ΑΡΝΟΣ βιβλία με στόχο!

Μαζί μας η Εκπαίδευση γίνεται παιχνίδι

Μαθηματικά

Τετράδιο Σπουδής

α τεύχος

Γ' Γυμνασίου

ΑΡΝΟΣ Online Education

FRANCISCUS VIETA
1540-1603 ΜΧ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ & ΑΣΚΗΣΕΩΝ

100% επιτυχία Μέθοδος ΑΡΝΟΣ

Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο για Διδασκαλία & Μελέτη

Τετράδιο Σπουδής - Γιατί;

Το Τετράδιο Σπουδής ΑΡΝΟΣ είναι βασισμένο στη Μέθοδο ΑΡΝΟΣ, ένα σύστημα μάθησης με Στόχους – Υλοποίηση – Πιστοποίηση.
Βοηθάει το μαθητή να οικοδομήσει τη σκέψη του βήμα-βήμα, απλά και κατανοητά. Είναι Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο βάσει του οποίου γίνεται η διδασκαλία στο online μάθημα με «φυσικό» τρόπο. Ο δάσκαλος γράφει και υπογραμμίζει παράλληλα με το μαθητή.

Το Τετράδιο Σπουδής αποτελείται από:

- Οπτικοποιημένη Θεωρία με ροή & συνέχεια
- Ασκήσεις για Διδασκαλία και Εξάσκηση
- Συνδυαστικές και Επαναληπτικές Ασκήσεις
- Θέματα Προσομοίωσης Εξετάσεων

Πιστοποίηση Γνώσεων

Σε προγραμματισμένες ημερομηνίες διεξάγονται online ή/και δια ζώσης **Επαναληπτικά Τεστ Αξιολόγησης** στα οποία ο μαθητής πιστοποιεί και επαληθεύει τις γνώσεις του.

Για τους Γονείς

Πώς ο γονέας μπορεί να έχει εικόνα και εποπτεία στην πρόοδο του παιδιού του;
Το Τετράδιο Σπουδής είναι σχεδιασμένο με τέτοιον τρόπο για τη βήμα – βήμα εξάσκηση του μαθητή, μεταβαίνοντας με ασφάλεια από τα πιο απλά στα πιο σύνθετα. Επίσης, είναι ένας φυσικός τρόπος ο Γονέας να ελέγχει την πρόοδο του παιδιού του.

Πώς γίνεται η εποπτεία από το γονέα;

Σε κάθε μάθημα ελέγχει την ορθότητα των λύσεων, την κατανόηση και τη συμμετοχή του παιδιού στα μαθήματα.

Διδασκαλία στον ΑΡΝΟ σημαίνει:

- Απεριόριστη μελέτη με video lessons
- Αυτομάθηση στο App Arnos Learn
- Coaching εξατομικευμένο
- Μοτίβα Μάθησης και Εξάσκησης
- Κάθε Απορία για εμάς είναι Πρόκληση!

Μέθοδος ΑΡΝΟΣ

Η **Μέθοδος ΑΡΝΟΣ** οδηγεί κάθε μαθητή, ανεξαρτήτως γνώσεων ή επιπέδου, να μελετά από το επίπεδο όπου αισθάνεται άνετα, ώστε να διαμορφώσει γερές βάσεις για μάθηση.

Live Διδασκαλία Το online μάθημα γίνεται με φυσικό τρόπο, γιατί συνδυάζει την Τεχνολογία, το Πνεύμα, την Οργάνωση και την Εμπειρία.

Τετράδιο Σπουδής Είναι ο οδηγός για τη διδασκαλία του μαθήματος, την εξάσκηση του μαθητή και την πραγματοποίηση της online διδασκαλίας με Λόγο, Εικόνα και Παρατήρηση.

Καθηγητής Είναι ο σκηνοθέτης της διδακτικής πράξης, ο οποίος δρα σε ένα οργανωμένο εκπαιδευτικό οικοσύστημα με Στόχους, Μαθησιακό Πλάνο και Ευθύνη.

«Μέθοδος ΑΡΝΟΣ... το καταστάλαγμα μιας πορείας 35 ετών με εκπαιδευτικές και εκδοτικές επιτυχίες, με ταξίδια πολιτισμού, συμμετοχή σε Διεθνείς Εκθέσεις και αποτυχίες... μα, κυρίως, η παρακαταθήκη του ζευγολάτη πατέρα - Αρνού.»

Γιάννης Π. Κρόκος

ΑΡΝΟΣ Online Education

Σολωμού 29, Αθήνα 210 38 22 157 | 210 38 22 495
arnos.gr | info@arnos.gr

Τετράδιο Σπουδής

1ο Τεύχος

Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου

ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- Οδηγός για τη Διδασκαλία του Καθηγητή
- Οδηγός για τη Μελέτη του Μαθητή
- Διδασκαλία Online με φυσικό τρόπο
- Τόπος Εποπτείας Προόδου από το Γονέα
- Διδασκαλία με Πιστοποιημένους Καθηγητές ΑΡΝΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2021

ΑΡΝΟΣ Online Education

Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου – Λύσεις 1ου Τετραδίου Σπουδής

Συντακτική Ομάδα Κέντρου ΑΡΝΟΣ

Διευθυντής σειράς: Ιωάννης Π. Κρόκος

Συνεργάστηκαν: Σταυρούλα Εκουτσίδου

Βασίλειος Κ. Τσιλιβής

ΑΡΝΟΣ ONLINE EDUCATION

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

Μέρος Α΄: Αριθμητική - Άλγεβρα

Κεφάλαιο 1 : Αλγεβρικές παραστάσεις

1.1. Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Α. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

Λύσεις

Ερώτηση Κατανόησης

i. Σωστό

ii. Λάθος

Αντιπαράδειγμα: Το -1 είναι ακέραιος αλλά δεν είναι φυσικός.

iii. Λάθος.

Αντιπαράδειγμα: Το $\frac{1}{2}$ είναι ρητός αλλά δεν είναι ακέραιος.

iv. Σωστό

v. Σωστό

vi. Λάθος.

Δεν γνωρίζουμε το πρόσημο του αριθμού x.

vii. Λάθος

Αντιπαράδειγμα: Αν το $x = -1$, τότε $-x = -(-1) = +1 > 0$.

viii. Λάθος.

Αν δύο αριθμοί είναι αντίθετοι, τότε το άθροισμα τους είναι 0.

ix. Σωστό

x. Λάθος

Αν δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι, τότε το γινόμενό τους είναι ίσο με 1.

xi. Σωστό

xii. Σωστό

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

i. $-5+8-15+18=-5-15+8+18=-20+26=6$

ii. Κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων και μετά εκτελούμε τις πράξεις.

$$-5+(-8)-(+15)+(-18)=-5-8-15-18=-46$$

iii. Αρχικά εκτελούμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, μετά κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων και εκτελούμε τις πράξεις.

$$(8-5+4)-(-8+9-15)=7-(-14)=7+14=21$$

Άσκηση 2 – Λύση

i. Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και εκτελούμε τις πράξεις:

$$\frac{1}{2}-3+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{6}{12}-\frac{36}{12}+\frac{9}{12}-\frac{10}{12}+\frac{8}{12}$$

$$=\frac{6-36+9-10+8}{12}=\frac{-23}{12}=-\frac{23}{12}$$

ii. Εκτελούμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις και στη συνέχεια κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων και εκτελούμε τις πράξεις σύμφωνα με την σειρά προτεραιότητας των πράξεων.

$$\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{2}{8}+\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{15}{8}\right)\cdot(-2)$$
$$=\left(-\frac{3}{4}+\frac{6}{4}\right)+\left(-\frac{2}{8}+\frac{4}{8}\right)-\left(+\frac{15}{8}\right)\cdot(-2)$$
$$=\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{2}{8}\right)-\left(-\frac{15\cdot 2}{8}\right)=\frac{3}{4}+\frac{2}{8}+\frac{15}{4}=\frac{18}{24}+\frac{6}{24}+\frac{90}{24}$$
$$=\frac{114}{24}=\frac{19}{4}$$

iii. Εκτελούμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις και στη συνέχεια κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων και εκτελούμε τις πράξεις σύμφωνα με την σειρά προτεραιότητας των πράξεων.

$$-\left(-\frac{8}{5}+\frac{2}{10}\right)-\left(-\frac{3}{10}+\frac{1}{2}-3\right):\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(-\frac{16}{10}+\frac{2}{10}\right)-\left(-\frac{3}{10}+\frac{5}{10}-\frac{30}{10}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\left(-\frac{14}{10}\right)-\left(-\frac{28}{10}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{14}{10}-\frac{-\frac{28}{10}}{-\frac{1}{2}}=\frac{14}{10}-\frac{28\cdot 2}{10\cdot 1}=\frac{14}{10}-\frac{56}{10}=-\frac{42}{10}=-\frac{21}{5}$$

Άσκηση 3 – Λύση

Κάνουμε απαλοιφή των παρενθέσεων μέσα στις αγκύλες. Τις αγκύλες τις μετατρέπουμε σε παρενθέσεις και στη συνέχεια κάνουμε και απαλοιφή των παρενθέσεων.

i. $-[-(-12)-(-8)]-[-(-4-3)]=-(+12+8)-(+4+3)=-(+20)-(+7)=$
$=-20-7=-27$

ii. $3\cdot[4-(-2)-(+8)]-[4\div(-4+3)]=3\cdot(4+2-8)-[4\div(-1)]=$
$=3\cdot(-2)-\left(-\frac{4}{1}\right)=-6-(-4)=-6+4=-2$

iii. $-4\cdot[5-(-2)-(+3)]-3\cdot(-2-3+5-7)=-4\cdot(5+2-3)-3(-7)=$
$=-4\cdot 4+21=-16+21=5$

Άσκηση 4 – Λύση

i. Στην παράσταση Α αντικαθιστούμε το $x = -1$ και εκτελούμε τις πράξεις.

$$A = (-1) \cdot [2 \cdot (-1) + 2] \cdot (-1-2) = (-1)(-2+2) \cdot (-3)$$

$$= (-1) \cdot 0 \cdot (-3) = 0$$

ii. Στην παράσταση Β αντικαθιστούμε το $x = 2$ και εκτελούμε τις πράξεις.

$$B = -\frac{2}{2} \cdot [4 + (2+2) - (2 \cdot 2 + 2)] = -[4 + (+4) - (4+2)] =$$

$$= -[4 + (+4) - (+6)] = -(4 + 4 - 6) = -(+2) = -2$$

Άσκηση 5 – Λύση

Στις παραστάσεις Α και Β αντικαθιστούμε το $x = -1$ και $y = -2$.

i. $A = [2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2)] - [-5 \cdot (-1) - 6 \cdot (-2) - 2] =$
$= [-2 - (-6)] - [-(-5) - (-12) - 2] =$
$= (-2 + 6) - (+5 + 12 - 2) = (+4) - (+15) = 4 - 15 = -11$

ii. $B = 2 - 3 \cdot [(-1) - 2(-2)] + 2 \cdot [-2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) - 3] =$
$= 2 - 3[-1 - (-4)] + 2 \cdot [+2 - (-6) - 3] =$
$= 2 - 3 \cdot (-1 + 4) + 2 \cdot (2 + 6 - 3) = 2 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot (+5) =$
$= 2 - 9 + 10 = 3$

Άσκηση 6 – Λύση

Αφού οι αριθμοί $2x - 2y + z$ και $-2x + 2y + \omega$ είναι αντίθετοι, τότε:

$$2x - 2y + z + (-2x + 2y + \omega) = 0$$

Για να δείξουμε ότι οι αριθμοί z και ω είναι αντίθετοι, θα δείξουμε ότι $z + \omega = 0$.

$$2x - 2y + z + (-2x + 2y + \omega) = 0$$
$$2x - 2y + z - 2x + 2y + \omega = 0$$
$$z + \omega = 0$$

Άρα οι αριθμοί z και ω είναι αντίθετοι.

Άσκηση 7 – Λύση

Οι x και y είναι αντίθετοι, άρα $x + y = 0$. Στις παραστάσεις προσπαθούμε να δημιουργήσουμε το άθροισμα $x + y$.

i. $\mathrm{A} = \mathrm{x} + \mathrm{y} = 0$

ii. $B = -2x + 2 \cdot (y + 2x) - y$

$= -2x + 2y + 2 \cdot 2x - y$ (επιμεριστική ιδιότητα)

$= -2x + 2y + 4x - y$

$= 2x + y$ $(2x = x + x)$

$=x + x + y$

$= x + (x + y) = x + 0 = x$

iii. $\Gamma = 10 \cdot [x + 2y - (-4)] + 2 \cdot (5x + 10) - 15$

$= 10 \cdot (x + 2y + 4) + 2 \cdot 5x + 2 \cdot 10 - 15$ (Επιμεριστική)

$= 10x + 10 \cdot 2y + 10 \cdot 4 + 10x + 20 - 15$ (Επιμεριστική)

$= 10x + 20y + 40 + 10x + 5$

$= 20x + 20y + 45$

$= 20 \cdot (x + y) + 45$

$= 20 \cdot 0 + 45 = 45$

Άσκηση 8 – Λύση

Αφού οι αριθμοί x και y είναι αντίστροφοι, τότε $x \cdot y = 1$. Στην παράσταση προσπαθούμε να δημιουργήσουμε το γινόμενο $x \cdot y$

i. $A = x \cdot y = 1$

ii. $B = \frac{3}{2} x \cdot \frac{4}{3} y$

$= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} x \cdot y$ (Αντιμεταθετική)

$= \frac{12}{6} \cdot 1 = 2$

iii. $\Gamma = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x \cdot 3 \cdot (-y)$

$= \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 3 \cdot x \cdot (-y)$ (Αντιμεταθετική)

$= -\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot (-x \cdot y)$

$= -2 \cdot (-x \cdot y)$

$= 2 \cdot (x \cdot y) = 2 \cdot 1 = 2$

Άσκηση 9 – Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις σε αριθμητή και παρονομαστή ακολουθώντας την σειρά προτεραιότητας των πράξεων.

$$A = \frac{\left(-\frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3} - 2\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right) : \left(\frac{2}{3}\right) - \frac{3}{3}} = \frac{\left(-\frac{1}{4} + \frac{8}{4} - \frac{2}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3} - \frac{6}{3}\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 1}$$

$$= \frac{\frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{-\frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 3}}{-\frac{1}{2} - \frac{2}{2}} = \frac{-\frac{35}{12}}{-\frac{3}{2}} = \frac{35 \cdot 2}{12 \cdot 3} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$$

Άσκηση 10 – Λύση

Για να δείξουμε ότι οι αριθμοί x και y είναι αντίστροφοι, θα πρέπει να δείξουμε ότι:

$$x \cdot y = 1$$

$$x \cdot y = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\alpha \cdot (\alpha + \beta)} + \frac{\alpha\beta}{\beta \cdot (\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\beta}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta} = 1$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 – Λύση

i. Εκτελούμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις και στη συνέχεια κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων και εκτελούμε τις πράξεις σύμφωνα με την σειρά προτεραιότητας των πράξεων.

$$1-3\cdot(4-9)-(-3+11):(-8+12)=1-3\cdot(-5)-8:4=1-15-2=$$
$$=1+15-2=14$$

ii. Κάνουμε απαλοιφή των παρενθέσεων μέσα στις αγκύλες. Τις αγκύλες τις μετατρέπουμε σε παρενθέσεις και στη συνέχεια κάνουμε και απαλοιφή των παρενθέσεων.

$$\begin{aligned}&-20-[5-12\cdot(4-6)-(-3-11)]\cdot(4-9)\\&=-20-[5-24\cdot(-2)-(-14)]\cdot(-5)\\&=-20-(5+24+14)\cdot(-5)=-20-43\cdot(-5)\\&=-20-(-215)=-20+215=195\end{aligned}$$

Άσκηση 2– Λύση

i. Εκτελούμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις:.

$$-\frac{20}{2}-\left(2-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{4}{2}+\frac{-1}{2}\right)\cdot(-3)=-10-\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{-5}{2}\right)\cdot(-3)=$$
$$=-10-\left(+\frac{3}{2}\right):\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot(-3)$$
$$=-10-\left(+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot(-3)$$
$$=-10-\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}\right)\cdot(-3)=-10-\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot(-3)$$
$$=-10-\left(+\frac{3}{5}\cdot3\right)=-10-\frac{9}{5}=-\frac{50}{5}-\frac{9}{5}=-\frac{59}{5}$$

ii. $2-\frac{-\frac{20}{2}-5}{10}=2-\frac{-10-5}{10}=2-\frac{-15}{10}=2+\frac{15}{10}=\frac{20}{10}+\frac{15}{10}=\frac{35}{10}=\frac{7}{2}$

iii. $1-\frac{-\frac{12}{2}\cdot(-5)}{-2-1}=1-\frac{\frac{60}{2}}{-3}=1-\frac{30}{-3}=1-(-10)=1+10=11$

Άσκηση 3 – Λύση

Θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε στην παράσταση τα $x-y$ και $z-y$

$$A=-3x-2\cdot(3-y)-4\cdot(z-x)-4y+5z$$
$$=-3x-(6-2y)-(4z-4x)-4y+5z \quad \text{(Επιμεριστική)}$$
$$=-3x-6+2y-4z+4x-4y+5z$$
$$=x-2y+z-6$$
$$=x-y-y+z-6$$
$$=(x-y)+(z-y)-6$$
$$=-2+(-8)-6=-2-8-6=-16$$

Άσκηση 4 – Λύση

- α και β αντίθετοι άρα $\alpha+\beta=0$
- x και y αντίστροφοι άρα $x\cdot y=1$

Στην παράσταση προσπαθούμε να δημιουργήσουμε το άθροισμα $\alpha+\beta$ και το γινόμενο $x\cdot y$:

$$A=-\frac{2\alpha-4+2y}{xy}+15-2(\beta-y)$$
$$=-\frac{2a-4+2y}{1}+15-2\beta+2y$$
$$=-(2a-4+2y)+15-2\beta+2y$$
$$=-2a+4-2y+15-2\beta+2y$$
$$=-2a-2\beta+4+15$$
$$=-2(\alpha+\beta)+19$$
$$=-2\cdot 0+19=0+19=19$$

Άσκηση 5 – Λύση

Κάνουμε πράξεις στο πρώτο μέλος της εξίσωσης και καταλήγουμε στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης.

i. $20+(x-2y-4)-(x-10-2y)=20+x-2y-4-x+10+2y=$
$=20-4+10=26$

ii. $5-4\cdot(x-y)-2(1+2y)-4\cdot(1-x)=5-4x+4y-2-4y-4+4x=$
$=5-2-4=-1$

Άσκηση 6 – Λύση

Προσπαθούμε στην παράσταση να δημιουργήσουμε το άθροισμα $\alpha+\beta$.

$$A=-(2\beta+\alpha)-2(-\alpha-\beta)+(3-2\alpha)\cdot(-1)-(2\alpha-\beta)$$

$$=-(2\beta+\alpha)-(-2\alpha-2\beta)+(-3+2\alpha)-(2\alpha-\beta)$$

$$=-2\beta-\alpha+2\alpha+2\beta-3+2\alpha-2\alpha+\beta$$

$$=\alpha+\beta-3=(\alpha+\beta)-3=-4-3=-7$$

Άσκηση 7 – Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις μέσα στις απόλυτες τιμές και στη συνέχεια τις κάνουμε απαλοιφή βάζοντας το κατάλληλο πρόσημο.

$$A=|-3|+|2|-|-3|-|2-1-7|$$
$$=|-3|+|2|-|-3|-|-6|$$
$$=-(-3)+2-[-(-3)]-[-(-6)]$$
$$=3+2-(+3)-(+6)$$
$$=3+2-3-6=-4.$$

$$\mathrm{B}=(|-3+5|-6):|-4|+|-2+6|\cdot|3-5|$$
$$=(|2|-6):|-4|+|4|\cdot|-2|$$
$$=(2-6):[-(-4)]+4\cdot[-(-2)]$$
$$=(-4):4+4\cdot 2=-1+8=7$$

Άσκηση 8 – Λύση

Αφού οι αριθμοί x και y είναι ετερόσημοι, τότε το γινόμενο $x \cdot y < 0$. Στις παραστάσεις εφαρμόζουμε ιδιότητες πράξεων και προσπαθούμε να απομονώσουμε το γινόμενο $x \cdot y$.

i. $\mathrm{A} = \frac{x \cdot y}{10} < 0$ διότι $x \cdot y < 0$ και $10 > 0$.

ii. $B = \frac{x \cdot y}{-10} > 0$ διότι $x \cdot y < 0$ και $-10 < 0$.

iii. $\Gamma = -\frac{x \cdot y}{-10} < 0$ διότι $\frac{x \cdot y}{-10} > 0$ και $-1 < 0$.

iv. $\Delta = x \cdot (-5y) = -5 \cdot (x \cdot y) > 0$ διότι $-5 < 0$ και $x \cdot y < 0$.

v. $E = (-8)x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-5y)$

$= (-8) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x \cdot (-5y)$ (Αντιμεταθετική)

$= (-8) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-5) \cdot x \cdot y$ (Αντιμεταθετική)

$= \left(-8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\right) \cdot x \cdot y = (-20) \cdot x \cdot y > 0$ διότι $-20 < 0$ και $x \cdot y < 0$

Άσκηση 9 – Λύση

Στην παράσταση κάνουμε αντικατάσταση $x = -2$ και $y = -8$ και εκτελούμε τις πράξεις.

$$A = \left(3 \cdot \frac{-2 + (-8)}{5}\right) : \left\{[-(-2)] \cdot \left[-8 - \frac{4 + 2 \cdot (-2)}{3}\right]\right\}$$

$$= 3 \cdot \frac{-2-8}{5} : \left[2 \cdot \left(-8 - \frac{4-4}{3}\right)\right]$$

$$= 3 \cdot \frac{-10}{5} : \left[2 \cdot \left(-8 - \frac{0}{3}\right)\right]$$

$$= 3 \cdot \left(-\frac{10}{5}\right) : [2 \cdot (-8)] = 3 \cdot (-2) : (-16) = (-6) : (-16) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Άσκηση 10 – Λύση

- $A = x \cdot (-10y)$ (Αντιμεταθετική)

  $= (-10) \cdot x \cdot y < 0$ διότι $-10 < 0$, $x < 0$ και $y < 0$.

- $B = -10 \cdot (x + y) > 0$ διότι $x < 0$ και $y < 0$ άρα $x + y < 0$ και επίσης $-10 < 0$.

- $\Gamma = 5x + 4y - 10 < 0$ διότι $x < 0$ και άρα $5x < 0$, $y < 0$ και άρα $4y < 0$ και επίσης $-10 < 0$ (Άθροισμα αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός).

- $\Delta = -5x \cdot 4(-y) \cdot 10$

  $= -5 \cdot 4 \cdot 10 \cdot x \cdot (-y)$

  $= -200 \cdot x \cdot (-y) > 0$ διότι $-200 < 0$, $x < 0$ και $y < 0$ και άρα $-y > 0$.

