ}{11}-\frac{π}{11} \end{cases}, κ \in Z$$

**Άσκηση 15 – Λύση**

i. Για να έχει νόημα η εξίσωση θα πρέπει να ισχύουν:

- $3\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
  $\theta \neq \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$
- $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

$\varepsilon\varphi^2 x = \varepsilon\varphi^2 3\theta$
$\varepsilon\varphi^2 x - \varepsilon\varphi^2 3\theta = 0$
$(\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi 3\theta)(\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi 3\theta) = 0$

Οπότε $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi 3\theta$ ή $\varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi 3\theta$

- $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi 3\theta$
  Οι λύσεις θα δίνονται από τον τύπο $x = \kappa\pi + 3\theta, \kappa \in Z$.

Εξετάζουμε για ποιες τιμές του $\theta$ οι λύσεις αυτές βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varepsilon\varphi x$ ως εξής:

$\kappa\pi + 3\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
$3\theta \neq \frac{\pi}{2}$
$\theta \neq \frac{\pi}{6}$

Για να έχει λύσεις η εξίσωση θα πρέπει να ισχύει: $\theta \neq \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ και $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$

- $\varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi 3\theta$
  $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi(-3\theta)$
  Οι λύσεις θα δίνονται από τον τύπο $x = \kappa\pi - 3\theta, \kappa \in Z$.
  Εξετάζουμε για ποιες τιμές του $\theta$ οι λύσεις αυτές βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varepsilon\varphi x$ ως εξής:

$\kappa\pi - 3\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
$-3\theta \neq \frac{\pi}{2}$
$\theta \neq -\frac{\pi}{6}$

Για να έχει λύσεις η εξίσωση θα πρέπει να ισχύει: $\theta \neq \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ και $\theta \neq \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$

**Άσκηση 16 – Λύση**

i. Για να έχει νόημα η εξίσωση θα πρέπει να ισχύουν:

- $3x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
  $x \neq \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

- $\frac{\pi}{4} + x \neq \kappa\pi$
  $x \neq \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$

Η εξίσωση γράφεται:

$$\varepsilon\varphi 3x = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right)$$
$$\varepsilon\varphi 3x = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Οι λύσεις θα δίνονται από τον τύπο:

$3x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} - x$ ή $4x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{16}, \kappa \in Z$

Αναζητούμε λύσεις που ανήκουν στο 1ο Τεταρτημόριο όπου $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Δηλαδή θα πρέπει να λύσουμε την ανίσωση:

$$0 < \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{16} < \frac{\pi}{2}$$
$$-\frac{\pi}{16} < \frac{\kappa\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16}$$
$$-\frac{\pi}{16} < \frac{\kappa\pi}{4} < \frac{7\pi}{16}$$
$$-\frac{1}{4} < \kappa < \frac{7}{4}$$

Οι ακέραιες τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\kappa$ στο διάστημα $(-\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$ είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$. Για τις τιμές της παραμέτρου έχουμε τις λύσεις:

- $x = \frac{0 \cdot \pi}{4} + \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{16}$
- $x = \frac{1 \cdot \pi}{4} + \frac{\pi}{16} = \frac{5\pi}{16}$

Δεκτές και οι δύο λύσεις στο διάστημα αυτό.

ii. $\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 2x$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - 2x)$

Οι λύσεις θα δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \end{cases} \text{ή} \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ -x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ή} \begin{cases} x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = -2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}, \kappa \in Z$$

Αναζητούμε λύσεις που ανήκουν στο 1$^{o}$ Τεταρτημόριο όπου $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Δηλαδή θα πρέπει να λύσουμε τις ανισώσεις:

- $0 < \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$
  $-\frac{\pi}{6} < \frac{2\kappa\pi}{3} < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$
  $-\frac{1}{6} < \frac{2\kappa}{3} < \frac{1}{3}$
  $-\frac{1}{4} < \kappa < \frac{1}{2}$

  Η ακέραια τιμη που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\kappa$ στο διάστημα $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ είναι $\kappa = 0$. Για την τιμή της παραμέτρου έχουμε τη λύση:

  $$x = \frac{0 \cdot 2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

- $0 < -2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$
  $-\frac{\pi}{2} < -2\kappa\pi < 0$
  $-\frac{1}{2} < -2\kappa < 0$
  $\frac{1}{4} > \kappa > 0$

Για τη λύση αυτή δεν υπάρχει ακέραια τιμή της παραμέτρου που βρίσκεται στο διάστημα$(0, \frac{1}{4})$ .