1.1. Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Β. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Λύσεις

Ερώτηση Κατανόησης

i. $11^2 = 11 \cdot 11 = 121$

ii. $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$

iii. $3^2 = 9$

iv. $\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$ καθώς $5^2 = 25$ και $7^2 = 49$

v. $\left(\frac{4}{13}\right)^2 = \frac{16}{169}$ καθώς $4^2 = 16$ και $13^2 = 169$

vi. $1^{2021} = 1$

vii. $1^1 = 1$

viii. $1^0 = 1$

ix. $2^0 = 1$

x. $(2)^1 = 2^1 = 2$

xi. $(-2)^1 = -2^1 = 2$

xii. $(2)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

xiii. $(-2)^{-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}$

xiv. $(2)^2 = 2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

xv. $(-2)^2 = 2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

xvi. $(2)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$

xvii. $(-2)^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$

xviii. $(2)^3 = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

xix. $(2)^3 = -2^3 = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$

xx. $(2)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$

xxi. $(-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1^3}{2^3} = -\frac{1}{8}$

xxii. $-2^2 = -2 \cdot 2 = 4$

xxiii. $-2^{-2} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1^2}{2^2} = -\frac{1}{4}$

xxiv. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

xxv. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

xxvi. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

xxvii. $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

xxviii. $\left(-\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{2^0}{3^0} = \frac{1}{1} = 1$

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.

i. $2^{-7}\cdot(2)^4=2^{-7}\cdot 2^4=2^{-7+4}=2^{-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1^3}{2^3}=\frac{1}{8}$

ii. $(-5)^8:(-5)^3=(-5)^{8-3}=(-5)^5=-5^5$

iii. $\frac{(-81)^3}{3^3}=\left(\frac{-81}{3}\right)^3=(-27)^3=-27^3$

iv. $(2^2)^3=2^{2\cdot 3}=2^6$

v. $[(2^{-2})^{-2}]^{-2}=(2^{-2})^{-2\cdot(-2)}=(2^{-2})^4=2^{-2\cdot 4}=2^{-8}=\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1^8}{2^8}=\frac{1}{2^8}$

vi. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{3}\right)^3=\frac{5^3}{3^3}=\frac{125}{27}$

Άσκηση 2-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.

i. $5x^3\cdot(-6x^{-4})=-5x^3\cdot 6x^{-4}=-5\cdot 6x^3x^{-4}=-30x^{3+(-4)}=-30x^{3-4}=$

$=-30x^{-1}=-30\left(\frac{1}{x}\right)^1=-30\frac{1}{x}$

ii. $-4x^3y^{-2}\cdot(-12x^{-4}y^4)=-4\cdot(-12)x^3y^{-2}x^{-4}y^4=48x^3x^{-4}y^{-2}y^4=$

$=48x^{3+(-4)}y^{-2+4}=48x^{3-4}y^2=48x^{-1}y^2=\frac{48y^2}{x}$

iii. $\frac{(x^3)^2x^5}{x^9}=\frac{x^{3\cdot 2}x^5}{x^9}=\frac{x^6x^5}{x^9}=\frac{x^{6+5}}{x^9}=\frac{x^{11}}{x^9}=x^{11-9}=x^2$

iv. $\frac{(x^2)^2x^{-7}}{(x^{-3})^3} = \frac{x^{2\cdot2}x^{-7}}{x^{-3\cdot3}} = \frac{x^4\cdot x^{-7}}{x^{-9}} = \frac{x^{4+(-7)}}{x^{-9}} = \frac{x^{4-7}}{x^{-9}} = \frac{x^{-3}}{x^{-9}} = x^{-3-(-9)} = x^{-3+9} = x^6$

v. $\frac{(x^3)^{-2}\cdot y^{-7}}{(x^{-2})^3\cdot y^{-11}} = \frac{x^{3\cdot(-2)}\cdot y^{-7}}{x^{-2\cdot3}\cdot y^{-11}} = \frac{x^{-6}y^{-7}}{x^{-6}y^{11}} = x^{-6-(-6)}\cdot y^{-7-(-11)} = x^{-6+6}y^{-7+11} =$

$= x^0y^4 = 1\cdot y^4 = y^4$

Άσκηση 3-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.

i. $4^3\cdot(-4)^4\cdot(-4)^3 = 4^3\cdot4^4\cdot(-4^3) = -4^3\cdot4^4\cdot4^3 = -4^{3+4+3} = -4^{10}$

ii. $5^3\cdot(-5)^4\cdot(-5)^5\cdot(-5)^{-3} = 5^3\cdot5^4\cdot(-5^5)\cdot(-5^{-3}) = 5^3\cdot5^4\cdot5^5\cdot5^{-3} =$

$= 5^{3+4+5+(-3)} = 5^{3+4+5-3} = 5^9$

iii. Ισχύει ότι $0.5 = \frac{1}{2}$. Το κάνουμε αντικατάσταση ώστε όλες οι δυνάμεις να έχουν την ίδια βάση και να εφαρμόσουμε ιδιότητες δυνάμεων.

$$(-0.5)^3\cdot(-0.5)^4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^0$$

$$= (-\frac{1}{2})^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3+4+3+2+0}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{1^{12}}{2^{12}} = \frac{1}{2^{12}}$$

Άσκηση 4-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.

i. Ισχύει ότι $16 = 8 \cdot 2$ και $10 = 5 \cdot 2$. Τα αντικαθιστούμε ώστε στα κλάσματα να δημιουργήσουμε δυνάμεις με κοινή βάση.

$$\frac{16^4}{(-8)^4} + \frac{(-10)^5}{-5^5} + 2021^0 = \frac{(2 \cdot 8)^4}{8^4} + \frac{(-2 \cdot 5)^5}{-5^5} + 1 = \frac{2^4 8^4}{8^4} + \frac{-2^5 5^5}{-5^5} + 1$$
$$= 2^4 \cdot 8^{4-4} - (-2^5) \cdot 5^{5-5} + 1 = 2^4 \cdot 8^0 - 2^5 + 1$$
$$= 16 \cdot 1 - (-32) \cdot 5^0 + 1 = 16 - (-32) \cdot 1 + 1$$
$$= 16 + 32 + 1 = 49$$

ii. $[(-2)^2]^3 \cdot [(-3)^3]^2 = (-2)^{2 \cdot 3} \cdot (-3)^{3 \cdot 2} = (-2)^6 \cdot (-3)^6 = [(-2) \cdot (-3)]^6 = 6^6$

iii. $2^{2^3} \cdot (-2)^{2^3} \cdot (2^2)^3 = 2^8 \cdot (-2)^8 \cdot 4^3 = 2^8 \cdot 2^8 \cdot 4^3 = (2 \cdot 2)^8 \cdot 4^3 = 4^8 \cdot 4^3 = 4^{11}$

Άσκηση 5-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.

i. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot x^5 \cdot y^4 \cdot z^3 \cdot 2^4 \cdot z^{-2} \cdot y^{-3} \cdot x^{-3} \cdot 2^{-3} =$

$$= \frac{1^2}{2^2} \cdot 2^4 \cdot 2^{-3} \cdot z^{-2} \cdot z^3 \cdot x^5 \cdot x^{-3} \cdot y^4 \cdot y^{-3}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot 2^{4+(-3)} \cdot z^{-2+3} \cdot x^{5+(-3)} \cdot y^{4+(-3)}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot 2^1 \cdot z^1 \cdot x^2 \cdot y^1$$
$$= \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot y \cdot z$$

ii. $\left(\frac{x^2 \cdot y^{-3} \cdot z^{-5}}{x^4 \cdot y^{-2} \cdot z^{-2}}\right)^{-2} = \left(\frac{x^4 \cdot y^{-2} \cdot z^{-2}}{x^2 \cdot y^{-3} \cdot z^{-5}}\right)^{2} = \left(x^{4-2} \cdot y^{-2-(-3)} \cdot z^{-2-(-5)}\right)^2 =$

$= (x^2 \cdot y^{-2+3} \cdot z^{-2+5})^2$

$= (x^2 \cdot y^1 \cdot z^3)^2$

$= x^{2 \cdot 2} \cdot y^{1 \cdot 2} \cdot z^{3 \cdot 2}$

$= x^4 y^2 z^6$

iii. Εφαρμόζουμε ιδιότητες δυνάμεων και σε κάποιο βήμα αντικαθιστούμε το 10 με $2 \cdot 5$ ώστε να δημιουργήσουμε δυνάμεις με κοινή βάση.

$$\left(\frac{3^{-6} \cdot x^4 \cdot 10^6 \cdot y^{-3} \cdot 5^{-2} \cdot z^{-5} \cdot}{10^{-3} \cdot x^4 \cdot 5^3 \cdot y^{-2} \cdot 3^6 \cdot z^{-2}}\right)^{-2} = \left(\frac{3^{-6} \cdot 10^6 \cdot 5^{-2} \cdot x^4 \cdot y^{-3} \cdot z^{-5} \cdot}{3^6 \cdot 10^{-3} \cdot 5^3 \cdot x^4 \cdot y^{-2} \cdot z^{-2}}\right)^{-2}$$

$$= \left(3^{-6-6} \cdot 10^{6-(-3)} \cdot 5^{-2-3} x^{4-4} y^{-3-(-2)} z^{-5-(-2)}\right)^{-2}$$

$$= (3^{-12} \cdot 10^9 \cdot 5^{-5} x^0 y^{-3+2} z^{-5+2})^{-2}$$

$$= (3^{-12} \cdot 10^9 \cdot 5^{-5} \cdot 1 \cdot y^{-1} z^{-3})^{-2}$$

$$= (3^{-12}(2 \cdot 5)^9 5^{-5} \cdot y^{-1} z^{-3})^{-2}$$

$$= (3^{-12} \cdot 2^9 \cdot 5^9 \cdot 5^{-5} \cdot y^{-1} z^{-3})^{-2}$$

$$= (3^{-12} \cdot 2^9 \cdot 5^{9-5} \cdot y^{-1} z^{-3})^{-2} = (3^{-12} \cdot 2^9 \cdot 5^4 \cdot y^{-1} z^{-3})^{-2}$$

$$= (3^{-12} \cdot 2^9 \cdot 5^4 \cdot y^{-1} z^{-3})^{-2}$$

$$= 3^{-12 \cdot (-2)} \cdot 2^{9 \cdot (-2)} \cdot 5^{4 \cdot (-2)} y^{-1 \cdot (-2)} z^{-3 \cdot (-2)}$$

$$= 3^{24} \cdot 2^{-18} \cdot 5^{-8} y^2 z^6$$

$$= \frac{3^{24}}{2^{18} 5^8} y^2 z^6$$

Άσκηση 6-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.

i. $A = 2^0 + (-2)^2 - 2^2 - (-3)^2 - (-3)^3$
$= 1 + 2^2 - 2^2 - 3^2 - (-3^3) =$
$= 1 + 4 - 4 - 9 - (-27)$
$= 1 - 9 + 27$
$= 19$

ii. $B = -2 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot (-3)^2 - 1^{2021} \cdot (-3)^3$
$= -2 \cdot (-2^3) - 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 3^2 - 1 \cdot (-3^3)$
$= -2 \cdot (-8) - 2 \cdot 8 - 3 \cdot 9 - 1 \cdot (-27)$
$= 16 - 16 - 27 + 27 = 0$

iii. Αντικαθιστούμε τους όρους της παράστασης με κατάλληλα γινόμενα αριθμών ώστε να δημιουργήσουμε δυνάμεις με κοινή βάση και να εφαρμόσουμε ιδιότητες δυνάμεων.

$$\Gamma = 6^8 \cdot 9^{-3} : 16 \cdot 12^4 = \frac{6^8 \cdot 9^{-3}}{16 \cdot 12^4} = \frac{(2 \cdot 3)^8 \cdot (3^2)^{-3}}{2^4 \cdot (3 \cdot 4)^4} = \frac{2^8 \cdot 3^8 \cdot 3^{2\cdot(-3)}}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 4^4}$$
$$= \frac{2^8 \cdot 3^8 \cdot 3^{-6}}{2^4 \cdot 3^4 \cdot (2^2)^4} = \frac{2^8 \cdot 3^8 \cdot 3^{-6}}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^8} = \frac{2^8 \cdot 3^{8-6}}{2^{4+8} \cdot 3^4} = \frac{2^8 \cdot 3^2}{2^{12} \cdot 3^4}$$
$$= 2^{8-12} \cdot 3^{2-4} = 2^{-4} \cdot 3^{-2} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{144}$$

Άσκηση 7-Λύση

i. Στην παράσταση κάνουμε αντικατάσταση το $x = -2$ και εκτελούμε τις πράξεις.

$$A = 3(-2)^3 - 2(-2)^2 - 2\cdot(-2) - 10 = 3(-2^3) - 2\cdot 2^2 + 4 - 10$$
$$= 3\cdot(-8) - 2\cdot 4 + 4 - 10 = -24 - 8 + 4 - 10 = -38$$

ii. Στην παράσταση κάνουμε αντικατάσταση το $x = -\frac{1}{2}$ και εκτελούμε τις πράξεις.

$$B = -16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 2$$
$$= -16\cdot\left(-\frac{1^3}{2^3}\right) - 8\cdot\frac{1^2}{2^2} + 2 - 2 = -16\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) - 8\cdot\frac{1}{4} = \frac{16}{8} - \frac{8}{4}$$
$$= 2 - 2 = 0$$

Άσκηση 8-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.

$$A = (\alpha^3\cdot\beta^2)^2\cdot(\alpha^{-2}\cdot\beta^3)^3 = \alpha^{3\cdot 2}\cdot\beta^{2\cdot 2}\cdot\alpha^{-2\cdot 3}\cdot\beta^{3\cdot 3} = \alpha^6\beta^4\alpha^{-6}\beta^9 = \alpha^6\alpha^{-6}\beta^4\beta^9$$
$$= \alpha^{6-6}\cdot\beta^{4+9} = \alpha^0\beta^{13} = 1\cdot\beta^{13} = \beta^{13}$$

Άσκηση 9-Λύση

Κάνουμε αντικατάσταση το $x = -2$ στην παράσταση και εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.

$$A = \left[\frac{(-1)^{-2+6} + 3^3}{2\left(\frac{1}{-2+5}\right)^{-3} - (-2)}\right]^{(-2)^5} = \left[\frac{(-1)^4 + 3^3}{2\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + 2}\right]^{(-2^5)} = \left(\frac{1^4 + 3^3}{2\cdot 3^3 + 2}\right)^{(-2^5)}$$

$$= \left(\frac{1 + 27}{2\cdot 27 + 2}\right)^{-32} = \left(\frac{28}{54 + 2}\right)^{-32} = \left(\frac{28}{56}\right)^{-32} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-32} = 2^{32}$$

Άσκηση 10-Λύση

Κάνουμε αντικατάσταση το $x = -2$ στην παράσταση και εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.

$$A = \left(\frac{1}{-3}\right)^{-(-3)-6} - \left(-\frac{-3}{3}\right)^{-3} + [5 + (-3)]\left[-(-3) - \frac{1}{3}\right]^{-3+3}$$
$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^{3-6} - \left(\frac{3}{3}\right)^{-3} + (5-3)\left[-(-3) - \frac{1}{3}\right]^{-3+3}$$
$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} - (1)^{-3} + 2\cdot\left[3 - \frac{1}{3}\right]^{0} = (-3)^3 - 1 + 2\cdot 1$$
$$= (-3^3) - 1 + 2 = -27 - 1 + 2 = -26$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

i. Αντικαθιστούμε κάποιους από τους όρους της παράστασης με κατάλληλα γινόμενα αριθμών ώστε να δημιουργήσουμε δυνάμεις με κοινή βάση και να εφαρμόσουμε ιδιότητες δυνάμεων.

$$A = \frac{(-20)^5}{5^5} - \frac{18^3}{(-6)^3} - \frac{(-12)^4}{(-4)^4} = \frac{-20^5}{5^5} - \frac{18^3}{-6^3} - \frac{12^4}{4^4}$$
$$= \frac{-(5\cdot 4)^5}{5^5} - \frac{(3\cdot 6)^3}{-6^3} - \frac{(4\cdot 3)^4}{4^4} = \frac{-5^5 4^5}{5^5} + \frac{3^3 6^3}{6^3} - \frac{4^4 3^4}{4^4}$$
$$= -5^{5-5}4^5 + 3^3 6^{3-3} - 4^{4-4}3^4 = -5^0 4^5 + 3^3 6^0 - 4^0 3^4$$
$$= -4^5 + 3^3 - 3^4 = -1024 + 27 - 81 = -1078$$

ii. Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.

$$B=\frac{(-5)^6 3^9}{-3^7 5^4}-\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{3}\right]^{-1}=\frac{5^6 3^9}{-3^7 5^4}-\left[\left(\frac{5}{1}\right)^{2}\cdot\frac{1}{3}\right]^{-1}=-5^{6-4}3^{9-7}-\left(5^2\cdot\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$=-5^2 3^2-\left(\frac{25}{3}\right)^{-1}=-(5\cdot 3)^2-\left(\frac{3}{25}\right)^{1}=-15^2-\frac{3}{25}$$

$$=-225-\frac{3}{25}=-\frac{5625}{25}-\frac{3}{25}=-\frac{5628}{25}$$

Άσκηση 2-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων:

i. $A=(-1)^2+(-2)^2=1^2+2^2=1+4=5$

ii. $B=(-1)^3+(-2)^3=-1^3-2^3=-1-8=9$

iii. $\Gamma=[-1+(-2)]^2=(-1-2)^2=(-3)^2=3^2=9$

iv. $\Delta=[-1+(-2)]^3=(-1-2)^3=(-3)^3=-3^3=-27$

Άσκηση 3-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.

i. $A=\frac{(\alpha^3\cdot\beta^2)^3}{\alpha^6\cdot\beta^3}=\frac{\alpha^{3\cdot 3}\cdot\beta^{2\cdot 3}}{\alpha^6\cdot\beta^3}=\frac{\alpha^9\cdot\beta^6}{\alpha^6\cdot\beta^3}=\alpha^{9-6}\cdot\beta^{6-3}=\alpha^3\cdot\beta^3=(\alpha\beta)^3$

ii. $B=\frac{(-\alpha^2)^{-2}\cdot\alpha^3}{(\alpha^3\cdot\alpha^{-2})^4}=\frac{\alpha^{2\cdot(-2)}\cdot\alpha^3}{\alpha^{3\cdot 4}\cdot\alpha^{-2\cdot 4}}=\frac{\alpha^{-4}\cdot\alpha^3}{\alpha^{12}\cdot\alpha^{-8}}=\frac{\alpha^{-4+3}}{\alpha^{12+(-8)}}=\frac{\alpha^{-1}}{\alpha^{12-8}}=\frac{\alpha^{-1}}{\alpha^4}=\alpha^{-1-4}=\alpha^{-5}=\frac{1}{\alpha^5}$

iii. $\Gamma = \frac{2^{-4}\cdot(-\alpha)^4\cdot 5^5\cdot\beta^{-3}\cdot 6^3}{6\cdot\alpha^3\cdot 2^{-2}\cdot\beta^{-2}\cdot 5^3} = \frac{2^{-4}\cdot 5^5\cdot 6^3\cdot\alpha^4\cdot\beta^{-3}}{2^{-2}\cdot 5^3\cdot 6\cdot\alpha^3\cdot\beta^{-2}}$

$$= 2^{-4-(-2)}\cdot 5^{5-3}\cdot 6^{3-1}\cdot\alpha^{4-3}\cdot\beta^{-3-(-2)}$$

$$= 2^{-4+2}\cdot 5^2\cdot 6^2\cdot\alpha^1\cdot\beta^{-3+2} = 2^{-2}\cdot 5^2\cdot 6^2\cdot\alpha\cdot\beta^{-1}$$

$$= 2^{-2}\cdot 5^2\cdot(2\cdot 3)^2\cdot\alpha\cdot\beta^{-1} = 2^{-2}\cdot 5^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\alpha\cdot\beta^{-1}$$

$$= 2^{-2+2}\cdot 5^2\cdot 3^2\cdot\alpha\cdot\beta^{-1} = 1\cdot 25\cdot 9\cdot\alpha\cdot\frac{1}{\beta} = 225\cdot\frac{\alpha}{\beta}$$

iv. $\Delta = \left\{\left[\frac{\alpha^3\cdot 2^{10}\cdot\beta^5\cdot 5^9}{5^3\cdot(5\cdot\alpha\cdot\beta)^6}\right]^{-2}\right\}^{-1} = \left[\left(\frac{\alpha^3\cdot 2^{10}\cdot\beta^5\cdot 5^9}{5^3\cdot 5^6\cdot\alpha^6\cdot\beta^6}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left[\left(\frac{\alpha^3\cdot 2^{10}\cdot\beta^5\cdot 5^9}{5^{3+6}\cdot\alpha^6\cdot\beta^6}\right)^{-2}\right]^{-1}$

$$= \left[\left(\frac{5^9\cdot 2^{10}\cdot\alpha^3\cdot\beta^5}{5^9\cdot\alpha^6\cdot\beta^6}\right)^{-2}\right]^{-1} = [(5^{9-9}\cdot 2^{10}\cdot\alpha^{3-6}\cdot\beta^{5-6})^{-2}]^{-1}$$

$$= [(5^0\cdot 2^{10}\cdot\alpha^{-3}\cdot\beta^{-1})^{-2}]^{-1} = (1\cdot 2^{10}\cdot\alpha^{-3}\cdot\beta^{-1})^{-2\cdot(-1)} =$$

$$= 2^{10\cdot 2}\cdot\alpha^{-3\cdot 2}\cdot\beta^{-1\cdot 2} = 2^{20}\cdot\alpha^{-6}\cdot\beta^{-2} = \frac{2^{20}}{\alpha^6\beta^2}$$

Άσκηση 4-Λύση

i. Στο δεύτερο μέλος της ισότητας εφαρμόζουμε ιδιότητες δυνάμεων.

$$2^{21} = 2^{\nu}\cdot 2^{4\nu+1}$$

$$2^{21} = 2^{\nu+4\nu+1}$$

Στην τελευταία ισότητας οι βάσεις είναι ίδιες, άρα για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει και οι εκθέτες να είναι ίσοι.

$$21 = \nu + 4\nu + 1$$

$$21 - 1 = 5\nu$$

$$20 = 5\nu$$

$$\nu = \frac{20}{5}$$

$$\nu = 4$$

ii. Στα δύο μέλη της εξίσωσης, θέλουμε να δημιουργήσουμε δυνάμεις με κοινή βάση. Ισχύει ότι $256 = 4^4$ και $0.25 = \frac{1}{4}$. Τα αντικαθιστούμε.

$$(0.25)^{-2} \cdot 4^{v} = (4^4)^2$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot 4^{v} = 4^{4\cdot 2}$$

$$4^2 \cdot 4^{v} = 4^8$$

$$4^{2+v} = 4^8$$

Στην τελευταία ισότητας οι βάσεις είναι ίδιες, άρα για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει και οι εκθέτες να είναι ίσοι.

$$2 + v = 8$$

$$v = 8 - 2$$

$$v = 6$$

iii. Στα δύο μέλη της εξίσωσης, θέλουμε να δημιουργήσουμε δυνάμεις με κοινή βάση. Ισχύει ότι $1 = 100^0$. Το αντικαθιστούμε.

$$100^{-v-5} = 1$$

$$100^{-v-5} = 100^0$$

Στην τελευταία ισότητας οι βάσεις είναι ίδιες, άρα για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει και οι εκθέτες να είναι ίσοι.

$$-v - 5 = 0$$

$$-v = 5$$

$$v = -5$$

Άσκηση 5-Λύση

Κάνουμε πράξεις στο πρώτο μέλος της εξίσωσης και ελέγχουμε αν καταλήξαμε στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης.

$$3^{2v+1} - 3^{2v} = 3^{2v} \cdot 3 - 3^{2v} = 3^{2v}(3-1) = 3^{2v} \cdot 2 = 2 \cdot 3^{2v}$$

Η ισότητα δεν ισχύει καθώς $2 \cdot 3^{2v} \neq 3^{2v}$.

Άσκηση 6-Λύση

i. Στα δύο μέλη της εξίσωσης, θέλουμε να δημιουργήσουμε δυνάμεις με κοινή βάση.

Ισχύει ότι $125 = 5^3$. Το αντικαθιστούμε.

$$5^\nu = 5^3$$

Στην τελευταία ισότητας οι βάσεις είναι ίδιες, άρα για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει και οι εκθέτες να είναι ίσοι.

$$\nu = 3$$

ii. Ισχύει ότι $2021^0 = 1$ άρα $2021^\nu = 2021^0$

Στην τελευταία ισότητας οι βάσεις είναι ίδιες, άρα για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει και οι εκθέτες να είναι ίσοι.

$$\nu = 0$$

iii. Στα δύο μέλη της εξίσωσης, θέλουμε να δημιουργήσουμε δυνάμεις με κοινή βάση.

Ισχύει ότι $2^6 = 64$. Το αντικαθιστούμε.

$\left(\frac{1}{2}\right)^\nu = 2^6 \Rightarrow 2^{-\nu} = 2^6$

Στην τελευταία ισότητας οι βάσεις είναι ίδιες, άρα για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει και οι εκθέτες να είναι ίσοι.

$$-\nu = 6 \Rightarrow \nu = -6$$

Άσκηση 7-Λύση

Στην παράσταση αντικαθιστούμε το $x = -1$ και $y = -2$.

$$A = 2(-1)^2 - 2(-1)^2(-2)^3 - 3(-1)^2(-2)^2 = 2\cdot 1^2 - 2\cdot 1^2(-2^3) - 3\cdot 1^2\cdot 2^2$$
$$= 2\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 2^3 - 3\cdot 1\cdot 4 = 2 + 2\cdot 8 - 12 = 2 + 16 - 12$$
$$= 18 - 12 = 6$$

Άσκηση 8-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων και αντικαθιστώντας όπου χρειάζεται με κατάλληλα γινόμενα ώστε να δημιουργήσουμε δυνάμεις με κοινή βάση.

$$A=\left\{\left[\frac{2^{15}x^5(-3)^{14}y}{6^{10}(6x)^4}\right]^{-1}\right\}^{-2}=\left\{\left[\frac{2^{15}x^5 3^{14}y}{6^{10}6^4x^4}\right]^{-1}\right\}^{-2}=\left\{\left[\frac{2^{15}x^5 3^{14}y}{6^{10}6^4x^4}\right]^{-1}\right\}^{-2}$$

$$=\left\{\left[\frac{2^{15}x^{5-4}3^{14}y}{6^{10+4}}\right]^{-1}\right\}^{-2}=\left\{\left[\frac{2^{15}x^1 3^{14}y}{6^{14}}\right]^{-1}\right\}^{-2}=\left\{\left[\frac{2^{15}x^1 3^{14}y}{(2\cdot 3)^{14}}\right]^{-1}\right\}^{-2}$$

$$=\left\{\left[\frac{2^{15}x^1 3^{14}y}{2^{14}3^{14}}\right]^{-1}\right\}^{-2}=\{[2^{15-14}\cdot x\cdot 3^{14-14}\cdot y]^{-1}\}^{-2}$$

$$=\{[2^1\cdot x\cdot 3^0\cdot y]^{-1}\}^{-2}=\{[2\cdot x\cdot 1\cdot y]^{-1}\}^{-2}=\{[2\cdot x\cdot y]^{-1}\}^{-2}$$

$$=(2xy)^{-1\cdot(-2)}=(2xy)^2=2^2x^2y^2=4x^2y^2$$

Άσκηση 9-Λύση

Οι x και y είναι αντίστροφοι, άρα $x\cdot y=1$ ή αλλιώς $y=\frac{1}{x}$. Κάνουμε πράξεις στην παράσταση και όταν απλοποιηθεί αρκετά θα αντικαταστήσουμε το y με $\frac{1}{x}$.

$$A=\frac{[(x^2y^3)^{-1}\cdot(xy^3)^2]^2}{(x^3y)^{-3}}=\frac{\left(x^{2\cdot(-1)}y^{3\cdot(-1)}\cdot x^2y^{3\cdot 2}\right)^2}{x^{3\cdot(-3)}y^{-3}}=\frac{(x^{-2}y^{-3}\cdot x^2y^6)^2}{x^{-9}y^{-3}}$$

$$=\frac{(x^{-2+2}y^{-3+6})^2}{x^{-9}y^{-3}}=\frac{(x^0y^3)^2}{x^{-9}y^{-3}}=\frac{1^2y^{3\cdot 2}}{x^{-9}y^{-3}}=\frac{y^6}{x^{-9}y^{-3}}=x^9y^{6-(-3)}$$

$$=x^9y^{6+3}=x^9y^9=(xy)^9=\left(x\frac{1}{x}\right)^9=1^9=1$$

Άσκηση 10-Λύση

Κάνουμε πράξεις στην παράσταση και όταν εμφανιστεί ο όρος xy^2 , θα τον κάνουμε αντικατάσταση με το -1.

$$A = y^2(x^2y)^3(x^2y^3)^{-1} = y^2x^{2\cdot 3}y^3x^{2\cdot(-1)}y^{3\cdot(-1)} = y^2x^6y^3x^{-2}y^{-3}$$

$$= y^2y^3y^{-3}x^6x^{-2} = y^{2+3-3}x^{6-2} = y^2x^4 = xy^2x^3 = -1\cdot x^3 = -x^3$$

1.1. Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Γ. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

Α.-ii.		Β.-i.		Γ.-iii.		Δ.-i.		Ε.-iii.	

Ερώτηση Κατανόησης 2 - Απάντηση

$\sqrt{9}\cdot\sqrt{4}=\sqrt{36}$	Σ
$\sqrt{75}=5\sqrt{3}$	Σ
$\sqrt{9}+\sqrt{4}=\sqrt{13}$	Λ, $\sqrt{9}+\sqrt{4}=3+2=5\neq\sqrt{13}$
$\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$	Σ

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες ριζών.

i. $\sqrt{2}-5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(1-5+3)\sqrt{2}=-1\cdot\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

ii. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3\cdot 3}=\sqrt{9}=3$

iii. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{72}=\sqrt{2\cdot 72}=\sqrt{144}=12$

iv. $\sqrt{\frac{11}{6}}\cdot\sqrt{\frac{36}{11}}=\sqrt{\frac{11}{6}\cdot\frac{36}{11}}=\sqrt{\frac{36}{6}}=\sqrt{6}$

v. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{14}=\sqrt{2\cdot 7\cdot 14}=\sqrt{196}=14$

Άσκηση 2-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες ριζών και όπου χρειάζεται γράφουμε τις ποσότητες κάτω από τις ρίζες ως γινόμενα ώστε να δημιουργήσουμε ίδιες ρίζες και γνωστές ρίζες.

i. $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{75}{3}}=\sqrt{25}=5$

ii. $\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{90}}=\frac{\sqrt{100\cdot 10}}{\sqrt{9\cdot 10}}=\frac{\sqrt{100}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{9}}=\frac{10}{3}$

iii. $\frac{\sqrt{27}\sqrt{50}}{\sqrt{3}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{27\cdot 50}}{\sqrt{3\cdot 2}}=\frac{\sqrt{1350}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{1350}{6}}=\sqrt{225}=15$

iv. $8\sqrt{2}-7\sqrt{50}-10\sqrt{18}=8\sqrt{2}-7\sqrt{2\cdot 25}-10\sqrt{2\cdot 9}$

$=8\sqrt{2}-7\sqrt{25}\sqrt{2}-10\sqrt{9}\sqrt{2}=8\sqrt{2}-7\cdot 5\sqrt{2}-10\cdot 3\sqrt{2}$

$=8\sqrt{2}-35\sqrt{2}-30\sqrt{2}=(8-35-30)\sqrt{2}=-57\sqrt{2}$

v. $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{5\cdot 9}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{12\cdot 4}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{5}\sqrt{9}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{12}\sqrt{4}}{\sqrt{12}}=\sqrt{9}+\sqrt{4}=3+2=5$

Άσκηση 3-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες ριζών.

i. $(2+\sqrt{2})\cdot(2-\sqrt{2})=2\cdot 2-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{2}=4-(\sqrt{2})^2=4-2=2$

ii. $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=$

$=\sqrt{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3-2}=\sqrt{1}=1$

iii. $\sqrt{17+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}=\sqrt{17+\sqrt{7+\sqrt{3+1}}}=\sqrt{17+\sqrt{7+\sqrt{4}}}=$

$=\sqrt{17+\sqrt{7+2}}=\sqrt{17+\sqrt{9}}=\sqrt{17+3}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{4}\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

iv. $\frac{2+\sqrt{256}}{3}=\frac{2+13}{3}=\frac{15}{3}=5$

v. Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρανομαστή με $\sqrt{2}$ για να έχουμε ρητό παρανομαστή.

$$\frac{4+\sqrt{72}}{2\sqrt{2}} = \frac{(4+\sqrt{72})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}+\sqrt{72}\sqrt{2}}{2(\sqrt{2})^2} = \frac{4\sqrt{2}+\sqrt{72\cdot 2}}{2\cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}+\sqrt{144}}{4}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}+12}{4} = \frac{4\sqrt{2}}{4} + \frac{12}{4} = \sqrt{2}+3$$

vi. Παρατηρούμε ότι $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1$, άρα πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρανομαστή με $1-\sqrt{2}$ ώστε να έχουμε ρητό παρανομαστή.

$$\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{5}+\sqrt{10})\cdot(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}\cdot 1 - 2\sqrt{5}\sqrt{2} + \sqrt{10}\cdot 1 - \sqrt{10}\sqrt{2}}{1\cdot 1 - 1\cdot\sqrt{2} + 1\cdot\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{5} - 2\sqrt{5\cdot 2} + \sqrt{10} - \sqrt{10}\sqrt{2}}{1\cdot 1 - 1\cdot\sqrt{2} + 1\cdot\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{5} - 2\sqrt{10} + \sqrt{10} - \sqrt{10}\sqrt{2}}{1-2} = \frac{2\sqrt{5} + (-2+1-\sqrt{2})\sqrt{10}}{-1}$$

$$= -2\sqrt{5} - (-1-\sqrt{2})\sqrt{10}$$

Άσκηση 4-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες ριζών.

i. $A=\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{(-4)^2}-\left(\sqrt{5}\right)^4=2+|-4|-\left[\left(\sqrt{5}\right)^2\right]^2=2+4-5^2=-19$

ii. $B=\sqrt{121}-\sqrt{144}+\sqrt{196}-\sqrt{169}+\sqrt{225}=11-12+14-13+15=15$

iii. $\Gamma=3\sqrt{3}\cdot\left(3\sqrt{12}+2\sqrt{27}\right)=3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{12}+3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{27}$

$=3\cdot 3\cdot\sqrt{3\cdot 12}+3\cdot 2\sqrt{3\cdot 27}=9\sqrt{36}+6\sqrt{81}=9\cdot 6+6\cdot 9=108$

iv. $\Delta=\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}=\sqrt{2\cdot 50}=\sqrt{100}=10$

v. Σε κάθε κλάσμα, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρανομαστή με την ρίζα που βρίσκεται στον παρανομαστή ώστε να δημιουργήσουμε κλάσματα με ρητούς παρανομαστές:

$$E=\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}+\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}+\frac{3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Άσκηση 5-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες ριζών.

$$A\cdot B=\frac{2}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1-\sqrt{2}}=\frac{2\cdot 2}{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{4}{1+1\cdot\sqrt{2}-1\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{2}}$$

$$=\frac{4}{1-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{4}{1-2}=\frac{4}{-1}=-4$$

$$A+B=\frac{2}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{1-\sqrt{2}}=\frac{2(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}+\frac{2(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\frac{4}{1+1\cdot\sqrt{2}-1\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{4}{1-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{1-2}=\frac{4}{-1}=-4$$

Άσκηση 6-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες ριζών:

$$A^2=\left(\sqrt{2}+2\right)^2=\left(\sqrt{2}+2\right)\left(\sqrt{2}+2\right)=\sqrt{2}\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\cdot 2$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^2+(2+2)\sqrt{2}+4=2+4\sqrt{2}+4=6+4\sqrt{2}$$

$$B^2=\left(\sqrt{2}-2\right)^2=\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}-2\right)=\sqrt{2}\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2\cdot 2$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^2-(2+2)\sqrt{2}+4=2-4\sqrt{2}+4=6-4\sqrt{2}$$

$$A^2+B^2=6+4\sqrt{2}+6-4\sqrt{2}=12$$

$$(A+B)^2=\left[\sqrt{2}+2+\left(\sqrt{2}-2\right)\right]^2=\left(\sqrt{2}+2+\sqrt{2}-2\right)^2$$

$$=\left(2\sqrt{2}\right)^2=2^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=4\cdot 2=8$$

Άσκηση 7-Λύση

Θα δημιουργήσουμε ομώνυμα κλάσματα με ρητό παρανομαστή το 3 και θα δούμε ποιο έχει διαφορετικό παρανομαστή:

- $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\frac{\sqrt{3}}{3}$ έχει ήδη ρητό παρανομαστή το 3
- $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{3}$
- $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Αυτό που διαφέρει είναι το $\frac{3}{\sqrt{3}}$.

Άσκηση 8-Λύση

i. $4x + \sqrt{2} = 5x - 4\sqrt{2}$

$\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 5x - 4x$

$(1 + 4)\sqrt{2} = (5 - 4)x$

$5\sqrt{2} = 1 \cdot x$

$x = 5\sqrt{2}$

ii. Κάνουμε πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες ριζών και όπου χρειάζεται γράφουμε τις ποσότητες κάτω από τις ρίζες ως γινόμενα κατάλληλων αριθμών ώστε να δημιουργήσουμε ίδιες ρίζες.

$$4\left(x + \sqrt{2}\right) - \sqrt{8} = \sqrt{8}\left(x + \sqrt{2}\right)$$

$$4x + 4\sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{8}x + \sqrt{8}\sqrt{2}$$

$$4x-\sqrt{8}x=\sqrt{8}\sqrt{2}-4\sqrt{2}+\sqrt{8}$$

$$\left(4-\sqrt{8}\right)x=\sqrt{8\cdot 2}-4\sqrt{2}+\sqrt{2\cdot 4}$$

$$\left(4-\sqrt{4\cdot 2}\right)x=\sqrt{16}-4\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{4}$$

$$\left(4-\sqrt{4}\sqrt{2}\right)x=4-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}$$

$$\left(4-2\sqrt{2}\right)x=4+(-4+2)\sqrt{2}$$

$$\left(4-2\sqrt{2}\right)x=4+(-2)\sqrt{2}$$

$$\left(4-2\sqrt{2}\right)x=4-2\sqrt{2}$$

$$x=\frac{4-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}=1$$

iii. $\frac{x}{\sqrt{3}}=\sqrt{12}$

$$x=\sqrt{3}\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$$

iv. $x\sqrt{5}-40=0$

$$x\sqrt{5}=40$$

$$x=\frac{40}{\sqrt{5}}=\frac{40\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{40\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{40\sqrt{5}}{5}=8\sqrt{5}$$

Άσκηση 9-Λύση

i. $A=\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{(-4)^2}-\left(\sqrt{5}\right)^4=2+|-4|-\left[\left(\sqrt{5}\right)^2\right]^2=2+4-5^2=-19$

ii. Γράφουμε κάποιες ποσότητες κάτω από τις ρίζες ως γινόμενο κατάλληλων αριθμών ώστε να δημιουργήσουμε ίδιες ρίζες και γνωστές ρίζες:

$$B=\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{6}}{\sqrt{2}\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{2\cdot 3}}{\sqrt{2}\sqrt{4\cdot 5}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{4}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2}=\frac{3}{2}$$

Άσκηση 10-Λύση

Σε κάθε κλάσμα, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρανομαστή με την ρίζα που βρίσκεται στον παρανομαστή ώστε να δημιουργήσουμε κλάσματα με ρητούς παρανομαστές.

i. $A = \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} + \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{6}}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}$

ii. $A = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} + \frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Άσκηση 11-Λύση

Για να είναι οι αριθμοί $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ αντίστροφοι, θα πρέπει $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$.

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 2\cdot 2 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{3} = 4 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1$$

Για να μετατρέψουμε το κλάσμα $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρανομαστή, θα πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρανομαστή με την ποσότητα $2-\sqrt{3}$.

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{1} = 2-\sqrt{3}.$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.

i. $\sqrt{2}-6\sqrt{3}-3\sqrt{2}+10\sqrt{3}=\sqrt{2}-3\sqrt{2}-6\sqrt{3}+10\sqrt{3}$
$=(1-3)\sqrt{2}+(-6+10)\sqrt{3}=-2\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

ii. $\sqrt{\frac{2}{7}}\sqrt{\frac{7}{2}}=\sqrt{\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{2}}=\sqrt{1}=1$

iii. $3\sqrt{2}\cdot5\sqrt{10}\cdot9\sqrt{5}=3\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2\cdot5}\cdot9\sqrt{5}=3\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2}\sqrt{5}\cdot9\sqrt{5}$

$=3\cdot5\cdot9\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{5}=135\left(\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{5}\right)^2=135\cdot2\cdot5=1350$

iv. Γράφουμε κάποιες ποσότητες κάτω από τις ρίζες ως γινόμενο κατάλληλων αριθμών ώστε να δημιουργήσουμε ίδιες ρίζες και γνωστές ρίζες.

$$\frac{\sqrt{4}\sqrt{144}\sqrt{8}\sqrt{75}}{\sqrt{3}\cdot5\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\cdot12\cdot\sqrt{2\cdot4}\sqrt{3\cdot25}}{\sqrt{3}\cdot5\cdot\sqrt{2}}=\frac{24\cdot\sqrt{2}\sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{25}}{\sqrt{3}\cdot5\cdot\sqrt{2}}$$

$$=\frac{24\cdot\sqrt{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot5}{\sqrt{3}\cdot5\cdot\sqrt{2}}=\frac{24\cdot\sqrt{3}\cdot5\cdot\sqrt{2}\cdot2}{\sqrt{3}\cdot5\cdot\sqrt{2}}=24\cdot2=48$$

Άσκηση 2-Λύση

Γράφουμε κάποιες ποσότητες κάτω από τις ρίζες ως γινόμενο κατάλληλων αριθμών ώστε να δημιουργήσουμε γνωστές ρίζες.

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = \sqrt{2}\sqrt{9} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4}\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{4}\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4}\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

$$\sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{25}\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

Άσκηση 3-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις υπολογίζοντας τις ρίζες.

i. $$\sqrt{23+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{\sqrt{16}}}}}=\sqrt{23+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}=$$
$$\sqrt{23+\sqrt{1+\sqrt{7+2}}}=\sqrt{23+\sqrt{1+\sqrt{9}}}=\sqrt{23+\sqrt{1+3}}=\sqrt{23+2}=5$$

ii. $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{25}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{25}=5$

iii. Σε κάθε κλάσμα, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρανομαστή με την ρίζα που βρίσκεται στον παρανομαστή ώστε να δημιουργήσουμε κλάσματα με ρητούς παρανομαστές.

$$\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{8}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}+\frac{5\sqrt{8}}{\sqrt{8}\sqrt{8}}=\frac{4\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}+\frac{5\sqrt{8}}{(\sqrt{8})^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{5\sqrt{8}}{8}$$

Άσκηση 4-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις υπολογίζοντας τις ρίζες και όπου χρειάζεται Γράφουμε κάποιες ποσότητες κάτω από τις ρίζες ως γινόμενο κατάλληλων αριθμών ώστε να δημιουργήσουμε ίδιες ρίζες και γνωστές ρίζες.

i. $$\sqrt{5+\sqrt{10+\sqrt{31+\sqrt{25}}}}=\sqrt{5+\sqrt{10+\sqrt{31+5}}}=\sqrt{5+\sqrt{10+\sqrt{36}}}=$$
$$\sqrt{5+\sqrt{10+6}}=\sqrt{5+\sqrt{16}}=\sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$$

ii. $$\frac{\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3\cdot 6}\sqrt{2}}{\sqrt{3\cdot 4}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{4}\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άσκηση 5-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων:

i. $\sqrt{2}\cdot(3\sqrt{8}-\sqrt{50})=\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{8}-\sqrt{2}\sqrt{50}=3\sqrt{2\cdot 8}-\sqrt{2\cdot 50}$
$=3\sqrt{16}-\sqrt{100}=3\cdot 4-10=12-10=2$

ii. $\sqrt{3}\cdot(5\sqrt{12}-\sqrt{27})=\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{12}-\sqrt{3}\sqrt{27}=5\sqrt{3\cdot 12}-\sqrt{3\cdot 27}$
$=5\sqrt{36}-\sqrt{81}=5\cdot 6-9=30-9=21$

iii. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\sqrt{3}\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{2}=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=$
$=\ 3-2=1$

Άσκηση 6-Λύση

Θα γράψουμε όλους τους αριθμούς στη μορφή $\alpha\sqrt{3}$, ως ακολούθως:

- $3\sqrt{12}=3\sqrt{4\cdot 3}=3\sqrt{4}\sqrt{3}=3\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$
- $2\sqrt{27}=2\sqrt{9\cdot 3}=2\sqrt{9}\sqrt{3}=2\cdot 3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$
- $6\sqrt{3}$
- $3\sqrt{2}\sqrt{6}=3\sqrt{2}\sqrt{2\cdot 3}=3\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3}=3(\sqrt{2})^2\sqrt{3}=3\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$
- $2\sqrt{12}=2\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{4}\sqrt{3}=2\cdot 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

Αυτό που διαφέρει από τα υπόλοιπα είναι το $2\sqrt{12}$.

Άσκηση 7-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις και γράφουμε κάποιες ποσότητες κάτω από τις ρίζες ως γινόμενο κατάλληλων αριθμών ώστε να δημιουργήσουμε ίδιες ρίζες και γνωστές ρίζες.

i. $2\sqrt{8}-2\sqrt{200}-3\sqrt{50}=2\sqrt{4\cdot 2}-2\sqrt{2\cdot 100}-3\sqrt{2\cdot 25}=$

$2\sqrt{4}\sqrt{2}-2\sqrt{100}\sqrt{2}-3\sqrt{25}\sqrt{2}=2\cdot 2\sqrt{2}-2\cdot 10\sqrt{2}-3\cdot 5\sqrt{2}=$

$4\sqrt{2}-20\sqrt{2}-15\sqrt{2}=(4-20-15)\sqrt{2}=-31\sqrt{2}$

ii. $2\sqrt{12}-3\sqrt{75}-4\sqrt{300}=2\sqrt{4\cdot 3}-3\sqrt{3\cdot 25}-4\sqrt{3\cdot 100}=$

$2\sqrt{4}\sqrt{3}-3\sqrt{3}\sqrt{25}-4\sqrt{100}\sqrt{3}=2\cdot 2\sqrt{3}-3\cdot 5\sqrt{3}-4\cdot 10\sqrt{3}=$

$4\sqrt{3}-15\sqrt{3}-40\sqrt{3}=(4-15-40)\sqrt{3}=-51\sqrt{3}$

iii. $3\sqrt{8}-2\sqrt{27}-4\sqrt{12}-\sqrt{200}=3\sqrt{4\cdot 2}-2\sqrt{9\cdot 3}-4\sqrt{4\cdot 3}-\sqrt{100\cdot 2}=$

$3\sqrt{4}\sqrt{2}-2\sqrt{9}\sqrt{3}-4\sqrt{4}\sqrt{3}-\sqrt{100}\sqrt{2}=3\cdot 2\sqrt{2}-2\cdot 3\sqrt{3}-4\cdot 2\sqrt{3}-10\sqrt{2}=$

$6\sqrt{2}-6\sqrt{3}-8\sqrt{3}-10\sqrt{2}=6\sqrt{2}-10\sqrt{2}-6\sqrt{3}-8\sqrt{3}=$

$=(6-10)\sqrt{2}+(-6-8)\sqrt{3}=-4\sqrt{2}-14\sqrt{3}$

iv. $4\sqrt{20}-2\sqrt{32}-3\sqrt{45}-2\sqrt{50}=4\sqrt{4\cdot 5}-2\sqrt{16\cdot 2}-3\sqrt{9\cdot 5}-2\sqrt{25\cdot 2}=$

$4\sqrt{4}\sqrt{5}-2\sqrt{16}\sqrt{2}-3\sqrt{9}\sqrt{5}-2\sqrt{25}\sqrt{2}=8\sqrt{5}-8\sqrt{2}-9\sqrt{5}-2\cdot 5\sqrt{2}=$

$8\sqrt{5}-8\sqrt{2}-9\sqrt{5}-10\sqrt{2}=8\sqrt{5}-9\sqrt{5}-8\sqrt{2}-10\sqrt{2}=$

$=(8-9)\sqrt{5}+(-8-10)\sqrt{2}=-\sqrt{5}-18\sqrt{2}$

Άσκηση 8-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις και γράφουμε κάποιες ποσότητες κάτω από τις ρίζες ως γινόμενο κατάλληλων αριθμών ώστε να δημιουργήσουμε ίδιες ρίζες και γνωστές ρίζες.

i. $$A=\frac{2\sqrt{10}\cdot 4\sqrt{10}}{2\sqrt{6}}=\frac{2\cdot 4\left(\sqrt{10}\right)^2}{2\sqrt{6}}=\frac{4\cdot 10}{\sqrt{6}}=\frac{4\cdot 10}{\sqrt{6}}=\frac{40}{\sqrt{6}}=\frac{40\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{40\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{40\sqrt{6}}{6}=\frac{20\sqrt{6}}{3}$$

ii. $$B=\frac{4\sqrt{6}\cdot 2\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{2}\cdot 16\sqrt{18}}=\frac{4\cdot 2\sqrt{6}\sqrt{12}}{16\sqrt{2}\sqrt{18}}=\frac{8\sqrt{6}\sqrt{6\cdot 2}}{16\sqrt{2\cdot 18}}=\frac{\sqrt{6}\sqrt{6}\sqrt{2}}{2\sqrt{36}}=\frac{\left(\sqrt{6}\right)^2\sqrt{2}}{2\cdot 6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άσκηση 9-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις και γράφουμε κάποιες ποσότητες κάτω από τις ρίζες ως γινόμενο κατάλληλων αριθμών ώστε να δημιουργήσουμε ίδιες ρίζες και γνωστές ρίζες.

$$\begin{aligned}A=3\sqrt{8}+2\sqrt{72}-\sqrt{200}+5\sqrt{18}&=3\sqrt{4\cdot 2}+2\sqrt{36\cdot 2}-\sqrt{100\cdot 2}+5\sqrt{9\cdot 2}\\&=3\sqrt{4}\sqrt{2}+2\sqrt{36}\sqrt{2}-\sqrt{100}\sqrt{2}+5\sqrt{9}\sqrt{2}\\&=3\cdot 2\sqrt{2}+2\cdot 6\sqrt{2}-10\sqrt{2}+5\cdot 3\sqrt{2}\\&=6\sqrt{2}+12\sqrt{2}-10\sqrt{2}+15\sqrt{2}=(6+12-10+15)\sqrt{2}=23\sqrt{2}\end{aligned}$$

Άσκηση 10-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις και γράφουμε κάποιες ποσότητες κάτω από τις ρίζες ως γινόμενο κατάλληλων αριθμών ώστε να δημιουργήσουμε ίδιες ρίζες και γνωστές ρίζες.

$$\begin{aligned}A=2\sqrt{27}+3\sqrt{75}-\sqrt{108}+\sqrt{300}&=2\sqrt{9\cdot 3}+3\sqrt{25\cdot 3}-\sqrt{36\cdot 3}+\sqrt{100\cdot 3}\\&=2\sqrt{9}\sqrt{3}+3\sqrt{25}\sqrt{3}-\sqrt{36}\sqrt{3}+\sqrt{100}\sqrt{3}\\&=2\cdot 3\sqrt{3}+3\cdot 5\sqrt{3}-6\sqrt{3}+10\sqrt{3}=6\sqrt{3}+15\sqrt{3}-6\sqrt{3}+10\sqrt{3}\\&=(6+15-6+10)\sqrt{3}=25\sqrt{3}\end{aligned}$$

1.2 Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα

Α. Αλγεβρικές παραστάσεις – Μονώνυμα

Λύσεις

Ερώτηση Κατανόησης

i. Λάθος.

Αντιπαράδειγμα: τα $5x^2$ και $6x^2$ είναι όμοια αλλά δεν είναι ίσα.

ii. Σωστό

iii. Σωστό

iv. Λάθος. Έχει μηδενικό βαθμό.

v. Λάθος. Είναι το άθροισμά τους.

vi. Σωστό

vii. Σωστό

viii. Λάθος. Είναι $1 + 2 + 3 = 6$

ix. Σωστό

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

i. Είναι μονώνυμο.
ii. Δεν είναι μονώνυμο, καθώς περιέχει και την πράξη της πρόσθεσης.
iii. Είναι μονώνυμο.

Άσκηση 2-Λύση

i. Όμοια είναι τα $5xy^2$, $-xy^2$ και xy^2 , καθώς έχουν το ίδιο κύριο μέρος και διαφορετικούς συντελεστές.
ii. Ίσα είναι τα $10x^2y^2,\ 10y^2x^2$, καθώς έχουν ίδιο κύριο μέρος και ίδιο συντελεστή.
iii. Αντίθετα είναι τα $-xy^2$ και xy^2 , καθώς έχουν ίδιο κύριο μέρος και αντίθετους συντελεστές.
iv. Σταθερά είναι τα 10 και 20.

Άσκηση 3-Λύση

Αντικαθιστούμε στην παράσταση το $x = 2$ και $y = -2$ και εκτελούμε τις πράξεις.

$$
\begin{aligned}
-10 \cdot 2^4 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot 2^3 \cdot (-2)^3 &= -10 \cdot 2^4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 \cdot (-2^3) \\
&= -10 \cdot 2^{4+2} - 2 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = -10 \cdot 2^6 - 2 \cdot 2^{3+3} = -10 \cdot 2^6 - 2 \cdot 2^6 \\
&= (-10 - 2)2^6 = -12 \cdot 2^6
\end{aligned}
$$

Άσκηση 4-Λύση

i. Θα πρέπει $\lambda = 2$

ii. Θα πρέπει $\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

iii. Θα πρέπει $\lambda + \lambda - 1 = 5 \Rightarrow 2\lambda = 5 + 1 \Rightarrow 2\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 3$

iv. Αντικαθιστούμε στο μονώνυμο τις τιμές $x = -3$ και $y = 1$,το θέτουμε ίσο με 36 και λύνουμε την εξίσωση:

$$4 \cdot (-3)^{\lambda} \cdot 1^{\lambda - 1} = 36$$

$$(-3)^{\lambda} = \frac{36}{4}$$

$$(-3)^{\lambda} = 9$$

$$(-3)^{\lambda} = (-3)^2$$

$$\lambda = 2$$

Άσκηση 5-Λύση

Το αντίθετο μονώνυμο θα έχει το ίδιο κύριο μέρος και αντίθετο συντελεστή.