**Άσκηση 17 – Λύση**

i. Από την τριγωνομετρική ταυτότητα $ημ^2x = 1 - συν^2x$ η εξίσωση γράφεται:

$1 - συν^2x + συνx - 1 = 0$

$συν^2x - συνx = 0$

$συνx(συνx - 1) = 0$

$συνx = 0$ ή $συνx = 1$

**1η περίπτωση:**

$συνx = 0$
$συνx = συν\frac{\pi}{2}$

Οι λύσεις δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2κ\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2κ\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}, κ \in Z$$

Αναζητούμε λύσεις που ανήκουν στο 1ο και 2ο Τεταρτημόριο όπου $x \in (0, \pi)$. Δηλαδή θα πρέπει να λύσουμε τις ανισώσεις:

- $0 < 2κ\pi + \frac{\pi}{2} < \pi$
  $-\frac{\pi}{2} < 2κ\pi < \pi - \frac{\pi}{2}$
  $-\frac{1}{2} < 2κ < \frac{1}{2}$
  $-\frac{1}{4} < κ < \frac{1}{4}$

  Η ακέραια τιμη που μπορεί να πάρει η παράμετρος $κ$ στο διάστημα $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ είναι $κ = 0$. Για την τιμή της παραμέτρου έχουμε τη λύση:

  $$x = 2 \cdot 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

- $0 < 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} < \pi$
  $\frac{\pi}{2} < 2\kappa\pi < \pi + \frac{\pi}{2}$
  $\frac{1}{2} < 2\kappa < \frac{3}{2}$
  $\frac{1}{4} < \kappa < \frac{3}{4}$

Για τη λύση αυτή δεν υπάρχει ακέραια τιμή της παραμέτρου που να βρίσκεται στο διάστημα$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

**2η περίπτωση:**

$\sigma\upsilon\nu x = 1$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0^o$

Οι λύσεις δίνονται από τον τύπο $x = 2\kappa\pi, \kappa \in Z$.

Αναζητούμε λύσεις που ανήκουν στο 1ο και 2ο Τεταρτημόριο όπου $x \in (0, \pi)$. Δηλαδή θα πρέπει να λύσουμε την ανίσωση:

- $0 < 2\kappa\pi < \pi$
  $0 < 2\kappa < 1$
  $0 < \kappa < \frac{1}{2}$

Για τη λύση αυτή δεν υπάρχει ακέραια τιμή της παραμέτρου που να βρίσκεται στο διάστημα$\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

ii. $\sigma\upsilon\nu 3x = \eta\mu 2x$
$\sigma\upsilon\nu 3x = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - 2x)$

Οι λύσεις θα δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \\ 3x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \end{cases} \text{ή} \begin{cases} 5x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ή} \begin{cases} x = \frac{2\kappa\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}, \kappa \in Z$$

Αναζητούμε λύσεις που ανήκουν στο 1ο και 2ο Τεταρτημόριο όπου $x \in (0, \pi)$. Δηλαδή θα πρέπει να λύσουμε τις ανισώσεις:

- $0 < \frac{2\kappa\pi}{5} + \frac{\pi}{10} < \pi$
  $-\frac{\pi}{10} < \frac{2\kappa\pi}{5} < \pi - \frac{\pi}{10}$
  $-\frac{1}{10} < \frac{2\kappa}{5} < \frac{9}{10}$
  $-\frac{1}{4} < \kappa < \frac{9}{4}$

  Οι ακέραιες τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\kappa$ στο διάστημα $(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4})$ είναι $\kappa = 0, \kappa = 1\ \kappa\alpha\iota\ \kappa = 2$. Για τις τιμές της παραμέτρου έχουμε τις λύσεις:

  - $x = \frac{0 \cdot 2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10}$
  - $x = \frac{1 \cdot 2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{5\pi}{10}$
  - $x = \frac{2 \cdot 2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}$

- $0 < 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} < \pi$
  $\frac{\pi}{2} < 2\kappa\pi < \pi + \frac{\pi}{2}$
  $\frac{1}{2} < 2\kappa < \frac{3}{2}$
  $\frac{1}{4} < \kappa < \frac{3}{4}$

Για τη λύση αυτή δεν υπάρχει ακέραια τιμή της παραμέτρου που να βρίσκεται στο διάστημα$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ .

**Άσκηση 18 – Λύση**

i. Για να έχει νόημα η εξίσωση θα πρέπει να ισχύει: $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$. Η εξίσωση γράφεται:

$$\varepsilon\varphi x + 1 + \varepsilon\varphi^2 x = 1$$
$$\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi^2 x = 0$$
$$\varepsilon\varphi x(\varepsilon\varphi x + 1) = 0$$
$$\varepsilon\varphi x = 0 \text{ ή } \varepsilon\varphi x + 1 = 0$$

**1η περίπτωση:**

$$\varepsilon\varphi x = 0$$
$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi 0^o$$

Οι λύσεις θα δίνονται από τον τύπο $x = \kappa\pi, \kappa \in Z$. Βρίσκουμε την λύση στο διάστημα $(3\pi, 4\pi)$ λύνοντας την ανίσωση:

$$3\pi < \kappa\pi < 4\pi \quad \text{άρα} \quad 3 < \kappa < 4$$

Στο διάστημα $(3,4)$ δεν υπάρχει ακέραια τιμή της παραμέτρου $\kappa$, οπότε δεν έχουμε καμία λύση.

**2η περίπτωση:**

$$\varepsilon\varphi x = -1$$
$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{4}$$

Οι λύσεις θα δίνονται από τον τύπο $x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \kappa \in Z$. Βρίσκουμε την λύση στο διάστημα $(3\pi, 4\pi)$ λύνοντας την ανίσωση:

$$3\pi < \kappa\pi + \frac{3\pi}{4} < 4\pi$$
$$3\pi - \frac{3\pi}{4} < \kappa\pi < 4\pi - \frac{3\pi}{4}$$
$$\frac{9}{4} < \kappa < \frac{13}{4}$$

Στο διάστημα $\left(\frac{9}{4}, \frac{13}{4}\right)$ η ακέραια τιμή της παραμέτρου $\kappa$ είναι $\kappa = 3$. Για την τιμή αυτή παίρνουμε την λύση:

$$x = 3\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}$$

ii. Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο παιρνουμε:

$$\left(\sqrt{3}\cdot \eta\mu x\right)^2 = (1+\sigma\upsilon\nu x)^2$$
$$3\eta\mu^2 x = 1 + 2\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$$
$$3(1-\sigma\upsilon\nu^2 x) = 1 + 2\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$$
$$3 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 + 2\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$$
$$4\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$$
$$2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = \omega, \mu\varepsilon -1 \le \omega \le 1$ και έχουμε την εξίσωση:

$$2\omega^2 + \omega - 1 = 0$$

Με λύσεις $\omega_1 = -1, \omega_2 = \frac{1}{2}$

**1η περίπτωση:**

$$\omega_1 = -1$$
$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\pi$$

Οι λύσεις θα δίνονται από τους τύπους
$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \pi \\ x = 2\kappa\pi - \pi \end{cases}, \kappa \in Z$$

Αναζητούμε λύσεις στο διάστημα $(3\pi, 4\pi)$ οπότε για κάθε γενική λύση έχουμε τις ανισώσεις:

- $3\pi < 2\kappa\pi + \pi < 4\pi$
  $2\pi < 2\kappa\pi < 3\pi$
  $1 < \kappa < \frac{3}{2}$

  Στο διάστημα $(1, \frac{3}{2})$ δεν υπάρχει ακέραια τιμή της παραμέτρου $\kappa$, οπότε δεν παίρνουμε καμία λύση.

- $3\pi < 2\kappa\pi - \pi < 4\pi$
  $4\pi < 2\kappa\pi < 5\pi$
  $2 < \kappa < \frac{5}{2}$

  Στο διάστημα $(2, \frac{5}{2})$ δεν υπάρχει ακέραια τιμή της παραμέτρου $\kappa$, οπότε δεν παίρνουμε καμία λύση.

**2η περίπτωση:**

$\omega_2 = \frac{1}{2}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$

Οι λύσεις θα δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in Z$$

Αναζητούμε λύσεις στο διάστημα $(3\pi, 4\pi)$ οπότε για κάθε γενική λύση έχουμε τις ανισώσεις:

- $3\pi < 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} < 4\pi$
  $3\pi - \frac{\pi}{3} < 2\kappa\pi < 4\pi - \frac{\pi}{3}$
  $\frac{4}{3} < \kappa < \frac{11}{6}$

  Στο διάστημα $(\frac{4}{3}, \frac{11}{6})$ δεν υπάρχει ακέραια τιμή της παραμέτρου $\kappa$, οπότε δεν παίρνουμε καμία λύση.