Άρα θα είναι το $\frac{4}{5}x^3y^2z$

Άσκηση 6-Λύση

Για να είναι το μηδενικό μονώνυμο θα πρέπει να ισούται με 0. Άρα αφού έχει μη μηδενικό κύριο μέρος, θα πρέπει ο συντελεστής του να είμαι μηδενικός.

$$4\alpha - 2\alpha - 14 + 2 = 0$$

$$2\alpha - 12 = 0$$

$$2\alpha = 12$$

$$\alpha = 6$$

Άσκηση 7-Λύση

Αντικαθιστούμε στο μονώνυμο τις τιμές $x = -1$ και $y = 3$, το θέτουμε ίσο με 54 και λύνουμε την εξίσωση:

$$2(-1)^2 3^\alpha = 54$$
$$(-1)^2 3^\alpha = 27$$
$$1^1 3^\alpha = 27$$
$$3^\alpha = 3^3$$
$$\alpha = 3$$

Άσκηση 8-Λύση

Θα πρέπει η παράσταση να περιέχει μόνο την πράξη του πολλαπλασιασμού ανάμεσα στους όρους της.

Άρα, τα μονώνυμα $-2x^\alpha y^3$ και $7x^5 y^{1-\beta}$ θα πρέπει να έχουν το ίδιο κύριο μέρος, δηλαδή να έχουν ίδιο βαθμό ως προς x και ως προς y.

Θα πρέπει:

$$\alpha = 5 \text{ και } 3 = 1 - \beta \Rightarrow \beta = 1 - 3 \Rightarrow \beta = -2$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

i. Είναι μονώνυμο.
ii. Δεν είναι μονώνυμο, καθώς περιέχει και την πράξη της πρόσθεσης.
iii. Είναι μονώνυμο.

Άσκηση 2-Λύση

Όμοια είναι τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος δηλαδή τα

$$\frac{2}{5}x^3y^2\ ,\ -x^3y^2\ ,\ 10x^3y^2$$

και τα

$$5xy^2\omega, \quad x\omega y^2$$

Άσκηση 3-Λύση

i. Κάνουμε αντικατάσταση στην παράσταση τις τιμές $x = -3$ και $y = -1$ και εκτελούμε τις πράξεις.

$$\begin{aligned} -5(-3)^3 \cdot (-1) + (-3)(-1)^3 - 5 &= 5(-3^3) + (-3)(-1^3) - 5 \\ &= 5(-27) + (-3)(-1) - 5 = -135 + 3 - 5 = -137 \end{aligned}$$

ii. Κάνουμε αντικατάσταση στην παράσταση τις τιμές $x = -2$ και $y = -1$ και εκτελούμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} \frac{(-2)^3(-1)(-2-1) + 2(-2)(-1)^3}{(-2)^2 + (-1)^2} &= \frac{-(-2^3)(-3) - 4(-1^3)}{2^2 + 1^2} \\ &= \frac{-(-8)(-3) - 4(-1)}{4+1} = \frac{-24+4}{5} = \frac{-20}{5} = -4 \end{aligned}$$

Άσκηση 4-Λύση

Στο μονώνυμο που ψάχνουμε θα βάλουμε συντελεστή το $-\frac{2}{5}$.

- Οι μεταβλητές θα είναι x και y.
- Ο εκθέτης του x θα είναι 2 άρα x^2.
- Ο βαθμός ως προς x και y θα είναι 6 άρα αφού ο βαθμός του x είναι 2, τότε ο βαθμός του y θα είναι 4, δηλαδή y^4.

Άρα, το μονώνυμο είναι το ακόλουθο:

$$-\frac{2}{5}x^2y^4$$

Άσκηση 5-Λύση

i. Θα πρέπει $\lambda = 0$

ii. Θα πρέπει $\lambda + 2 = 5 \Rightarrow \lambda = 5 - 2 \Rightarrow \lambda = 3$

Άσκηση 6-Λύση

Αντικαθιστούμε στην αλγεβρική παράσταση τις τιμές $x = -1$ και $y = 3$, το θέτουμε ίσο με 72 και λύνουμε την εξίσωση:

$$2 \cdot (-2)^2 \cdot (-3)^\alpha = 72$$
$$2 \cdot 2^2 \cdot (-3)^\alpha = 72$$
$$2 \cdot 4 \cdot (-3)^\alpha = 72$$
$$8 \cdot (-3)^\alpha = 72$$
$$(-3)^\alpha = 9$$
$$(-3)^\alpha = (-3)^2$$
$$\alpha = 2$$

Άσκηση 7-Λύση

Τα δύο μονώνυμα έχουν ίδιο κύριο μέρος, άρα θα πρέπει να έχουν και ίδιο συντελεστή:

$\alpha - 1 = 2\alpha + 5$

$\alpha - 2\alpha = 5 + 1$

$-\alpha = 6$

$\alpha = -6$

Άσκηση 8-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις και ελέγχουμε αν η αλγεβρική παράσταση είναι μονώνυμο:

$$3x\left(1+\sqrt{3}x^2y^2\right) - 6x\left(x^2y^2 + \frac{x}{2}\right) = 3x + 3x\cdot\sqrt{3}x^2y^2 - 6x\cdot x^2y^2 - 6x\cdot\frac{x}{2}$$

$$= 3x + 3\sqrt{3}xx^2y^2 - 6x^3y^2 - 3x^2 = 3x - 3x^2 + (3\sqrt{3}-6)x^3y^2$$

Άρα η παράσταση δεν είναι μονώνυμο.

Άσκηση 9-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις και στη συνέχεια θα διακρίνουμε τον συντελεστή και το κύριο μέρος των μονωνύμων:

i. $[(-2x^2y^3)^2]^4 = (2^2x^{2\cdot 2}y^{3\cdot 2})^4 = (4x^4y^6)^4 = 4^4x^{4\cdot 4}y^{6\cdot 4} = 4^4x^{16}y^{24}$

Ο συντελεστής είναι το 4^4 και το κύριο μέρος το $x^{16}y^{24}$

ii. $\frac{1}{3}(-3xy)^3\cdot 2(x^2y)^3 = \frac{1}{3}(-3^3x^3y^3)\cdot 2(x^{2\cdot 3}y^3) = -\frac{1}{3}\cdot 27\cdot 2x^3x^6y^3y^3 =$

$= -18x^{3+6}y^{3+3} = -18x^9y^6$

Ο συντελεστής είναι το -18 και το κύριο μέρος είναι το x^9y^6

Άσκηση 10-Λύση

- Για να είναι όμοια τα δύο μονώνυμα $3x^{\nu}y^3$, $-x^2y^{2\mu-5}$ θα πρέπει να έχουν ίδιο κύριο μέρος, δηλαδή: $x^{\nu}y^3 = x^2y^{2\mu-5}$. Άρα πρέπει:

$$\nu = 2 \text{ και } 3 = 2\mu - 5 \Rightarrow 2\mu = 3 + 5 \Rightarrow 2\mu = 8 \Rightarrow \mu = 4$$

- Για να είναι ίσα τα δύο μονώνυμα $\lambda\alpha^2\beta^3$, $5\alpha^2\beta^{\mu+1}$ θα πρέπει να έχουν ίδιο συντελεστή και ίδιο κύριο μέρος. Δηλαδή: $\lambda\alpha^2\beta^3 = 5\alpha^2\beta^{\mu+1}$. Άρα:

$$\lambda = 5 \text{ και } \alpha^2\beta^3 = \alpha^2\beta^{\mu+1} \Rightarrow 3 = \mu + 1 \Rightarrow \mu = 3 - 1 \Rightarrow \mu = 2$$

- Για να είναι τα δύο μονώνυμα $(2\lambda - 1)x^3y^4$, $\lambda x^{\mu}y^4$ αντίθετα, θα πρέπει να έχουν αντίθετους συντελεστές και ίδιο κύριο μέρος.
Δηλαδή: $(2\lambda - 1)x^3y^4 = \lambda x^{\mu}y^4$.
Άρα, έχουμε:

$$2\lambda - 1 = \lambda \Rightarrow 2\lambda - \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \quad \text{και} \quad x^3y^4 = x^{\mu}y^4 \Rightarrow \mu = 3$$

1.2. Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα

Β. Πράξεις με Μονώνυμα

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

i. Σωστό

ii. Λάθος

Αντιπαράδειγμα: τα μονώνυμα $2x^3$ και $3x^3$ είναι όμοια αλλά το γινόμενό τους $2x^3 \cdot 3x^3 = 6x^{3+3} = 6x^6$ δεν είναι όμοιο με αυτά μονώνυμο.

iii. Λάθος

iv. Λάθος

Αντιπαράδειγμα: τα x^3 και x^4 είναι μονώνυμα αλλά το $\frac{x^3}{x^4} = x^{-1}$ δεν είναι μονώνυμο.

v. Λάθος

Το αποτέλεσμα είναι $7x^3$.

vi. Λάθος

Δεν αποτελεί μονώνυμο το αποτέλεσμα.

Ερώτηση Κατανόησης 2 - Απάντηση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας τους κανόνες γινομένου και πηλίκου μονωνύμων.

i. $5x^3 10x^2 = 50x^{3+2} = 50x^5$

ii. $4x^4 \cdot 7x^8 = 28x^{12}$

iii. $4x^2y^3 \cdot \frac{1}{4}x^6y^3 = x^8y^6$

iv. $-\frac{3}{8}x^3y^2z \cdot \left(-\frac{2}{9}x^3y^3z^2\right) = -\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) x^3y^2z \cdot x^3y^3z^2 =$

$\frac{6}{72}x^{3+3}y^{2+3}z^{1+2} = \frac{1}{12}x^6y^5z^3$

v. $\frac{5x^3y^4z^2}{15xy^2z} = \frac{1}{3}x^{3-1}y^{4-2}z^{2-1} = \frac{1}{3}x^2y^2z$

vi. $-\frac{2}{3}x^7y^4 : \left(-\frac{5}{4}x^4y^2\right) = \frac{8}{15}x^3y^2$

vii. $-8x^4y^4z^2 : (-4x^2y^3z) = 2x^2yz$

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

i. $2x^2 - 10 + 4 - 4x^2 = (2-4)x^2 - 6 = -2x^2 - 6$

ii. $8\alpha\beta^2 - 2\beta^2 + 5 - 8\beta^2 + 3\alpha\beta^2 + 18 = 8\alpha\beta^2 + 3\alpha\beta^2 - 2\beta^2 - 8\beta^2 + 18 + 5 =$
$(8+3)\alpha\beta^2 + (-2-8)\beta^2 + 23 = 11\alpha\beta^2 - 10\beta^2 + 23$

iii. $-(4x - 5y) - (-x - y) + 8x = -4x + 5y + x + y + 8x = -5x + 6y$

iv. $2\alpha + 3\beta - (-\alpha - \beta) - (-3\alpha + 8\beta) = 2\alpha + 3\beta + \alpha + \beta + 3\alpha - 8\beta = 6\alpha - 4\beta$

Άσκηση 2-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας τους κανόνες γινομένου και πηλίκου μονωνύμων.

i. $2x^2 \cdot 4x^3 = 8x^{2+3} = 8x^5$

ii. $-5x^2 \cdot (-3x^2)^2 = -5x^2 \cdot 3^2 x^{2\cdot 2} = -5 \cdot 9x^2x^4 = -45x^{2+4} = -45x^6$

iii. $\sqrt{2}x^4 \cdot 2\sqrt{2}x^3 = 2\sqrt{2}\sqrt{2}x^4x^3 = 2\left(\sqrt{2}\right)^2 x^{4+3} = 2 \cdot 2x^7 = 4x^7$

iv. $-3x^4y \cdot (-4x^2y^2) = -3 \cdot (-4)x^4y \cdot x^2y^2 = 12x^{4+2}y^{1+2} = 12x^6y^3$

Άσκηση 3-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας τους κανόνες γινομένου και πηλίκου μονωνύμων.

i. $\frac{2}{3}x^2y^5 \cdot \left(-\frac{4}{6}xy^3\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{6}\right)x^2y^5xy^3 = -\frac{8}{18}x^{2+1}y^{5+3} = -\frac{4}{9}x^3y^8$

ii. $3x^2 \cdot (-4x^3) \cdot 5x = 3(-4) \cdot 5x^2x^3x = -60x^{2+3+1} = -60x^6$

iii. $7x^2y\omega^2 \cdot (-2x^3y\omega^3) \cdot 5xy^3\omega = 7(-2) \cdot 5x^2y\omega^2x^3y\omega^3xy^3\omega$

$= -70x^{2+3+1}y^{1+1+3}\omega^{2+3+1} = -70x^6y^5\omega^6$

iv. $\frac{1}{2}x^3y\omega^3 \cdot \left(-\frac{2}{4}x^2y^2\omega^4\right) \cdot \left(-\frac{6}{4}x^2y^2\omega^2\right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{4}\right) \cdot \left(-\frac{6}{4}\right)x^3y\omega^3x^2y^2\omega^4x^2y^2\omega^2$

$= \frac{6}{16}x^{3+2+2}y^{1+2+2}\omega^{3+4+2}$

$= \frac{3}{8}x^7y^5\omega^9$

Άσκηση 4-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας τους κανόνες πηλίκου μονωνύμων.

i. $6x^5 : 4x^3 = \frac{6}{4}x^{5-3} = \frac{3}{2}x^2$

ii. $-18x^8 : (-3x^2)^2 = -18x^8 : 3^3x^{2\cdot 2} = -18x^8 : 9x^4 = -\frac{18}{9}x^{8-4} = -4x^4$

iii. $-\frac{3}{5}x^2y^3 : \left(-\frac{12}{15}xy^2\right) = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{12}{15}}x^{2-1}y^{3-2} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}x^1y^1 = \frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}xy = \frac{3}{4}xy$

iv. $-10x^5y^3\omega^3 : (2xy^2\omega^2) = -\frac{10}{2}x^{5-1}y^{3-2}\omega^{3-2} = -5x^4y^1\omega^1 = -5x^4y\omega$

Άσκηση 5-Λύση

Θα πρέπει:

- $\alpha \cdot 3 = -12 \Rightarrow \alpha = -4$
- $\beta + 2 = 5 \Rightarrow \beta = 5 - 2 = 3$
- $1 + \gamma = 1 \Rightarrow \gamma = 1 - 1 = 0$

Άσκηση 6-Λύση

Θα πρέπει:

- $(2\alpha - 1) \cdot 3 = -6 \Rightarrow 6\alpha - 3 = -6 \Rightarrow 6\alpha = -6 + 3 \Rightarrow 6\alpha = -3 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$
- $2\beta + \beta + 1 = 7 \Rightarrow 3\beta = 7 - 1 \Rightarrow 3\beta = 6 \Rightarrow \beta = 2$
- $\gamma + 3 + \gamma = 9 \Rightarrow 2\gamma = 9 - 3 \Rightarrow 2\gamma = 6 \Rightarrow \gamma = 3$

Άσκηση 7-Λύση

Θα πρέπει:

- $\frac{12}{\gamma} = -3 \Rightarrow -3\gamma = 12 \Rightarrow \gamma = -4$
- $3\beta - \beta = 4 \Rightarrow 2\beta = 4 \Rightarrow \beta = 2$
- $2\alpha - \alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 3$

Άσκηση 8-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας τους κανόνες γινομένου και πηλίκου και αθροίσματος μονωνύμων.

i. $(4x^2)^2 - 16x^4 = 4^2x^{2\cdot 2} - 16x^4 = 16x^4 - 16x^4 = 0$

ii. $(-4xy^2)^3 - 10x^3y^6 = -4^3x^3y^{2\cdot 3} - 10x^3y^6 = -64x^3y^6 - 10x^3y^6 =$

$(-64-10)x^3y^6 = -74x^3y^6$

iii. $\left(-\frac{1}{8}x^2y\right)^2 \cdot (-56x^2y^2) = \frac{1^2}{8^2}x^{2\cdot 2}y^2 \cdot (-56x^2y^2) = \frac{1}{64}x^4y^2 \cdot (-56x^2y^2) =$

$\frac{1}{64} \cdot (-56)x^{4+2}y^{2+2} = -\frac{56}{64}x^6y^4 = -\frac{7}{8}x^6y^4$

iv. $(-x^2y^2)^3 : (-2x^2y^2z) = (-x^{2\cdot 3}y^{2\cdot 3}) : (-2x^2y^2z) = (-x^6y^6) : (-2x^2y^2z) =$

$\frac{1}{2}x^{6-2}y^{6-2}\frac{1}{z} = \frac{1}{2}x^4y^4z^{-1}$

Άσκηση 9-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας τους κανόνες γινομένου και πηλίκου και αθροίσματος μονωνύμων.

i. $(-3x^2y)^2 - xy \cdot (2x^3y) - \frac{6x^5y^4}{3xy^2} = 3^2x^{2\cdot 2}y^2 - 2x^{1+3}y^{1+1} - 2x^{5-1}y^{4-2}$

$= 9x^4y^2 - 2x^4y^2 - 2x^4y^2 = (9-2-2)x^4y^2 = 5x^4y^2$

ii. $-\frac{1}{2}xy^2 \cdot \left(-\frac{4}{3}xy\right)^2 - \frac{(-xy^2)^3}{3y^2} = -\frac{1}{2}xy^2 \cdot \frac{4^2}{3^2}x^2y^2 - \frac{-x^3y^{2\cdot 3}}{3y^2}$

$= -\frac{1}{2}xy^2 \cdot \frac{16}{9}x^2y^2 + \frac{x^3y^6}{3y^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{9}x^{1+2}y^{2+2} + \frac{1}{3}x^3y^{6-2}$

$= -\frac{8}{9}x^3y^4 + \frac{1}{3}x^3y^4 = \left(-\frac{8}{9} + \frac{1}{3}\right)x^3y^4 = \left(-\frac{8}{9} + \frac{3}{9}\right)x^3y^4 = -\frac{5}{9}x^3y^4$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

i. Θα πρέπει:

- $\alpha \cdot 5 = 45 \;\Rightarrow \alpha = 9$
- $\beta + 2 = 10 \;\Rightarrow \beta = 10 - 2 \;\Rightarrow \beta = 8$
- $2 + \gamma = 16 \;\Rightarrow \gamma = 16 - 2 \;\Rightarrow \gamma = 14$

ii. Θα πρέπει:

- $\frac{27}{\beta} = 3 \;\Rightarrow 27 = 3\beta \;\Rightarrow \beta = 9$
- $\alpha - 2 = 3 \;\Rightarrow \alpha = 3 + 2 \;\Rightarrow \alpha = 5$
- $8 - \gamma = 6 \;\Rightarrow\; -\gamma = 6 - 8 \;\Rightarrow -\gamma = -2 \;\Rightarrow \gamma = 2$

Άσκηση 2-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.

i. $(-5x^2y^3z)^3 = -5^3x^{2\cdot 3}y^{3\cdot 3}z^3 = -125x^6y^9z^3$

ii. $\left(-\sqrt{5}x^2\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2x^{2\cdot 2} = 5x^4$

iii. $\left(-\frac{1}{2}x^4y^2z^3\right)^2 = \frac{1^2}{2^2}x^{4\cdot 2}y^{2\cdot 2}z^{3\cdot 2} = \frac{1}{4}x^8y^4z^6$

Άσκηση 3-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας τους κανόνες γινομένου μονωνύμων.

i. $(-3x^2)(-x^5) = 3x^2x^5 = 3x^{2+5} = 3x^7$

ii. $\left(-\frac{1}{4}x^2y^4\right)(16x^5y^2) = -\frac{1}{4} \cdot 16 \cdot x^2y^4x^5y^2 = -4x^{2+5}y^{4+2} = -4x^7y^6$

iii. $(-\sqrt{2}x^2y^2)\left(\frac{\sqrt{8}}{2}x^3y\right) = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{8}}{2}x^2y^2x^3y = -\frac{\sqrt{2 \cdot 8}}{2}x^{2+3}y^{2+1} = -\frac{\sqrt{16}}{2}x^5y^3 =$

$-\frac{4}{2}x^5y^3 = -2x^5y^3$

Άσκηση 4-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας τους κανόνες γινομένου και πηλίκου μονωνύμων.

i. $(-2x^2y^3)^2 \cdot 6xy(x^3y^5) = 2^2x^{2\cdot 2}y^{3\cdot 2} \cdot 6x^{1+3}y^{1+5}$

$= 4x^4y^6 \cdot 6x^4y^6 = 4 \cdot 6 \cdot x^4y^6x^4y^6 = 24x^{4+4}y^{6+6} = 24x^8y^{12}$

ii. $(-4x^3y^2)^2 : [2^2x^2y(x^2y^2)] = (4^2x^{3\cdot 2}y^{2\cdot 2}) : (4x^{2+2}y^{1+2})$

$= (16x^6y^4) : (4x^4y^3) = \dfrac{16}{4}x^{6-4}y^{4-3} = 4x^2y^1 = 4x^2y$

Άσκηση 5-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.

i. $(2x^3y^4)^2 = 2^2x^{3\cdot2}y^{4\cdot2} = 4x^6y^8$

ii. $(-3xy^2z)^3 = -3^3x^3y^{2\cdot3}z^3 = -27x^3y^6z^3$

iii. $\left(-\frac{1}{2}x^3y^2z\right)^4 = \frac{1}{2^4}x^{3\cdot4}y^{2\cdot4}z^4 = \frac{1}{16}x^{12}y^8z^4$

iv. $\left(-\sqrt{3}x^2y^2z\right)^2 = \sqrt{3}^2x^{2\cdot2}y^{2\cdot2}z^2 = 3x^4y^4z^2$

Άσκηση 6-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.

i. $(-4x^3)^2 = 16x^6$

ii. $\left(-\sqrt{3}x^2\right)^2 = 3x^4$

iii. $(5x^2y)^3 = 125x^6y^3$

iv. $\left(\frac{1}{2}x^2y^4\right)^5 = -\frac{1}{32}x^{10}y^{20}$

Άσκηση 7-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις εφαρμόζοντας τους κανόνες γινομένου και πηλίκου και αθροίσματος μονωνύμων.

i. $[-x^3(xy)^2\cdot(-2)]:(x^3y^3) = 2x^3x^2y^2:(x^3y^3) = 2x^{3+2}y^2:(x^3y^3) =$
$2x^5y^2:(x^3y^3) = 2x^{5-3}y^{2-3} = 2x^2y^{-1} = \frac{2x^2}{y}$

ii. $[-6(-x)+(-5)x-(-3)(-x)]:(2x)^2 = (6x-5x-3x):(2^2x^2) =$
$[(6-5-3)x]:(4x^2) = -2x:(4x^2) = -\frac{2}{4}x^{1-2} = -\frac{1}{2}x^{-1} = -\frac{1}{2x}$

Άσκηση 8-Λύση

$$\frac{(-5+3)^3-5(-5)\cdot 3}{(-5)^2+(-5)\cdot 3+3^2}=\frac{(-2)^3+25\cdot 3}{25-15+9}=\frac{-8+75}{19}=\frac{67}{19}$$

Άσκηση 9-Λύση

Θα πρέπει:

$\boldsymbol{\frac{3\gamma-1}{-2}=\gamma}$

$3\gamma-1=-2\gamma$

$3\gamma+2\gamma=1$

$5\gamma=1$, άρα: $\gamma=\frac{1}{5}$

και

$\boldsymbol{2\beta+3-(\beta+5)=1}$

$2\beta+3-\beta-5=1$

$(2-1)\beta=1-3+5$

$\beta=6$

και

$\boldsymbol{\alpha+1-3=2}$

$\alpha=2-1+3=4$

1.3 Πολυώνυμα – Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων

Λύσεις

Ερώτηση Κατανόησης

i. Λάθος

Αντιπαράδειγμα: τα $x^2 + 2x + 3$ και $x^2 + 3x + 3$ έχουν τον ίδιο βαθμό αλλά δεν είναι ίσα.

ii. Λάθος

Αντιπαράδειγμα: τα $x^2 + 2x + 3$ και $-x^2 + 3x + 3$ είναι του ίδιου βαθμού αλλά το άθροισμά τους $x^2 + 2x + 3 - x^2 + 3x + 3 = 5x + 6$ δεν έχει το ίδιο βαθμό με αυτά.

iii. Λάθος

Είναι μηδενικού βαθμού.

iv. Λάθος

Είναι μηδενικού βαθμού.

v. Σωστό.

vi. Λάθος

vii. Ένα πολυώνυμο πρέπει να αποτελείται από μονώνυμα αλλά το $\frac{1}{2x}$ δεν είναι μονώνυμο.

viii. Σωστό.