- $3\pi < 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} < 4\pi$
  $3\pi + \frac{\pi}{3} < 2\kappa\pi < 4\pi + \frac{\pi}{3}$
  $\frac{5}{3} < \kappa < \frac{13}{6}$

  Στο διάστημα $(\frac{5}{3}, \frac{13}{6})$ η ακέραια τιμή της παραμέτρου $\kappa$, είναι $\kappa = 2$ οπότε αντικαθιστώντας στη γενική λύση παίρνουμε: $x = 2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}$

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στην αρχική εξίσωση και παίρνουμε:

$\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 1 + \sigma\upsilon\nu x$
$\sqrt{3} \cdot \eta\mu \frac{11\pi}{3} = 1 + \sigma\upsilon\nu \frac{11\pi}{3}$
$\sqrt{3} \cdot \eta\mu(4\pi - \frac{\pi}{3}) = 1 + \sigma\upsilon\nu(4\pi - \frac{\pi}{3})$
$\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}$
$\frac{3}{2} = \frac{-3}{2}$ **Άτοπο**

Η εξίσωση δεν έχει λύση στο διάστημα $(3\pi, 4\pi)$.

**Άσκηση 19 – Λύση**

i. Η εξίσωση γράφεται:

$\eta\mu x = \sqrt{2} - \sigma\upsilon\nu x$
$\eta\mu^2 x = \left(\sqrt{2} - \sigma\upsilon\nu x\right)^2$
$\eta\mu^2 x = 2 - 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$
$1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 2 - 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$
$2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = \omega, \mu\varepsilon - 1 \leq \omega \leq 1$ και παίρνουμε την εξίσωση:

$2\omega^2 - 2\sqrt{2}\omega + 1 = 0$

Η διπλή ρίζα της εξίσωσης είναι: $\omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Οπότε αντικαθιστώντας έχουμε:

$\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}$

Οι λύσεις θα δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in Z$$

Αναζητούμε λύσεις στο διάστημα $(2\pi, 3\pi)$ οπότε για κάθε γενική λύση έχουμε τις ανισώσεις:

- $2\pi < 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} < 3\pi$
  $2\pi - \frac{\pi}{4} < 2\kappa\pi < 3\pi - \frac{\pi}{4}$
  $\frac{7}{4} < 2\kappa < \frac{11}{4}$
  $\frac{7}{8} < \kappa < \frac{11}{8}$

Στο διάστημα $(\frac{7}{8}, \frac{11}{8})$ η ακέραια τιμή της παραμέτρου είναι $\kappa = 1$ και η λύση στο διάστημα $(2\pi, 3\pi)$ θα είναι:

$$x = 2 \cdot 1\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στην αρχική εξίσωση και παίρνουμε:

$$\eta\mu x = \sqrt{2} - \sigma\upsilon\nu x$$
$$\eta\mu \frac{9\pi}{4} = \sqrt{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{9\pi}{4}$$
$$\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\sqrt{2} = \sqrt{2}$ **Που ισχύει**

- $2\pi < 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} < 3\pi$
  $2\pi + \frac{\pi}{4} < 2\kappa\pi < 3\pi + \frac{\pi}{4}$
  $\frac{9}{4} < 2\kappa < \frac{13}{4}$
  $\frac{9}{8} < \kappa < \frac{13}{8}$

Στο διάστημα $(\frac{9}{8}, \frac{13}{8})$ δεν υπάρχει ακέραια τιμή της παραμέτρου $\kappa$ και δεν υπάρχει λύση της εξίσωσης στο διάστημα $(2\pi, 3\pi)$.

ii. Η εξίσωση γράφεται:

$$\eta\mu x = \sqrt{2} + \sigma\upsilon\nu x$$
$$\eta\mu^2 x = \left(\sqrt{2} + \sigma\upsilon\nu x\right)^2$$
$$\eta\mu^2 x = 2 + 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$$
$$1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 2 + 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$$
$$2\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = \omega, \mu\varepsilon - 1 \leq \omega \leq 1$ και παίρνουμε την εξίσωση:

$$2\omega^2 + 2\sqrt{2}\omega + 1 = 0$$

Η διπλή ρίζα της εξίσωσης είναι: $\omega_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Οπότε αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}$$