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

i. $P(x) = -x^3 + x^2 - 8x - 12$

ii. Ο βαθμός του $P(x)$ είναι 3.

iii. Στο πολυώνυμο αντικαθιστούμε $x = -1$ και εκτελούμε τις πράξεις.

$$P(-1) = -(-1)^3 + (-1)^2 - 8(-1) - 12 = -(-1) + 1 + 8 - 12 = -2$$

Άσκηση 2-Λύση

$$\begin{aligned}4x^2 - 2x + 2 - (2x^3 - x^2 - x + 5) &= 4x^2 - 2x + 2 - 2x^3 + x^2 + x - 5\\ &= -2x^3 + (4+1)x^2 + (-2+1)x + 2 - 5\\ &= -2x^3 + 5x^2 + (-1)x - 3 = -2x^3 + 3x^2 - x - 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x^2 - [3 - x^2 - (3x - 2x^2)] &= 2x^2 - (3 - x^2 - 3x + 2x^2)\\ &= 2x^2 - 3 + x^2 + 3x - 2x^2 = (2 + 1 - 2)x^2 + 3x - 3\\ &= x^2 + 3x - 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 + \left(\frac{1}{3}x^2 - 3x\right) - \left(\frac{1}{6}x - x^2 - 4\right) &= 2 + \frac{1}{3}x^2 - 3x - \frac{1}{6}x + x^2 + 4\\ &= \left(\frac{1}{3} + 1\right)x^2 + \left(-3 - \frac{1}{6}\right)x + 2 + 4\\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{3}\right)x^2 + \left(-\frac{18}{6} - \frac{1}{6}\right)x + 2 + 4 = \frac{4}{3}x^2 - \frac{19}{6}x + 6\end{aligned}$$

Άσκηση 3-Λύση

Αντικαθιστούμε τα πολυώνυμα και εκτελούμε τις πράξεις:

i. $P(x) + Q(x) = -8 + x^2 + 2x + (2x^2 - 4x - 12) =$
$-8 + x^2 + 2x + 2x^2 - 4x - 12 = (1+2)x^2 + (2-4)x - 8 - 12 = 3x^2 - 2x - 20$

ii. $P(x) - Q(x) = -8 + x^2 + 2x - (2x^2 - 4x - 12) =$
$-8 + x^2 + 2x - 2x^2 + 4x + 12 = (1-2)x^2 + (2+4)x - 8 + 12 = -x^2 + 6x + 4$

iii. $-P(x) - Q(x) = -(-8 + x^2 + 2x) - (2x^2 - 4x - 12) =$
$8 - x^2 - 2x - 2x^2 + 4x + 12 = (-1-2)x^2 + (-2+4)x + 8 + 12 =$
$-3x^2 + 2x + 20$

iv. $-\big(-P(x) - Q(x)\big) = P(x) + Q(x) = 3x^2 - 2x - 20$

Άσκηση 4-Λύση

Αντικαθιστούμε στο πολυώνυμο τις τιμές $x = -2$ και $y = -1$ και εκτελούμε τις πράξεις:

$$-8 + (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 1 + (-1)^2 = -8 + 4 - 4 - 1 + 1 = -8$$

Άσκηση 5-Λύση

Κάνουμε αντικατάσταση στο πολυώνυμο το $x = -2$, το θέτουμε ίσο με 0 και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει:

$2(-2)^3 - (4 + a)(-2)^2 - 12(-2) + 4 = 0$

$2 \cdot (-8) - (4 + a) \cdot 2^2 + 24 + 4 = 0$

$-16 - (4 + a) \cdot 4 + 28 = 0$

$-16 - 4 \cdot 4 - 4a + 28 = 0$

$-16 - 16 - 4a + 28 = 0$, άρα $-4 = 4a$, οπότε $\alpha = -1$

Άσκηση 6-Λύση

$P(x) = Q(x)$, δηλαδή:

$4x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 5 = (\alpha + 2)x^4 + (\beta - 4)x^3 - (\gamma + 3)x^2 - \delta$

Θα πρέπει οι συντελεστές των όμοιων μονωνύμων να είναι ίσοι, άρα:

- $4 = \alpha + 2 \Rightarrow \alpha = 4 - 2 \Rightarrow \alpha = 2$
- $-2 = \beta - 4 \Rightarrow \beta = -2 + 4 \Rightarrow \beta = 2$
- $3 = \gamma + 3 \Rightarrow \gamma = 3 - 3 \Rightarrow \gamma = 0$
- $5 = \delta$

Άσκηση 7-Λύση

Αντικαθιστούμε τα πολυώνυμα και εκτελούμε τις πράξεις:

i. $P(x) + Q(x) + F(x) = x^2 - 4x - 3 + (-x^3 - 5) + (-x^3 - 2x^2 - 4) =$
$x^2 - 4x - 3 - x^3 - 5 - x^3 - 2x^2 - 4 = (-1 - 1)x^3 + (1 - 2)x^2 - 4x - 12$
$= -2x^3 - x^2 - 4x - 12$

ii. $P(x) - [Q(x) - F(x)] = x^2 - 4x - 3 - [-x^3 - 5 - (-x^3 - 2x^2 - 4)] =$
$x^2 - 4x - 3 - (-x^3 - 5 + x^3 + 2x^2 + 4)$
$= x^2 - 4x - 3 + x^3 + 5 - x^3 - 2x^2 - 4 = (1 - 2)x^2 - 4x - 2$
$= -x^2 - 4x - 2$

iii. $5P(x) - 3Q(x) - 2F(x) = 5(x^2 - 4x - 3) - 3(-x^3 - 5) - 2(-x^3 - 2x^2 - 4) =$
$5x^2 - 20x - 15 + 3x^3 + 15 + 2x^3 + 4x^2 + 8 = (3 + 2)x^3 + (5 + 4)x^2 - 20x + 8 =$
$5x^3 + 9x^2 - 20x + 8$

iv. $-P(x)-[-2Q(x)-F(x)]+5=$

$-(x^2-4x-3)-[-2(-x^3-5)-(-x^3-2x^2-4)]$

$=-x^2+4x+3-(2x^3+10+x^3+2x^2+4)$

$=-x^2+4x+3-2x^3-10-x^3-2x^2-4$

$=(-2-1)x^3+(-1-2)x^2+4x-11=-3x^3-3x^2+4x-11$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

i. $10\alpha\beta+5\alpha-5x^3-10\alpha+10x^3+5\alpha\beta=(10+5)\alpha\beta+(5-10)\alpha+(-5+10)x^3=$
$15\alpha\beta-5\alpha+5x^3$

ii. $x^3-15x-5x^3-12x+10x^3+4x^2=(1-5+10)x^3+4x^2+(-15-12)x=$
$6x^3+4x^2-27x$

iii. $10x^3-2x^2-5-(-x^3+4x^2+8)=10x^3-2x^2-5+x^3-4x^2-8=$
$=(10+1)x^3+(-2-4)x^2-5-8=11x^3-6x^2-13$

Άσκηση 2-Λύση

i. $P(x)=3+4x^2-2(x-6x^2)+4x=3+4x^2-2x+12x^2+4x=$
$(4+12)x^2+(-2+4)x+3=16x^2+2x+3$

ii. $P(x)=Q(x)$
$16x^2+2x+3=ax^2+\beta x+\gamma$
Θα πρέπει οι συντελεστές των όμοιων μονωνύμων να είναι ίσοι, άρα:

$$\alpha=16, \beta=2 \text{ και } \gamma=3$$

Άσκηση 3-Λύση

Αντικαθιστούμε τα πολυώνυμα και εκτελούμε τις πράξεις.

i. $P(x)+Q(x)+F(x)=4x^2-5x+2+(-2x^3+3x+6)+(-5x^3-10x^2-7)=$
$4x^2-5x+2-2x^3+3x+6-5x^3-10x^2-7=$
$(-2-5)x^3+(4-10)x^2+(-5+3)x+1=-7x^3-6x^2-2x+1$

ii. $P(x)-[Q(x)-F(x)]=4x^2-5x+2-[-2x^3+3x+6-(-5x^3-10x^2-7)]=$
$4x^2-5x+2-(-2x^3+3x+6+5x^3+10x^2+7)=$
$4x^2-5x+2+2x^3-3x-6-5x^3-10x^2-7$
$=(2-5)x^3+(4-10)x^2+(-5-3)x-11$
$=-3x^3-6x^2-8x-11$

iii. $2P(x)-3Q(x)-3F(x)=$
$2(4x^2-5x+2)-3(-2x^3+3x+6)-3(-5x^3-10x^2-7)$
$=8x^2-10x+4-(-6x^3+9x+18)-(-15x^3-30x^2-21)$
$=8x^2-10x+4+6x^3-9x-18+15x^3+30x^2+21$
$=(6+15)x^3+(8+30)x^2+(-10-9)x+4-18+21$
$=21x^3+38x^2-19x+7$

Άσκηση 4-Λύση

Αντικαθιστούμε τις τιμές $x=-2$ και $y=-1$ στα πολυώνυμα και τα προσθέτουμε:

$-2\cdot 1^2+4\cdot 1^2+2-10+(2^2-8\cdot 1^2-2+6)-2+4+2-10+4-8-2+6=-6$

Άσκηση 5-Λύση

Στο $P(x)$ βάζουμε όπου x το $-x$ και εκτελούμε τις πράξεις:

$$P(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = P(x)$$

Άσκηση 6-Λύση

Στο $P(x)$ βάζουμε όπου x το $-x$ και εκτελούμε τις πράξεις

$$P(-x) = -4(-x)^3 + 2(-x) = -4(-x^3) - 2x = 4x^3 - 2x = -(-4x^3 + 2x) = -P(x)$$

Άσκηση 7-Λύση

Ένα τετράγωνο πλευράς 5 έχει εμβαδό ίσο με $5 \cdot 5 = 25$.

Από το εμβαδό E_1 θα αφαιρέσουμε τα εμβαδά E_2 και E_3 και θα πάρουμε αποτέλεσμα 25.

$$\begin{aligned} E_1 - E_2 - E_3 &= 5x^2 - 3x + 37 - (3x^2 - x + 7) - (2x^2 - 2x + 5) \\ &= 5x^2 - 3x + 37 - 3x^2 + x - 7 - 2x^2 + 2x - 5 \\ &= (5 - 3 - 2)x^2 + (-3 + 1 + 2)x + 25 = 0x^2 + 0x + 25 = 25 \end{aligned}$$

Άσκηση 8-Λύση

Κάνουμε αντικατάσταση στο πολυώνυμο $P(x)$ τις ζητούμενες ποσότητες και τα αθροίζουμε.

$$\begin{aligned} Q(x) = P(-x) - P(2x^3) &= 2(-x)^2 - (-x) - 2 - [3(2x^3)^2 - 2x^3 - 2] \\ &= 2x^2 + x - 2 - (3 \cdot 2^2 x^{3 \cdot 2} - 2x^3 - 2) \\ &= 2x^2 + x - 2 - (3 \cdot 4x^6 - 2x^3 - 2) \\ &= 2x^2 + x - 2 - 12x^6 + 2x^3 + 2 = -12x^6 + 2x^3 + 2x^2 + x \end{aligned}$$

1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Λύσεις

Ερώτηση Κατανόησης

i. Σωστό

ii. Σωστό

iii. Σωστό

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

i. $5 \cdot (4x + 3) = 5 \cdot 4x + 5 \cdot 3 = 20x + 15$

ii. $-6x \cdot (3x^2 + 4x + 5)$

$= -6x \cdot 3x^2 - 6x \cdot 4x - 6x \cdot 5$

$= -18x^3 - 24x^2 - 30x$

iii. $(2x - 5) \cdot (4x^2 - 2x + 3)$

$= 2x \cdot 4x^2 - 2x \cdot 2x + 2x \cdot 3 + (-5)4x^2 — 52x + (-5)$

$= 8x^3 - 4x^2 + 6x - 20x^2 + 10x - 15$

$= 8x^3 - 24x^2 + 16x - 15$

iv. $(-2x^2 - 11x) \cdot (2x^2 - 4x - 7)$

$= (-2x^2) \cdot 2x^2 — 2x^2 \cdot 4x — 2x^2 \cdot 7 + (-11x) \cdot 2x^2 - (-11x) \cdot 4x - (-11x) \cdot 7$

$= -4x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 22x^3 + 44x^2 + 77x$

$= -4x^4 + (8 - 22)x^3 + (14 + 44)x^2 + 77x$

$= -4x^4 - 14x^3 + 58x^2 + 77x$

Άσκηση 2-Λύση

i. $5x \cdot (2x+4) - 6x \cdot (3x-3)$
$= 5x \cdot 2x + 5x \cdot 4 - 6x \cdot 3x + 6x \cdot 3$
$= 10x^2 + 20x - 18x^2 + 18x$
$= (10-18)x^2 + (20+18)x$
$= -8x^2 + 38x$

ii. $-10 - 4x \cdot (3x+6x) - 8\left(x^2 - 4x - \frac{1}{2}\right)$
$= -10 - 4x \cdot 3x - 4x \cdot 6x - 8x^2 + 8 \cdot 4x + 8 \cdot \dfrac{1}{2}$
$= -10 - 12x^2 - 24x^2 - 8x^2 + 32x + 4$
$= (-12 - 24 - 8)x^2 + 32x - 6$
$= -44x^2 + 32x - 6$

iii. $x^2 \cdot y \cdot (11x^2 - 2y + 7xy)$
$= x^2 \cdot y \cdot 11x^2 - x^2 \cdot y \cdot 2y + x^2 \cdot y \cdot 7xy$
$= 11x^4y - 2x^2y^2 + 7x^3y^2$

iv. $(-4x^2 - 8y) \cdot (5xy - 4x - 9)$
$= -4x^2 \cdot 5xy - (-4x^2) \cdot 4x - (-4x^2) \cdot 9 - 8y \cdot 5xy - (-8y) \cdot 4x - (-8y) \cdot 9$
$= -20x^3y + 16x^3 + 36x^2 - 40xy^2 + 32xy + 72y$

Άσκηση 3-Λύση

i. $4 \cdot (3x+5) \cdot (-2x+3)$
$= (12x+20) \cdot (-2x+3)$
$= -2x \cdot 12x + 3 \cdot 12x - 2x \cdot 20 + 3 \cdot 20$
$= -24x^2 + 36x - 40x + 60$

ii. $-2x \cdot (7x+4) \cdot (-3x-10)$
$= (-2x \cdot 7x - 2x \cdot 4) \cdot (-3x-10)$
$= (-14x^2 - 8x) \cdot (-3x-10)$
$= -14x^2 \cdot (-3x) - 14x^2 \cdot (-10) - 8x \cdot (-3x) - 8x \cdot (-10)$
$= 42x^3 + 140x^2 + 14x^2 + 80x = 42x^3 + (140+14)x^2 + 80x$
$= 42x^2 + 158x^2 + 80x$

iii. $(3x^2+1)\cdot(3x-4)\cdot(-4x+5)$
$= (3x^2\cdot 3x - 3x^2\cdot 4 + 3x - 4)\cdot(-4x+5)$
$= (9x^3 - 12x^2 + 3x - 4)\cdot(-4x+5)$
$= -4x\cdot 9x^3 - (-4x)12x^2 + (-4x)3x - (-4x)4 + 5\cdot 9x^3 - 5\cdot 12x^2 + 5\cdot 3x - 5\cdot 4$
$= -36x^{1+3} + 48x^{1+2} - 12x^{1+1} + 16x + 45x^3 - 60x^2 + 15x - 20$
$= -36x^4 + 48x^3 - 12x^2 + 16x + 45x^3 - 60x^2 + 15x - 20$
$= -36x^4 + (48+45)x^3 + (-12-60)x^2 + (16+15)x - 20$
$= -36x^4 + 93x^3 - 72x^2 + 31x - 20$

iv. $(4x^2y + x)\cdot(2y-4x)\cdot(-3xy+5y)$
$= (8x^2y^2 - 16x^3y + 2xy - 4x^2)(-3xy+5y)$
$= -24x^3y^3 + 48x^4y^2 - 6x^2y^2 + 12x^3y + 40x^2y^3 - 80x^3y^2 + 10xy^2 - 20x^2y$

Άσκηση 4-Λύση

Αντικαθιστούμε τα πολυώνυμα και εκτελούμε τις πράξεις:

$P(x) = Q(x)$

$(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x-1) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$

$[x\cdot x - 2x - 3x - 2\cdot(-3)]\cdot(x-1) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$

$(x^2 - 5x + 6)\cdot(x-1) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$

$x\cdot x^2 - x\cdot 5x + 6x - x^2 + 5x - 6 = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$
$x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6 = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$

Στην τελευταία σχέση θα πρέπει τα όμοια μονώνυμα να έχουν ίδιους συντελεστές.
Άρα:

$$\alpha = 1\,, \beta = -6\,, \gamma = 11 \text{ και } \delta = -6$$

Άσκηση 5-Λύση

Αντικαθιστούμε τα πολυώνυμα και εκτελούμε τις πράξεις.

$$
\begin{aligned}
P(x)\cdot Q(x) &= (x^3-x-2)\cdot(-x^2+3x^2+2x-3)\\
&= (x^3-x-2)\cdot(2x^2+2x-3)\\
&= 2x^{2+3}+2x^{1+3}-3x^3-2x^3-2x^2+3x-4x^2-4x+6\\
&= 2x^5+2x^4-3x^3-2x^3-2x^2+3x-4x^2-4x+6\\
&= 2x^5+2x^4+(-3-2)x^3+(-2-4)x^2+(3-4)x+6\\
&= 2x^5+2x^4-5x^3-6x^2-x+6
\end{aligned}
$$

Άσκηση 6-Λύση

$$
\begin{aligned}
(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) &= (x^2-2x+x-2)(x+3)(x-4)\\
&= (x^2-x-2)(x+3)(x-4)\\
&= (x^2\cdot x+3x^2-x\cdot x-3x-2x-2\cdot 3)(x-4)\\
&= (x^3+3x^2-x^2-3x-2x-2\cdot 3)(x-4)\\
&= (x^3+2x^2-5x-6)(x-4)\\
&= x^3\cdot x-4x^3+2x^2\cdot x-8x^2-5x\cdot x+20x-6x+24\\
&= x^4-4x^3+2x^3-8x^2-5x^2+20x-6x+24\\
&= x^4-2x^3-13x^2+14x+24
\end{aligned}
$$

Άσκηση 7-Λύση

$$(2x-1)\cdot(\alpha x+\beta)=6x^2-7x+2$$

$$2x\cdot\alpha x+2x\cdot\beta-\alpha x-\beta=6x^2-7x+2$$

$$2\alpha x^2+(2\beta-\alpha)x-\beta=6x^2-7x+2$$

Στην τελευταία σχέση θα πρέπει τα όμοια μονώνυμα να έχουν ίδιους συντελεστές.

$$2\alpha=6\Rightarrow\alpha=3$$

Και

$$2\beta-\alpha=-7\Rightarrow 2\beta-3=-7\Rightarrow 2\beta=-7+3\Rightarrow 2\beta=-4\Rightarrow\beta=-2$$

Άσκηση 8-Λύση

Το πολυώνυμο $5x-2$ είναι πρώτου βαθμού. Επομένως, για να πάρουμε αποτέλεσμα $10x^2-9x+2$, θα πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε με ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού το οποίο θα έχει την μορφή $\alpha x+\beta$ όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί.

$$(5x-2)(\alpha x+\beta)=10x^2-9x+2$$

$$5x\cdot\alpha x+5x\cdot\beta-2\alpha x-2\beta=10x^2-9x+2$$

$$5\alpha x^2+(5\beta-2\alpha)x-2\beta=10x^2-9x+2$$

Στην τελευταία σχέση θα πρέπει τα όμοια μονώνυμα να έχουν ίδιους συντελεστές:

$$5\alpha=10\Rightarrow\alpha=2 \text{ και } -2\beta=2\Rightarrow\beta=-1$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

i. $x \cdot (3x + y) - 2x^2 + 5xy$

$= x \cdot 3x + xy - 2x^2 + 5xy$

$= 3x^2 - 2x^2 + xy + 5xy$

$= (3 - 2)x^2 + (1 + 5)xy$

$= x^2 + 6xy$

ii. $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^3 \cdot (8x^2 + 4xy)$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 x^{2\cdot 3}y^3 \cdot (8x^2 + 4xy)$

$= -\frac{1}{2^3}x^6y^3 \cdot (8x^2 + 4xy)$

$= -\frac{1}{8}x^6y^3 \cdot (8x^2 + 4xy)$

$= \left(-\frac{1}{8}x^6y^3\right)8x^2 + \left(-\frac{1}{8}x^6y^3\right)4xy$

$= -\frac{1}{8} \cdot 8 \cdot x^6x^2y^3 - \frac{1}{8} \cdot 4 \cdot x^6y^3xy$

$= -x^{6+2}y^3 - \frac{1}{2}x^{6+1}y^{3+1} = -x^8y^3 - \frac{1}{2}x^7y^4$

iii. $(x + y) \cdot (x - y)^2 - 2x^3 - 2x^2 + 2y^3$

$= (x + y) \cdot (x - y)(x - y) - 2x^3 - 2x^2 + 2y^3$

$= (x \cdot x - xy + xy - y \cdot y) \cdot (x - y) - 2x^3 - 2x^2 + 2y^3$

$= (x^2 - y^2)(x - y) - 2x^3 - 2x^2 + 2y^3$

$= x \cdot x^2 - xy^2 - x^2y + y^2y - 2x^3 - 2x^2 + 2y^3$

$= x^3 - xy^2 - x^2y + y^3 - 2x^3 - 2x^2 + 2y^3$

$= (1 - 2)x^3 + (1 + 2)y^3 - 2x^2 - xy^2 - x^2y$

$= -x^3 + 3y^3 - 2x^2 - xy^2 - x^2y$

Άσκηση 2-Λύση

$$\begin{aligned} P(x) &= -3[x^2-(x-2)-3]-2x^2\cdot[x^2-(x-2)-3]-3 \\ &= -3(x^2-x+2-3)-2x^2(x^2-x+2-3)-3 \\ &= -3(x^2-x-1)-2x^2(x^2-x-1)-3 \\ &= -3\cdot x^2 — 3\cdot x — 31-2x^2\cdot x^2 — 2x^2x — 2x^2\cdot 1-3 \\ &= -3x^2+3x+3-2x^4+2x^3+2x^2-3 \\ &= -2x^4+2x^3+(-3+2)x^2+3x \\ &= -2x^4+2x^3-x^2+3x \end{aligned}$$

Άσκηση 3-Λύση

Αντικαθιστούμε τα πολυώνυμα και εκτελούμε τις πράξεις ώστε να καταλήξουμε σε μία σχέση που ισχύει.

$$P(x)\cdot[Q(x)+F(x)] = P(x)\cdot Q(x)+P(x)\cdot F(x) \Rightarrow$$

$$(-5x+3)\cdot[(-3x+2)+x^2y^2] = (-5x+3)\cdot(-3x+2)+(-5x+3)\cdot x^2y^2 \Rightarrow$$

$$(-5x+3)\cdot(-3x+2+x^2y^2) = (-5x+3)\cdot(-3x+2)+(-5x+3)\cdot x^2y^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &(-5x)(-3x)+(-5x)\cdot 2+(-5x)\cdot x^2y^2-3\cdot 3x+3\cdot 2+3\cdot x^2y^2 \\ &\qquad = (-5x)(-3x)+(-5x)\cdot 2-3\cdot 3x+3\cdot 2+(-5x)\cdot x^2y^2+3\cdot x^2y^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$15x^2-10x-5x^3y^2-9x+6+3x^2y^2 = 15x^2-10x-5x^3y^2-9x+6+3x^2y^2$$

Άσκηση 4-Λύση

i. $$\begin{aligned} &(x-y)\cdot(x^3-x^2y+xy^2-y^3) \\ &= x\cdot x^3-x\cdot x^2y+x\cdot xy^2-x\cdot y^3-yx^3-(-y)\cdot x^2y+(-y)\cdot xy^2 — y\cdot y^3 \\ &= x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3-yx^3+x^2y^2-xy^3+y^4 \\ &= x^4+(-1-1)x^3y+(1+1)x^2y^2+(-1-1)xy^3+y^4 \\ &= x^4-2x^3y+2x^2y^2-2xy^3+y^4 \end{aligned}$$

ii. $(-x-3)\cdot(-x+4)\cdot x\cdot(x^2+2)$

$= [-x\cdot(-x) - x\cdot 4 - 3\cdot(-x) - 3\cdot 4]\cdot x\cdot(x^2+2)$

$= (x^2-4x+3x-12)\cdot x\cdot(x^2+2)$

$= (x^2-x-12)\cdot x\cdot(x^2+2)$

$= (x\cdot x^2 - x\cdot x - x\cdot 12)\cdot(x^2+2)$

$= (x^3-x^2-12x)\cdot(x^2+2)$

$= x^3\cdot x^2 + x^3\cdot 2 - x^2\cdot x^2 - 2x^2 - 12x\cdot x^2 - 12x\cdot 2$

$= x^5+2x^3-x^4-2x^2-12x^3-24x$

$= x^5-x^4+(2-12)x^3-2x^2-24x$

$= x^5-x^4-10x^3-2x^2-24x$

Άσκηση 5-Λύση

α) Ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ισούται με το γινόμενο των ακμών του:

$$\begin{aligned} A\cdot B\cdot \Gamma &= (2x+1)(2x+2)(2x+3) = (2x\cdot 2x + 2\cdot 2x + 2x + 2)(2x+3) \\ &= (4x^2+4x+2x+2)(2x+3) = (4x^2+6x+2)(2x+3) \\ &= 4x^2\cdot 2x + 4x^2\cdot 3 + 6x\cdot 2x + 6x\cdot 3 + 2\cdot 2x + 2\cdot 3 \\ &= 8x^3+12x^2+12x^2+18x+4x+6 \\ &= 8x^3+(12+12)x^2+(18+4)x+6 \\ &= 8x^3+24x^2+22x+6 \end{aligned}$$

β) Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο αποτελείται από 6 επιφάνειες. Δύο από αυτές είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα εμβαδού $A\cdot B$ και οι υπόλοιπες 4 είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα εμβαδού $B\cdot \Gamma$.

Επομένως για να βρούμε το εμβαδό της συνολικής του επιφάνειας, θα πρέπει να προσθέσουμε τους όρους $2A \cdot B + 4B \cdot \Gamma$:

$$\begin{aligned}2A \cdot B + 4B \cdot \Gamma &= 2(2x+1)(2x+2) + 4(2x+2)(2x+3)\\ &= 2(2x \cdot 2x + 2 \cdot 2x + 2x + 2) + 4(2x \cdot 2x + 3 \cdot 2x + 2 \cdot 2x + 2 \cdot 3)\\ &= 2(4x^2 + 4x + 2x + 2) + 4(4x^2 + 6x + 4x + 6)\\ &= 2(4x^2 + 6x + 2) + 4(4x^2 + 10x + 6)\\ &= 8x^2 + 12x + 4 + 16x^2 + 40x + 24\\ &= (8+16)x^2 + (12+40)x + 28 = 24x^2 + 52x + 28\end{aligned}$$

Άσκηση 6-Λύση

$$\begin{aligned}5x - 2x(3x-1) - (6x-1)(1-x) &= 5x - 2x \cdot 3x + 2x - (6x - 6x \cdot x - 1 + x)\\ &= 5x - 6x^2 + 2x - (6x - 6x^2 - 1 + x)\\ &= 5x - 6x^2 + 2x - 6x + 6x^2 + 1 - x\\ &= (-6+6)x^2 + (5+2-6-1)x + 1 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&3y^2 - 2x(x+3y) - 3(x+y)(y-2x) - 4x^2\\ &= 3y^2 - 2x \cdot x - 2x \cdot 3y - (3x+3y)(y-2x) - 4x^2\\ &= 3y^2 - 2x^2 - 6xy - (3x \cdot y - 3x \cdot 2x + 3y \cdot y - 3y \cdot 2x) - 4x^2\\ &= 3y^2 - 2x^2 - 6xy - (3xy - 6x^2 + 3y^2 - 6xy) - 4x^2\\ &= 3y^2 - 2x^2 - 6xy - 3xy + 6x^2 - 3y^2 + 6xy - 4x^2\\ &= (3-3)y^2 + (-2+6-4)x^2 + (-6-3+6)xy\\ &= 0 \cdot y^2 + 0 \cdot x^2 - 3xy = -3xy\end{aligned}$$

Άσκηση 7-Λύση

Αντικαθιστούμε τα πολυώνυμα και εκτελούμε τις πράξεις:

$$
\begin{aligned}
A(x) = 1 - 3x \cdot P(x) - P(x) \cdot Q(x) &= 1 - 3x \cdot (2x-1) - (2x-1)(3x-2) \\
&= 1 - 3x \cdot 2x + 3x - (2x \cdot 3x - 2x \cdot 2 - 3x + 2) \\
&= 1 - 6x^2 + 3x - (6x^2 - 4x - 3x + 2) \\
&= 1 - 6x^2 + 3x - 6x^2 + 4x + 3x - 2 \\
&= (-6-6)x^2 + (3+4+3)x - 1 = -12x^2 + 10x - 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B(x) = x^2 - P(x-1) \cdot [1 - Q(-x)] &= x^2 - [2(x-1) - 1] \cdot \{1 - [3(-x) - 2]\} \\
&= x^2 - (2x - 2 - 1) \cdot [1 - (-3x - 2)] \\
&= x^2 - (2x-3) \cdot (1 + 3x + 2) = x^2 - (2x-3) \cdot (3x+3) \\
&= x^2 - (2x \cdot 3x + 2x \cdot 3 - 3 \cdot 3x - 3 \cdot 3) \\
&= x^2 - (6x^2 + 6x - 9x - 9) = x^2 - (6x^2 - 3x - 9) \\
&= x^2 - 6x^2 + 3x + 9 = (1-6)x^2 + 3x + 9 = -5x^2 + 3x + 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x) = P\big(Q(x)\big) \cdot P\big(P(x)\big) - Q\big(Q(2)\big)& \\
&= [2(3x-2) - 1] \cdot [2(2x-1) - 1] - [3(3 \cdot 2 - 2) - 2] \\
&= (2 \cdot 3x - 2 \cdot 2 - 1) \cdot (2 \cdot 2x - 2 - 1) - [3(6-2) - 2] \\
&= (6x - 4 - 1)(4x - 3) - (3 \cdot 4 - 2) \\
&= (6x-5)(4x-3) - (12-2) \\
&= 6x \cdot 4x - 3 \cdot 6x - 5 \cdot 4x - 5 \cdot (-3) - 10 \\
&= 24x^2 - 18x - 20x + 15 - 10 = 24x^2 + (-18-20)x + 5 \\
&= 24x^2 - 38x + 5
\end{aligned}
$$

1.5. Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Λύσεις

Ερώτηση Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 – Απάντηση

i. $(y+6)^2 = y^2 + 2 \cdot 6y + 6^2 = y^2 + 12y + 36$

ii. $(3a+5\beta)^2 = 9\alpha^2 + 30\alpha\beta + 25\beta^2$

iii. $(2z-(-8y))^2 = 4z^2 + 32zy + 64y^2$

iv. $(y+5)^3 = y^3 + 15y^2 + 75y + 125$

v. $(3z-10\omega)^3 = 27z^3 - 90z^2\omega + 900z\omega^2 - 1000\omega^3$

vi. $(5x+4y+\frac{z}{2})^2 = 25x^2 + 16y^2 + \frac{z^2}{4} + 800xy + 5xy + 4yz$

vii. $(2y^2+6\omega)(2y^2-6\omega) = 4y^4 - 36\omega^2$

viii. $(x+4) \cdot (x^2-4x+16) = x^3 + 64$

ix. $(10-2\omega) \cdot (100+20\omega+4\omega^2) = 1000 - 8\omega^3$

Ερώτηση Κατανόησης 2 - Απάντηση

i. Σωστό
ii. Λάθος. Το αποτέλεσμα είναι $\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2$.
iii. Λάθος. $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
iv. Σωστό
v. Λάθος. $(\alpha+\beta)(\beta-\alpha) = \beta^2 - \alpha^2$
vi. Λάθος. $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$
vii. Σωστό
viii. Σωστό
ix. Σωστό
x. Σωστό

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

i. $(x+5)^2 = x^2 + 2\cdot 5x + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

ii. $(x+y)^2 = x^2 + 2yx + y^2$

iii. $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 3\cdot 2x + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

iv. $(3x+2y)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3\cdot 2xy + (2y)^2 = 9x^2 + 12x + 4y^2$

v. $(3x\alpha+2y\beta)^2 = (3x\alpha)^2 + 2\cdot 3x\alpha\cdot 2y\beta + (2y\beta)^2 = 9x^2\alpha^2 + 12\alpha\beta xy + 4y^2\beta^2$

vi. $\left(4x+\frac{1}{2}\right)^2 = (4x)^2 + 2\cdot 4x\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 16x^2 + 4x + \frac{1}{4}$

Άσκηση 2-Λύση

i. $\left(5\alpha+\frac{1}{5}\beta\right)^2=(5\alpha)^2+2\cdot 5\alpha\cdot\frac{1}{5}\beta+\left(\frac{1}{5}\beta\right)^2=25\alpha^2+2\alpha\beta+\frac{1}{25}\beta^2$

ii. $(2x^2+2)^2=(2x^2)^2+2\cdot 2x^2\cdot 2+2^2=4x^4+8x^2+4$

iii. $(3x^2+3y^3)^2=(3x^2)^2+2\cdot 3x^2\cdot 3y^3+(3y^3)^2=9x^4+18x^2y^3+9y^6$

iv. $\left(4x+\sqrt{2}\right)^2=(4x)^2+2\cdot 4x\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=16x^2+8\sqrt{2}x+2$

v. $\left(3x^2+\sqrt{5}\right)^2=(3x^2)^2+2\cdot 3x^2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5}^2=9x^4+6\sqrt{5}x^2+5$

vi. $\left(5\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)^2=\left(5\sqrt{x}\right)^2+2\cdot 5\sqrt{x}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5}^2=25x+10\sqrt{5}\sqrt{x}+5$

Άσκηση 3-Λύση

i. $(4x-3y)^2=(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 3y+(3y)^2=16x^2-24xy+9y^2$

ii. $(4x\alpha-3y\beta)^2=(4x\alpha)^2-2\cdot 4x\alpha\cdot 3y\beta+(3y\beta)^2=16x^2a^2-24\alpha\beta xy+9y^2\beta^2$

iii. $\left(3x-\frac{1}{3}\right)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2=9x^2+2x+\frac{1}{9}$

iv. $(3\alpha-4)^2=(3x)^2-2\cdot 3\cdot 4x+4^2=9x^2+24x+16$

v. $(y-4)^2=y^2-2\cdot 4y+4^2=x^2-8y+16$

Άσκηση 4-Λύση

i. $\left(4\alpha-\frac{1}{2}\beta\right)^2=(4\alpha)^2-2\cdot 4\alpha\cdot\frac{1}{2}\beta+\left(\frac{1}{2}\beta\right)^2=16\alpha^2+4\alpha\beta+\frac{1}{4}\beta^2$

ii. $(x^2-4)^2=(x^2)^2-2\cdot 4x^2+4^2=x^4+8x^2+16$

iii. $(\omega-z)^2=\omega^2-2\omega z+z^2$

iv. $(2x^2-4y^2)^2=(2x^2)^2-2\cdot 2x^2\cdot 4y^2+(4y^2)^2=4x^4-16x^2y^2+16y^4$

v. $\left(3x-\sqrt{3}\right)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=9x^2-6\sqrt{3}x+3$

Άσκηση 5-Λύση

i. $\left(4x^2-\sqrt{3}\right)^2=(4x^2)^2-2\cdot 4x^2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=16x^4-8\sqrt{3}x^2+3$

ii. $(-\omega-z)^2=(-\omega)^2-2\cdot(-\omega)\cdot(-z)+(-z)^2=\omega^2-2\omega z+z^2$

iii. $(-y+4)^2=(4-y)^2=4^2-2\cdot 4y+y^2=16-8y+y^2$

iv. $\left(2\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2-2\cdot 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=4x-4\sqrt{2}\sqrt{x}+2$

Άσκηση 6-Λύση

i. $(x+5)(x-5)=x^2-5^2=x^2-25$

ii. $(2x+3)(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$

iii. $(2x+4y)(2x-4y)=(2x)^2-(4y)^2=4x^2-16y^2$

iv. $(2a^2+3y)(2a^2+3y)=(2a^2)^2-(3y)^2=4a^4-9y^2$

v. $(x+10)(-x+10)=-x^2+10^2=-x^2+100$

vi. $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)=x^2-\sqrt{3}^2=x^2-3$

Άσκηση 7-Λύση

i. $\left(2x+y\sqrt{3}\right)\cdot\left(2x-y\sqrt{3}\right)=(2x)^2-\left(y\sqrt{3}\right)^2=4x^2-3y^2$

ii. $(2\alpha-5)(-2\alpha-5)=-(2\alpha-5)(2\alpha+5)=-[(2\alpha)^2-5^2]$
$=-(4\alpha^2-25)=-4\alpha^2+25$

iii. $[(2\alpha+5)-2]\cdot[(2\alpha+5)+2]=(2\alpha+5)^2-2^2$
$=(2\alpha)^2+2\cdot 2\alpha\cdot 5+5^2-4=4\alpha^2+20\alpha+25-4$
$=4\alpha^2+20\alpha+21$

iv. $(x+y-3)(x+y-3)=[(x+y)-3][(x+y)+3]$
$=(x+y)^2-3^2=x^2+2xy+y^2-9$

v. $(a+y-2)(a-y+2)=[a+(y-2)][a-(y-2)]$
$=a^2-(y-2)^2=a^2-(y^2-2\cdot 2y+2^2)=a^2-y^2+4y-4$

Άσκηση 8-Λύση

i. $(a+4)^3=a^3+3a^2\cdot 4+3\cdot a4^2+4^3=a^3+12a^2+3\cdot 16a+64$
$=a^3+12a^2+48a+64$

ii. $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

iii. $(3x+2)^3=(3x)^3+3(3x)^2\cdot 2+3\cdot 3x\cdot 2^2+2^3$
$=27x^3+6\cdot 3^2x+9\cdot 4x+8=27x^3+6\cdot 9x+36x+8$
$=27x^3+54x+36x+8$

iv. $(2\omega+3z)^3=(2\omega)^3+3(2\omega)^2\cdot 3z+3\cdot 2\omega\cdot(3z)^2+(3z)^3$
$=8\omega^3+3\cdot 4\omega^2\cdot 3z+3\cdot 2\omega\cdot 9x^2+27z^3$
$=8\omega^3+36\omega^2z+54\omega x^2+27z^3$

v. $(3z\omega+2\alpha\beta)^3=(3z\omega)^3+3(3z\omega)^2\cdot 2\alpha\beta+3\cdot 3z\omega\cdot(2\alpha\beta)^2+(2\alpha\beta)^3$

$=27z^3\omega^3+6\cdot 3^2z^2\omega^2\alpha\beta+9z\omega\cdot 2^2\alpha^2\beta^2+8\alpha^3\beta^3$

$=27z^3\omega^3+6\cdot 9z^2\omega^2\alpha\beta+9z\omega\cdot 4\alpha^2\beta^2+8\alpha^3\beta^3$

$=27z^3\omega^3+54z^2\omega^2\alpha\beta+36z\omega\alpha^2\beta^2+8\alpha^3\beta^3$

vi. $\left(3\alpha+\frac{1}{3}\right)^3=(3\alpha)^3+3(3\alpha)^2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot 3\alpha\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$=27\alpha^3+9\alpha^2+9\alpha\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}=27\alpha^3+9\alpha^2+9\alpha\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$

$=27\alpha^3+9\alpha^2+\alpha+\frac{1}{27}$

vii. $\left(2\alpha+\frac{\beta}{2}\right)^3=(2\alpha)^3+3(2\alpha)^2\cdot\frac{\beta}{2}+3\cdot 2\alpha\cdot\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^3$

$=8\alpha^3+3\cdot 4\alpha^2\cdot\frac{\beta}{2}+6\alpha\frac{\beta^2}{2^2}+\frac{\beta^3}{2^3}$

$=8\alpha^3+6\alpha^2\beta+\frac{6}{4}\alpha\beta^2+\frac{\beta^3}{8}=8\alpha^3+6\alpha^2\beta+\frac{3}{2}\alpha\beta^2+\frac{\beta^3}{8}$

viii. $(2\alpha^2+3)^3=(2\alpha^2)^3+3(2\alpha^2)^2\cdot 3+3\cdot 2\alpha^2\cdot 3+3^3$

$=8\alpha^6+9\cdot 2^2\alpha^6+18\alpha^2+27$

ix. $(2x^3+2y^2)^3=(2x^3)^3+3(2x^3)^2\cdot 2y^2+3\cdot 2x^3\cdot(2y^2)^2+(2y^2)^3$

$=8x^9+6\cdot 4\cdot x^6y^2+6x^3\cdot 4y^2+8y^6$

$=x^9+24x^6y^2+24x^3y^2+8y^6$

Άσκηση 9-Λύση

i. $(x-3)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 - 3^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

ii. $(z-y)^3 = z^3 - 3z^2y + 3zy^2 - y^3 = (2x-2)^3$
$= (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2x \cdot 2^2 - 2^3 = 8x^3 - 6 \cdot 2^2x^2 + 6x \cdot 4 - 9$
$= 8x^3 - 24x^2 + 24x - 9$

iii. $(2x-2)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2x \cdot 2^2 - 2^3$
$= 8x^3 - 6 \cdot 4x^2 + 6 \cdot 4x - 8 = 8x^3 - 24x^2 + 24x - 8$

iv. $(2a-3z)^3$
$= (2a)^3 - 3(2a)^2 \cdot 3z + 3 \cdot 2a(3z)^2 - (3z)^2$
$= 8a^2 - 9 \cdot 2^2a^2z + 6a3^2z^2 - 9z^2$
$= 8a^2 - 9 \cdot 4a^2z + 6 \cdot 9az^2 - 9z^2$
$= 8a^2 - 36a^2z + 54az^2 - 9z^2$

v. $(3z\omega - 3\alpha\beta)^3$
$= (3z\omega)^3 - 3(3z\omega)^2 \cdot 3\alpha\beta + 3 \cdot 3z\omega \cdot (3\alpha\beta)^2 - (3\alpha\beta)^3$
$= 27z^3\omega^3 - 9 \cdot 3^2z^2\omega^2\alpha\beta + 9z\omega \cdot 3^2\alpha^2\beta^2 - 27\alpha^3\beta^3$
$= 27z^3\omega^3 - 9 \cdot 9z^2\omega^2\alpha\beta + 9z\omega \cdot 9\alpha^2\beta^2 - 27\alpha^3\beta^3$
$= 27z^3\omega^3 - 81z^2\omega^2\alpha\beta + 36z\omega\alpha^2\beta^2 - 27\alpha^3\beta^3$

vi. $\left(5\alpha - \frac{1}{5}\right)^3 = (5\alpha)^3 - 3(5\alpha)^2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot 5\alpha \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3$
$= 125\alpha^3 - \frac{3}{5} \cdot 5^2\alpha^2 + 15\alpha\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} = 125\alpha^3 - \frac{3}{5} \cdot 25\alpha^2 + 15\alpha\frac{1}{25} - \frac{1}{125}$
$= 125\alpha^3 - 15\alpha^2 + \frac{3}{5}\alpha - \frac{1}{125}$

Άσκηση 10-Λύση

i. $(x+3+y)^2 = x^2+3^2+y^2+2x\cdot 3+2xy+2\cdot 3y$
$= x^2+9+y^2+6+2xy+6y$

ii. $(x-z+\beta)^2 = x^2+z^2+\beta^2-2xz-2z\beta+2x\beta$

iii. $(2\alpha+3\beta+2\gamma)^2$
$= (2\alpha)^2+(3\beta)^2+(2\gamma)^2+2\cdot 2\alpha\cdot 3\beta+2\cdot 3\beta\cdot 2\gamma+2\cdot 2\alpha\cdot 2\gamma$
$= 4\alpha^2+9\beta^2+4\gamma^2+12\alpha\beta+12\beta\gamma+8\alpha\gamma$

iv. $(3x-2y+3z)^2$
$= (3x)^2+(2y)^2+(3z)^2-2\cdot 3x\cdot 2y-2\cdot 2y\cdot 3z+2\cdot 3x\cdot 3z$
$= 9x^2+4y^2+9x^2-12xy-12yz+18xz$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

i. $(2x+4y)^2-(x-2)(x+2)-(2y)^2$
$= (2x)^2+2\cdot 2x\cdot 4y+(4y)^2-(x^2-2^2)-4y^2$
$= 4x^2+16xy+16y^2-x^2+4-4y^2$
$= (4-1)x^2+(16-4)y^2+16xy+4$
$= 3x^2+12y^2+16xy+4$

ii. $-2(3x-1)^2-(3x-1)\cdot(3x-1)-5x$
$= -2[(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 1+1^1]-(3x-1)^2-5x$
$= -2(9x^2-6x+1)-[(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 1+1^1]-5x$
$= -18x^2+12x-2-(9x^2-6x+1)-5x$
$= -18x^2+12x-2-9x^2+6x-1-5x$
$= (-18-9)x^2+(12+6-5)x-3 = -27x^2+13x-3$

iii. $(2x-2)(2x+2)(4x^2+4) = [(2x)^2-2^2]\cdot(4x^2+4)$
$= (4x^2-4)(4x^2+4) = (4x^2)^2-4^2 = 16x^4-16$

iv. $(2x+2y+3z)-(2x+2y)^2-3z^2$
$= 2x+2y+3z-[(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 2y+(2y)^2]-3z^2$
$= 2x+2y+3z-(4x^2+8xy+4y^2)-3z^2$
$= 2x+2y+3z-4x^2-8xy-4y^2-3z^2$
$= -4x^2-4y^2-3z^2 2x+2y+3z-8xy$

Άσκηση 2-Λύση

i. $\left(\sqrt{2}-x\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+x\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}-x\sqrt{2}\right)^2$
$= \sqrt{2}^2-\left(x\sqrt{2}\right)^2-\left[\sqrt{2}^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot x\sqrt{2}+\left(x\sqrt{2}\right)^2\right]$
$= 2-2x^2-\left(2-2\sqrt{2}^2x+2x^2\right)$
$= 2-2x^2-(2-2\cdot 2x+2x^2)$
$= 2-2x^2-2+4x-2x^2$
$= (-2-2)x^2-2$
$= -4x^2-4$

ii. $(x+2)\cdot(x^2-2x+2^2)-(x-2)\cdot(x^2+2x+2^2)$
$= (x+2)\cdot(x^2-2x+4)-(x-2)\cdot(x^2+2x+4)$
$= x^3-2x^2+x\cdot 4+2x^2-4x+8-x^3-2x^2-x\cdot 4+2\cdot x^2+4x+8$
$= x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8-x^3-2x^2-4x+2x^2+4x+8$
$= (1-1)x^3+(-2+2-2+2)x^2+(+4-4+4-4)x+16$
$= 0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+16 = 16$

iii. $(2x+3y)^3-(2x-3y)^3-xy\cdot(x+y+2)$
$= 8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3-[8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3]-x^2y-xy^2-2xy$
$= 8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3-(8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3)-x^2y-xy^2-2xy$
$= 0\cdot x^3+54y^3-71x^2y-xy^2-2xy = 54y^3-71x^2y-xy^2-2xy$

Άσκηση 3-Λύση

i. $\left(3\alpha-\frac{\beta}{2}\right)^3=(3\alpha)^3-3\cdot(3\alpha)^2\cdot\frac{\beta}{2}+3\cdot 3\alpha\cdot\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2}\right)^3$

$=3^3\alpha^3-\frac{3}{2}3^2\alpha^2\beta+9\alpha\frac{\beta^2}{4}-\frac{\beta^3}{2^3}=27\alpha^3-\frac{3}{2}9\alpha^2\beta+\frac{9}{4}\alpha\beta^2-\frac{\beta^3}{8}$

$=27\alpha^3-\frac{27}{2}\alpha^2\beta+\frac{9}{4}\alpha\beta^2-\frac{\beta^3}{8}$

ii. $(2\alpha^2-2)^3=(2\alpha^2)^3-3\cdot(2\alpha^2)^2\cdot 2+3\cdot 2\alpha^2\cdot 2^2-2^3$

$=2^3\alpha^6-6\cdot 4\cdot\alpha^4-6\alpha^2\cdot 4-8=8\alpha^6-24\alpha^4-24\alpha^2-8$

iii. $(3x^3-3y^3)^3$

$=(3x^3)^3-3(3x^3)^2\cdot 3y^3+3\cdot 3x^3(3y^3)^2-(3y^3)^3$

$=3^3x^9-9\cdot 3^2x^6y^3+9x^3\cdot 3^3y^6-3^3y^9$

$=9x^9-9\cdot 9x^6y^3+9x^3\cdot 27y^6-27y^9$

$=9x^9-81x^6y^3+243x^3y^6-27y^9$

iv. $(-2x-2y)^3$

$=(-2x)^3-3(-2x)^2\cdot(-2y)+3\cdot(-2x)(-2y)^2-(-2y)^3$

$=-2^3x^3+6\cdot 2^2x^2y-6x2^2y^2—2^3y^3$

$=-8x^3+6\cdot 4x^2y-6\cdot 4xy^2+8y^3$

$=-8x^3+24x^2y-24xy^2+8y^3$

Άσκηση 4-Λύση

Στην παράσταση αντικαθιστούμε $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ και $y = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ και εκτελούμε τις πράξεις.

$$A = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$$
$$= \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + 2\left(\sqrt{2}^2 - \sqrt{3}^2\right) + \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}^2$$
$$= 2 + 3 + 2(2 - 3) + 2 + 3 = 2 + 3 + 4 - 6 + 2 + 3 = 8$$

Άσκηση 5-Λύση

Εκτελούμε πράξεις στην σχέση που μας δίνεται και θα καταλήξουμε σε κάτι που ισχύει πάντα.

$$(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 4\alpha\beta$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta \geq 0$$

$$\alpha^2 + (2 - 4)\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$$

$$(\alpha - \beta)^2 \geq 0$$

Η τελευταία σχέση ισχύει πάντα, καθώς κάθε ποσότητα υψωμένη σε άρτια δύναμη είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση του 0.