Οι λύσεις θα δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in Z$$

Αναζητούμε λύσεις στο διάστημα $(2\pi, 3\pi)$ οπότε για κάθε γενική λύση έχουμε τις ανισώσεις:

- $2\pi < 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} < 3\pi$

  $2\pi - \frac{3\pi}{4} < 2\kappa\pi < 3\pi - \frac{3\pi}{4}$

  $\frac{5}{4} < 2\kappa < \frac{9}{4}$

  $\frac{5}{8} < \kappa < \frac{9}{8}$

Στο διάστημα $(\frac{5}{8}, \frac{9}{8})$ η ακέραια τιμή της παραμέτρου είναι $\kappa = 1$ και η λύση στο διάστημα $(2\pi, 3\pi)$ θα είναι:

$$x = 2 \cdot 1\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στην αρχική εξίσωση και παίρνουμε:

$$\eta\mu x = \sqrt{2} + \sigma\upsilon\nu x$$
$$\eta\mu \frac{11\pi}{4} = \sqrt{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{11\pi}{4}$$
$$\eta\mu\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sqrt{2} = \sqrt{2}$$ **Που ισχύει**

- $2\pi < 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{4} < 3\pi$
  $2\pi + \frac{3\pi}{4} < 2\kappa\pi < 3\pi + \frac{3\pi}{4}$
  $\frac{11}{4} < 2\kappa < \frac{15}{4}$
  $\frac{11}{8} < \kappa < \frac{15}{8}$

Στο διάστημα $(\frac{11}{8}, \frac{15}{8})$ δεν υπάρχει ακέραια τιμή της παραμέτρου $\kappa$ και δεν υπάρχει λύση της εξίσωσης στο διάστημα $(2\pi, 3\pi)$.

# Αξίες για μια ζωή!

- ✓ Εξυπνάδα
- ✓ Κριτική Σκέψη
- ✓ Αυτοπεποίθηση

## Βρες τον Καθηγητή σου!
## στο arnos.gr

**Ο Καθηγητής - Δάσκαλος arnos.gr:**

- **Διδάσκει** μεθοδικά και οργανωμένα με το Τετράδιο Σπουδής.
- **Καθοδηγεί** το Μαθητή να μαθαίνει βήμα - βήμα.
- Οδηγεί στην **Αυτομάθηση**.
- **Υλοποιεί** τους στόχους του μαθήματος.
- **Πιστοποιεί** με διαγωνίσματα την πρόοδο του Μαθητή.

ΑΡΝΟΣ Online Education

Σολωμού 29, Αθήνα | 210 38 22 157 | 210 38 22 495

arnos.gr | info@arnos.gr

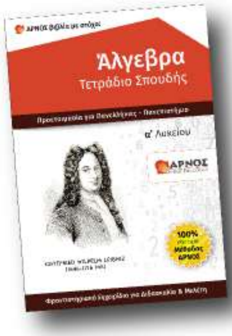
# Γιατί επιλέγω Τετράδιο Σπουδής;

- Είναι απαραίτητο διδακτικό εργαλείο βασισμένο στους στόχους του μαθήματος και τον τρόπο Υλοποίησής του.
- Σε αυτό βρίσκεται το υλικό Διδασκαλίας για τον Καθηγητή και Μελέτης για το Μαθητή.
- Το Τετράδιο Σπουδής σε συνδυασμό με το course οδηγούν το **Μαθητή** στην **Αυτομάθηση**.
- Είναι το Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο πραγματοποίησης της **online διδασκαλίας με φυσικό τρόπο**.
- Με αυτό **ενημερώνονται** άμεσα **οι γονείς** και **ελέγχουν την πρόοδο** του παιδιού τους.

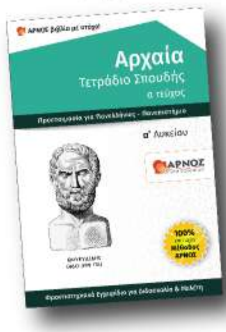
# Τετράδια Σπουδής για:

## Λύκειο

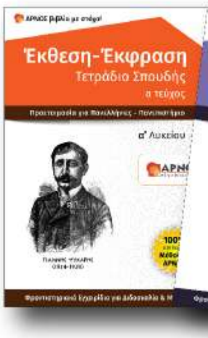
### Μαθηματικά




### Αρχαία




### Γλωσσα





### Χημεία


16-18 ετών