Άσκηση 6-Λύση

$A = x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = (x+y)^2 - 2xy$

$= 4^2 - 2 \cdot 5 = 16 - 10 = 6$

$B = x^3 + y^3 = (x+y) \cdot (x^2 - xy + y^2) = (x+y)[(x^2+y^2) - xy] = 4 \cdot (6-5) = 4$

Άσκηση 7-Λύση

i. $x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2 = x^2 + 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} - 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 2^2 - 2 = 2$

ii. $x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 + 2 = x^2 - 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$

Άσκηση 8-Λύση

$Q(x) = (a-2)(a^2 + 2a + 4) - (a-2)^3 - 6a^2 + 12a + 5$

$= a^3 + 2a^2 + 4a - 2a^2 - 4a - 8 - (a^3 - 6\alpha^2 + 3\alpha \cdot 2^2 - 2^3) - 6a^2 + 12a + 5$

$= a^3 - 6a^2 + 12a - 3 - a^3 + 6a^2 - 12a + 8$

$= 0 \cdot a^3 + 0a^2 + 0 \cdot a + 5 = 5$

Άσκηση 9-Λύση

i. $(a-2)\cdot(a+2)\cdot(a^2-2x+2)\cdot(a^2+2x+2)$
$=(a^2-2^2)\cdot[(a^2+2)-2x][(a^2+2)+2x]$
$=(a^2-4)[(a^2+2)^2-(2x)^2]$
$=(a^2-4)[(a^2)^2+2a^2\cdot 2+2^2-4x^2]$
$=a^2\cdot a^4+a^2\cdot 4a^2+a^2\cdot 4-a^2\cdot 4x^2-4a^4-4\cdot 4a^2-4\cdot 4+4\cdot 4x^2$
$=a^6+4a^4+4a^2-4a^4-4a^4-16a^2-16+16x^2$
$=a^6-4a^4-12a^2-16+16x^2$

ii. $(\alpha+2)\cdot(\alpha+3)=\alpha\cdot\alpha+3\alpha+2\alpha+2\cdot 3=\alpha^2+5\alpha+6$

iii. $(\alpha+1)\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha^2+1)\cdot(\alpha^4+1)=(\alpha^2-1^1)\cdot(\alpha^2+1)\cdot(\alpha^4+1)$
$=(\alpha^2-1)\cdot(\alpha^2+1)\cdot(\alpha^4+1)=[(\alpha^2)^2-1^1]\cdot(\alpha^4+1)=\alpha^8-1$

Άσκηση 10-Λύση

i. $(x-y)(x+y)-(2x-y)(2x+y)+3x^2=x^2-y^2-[(2x)^2-y^2]+3x^2$
$=x^2-y^2-4x^2+y^2+3x^2=0\cdot x^2+0\cdot y^2=0$

ii. $x(x+1)(x-1)-(x-1)^2-x^3=-1-x(x-1)\Rightarrow$
$x(x^2-1^2)-(x^2-2x+1^1)-x^3=-1-x^2+x\Rightarrow$
$x(x^2-1)-(x^2-2x+1)-x^3=-1-x^2+x\Rightarrow$
$x^3-x-x^2+2x-1-x^3=-1-x^2+x\Rightarrow$
$(1-1)x^3-x^2+(-1+2)x-1=-x^2+x-1\Rightarrow$
$0\cdot x^3-x^2+x-1=-x^2+x-1\Rightarrow$
$-x^2+x-1=-x^2+x-1$

iii. $(2x^2-1)-2(2x^3-1)(2x^3+1)-1=-6x^2(2x^2-1)\Rightarrow$
$2x^2-1-2[(2x^3)^2-1^1]-1=-6x^2\cdot 2x^2+6x^2\Rightarrow$
$2x^2-1-2(4x^6-1)-1=-12x^4$

iv. $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$
$=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2=(2+2)\alpha\beta=4\alpha\beta$

v. $4\alpha(\alpha-1)-(2\alpha-1)^2=4\alpha\cdot\alpha-4\alpha-[(2\alpha)^2-2\cdot2\alpha+1^1]$
$=4\alpha^2-4\alpha-(4\alpha^2-4\alpha+1)=4\alpha^2-4\alpha-4\alpha^2+4\alpha-1=-1$

Άσκηση 11-Λύση

i. $(\alpha^2-3)^2-(\alpha-1)(\alpha^3-6\alpha)=\alpha(\alpha^2-6)+9\Rightarrow$
$(\alpha^2)^2-2\alpha^2\cdot3+3^2-(\alpha\cdot\alpha^3-\alpha\cdot6\alpha-\alpha^3+6\alpha)=\alpha\cdot\alpha^2-\alpha\cdot6+9\Rightarrow$
$\alpha^4-6\alpha^2+9-(\alpha^4-6\alpha^2-\alpha^3+6\alpha)=\alpha^3-6\alpha+9\Rightarrow$
$\alpha^4-6\alpha^2+9-\alpha^4+6\alpha^2+\alpha^3-6\alpha=\alpha^3-6\alpha+9\Rightarrow$
$\alpha^3-6\alpha+9=\alpha^3-6\alpha+9$

ii. $(a^2+1)(x^2+4)-(2a-x)^2=(ax+2)^2\Rightarrow$
$a^2x^2+a^24+x^2+4-[(2a)^2-2\cdot2ax+x^2]=(ax)^2+2ax\cdot2+2^2\Rightarrow$
$a^2x^2+0\cdot a^2+0\cdot x^2+4ax+4=a^2x^2+4ax+4\Rightarrow$
$a^2x^2+4ax+4=a^2x^2+4ax+4$

iii. $(\alpha+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3-6\alpha^2\beta$
$=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-(\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3)-6\alpha^2\beta$
$=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-\alpha^3+3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+\beta^3-6\alpha^2\beta$
$=0\alpha^2+0\alpha^2\beta+0\alpha\beta^2+2\beta^3=2\beta^3$

iv. $2\alpha(2\alpha-1)^2-(2\alpha-1)^3-4\alpha^2$
$=2\alpha[(2\alpha)^2-2\cdot2\alpha\cdot1+1^1]-[(2\alpha)^3-3(2\alpha)^2\cdot1+3\cdot2\alpha\cdot1^3-1^3]-4\alpha^2$
$=8\alpha^3-8\alpha^2+2\alpha-8\alpha^3+12\alpha^2-6\alpha+1-4\alpha^2=0\cdot\alpha^3+0\alpha^2-4\alpha+1$
$=-4a+1$

v. $(a^2-1)^3-a^2(a^2+1)^2=a^2(2-5a^2)-1 \Rightarrow$

$(a^2)^3-3(a^2)^2+3a^2-1^3-a^2[(a^2)^2+2a^2+1^2]=2a^2-5a^2a^2-1 \Rightarrow$

$a^6-3a^4+3a^2-1-a^2a^4-a^2 2a^2-a^2 1=2a^2-5a^4-1 \Rightarrow$

$2a^2-5a^4-1=2a^2-5a^4-1$

Άσκηση 12-Λύση

i. $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

$=\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3-(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2-\alpha\beta^2-\beta^3)$

$=\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3-\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+\alpha\beta^2+\beta^3$

$=0\cdot\alpha^3+0\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+2\beta^3=2\beta^3$

ii. $(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)=(x^2-2^2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$

$=(x^2-4)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$

$=[x^4-2x^3+(4-4)x^2+8x-16](x^2+2x+4)=x^6-64$

iii. $(2x-1)^3-(2x-1)(1+4x+4x^2)-8x$

$=8x^3-3\cdot 4x^2+6x-1-(2x+8x^2+8x^3-1-4x-4x^2)-8x$

$=8x^3-3\cdot 4x^2+6x-1-2x-8x^2-8x^3+1+4x+4x^2-8x=-16x^2$

iv. $(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2=4\alpha\beta+4\beta\gamma$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+4\alpha\beta+4\beta\gamma+2\alpha\gamma-a^2-\beta^2-\gamma^2-2\alpha\gamma=4\alpha\beta+4\beta\gamma \Rightarrow$

$4\alpha\beta+4\beta\gamma=4\alpha\beta+4\beta\gamma$

v. $(x^2-x-1)^2-(x-1)^2(x+1)^2=-x(2x^2-x-2) \Rightarrow$

$x^4+x^2+1^2-2x^3-2x^2+2x-[(x-1)(x+1)]^2=-2x^3+x^2+2x \Rightarrow$

$x^4-2x^3-x^2+1+2x-(x^2-1)^2=-2x^3+x^2+2x \Rightarrow$

$x^4-2x^3-x^2+1+2x-(x^4-2x^2+1)=-2x^3+x^2+2x \Rightarrow$

$2x^3+x^2+2x=2x^3+x^2+2x$

1.6. Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

Λύσεις

Ερώτηση Κατανόησης

Άσκηση 1-Λύση

i. Σωστό

ii. Λάθος. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x + 3)^3$

iii. Σωστό

iv. Σωστό

v. Σωστό

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

i. $4\alpha + 4\beta = 4(\alpha + \beta)$

ii. $10\alpha - 10\beta = 10(\alpha - \beta)$

iii. $4\alpha + 8\beta = 4(\alpha + 2\beta)$

iv. $10\alpha - 20\beta = 10(\alpha - 2\beta)$

v. $\alpha^2 + \alpha = \alpha(\alpha + 1)$

vi. $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = \alpha(\alpha^2 + \alpha + 1)$

Άσκηση 2-Λύση

i. $12\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 = 6\alpha\beta(2\alpha + \beta)$

ii. $4\alpha^2\beta\gamma + 6\alpha\beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma = 2\alpha\beta\gamma(2\alpha + 3\beta\gamma + 1)$

iii. $12\alpha - 24\beta - 36\gamma = 12(\alpha - 2\beta - 3\gamma)$

iv. $\alpha^2\sqrt{2} + \alpha^3\sqrt{3} = \alpha^2(\sqrt{2} + \alpha\sqrt{3})$

v. $10\alpha^4 - 20\alpha^3 + 30\alpha^2 - 40\alpha + 10 = 10(\alpha^4 - 2\alpha^3 + 3\alpha - 4\alpha + 1)$
$= 10(a^4 - 2a^3 - a + 1)$

Άσκηση 3-Λύση

i. $\alpha(\beta + 5) + 5(\beta + 5) = (\beta + 5)(\alpha + 5)$

ii. $8\gamma(\beta - 4) + 5\delta(4 - \beta) = 8\gamma(\beta - 4) - 5(\beta - 4) = (\beta - 4)(8\gamma - 5)$

iii. $4\alpha(\beta + 8) - 5\gamma(\beta + 8) = (\beta + 8)(4\alpha - 5\gamma)$

iv. $10x^2(y - 2) - 5x(2 - y) = 10x^2(y - 2) + 5x(y - 2) = (y - 2)(10x^2 + 5x)$
$= (y - 2)x(10x + 5)$

v. $5x(\beta + 5) + 10y(\beta + 5) - 15z(\beta + 5) = (\beta + 5)(5x + 10y - 15z)$
$= 5(\beta + 5)(x + 5y - 3z)$

Άσκηση 4-Λύση

i. $\delta x + \delta y + 8x + 8y = \delta(x+y) + 8(x+y) = (x+y)(\delta+8)$

ii. $x^2 + xy - x - y = x(x+y) - (x+y) = (x+y)(x-1)$

iii. $20x - xy + 20y - y^2 = x(20-y) + y(20-y) = (20-y)(x+y)$

iv. $y^2 - a^2x + axy - ay = y^2 + axy - a^2x - ay = y(y+ax) - a(ax+y)$
$= (ax+y)(y-a)$

Άσκηση 5-Λύση

i. $25 - y^2 = 5^2 - y^2 = (5-y)(5+y)$

ii. $x^4 - 100 = (x^2)^2 - 10^2 = (x^2-10)(x^2+10) = \left(x+\sqrt{10}\right)(x^2+10)$

iii. $x^2y^4 - z^2 = (xy^2)^2 - z^2 = (xy^2 - z)(xy^2 + z)$

iv. $81x^2 - 16y^2 = (9x)^2 - (4y)^2 = (9x-4y)(9x+4y)$

v. $\frac{1}{36} - y^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{1}{6} - y\right)\left(\frac{1}{6} + y\right)$

vi. $(x+5)^2 - x^2 = (x+5-x)(x+5+x) = 5(2x+5)$

vii. $64(2x+8)^2 - 100(2x+8)^2 = (16x+64)^2 - (20x+80)^2$
$= [16x+64-(20x+80)] \cdot (16x+64+20x+80)$
$= (-4x-16)(36x+144)$

viii. $x^2y^4z^6 - x^6y^4z^2 = (xy^2z^3)^2 - (x^3y^2z)^2 = (xy^2z^3 - x^3y^2z)(xy^2z^3 + x^3y^2z)$

ix. $x^2 - 3 = x^2 - \sqrt{3}^2 = \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$

Άσκηση 6-Λύση

i. $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2 \cdot 6x + 6^2 = (x+6)^2$

ii. $36x^2 + 24x + 4 = (6x)^2 + 2 \cdot 6 \cdot 2x + 2^2 = (6x+2)^2$

iii. $x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 = (x+5)^2$

iv. $4x^2 - 24xy^2 + 36y^4 = 4[x^2 - 2 \cdot 3xy^2 + (3y^2)^2] = 4(x - 3y^2)^2$

Άσκηση 7-Λύση

i. $y^2 + 6y + 8 = y^2 + (2+4)y + 2 \cdot 4 = (y+2)(y+4)$

ii. $y^2 + 5y + 6 = y^2 + (2+3)y + 2 \cdot 3 = (y+2)(y+3)$

iii. $x^2 + 5x + 4 = x^2 + (1+4)x + 1 \cdot 4 = (x+1)(x+4)$

iv. $x^2 - 3x + 2 = x^2 + (-1-2) + 1 \cdot 2 = (x-1)(x-2)$

Άσκηση 8-Λύση

i. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = x^3 + 3^3 + 9x^2 + 27x$
$= (x+3)(x^2 - 3x + 9) + 9x(x+3) = (x+3)(x^2 - 3x + 9 + 9x)$
$= (x+3)(x+3)^2 = (x+3)^3$

ii. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 - 1 - 3x^2 + 3x$
$= (x-1)(x^2 + x + 1) - 3x(x-1) = (x-1)(x^2 + x + 1 - 3x)$
$= (x-1)(x-1)^2 = (x-1)^3$

iii. $y^2 + 5y - 6 = y^2 + (6-1)y - 1 \cdot 6 = (y+6)(y-1)$

iv. $8x^3-12x^2+6x-1=(2x)^3-1-12x^2+6x$

$=(2x-1)(4x^2+2x+1)-6x(2x-1)$

$=(2x-1)(4x^2+2x+1-6x)=(2x-1)(2x-1)^2=(2x-1)^3$

Άσκηση 9-Λύση

i. $x^3+6x^2+12x+8=x^3+2^3+6x^2+12x$

$=(x+2)(x^2-2x+4)+6x(x+2)$

$=(x+2)(x^2-2x+4+6x)=(x+2)(x+2)^2=(x+2)^3$

ii. $(x-y-2)^2-x+y+2=(x-y-2)^2-(x-y-2)$

$=(x-y-2)(x-y-2-1)=(x-y-2)(x-y-3)$

iii. $x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-3x+9)$

iv. $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)=(x-2)(x+2)^2$

Άσκηση 10-Λύση

i. $y^2-5y+6=y^2+(-2-3)y+2\cdot 3=(y-2)(y-3)$

ii. $(x+2)^2-3(-x-2)+x(-x-2)=(x+2)^2+3(x+2)-x(x+2)$

$=(x+2)(x+2+3-x)=5(x+2)$

iii. $(25x-5y)\cdot(y-2)-(5x-10y)\cdot(2-y)$

$=(25x-5y)\cdot(y-2)+(5x-10y)\cdot(y-2)$

$=(y-2)(25x-5y+5x-10y)=15(y-2)(2x-y)$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

i. $8a + 8\beta = 8(\alpha + \beta)$

ii. $-9a - 9\beta = -9(\alpha + \beta)$

iii. $-10\alpha - 10\beta + 10\gamma = -10(\alpha + \beta + \gamma)$

iv. $12a + 12\beta = 12(\alpha + \beta)$

v. $20a - 20 = 20(a - 1)$

vi. $7a^4 + 10a^3 = a^3(7a + 10)$

Άσκηση 2-Λύση

i. $3\alpha^4\beta^2 + 4\alpha^3\beta^3 - 5\alpha^2\beta^1 = \alpha^2\beta(3\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2 - 5)$

ii. $\gamma(3\alpha - 2\beta) - \delta(3\alpha - 2\beta) = (3\alpha - 2\beta)(\gamma - \delta)$

iii. $(\alpha - \beta)^2 - x(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta - x)$

iv. $(x - 2y)^2 - (2y - x)^2 - 4(2y - x)$

$= (x - 2y)^2 - (x - 2y)^2 + 4(x - 2y)$

$= (x - 2y)(x - 2y - x + 2y + 4) = 4(x - 2y)$

Άσκηση 3-Λύση

i. $5x + 5y + \beta x + \beta y = 5(x + y) + \beta(x + y) = (x + y)(5 + \beta)$

ii. $x^4 - 3x^3 + 6x - 18 = x^3(x - 3) + 6(x - 3) = (x^3 + 6)(x - 3)$

iii. $5x + 5y - \delta x - \delta y = 5(x + y) - \delta(x + y) = (x + y)(5 - \delta)$

iv. $x + xy + y + 1 = x(1 + y) + (1 + y) = (1 + y)(x + 1)$

v. $x^2 + \sqrt{2}x + x + \sqrt{2} = x\left(x + \sqrt{2}\right) + (x + \sqrt{2}) = (x + 1)(x + \sqrt{2})$

Άσκηση 4-Λύση

i. $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$

ii. $a^2x^2 - \beta^2y^2 = (\alpha x)^2 - (\beta y)^2 = (\alpha x - \beta y)(\alpha x + \beta y)$

iii. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$

iv. $x^4 - \beta^4 = (x^2)^2 - (\beta^2)^2 = (x^2 - \beta^2)(x^2 + \beta^2)$
$= (x - \beta)(x + \beta)(x^2 + \beta^2)$

v. $25x^2 - 2 = (5x)^2 - \sqrt{2}^2 = \left(5x - \sqrt{2}\right)\left(5x + \sqrt{2}\right)$

vi. $(x - y)^2 - 4x^2 = (x - y)^2 - (2x)^2 = (x - y - 2x)(x - y + 2x)$
$= (-x - y)(3x - y)$

Άσκηση 5-Λύση

i. $9x^2 + 18x + 9 = (3x)^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3^2 = (3x+3)^2$

ii. $4x^2 + 8xy + 4y^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2xy + (2y)^2 = (2x+2y)^2$

iii. $x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2)^2 + 2 \cdot 4x^2 + 4^2 = (x^2+4)^2$

iv. $x - 10\sqrt{x} + 25 = \sqrt{x}^2 - 2 \cdot 5\sqrt{x} + 5^2 = (\sqrt{x} - 5)^2$

v. $x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$

vi. $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$

vii. $2x^3 - 250 = 2(x^3 - 125) = 2(x^3 - 5^3) = 2(x-5)(x^2 + 5x + 25)$

Άσκηση 6-Λύση

i. $y^2 + 4y + 3 = y^2 + (1+3)y + 1 \cdot 3 = (y+1)(y+3)$

ii. $y^2 - 7y + 12 = y^2 + (-3-4)y - 3 \cdot (-4) = (y-3)(y-4)$

iii. $y^2 + 2y - 8 = y^2 + (4-2)y - 4 \cdot 2 = (y+4)(y-2)$

iv. $y^2 + y - 2 = y^2 + (2-1)y - 2 \cdot 1 = (y+2)(y-1)$

Άσκηση 7-Λύση

i. $5(2x+2y)-4x-4y=5(2x+2y)-2(2x+2y)$
$=(2x+2y)(5-2)=3(2x+2y)$

ii. $5x^2-3x+5\beta x-3\beta-5x+3=x(5x-3)+\beta(5x-3)-(5x-3)$
$=(5x-3)(x+\beta-1)$

iii. $(3x-2)^2-25x^2=(3x-2)^2-(5x)^2=(3x-2-5x)(3x-2+5x)$
$=(-2x-2)(8x-2)$

iv. $x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$

Άσκηση 8-Λύση

i. $x^6-1=(x^3)^2-1^2=(x^3-1)(x^3+1)$
$=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

ii. $x^6+1=(x^2)^3+1^3=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

iii. $(x-y)\cdot(x^2-z^2)-(x-z)\cdot(x^2-y^2)$
$=(x-y)(x-z)(x+z)-(x-z)(x-y)(x+y)$
$=(x-y)(x-z)(x+z+z+y)$
$=(x-y)(x-z)(x+y+2z)$

iv. $(x-2)^2-6(x-2)+9=(x-2)^2-2\cdot3(x-2)+3^2$
$=(x-2-3)^2=(x-5)^2$

Άσκηση 9-Λύση

i. $2y^2 - 14y + 24 = 2(y^2 - 7y + 12) = 2[y^2 + (-3-4)y - 3\cdot(-4)]$
$= 2(y-3)(y-4)$

ii. $25x^2 - (x^2-16)^2 = (5x)^2 - (x^2-16)^2$
$= (5x - x^2 - 16)(5x + x^2 - 16)$
$= (-x^2 + 5x - 16)(x^2 + 5x - 16)$

iii. $y^2 - 2y - 1 = y^2 + \left(-1-\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right)y + \left(-1-\sqrt{2}\right)\left(-1+\sqrt{2}\right)$
$= \left(y-1-\sqrt{2}\right)\left(y-1+\sqrt{2}\right)$

iv. $y^2 - y - 2 = y^2 + (-2+1)y - 2\cdot 1 = (y-2)(y+1)$

Άσκηση 10-Λύση

i. $\alpha\beta(x^2+y^2) + xy(a^2+\beta^2) = \alpha\beta x^2 + \alpha\beta y^2 + xya^2 + xy\beta^2$
$= \alpha\beta x^2 + xya^2 + \alpha\beta y^2 + xy\beta^2 = \alpha x(\beta x + y a) + \beta y(a y + x\beta)$
$= (\beta x + y\alpha)(\alpha x + \beta y)$

ii. $(x-\alpha)(y-\beta) - (x-\beta)(y-\alpha)$
$= xy - \beta x - \alpha y + \alpha\beta - (-a x + xy - \beta y + \alpha\beta)$
$= -\beta x + \beta y - \alpha y + \alpha x = \beta(-x+y) - a(y-x) = (y-x)(\beta-\alpha)$

iii. $(x+1)(x^3+1) - 2x(x^2+1) = x^4 + x + x^3 + 1 - 2x^3 - 2x$
$= x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x-1) - (x-1)$
$= (x-1)(x^3-1) = (x-1)(x-1)(x^2+x+1)$
$= (x-1)^2(x^2+x+1)$

iv. $(\alpha-\beta)^2+\alpha(\beta-1)^2-\beta(\alpha-1)^2$

$=(\alpha-\beta)^2+\alpha(\beta^2-2\beta+1)-\beta(\alpha^2-2\alpha+1)$

$=(\alpha-\beta)^2+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2+\alpha-\beta$

$=(\alpha-\beta)^2+\alpha\beta(\beta-\alpha)+(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-\alpha\beta+1)$

$=(\alpha-\beta)[(\alpha+1)-\beta(\alpha+1)]$

$=(\alpha-\beta)(\alpha+1)(1-\beta)$

vi. $\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)$

$=\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2\gamma-\beta\gamma^2-\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2$

$=\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta\gamma(\beta-\gamma)-\alpha(\beta^2-\gamma^2)$

$=\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta\gamma(\beta-\gamma)-\alpha(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)$

$=(\beta-\gamma)[\alpha^2+\beta\gamma-\alpha(\beta+\gamma)]$

$=(\beta-\gamma)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta\gamma-\alpha\gamma)$

$=(\beta-\gamma)[\alpha(\alpha-\beta)-\gamma(\alpha-\beta)]$

$=(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)$

vii. $\alpha\beta(\alpha-\beta)+\beta\gamma(\beta-\gamma)+\gamma\alpha(\gamma-\alpha)$

$=\alpha^2\beta-\alpha^2\gamma-\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma-\beta\gamma^2$

$=\alpha^2(\beta-\gamma)-\alpha(\beta^2-\gamma^2)+\beta\gamma(\beta-\gamma)$

$=\alpha^2(\beta-\gamma)-\alpha(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)+\beta\gamma(\beta-\gamma)$

$=(\beta-\gamma)[\alpha^2-\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma]$

$=(\beta-\gamma)(\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma)$

$=(\beta-\gamma)[\alpha(\alpha-\beta)-\gamma(\alpha-\beta)]$

$=(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$

1.8 ΕΚΠ και ΜΚΔ ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων

Λύσεις

Ερώτηση Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης – Απάντηση

i. Σωστό
ii. Σωστό
iii. Σωστό
iv. Σωστό

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

i. $A = 2x \qquad B = 4x^2 \qquad \Gamma = 8x^3$

Άρα έχουν: Ε.Κ.Π.: $8x^3$ και Μ.Κ.Δ.: $2x$

ii. $A = 4x^3y^2 \qquad B = 8x^2y^4 \qquad \Gamma = 12xy$

Άρα έχουν: Ε.Κ.Π.: $24x^3y^4$ και Μ.Κ.Δ.: $4xy$

iii. $A = 4x(x-y) \qquad B = 2(x-y)(x+y)$

Άρα έχουν:

Ε.Κ.Π.: $4x(x-y)(x+y)$ και Μ.Κ.Δ.: $2(x-y)$

iv. $A = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ $B = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

Άρα έχουν:

Ε.Κ.Π.: $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$ και Μ.Κ.Δ.: $(x-1)$

Άσκηση 2 - Λύση

i. $A = 4x^3y^2$ $B = 8x^2y^4$ $\Gamma = 12xy$

Άρα έχουν:

Ε.Κ.Π.: $24x^3y^4$ και Μ.Κ.Δ.: $4xy$

ii. $A = (x+y)(x+z)$ $B = (x+y)(y+z)$ $\Gamma = (x+z)(y+z)$

Άρα έχουν:

Ε.Κ.Π.: $(x+y)(x+z)(y+z)$ και Μ.Κ.Δ.: 1

iii. $A = (x+y)$ $B = (x+y)^2$ $\Gamma = (x+y)(x-y)$

Άρα έχουν:

Ε.Κ.Π.: $(x+y)^2(x-y)$ και Μ.Κ.Δ.: $(x+y)$

iv. $A = (x-y)$ $B = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

Άρα έχουν:

Ε.Κ.Π.: $(x-y)^2$ και Μ.Κ.Δ.: $(x-y)$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

i. $A = 2x^4y$ $B = 4x^2y^2$ $\Gamma = (4xy^2)^2 = 16x^2y^4$

Άρα έχουν:

Ε.Κ.Π.: $16x^4y^4$ και Μ.Κ.Δ.: $2x^2y$

ii. $A = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

$B = x^2 + 6x + 8 = (x+4)(x+2)$

$\Gamma = (x^2 + 2x - 8)(x+2) \quad = (x+4)(x-2)(x+2)$

Άρα έχουν:

Ε.Κ.Π.: $(x-2)(x+2)(x+4)$ και Μ.Κ.Δ.: $(x+2)$

iii. $A = 4x^4y^2$ $\quad και \quad$ $B = 4x^6y^4 - 16x^4y^2 = 4x^4y^2(xy-4)(xy+4)$

Άρα έχουν:

Ε.Κ.Π.: $4x^4y^2(xy-4)(xy+4)$ και Μ.Κ.Δ.: $4x^4y^2$

iv. $A = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ $B = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

Άρα έχουν:

Ε.Κ.Π.: $(x-2)^2(x+2)$ και Μ.Κ.Δ.: $(x-2)$

Άσκηση 2-Λύση

i. $A = 3x - 3y = 3(x - y)$

$B = x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2$

$\Gamma = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

Άρα έχουν:

Ε.Κ.Π.: $3(x + y)(x - y)^2$ και Μ.Κ.Δ.: $(x - y)$

ii. $A = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

$B = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$\Gamma = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$

Άρα έχουν:

Ε.Κ.Π.:$(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 2)$ και Μ.Κ.Δ.: $(x - 1)$

iii. $A = x^3 - 4x = x(x^2 - 4 = x(x - 2)(x + 2)$
$B = x^2y - 4xy + 4y = y(x^2 - 4x + 4 = y(x - 2)^2$

$\Gamma = x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

Άρα έχουν:

Ε.Κ.Π.:$xy(x + 2)(x - 2)^2(x^2 + 2x + 4)$ και Μ.Κ.Δ.: $(x - 2)$

iv. $A = x^2 + xy = x(x + y)$

$B = 2x^2 - 2y^2 = 2(x - y)(x + y)$

$\Gamma = y^2 + xy = y(y + x)$

Άρα έχουν:

Ε.Κ.Π.:$2xy(x - y)(x + y)$ και Μ.Κ.Δ.: $(x + y)$

1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

Λύσεις

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

i. Θα πρέπει $x \neq 0$

ii. Θα πρέπει $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

iii. Θα πρέπει $2x - 2 \neq 0 \Rightarrow 2(x-1) \neq 0 \Rightarrow x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

iv. Θα πρέπει $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

και $\frac{x-2}{x+2} \neq 0 \Rightarrow x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

v. Θα πρέπει $(x+2) \cdot (y-4) \cdot (z+8) \neq 0$

$x + 2 \neq 0$ και $y - 4 \neq 0$ και $z + 8 \neq 0 \Rightarrow$

$x \neq -2$ και $y \neq 4$ και $z \neq -8$

Άσκηση 2-Λύση

i. $\frac{10x}{20x} = \frac{1}{2}$

ii. $\frac{25x}{100x^2} = \frac{1}{4x}$

iii. $\frac{x-4}{4-x} = \frac{x-4}{-(x-4)} = -1$

iv. $\frac{(x-4)^2}{4-x} = \frac{(x-4)^2}{-(x-4)} = -(x-4) = 4-x$

v. $\frac{5x-5}{x^2-1} = \frac{5(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{5}{x+1}$

Άσκηση 3-Λύση

i. $\frac{4xy^2}{16x^3y} = \frac{y}{4x^2}$

ii. $\frac{(x+2)\cdot(x+8)}{x\cdot(x+2)\cdot(x+4)} = \frac{x+8}{x\cdot(x+4)}$

iii. $\frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x+3} = x-3$

iv. $\frac{4x+16}{x^2-16} = \frac{4(x+4)}{(x-4)\cdot(x+4)} = \frac{4}{x-4}$

v. $\frac{x^2-10x+16}{x^2+6x-16} = \frac{(x-8)\cdot(x-2)}{(x+8)\cdot(x-2)} = \frac{x-8}{x+8}$

Άσκηση 4-Λύση

i. $\frac{x^2-4x}{48x-4x^2}=\frac{x\cdot(x-4)}{4x\cdot(12-x)}=\frac{x-4}{4(12-x)}$

ii. $\frac{x^2+12x+36}{2x^2+12x}=\frac{(x+6)^2}{2x(x+6)}=\frac{x+6}{2x}$

iii. $\frac{x^2+7x+12}{x^2+x-12}=\frac{(x+3)\cdot(x+4)}{(x-3)\cdot(x+4)}=\frac{x+3}{x-3}$

iv. $\frac{x^2+14x+49}{x^2+9x+14}=\frac{(x+7)^2}{(x+7)\cdot(x+2)}=\frac{x+7}{x+2}$

v. $\frac{3x-2y}{9x^2-4y^2}=\frac{3x-2y}{(3x-2y)\cdot(3x+2y)}=\frac{1}{3x+2y}$

Άσκηση 5-Λύση

i. $\frac{x^3-8}{x^4-16}=\frac{x^3-2^3}{x^4-2^4}=\frac{(x-2)\cdot(x^2+2x+2^2)}{(x^2)^2-(2^2)^2}=\frac{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}{(x^2-4)\cdot(x^2+4)}=$

$\frac{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+4)}$

$=\frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)\cdot(x^2+4)}$

ii. $\frac{(x+5)^3-125}{x}=\frac{(x+5)^3-5^3}{x}=\frac{(x+5-5)\cdot[(x+5)^2+5(x+5)+5^2]}{x}=\frac{x\cdot(x^2+10x+25+5x+25+25)}{x}$

$=x^2+15x+75$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

i. Θα πρέπει $x \neq 0$

ii. Θα πρέπει $x - 2 \ \Rightarrow x \neq 2$

iii. Θα πρέπει $2x - 1 \neq 0 \ \Rightarrow 2x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

iv. Θα πρέπει $2x - 3y \neq 0 \ \Rightarrow 2x \neq 3y \ \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}y$

v. Θα πρέπει $x(x+1) \neq 0$

$\Rightarrow \ x \neq 0$ και $x + 1 \neq 0$

$\Rightarrow \ x \neq 0$ και $x \neq -1$

vi. Θα πρέπει $2x(y+2)^2 \neq 0$

$\Rightarrow \ 2x \neq 0$ και $(y+2)^2 \neq 0$

$\Rightarrow \ x \neq 0$ και $y + 2 \neq 0$

$\Rightarrow \ x \neq 0$ και $y \neq -2$

Άσκηση 2-Λύση

i. $\frac{2x-4}{x^2-2x} = \frac{2(x-2)}{x(x-2)} = \frac{2}{x}$

ii. $\frac{x^2+xy}{y^2+xy} = \frac{x(x+y)}{y(y+x)} = \frac{x}{y}$

iii. $\frac{x^2-1}{x^2-x} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x}$

iv. $\frac{3x^2-2x}{9x^2-4} = \frac{x(3x-2)}{(3x-2)\cdot(3x+2)} = \frac{x}{3x+2}$

Άσκηση 3-Λύση

i. $\frac{x^3-x}{x^3-1}=\frac{x(x^2-1)}{(x-1)\cdot(x^2+1x+1^2)}=\frac{x(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=\frac{x(x+1)}{x^2+x+1}$

ii. $\frac{8x^3+1}{4x^2+4x+1}=\frac{(2x)^3+1}{(2x+1)^2}=\frac{(2x+1)\cdot(4x^2-2x+1)}{(2x+1)^2}=\frac{4x^2-2x+1}{2x+1}$

iii. $\frac{\alpha\beta-\alpha-\beta+1}{\alpha-\alpha^2}=\frac{\alpha\beta-\beta-\alpha+1}{\alpha(1-\alpha)}=\frac{\beta(\alpha-1)+(1-\alpha)}{\alpha(1-\alpha)}=\frac{-\beta(1-\alpha)+(1-\alpha)}{\alpha(1-\alpha)}=$

$\frac{(1-\alpha)\cdot(-\beta+1)}{\alpha(1-\alpha)}=\frac{1-\beta}{\alpha}$

iv. $\frac{(x+1)^2-4x^2}{x-x^3}=\frac{(x+1)^2-(2x)^2}{x-x^3}=\frac{(x+1-2x)\cdot(x+1+2x)}{x(1-x^2)}=\frac{(1-x)\cdot(1+3x)}{x(1-x)\cdot(1+x)}=\frac{1+3x}{x(1+x)}$

Άσκηση 4-Λύση

i. $\frac{x^4-16}{x^3-8}=\frac{(x^2-4)\cdot(x^2+4)}{(x-2)\cdot(x^2+2x+2^2)}=\frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+4)}{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}=\frac{(x+2)\cdot(x^2+4)}{(x^2+2x+4)}$

ii. $\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\alpha\beta+\alpha\gamma}=\frac{(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)-\gamma^2}{\alpha^2-\alpha\beta+\alpha\gamma}=\frac{(\alpha-\beta)^2-\gamma^2}{\alpha(\alpha-\beta+\gamma)}=\frac{(\alpha-\beta-\gamma)\cdot(\alpha-\beta+\gamma)}{\alpha(\alpha-\beta+\gamma)}=\frac{\alpha-\beta-\gamma}{\alpha}$

iii. $\frac{(y-1)^2-y+1}{y^3-1}=\frac{(y-1)^2+(-y+1)}{(y-1)\cdot(y^2+1y+1^2)}=\frac{(y-1)^2-(y-1)}{(y-1)\cdot(y^2+y+1)}=\frac{(y-1)\cdot(y-1-1)}{(y-1)\cdot(y^2+y+1)}=\frac{y-2}{y^2+y+1}$

iv. $\frac{x(x-5)-x^2+25}{x^2-6x+5}=\frac{x(x-5)+(-x^2+25)}{(x-5)\cdot(x-1)}=\frac{x(x-5)-(x^2-25)}{(x-5)\cdot(x-1)}=$

$\frac{x(x-5)-(x-5)\cdot(x+5)}{(x-5)\cdot(x-1)}=\frac{(x-5)(x-(x+5))}{(x-5)\cdot(x-1)}=\frac{x-x-5}{x-1}=\frac{-5}{x-1}$

Άσκηση 5-Λύση

i. $\frac{(x-1)^2-4(x+1)^2}{9x^2-1}=\frac{[x-1-2(x+1)]\cdot[x-1+2(x+1)]}{(3x-1)\cdot(3x+1)}=\frac{(x-1-2x-2)\cdot(x-1+2x+2)}{(3x-1)\cdot(3x+1)}$

$=\frac{(-x-3)\cdot(3x+1)}{(3x-1)\cdot(3x+1)}=\frac{-(x+3)}{3x-1}$

ii. $\frac{(x-1)\cdot(x+1)^2+9(1-x)}{x^2-x}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)^2-9(x-1)}{x^2-x}=\frac{(x-1)\cdot[(x+1)^2-9]}{x(x-1)}$

$=\frac{(x+1-3)\cdot(x+1+3)}{x}=\frac{(x-2)\cdot(x+4)}{x}$

iii. $\frac{(x+3)^3-27}{x}=\frac{(x+3-3)\cdot[(x+3)^2+3(x+3)+3^2]}{x}=\frac{x(x^2+6x+9+3x+9+9)}{x}=x^2+9x+27$

iv. $\frac{(x-2)^3-1}{x-3}=\frac{(x-2-1)\cdot[(x-2)^2+1(x-2)+1^2]}{x-3}=\frac{(x-3)\cdot(x^2-4x+4+x-2+1)}{x-3}=x^2-3x+3$

1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

Α. Πολλαπλασιασμός-Διαίρεση ρητών παραστάσεων

Λύσεις

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

i. Θα πρέπει $x \neq 0$.

ii. Θα πρέπει $-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

iii. Θα πρέπει $x - 5 \neq 0 \;\; \Rightarrow x \neq 5$

iv. Θα πρέπει $x + 15 \neq 0 \;\; \Rightarrow x \neq -15$

v. Θα πρέπει $3x + 6 \neq 0 \;\Rightarrow 3x \neq 6 \Rightarrow x \neq 2$

vi. Θα πρέπει $10 - 2x \neq 0 \;\Rightarrow 10 \neq 2x \;\Rightarrow x \neq 5$

Άσκηση 2-Λύση

i. $\frac{(x+4)(x+5)}{(x+4)(x+6)} = \frac{x+5}{x+6}$

ii. $\frac{10x(x+10)(x+8)}{x(8+x)} = 10(x+10)$

iii. $\frac{x(2x+10)(x+8)}{(2x+16)(x+5)} = \frac{2x(x+5)(x+8)}{2(x+8)(x+5)} = x$

Άσκηση 3-Λύση

i. $\frac{5x+10}{x^2+2x}=\frac{5(x+2)}{x(x+2)}=\frac{5}{x}$

ii. $\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x}=\frac{(x-2)(x-5)}{x(x-5)}=\frac{x-2}{x}$

iii. $\frac{x^2+9x+20}{x^2-25}=\frac{(x+4)(x+5)}{(x-5)(x+5)}=\frac{x+4}{x-5}$

iv. $\frac{x^2-x-12}{x^2-8x+16}=\frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)^2}=\frac{x+3}{x-4}$

Άσκηση 4-Λύση

i. $\frac{18x^3(x+10)}{9x(x^2-100)}=\frac{2x^2(x+10)}{(x-10)(x+10)}=\frac{2x^2}{x-10}$

ii. $\frac{25x^4\omega^{10}(x-4)y^2}{125x^2y^4(x^2-16)\omega^5}=\frac{x^2\omega^5(x-4)}{y^2(x-4)(x+4)}=\frac{x^2\omega^5}{y^2(x+4)}$

iii. $\frac{x^2-4x-12}{x^2+5x+6}=\frac{(x-6)(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x-6}{x+3}$

Άσκηση 5-Λύση

i. $\frac{5x}{6y}\cdot\frac{12x}{30y}=\frac{2x^2}{6y^2}=\frac{x^2}{3y^2}$

ii. $\frac{7x^3}{6y^4}\cdot\frac{24y}{49x}=\frac{4x^2}{7y^3}$

iii. $\frac{8x^2}{24y^3}\cdot\left(-\frac{48y^2}{32x}\right)=-\frac{2x}{4y}=-\frac{x}{2y}$

iv. $\frac{x^2+5x}{y}\cdot\frac{y^3-y^2}{x+5}=\frac{x(x+5)y^2(y-1)}{y(x+5)}=xy(y-1)$

Άσκηση 6-Λύση

i. $\frac{x+5}{x^2}\cdot\frac{x^2-25}{(x+5)^2}=\frac{(x+5)(x+5)(x-5)}{x^2(x+5)^2}=\frac{x-5}{x^2}$

ii. $\frac{x^3+8}{x^2-4}\cdot\frac{x^2-2x}{x^2-2x+4}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)x(x-2)}{(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)}=x$

iii. $\frac{x^2+5x+4}{x^2-16}\cdot\frac{x^2-25}{(x+5)^2}=\frac{(x+1)(x+4)(x-5)(x+5)}{(x-4)(x+4)(x+5)^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-4)(x+5)}$

Άσκηση 7-Λύση

i. $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}\cdot\frac{x^3+y^3}{(x+y)^3}=\frac{(x-y)(x+y)(x+y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)^2(x+y)^3}$

$$=\frac{x^2+xy+y^2}{(x-y)(x+y)}$$

ii. $\frac{x^4-x^2}{x^2-3x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x^3+1}=\frac{x^2(x^2-1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x+1)(x^2-x+1)}$

$$=\frac{x^2(x-1)(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x^2(x+2)}{x^2-x+1}$$

iii. $\frac{x^2+9x+8}{x^2-4x-5}\cdot\frac{x^2-8x+15}{x^2+10x+16}=\frac{(x+8)(x+1)(x-5)(x-3)}{(x-5)(x+1)(x+2)(x+8)}=\frac{x-3}{x+1}$

Άσκηση 8-Λύση

i. $5x : \frac{10x}{20x^2} = 5x \cdot \frac{20x^2}{10x} = 10$

ii. $\frac{4x}{20y^2} : 12x^2 = \frac{4x}{20y^2} \cdot \frac{1}{12x^2} = \frac{1}{60xy^2}$

iii. $\frac{7x}{8y} : \frac{4x^2}{12y^3} = \frac{7x}{8y} \cdot \frac{12y^3}{4x^2} = \frac{21y^2}{8x}$

iv. $(9x^3 - 27x + 36x^2) : 9x = (9x^3 - 27x + 36x^2) \cdot \frac{1}{9x} =$

$\frac{9x(x^2-3+4x)}{9x} = x^2 + 4x - 3$

Άσκηση 9-Λύση

i. $(25x^2y^5 - 45xy^2 + 55x^5y) : 5xy = \frac{5xy(5xy^4-9y+11x^4)}{5xy}$

$= 5xy^4 - 9y + 11x^4$

ii. $\frac{x^2-8}{x^2-100} : \frac{x-\sqrt{8}}{x+10} = \frac{x^2-8}{x^2-100} \cdot \frac{x+10}{x-\sqrt{8}} = \frac{(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})(x+10)}{(x-10)(x+10)(x-\sqrt{8})} = \frac{x+\sqrt{8}}{x-10}$

iii. $\frac{x^2+7x+12}{x^2-11x+30} : \frac{x^2-x-12}{x^2-x-30} = \frac{x^2+7x+12}{x^2-11x+30} \cdot \frac{x^2-x-30}{x^2-x-12} =$

$\frac{(x+3)(x+4)(x-6)(x+5)}{(x-6)(x-5)(x-4)(x+3)} = \frac{(x+4)(x+5)}{(x-5)(x-4)}$

Άσκηση 10-Λύση

i. $\dfrac{\frac{x^2-64}{x+4}}{\frac{x-8}{x^2-16}} = \dfrac{(x^2-64)(x^2-16)}{(x+4)(x-8)} = \dfrac{(x-8)(x+8)(x-4)(x+4)}{(x+4)(x-8)} = (x+8)(x-4)$

ii. $\dfrac{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}}{\frac{x^3-1}{(x-1)^3}} = \dfrac{(x^2-1)(x-1)^3}{(x-1)^2(x^3-1)} = \dfrac{(x-1)(x+1)(x-1)^3}{(x-1)^2(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2+x+1}$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

i. $8 \cdot \dfrac{4x^5}{16x^7} = \dfrac{2}{x^2}$

ii. $\dfrac{10}{x^3} \cdot \dfrac{x^5}{20x} = \dfrac{x}{2}$

iii. $\dfrac{8x}{4x^3} \cdot 5x^5 = \dfrac{10}{x^3}$

iv. $-\dfrac{2y^3}{x^3} \cdot \left(-\dfrac{x^2}{4y}\right) = \dfrac{2y^3x^2}{4x^3y} = \dfrac{y^2}{2x}$

Άσκηση 2-Λύση

i. $\dfrac{2x^2-2}{x^2+x} \cdot \dfrac{x^2+8x+7}{x+7} = \dfrac{2(x^2-1)(x+1)(x+7)}{x(x+1)(x+7)} = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$

ii. $\dfrac{2x-4}{x^2} \cdot \dfrac{x^3}{x^2-4} = \dfrac{2(x-2)x}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{2x}{x+2}$

iii. $\dfrac{x^2+16x+64}{2x+12} \cdot \dfrac{x^2+12x+36}{x+8} = \dfrac{(x+8)^2(x+6)^2}{2(x+6)(x+8)} = \dfrac{(x+8)(x+6)}{2}$

Άσκηση 3-Λύση

i. $\frac{2xy^2}{3x^3y}:\frac{20x^2y^3}{15x^4y^5}=\frac{2xy^2}{3x^3y}\cdot\frac{15x^4y^5}{20x^2y^3}=\frac{5x^5y^7}{10x^5y^4}=\frac{y^3}{2}$

ii. $\frac{x^3}{-3y^2}:\left(-\frac{xy}{9x^2y^4}\right)=\frac{x^3}{3y^2}\cdot\frac{9x^2y^4}{xy}=\frac{3x^5y^4}{xy^3}=3x^4y$

iii. $\frac{6x-4}{y+2}:\frac{4-6x}{2+y}=\frac{6x-4}{y+2}\cdot\frac{y+2}{4-6x}=\frac{-(4-6x)}{4-6x}=-1$

Άσκηση 4-Λύση

i. $\dfrac{\frac{x^2-2}{4x^2+8xy+4y^2}}{\frac{x+\sqrt{2}}{4x^2-4y^2}}=\frac{(x^2-2)(4x^2-4y^2)}{(4x^2+8xy+4y^2)(x+\sqrt{2})}$

$$=\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(2x-2y)(2x+2y)}{(2x+2y)^2(x+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(x-\sqrt{2})(2x-2y)}{2x+2y}$$

ii. $\frac{16(x^2-16)+8(x-4)^2+4(x-4)}{2(x-4)}$

$$=\frac{16(x-4)(x+4)+8(x-4)^2+4(x-4)}{2(x-4)}$$

$$=\frac{4(x-4)[4(x+4)+2(x-4)+4]}{2(x-4)}$$

$$=2(4x+16+2x-8+4)$$

$$=2(6x+8)$$

Άσκηση 5-Λύση

i. $\dfrac{\frac{x^2+9x+20}{x^2+11x+30}}{\frac{x^2+11x+28}{x^2+13x+42}} = \dfrac{(x^2+9x+20)(x^2+13x+42)}{(x^2+11x+30)(x^2+11x+28)} = \dfrac{(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)}{(x+5)(x+6)(x+4)(x+7)} = 1$

ii. $\left(\dfrac{x+6}{x-7}\cdot\dfrac{2x+12}{x^2-7x}\right):\dfrac{x}{x-7} = \dfrac{(x+6)2(x+6)}{(x-7)x(x-7)}\cdot\dfrac{x-7}{x} = \dfrac{2(x+6)^2}{x^2(x-7)}$

iii. $\left[\dfrac{x+1}{(x+2)^2}\cdot\dfrac{x^2-1}{x+2}\right]\cdot\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{-1}$

$= \left[\dfrac{x+1}{(x+2)^2}\cdot\dfrac{x^2-1}{x+2}\right]\cdot\dfrac{x+2}{x-1}$

$= \dfrac{(x+1)(x+1)(x-1)(x+2)}{(x+2)^2(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+1}{x+2}$

Άσκηση 6-Λύση

i. $\dfrac{x^2y^2-49}{16y^2-16y}:\dfrac{(xy+7)^2}{(y-1)^2} = \dfrac{x^2y^2-49}{16y^2-16y}\cdot\dfrac{(y-1)^2}{(xy+7)^2} = \dfrac{(xy-7)(xy+7)}{16y(y-1)}\cdot\dfrac{(y-1)^2}{(xy+7)^2} =$

$\dfrac{(xy-7)(y-1)}{16y(xy+7)}$

ii. $\dfrac{x^2-64}{y^2}:\dfrac{yx-8y}{y^4} = \dfrac{x^2-64}{y^2}\cdot\dfrac{y^4}{yx-8y} = \dfrac{(x-8)(x+8)y^4}{y^3(x-8)} = y(x+8)$

iii. $(x+2)\cdot\dfrac{4x-4}{x+6}:\left(\dfrac{x+6}{-x-2}\right)^{-1} = (x+2)\cdot\dfrac{4(x-1)}{x+6}\cdot\dfrac{-(x+2)}{x+6}$

$= \dfrac{-4(x-1)(x+2)^2}{(x+6)^2}$

Άσκηση 7-Λύση

i. $\dfrac{\frac{2x}{y}}{\frac{x^2}{6y^3}} = \dfrac{2x \cdot 6y^3}{x^2 y} = \dfrac{12y^2}{x}$

ii. $\dfrac{\frac{x^2-1}{1}}{\frac{x^2+x}{3}} = \dfrac{3(x^2-1)}{x^2+x} = \dfrac{3(x-1)(x+1)}{x(x+1)} = \dfrac{3(x-1)}{x}$

iii. $\dfrac{\frac{x^2-2x}{x+1}}{\frac{x^2-4}{1}} = \dfrac{x^2-2x}{(x+1)(x^2-4)} = \dfrac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+2)} = \dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$

1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

Β. Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

Λύσεις

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1-Λύση

i. $\frac{10}{x}+\frac{20}{y}=\frac{10y}{xy}+\frac{20x}{xy}=\frac{10y+20x}{xy}$

ii. $\frac{3}{x}+\frac{2}{xy}=\frac{3y}{xy}+\frac{2}{xy}=\frac{3y+2}{xy}$

iii. $\frac{4}{5}+\frac{6}{x}=\frac{4x}{5x}+\frac{30}{5x}=\frac{4x+30}{5x}$

iv. $\frac{2x}{x^2+x}+\frac{5}{x+1}=\frac{2x}{x(x+1)}+\frac{5}{x+1}=\frac{2x}{x(x+1)}+\frac{5x}{x(x+1)}=\frac{2x+5x}{x(x+1)}=\frac{7}{x+1}$

Άσκηση 2-Λύση

i. $\frac{6}{x^2}+\frac{7}{y^2}=\frac{6y^2}{x^2y^2}+\frac{7x^2}{y^2x^2}=\frac{6y^2+7x^2}{x^2y^2}$

ii. $\frac{2}{x^2y}+\frac{4}{y^2x}=\frac{2y}{x^2y^2}+\frac{4x}{x^2y^2}=\frac{2y+4x}{x^2y^2}$

iii. $\frac{8}{x^2y^2}+\frac{x}{xy}=\frac{8}{x^2y^2}+\frac{xxy}{x^2y^2}=\frac{8+x^2y}{x^2y^2}$

iv. $\frac{2}{x+5}+\frac{4}{x-5}=\frac{2(x-5)}{(x+5)(x-5)}+\frac{4(x+5)}{(x-5)(x+5)}=\frac{6x+10}{(x+5)(x-5)}$

Άσκηση 3-Λύση

i. $\frac{x}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}+\frac{2}{x+1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}+\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{3x-2}{(x-1)(x+1)}$

ii. $\frac{x}{(x+2)^2}+\frac{x}{x+2}=\frac{x}{(x+2)(x+2)}+\frac{x}{x+2}=\frac{x}{(x+2)(x+2)}+\frac{x(x+2)}{(x+2)(x+2)}$

$=\frac{x^2+3x}{(x+2)(x+2)}$

iii. $\frac{3x}{x^2y+xy^2}+\frac{2x}{x+y}=\frac{3x}{xy(x+y)}+\frac{2x}{x+y}=\frac{3x}{xy(x+y)}+\frac{2xxy}{xy(x+y)}=\frac{3x+2x^2y}{xy(x+y)}$

Άσκηση 4-Λύση

i. $-\frac{x}{xy}+\frac{z}{xz}-\frac{y}{yz}=-\frac{xz}{xyz}+\frac{zy}{xyz}-\frac{xy}{xyz}=\frac{-xz+zy-xy}{xyz}$

ii. $\frac{x}{x^2yz}-\frac{2}{xy^2z}-\frac{3x}{xyz^2}=\frac{xyz}{x^2y^2z^2}-\frac{2xz}{x^2y^2z^2}-\frac{3xxy}{x^2y^2z^2}=\frac{xyz-2xz-3x^2y}{x^2y^2z^2}$

iii. $\frac{3}{8x^2-8}-\frac{2}{4x+4}-\frac{1}{2x+2}$

$=\frac{3}{8(x^2-1)}-\frac{2}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x+1)}$

$=\frac{3}{8(x-1)(x+1)}-\frac{2}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x+1)}$

$=\frac{3}{8(x-1)(x+1)}-\frac{2\cdot 2(x-1)}{8(x-1)(x+1)}-\frac{4(x-1)}{8(x-1)(x+1)}$

$=\frac{-8x+11}{8(x-1)(x+1)}$

Άσκηση 5-Λύση

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\frac{x}{x^2-9}+\frac{2x}{x^2-6x+9}$$

$$=\frac{x}{(x-3)(x+3)}+\frac{2x}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{x(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}+\frac{2x(x+3)}{(x+3)(x-3)^2}=\frac{3x^2+3x}{(x-3)^2(x+3)}$$

$$\mathrm{B}-\mathrm{A}=\frac{2x}{x^2-6x+9}-\frac{x}{x^2-9}$$

$$=\frac{2x}{(x-3)^2}-\frac{x}{(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{2x(x+3)}{(x+3)(x-3)^2}-\frac{x(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}=\frac{x^2+9x}{(x+3)(x-3)^2}$$

Άσκηση 6-Λύση

$$A=\frac{2}{x^2-x-12}-\frac{1}{x^2-2x-8}+\frac{1}{x^2+5x+6}$$

$$=\frac{2}{(x-4)(x+3)}-\frac{1}{(x-4)(x+2)}+\frac{1}{(x+3)(x+2)}$$

$$=\frac{2(x+2)}{(x-4)(x+3)(x+2)}-\frac{(x+3)}{(x-4)(x+2)(x+3)}+\frac{(x-4)}{(x+3)(x+2)(x-4)}$$

$$=\frac{2x-5}{(x-4)(x+3)(x+2)}$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1-Λύση

i. $\frac{2}{x}+x=\frac{2}{x}+\frac{x^2}{x}=\frac{2+x^2}{x}$

ii. $3+\frac{y}{x^2}=\frac{3x^2}{x^2}+\frac{y}{x^2}=\frac{3x^2+y}{x^2}$

iii. $\frac{4}{x-2}+\frac{2}{2-x}=\frac{4}{x-2}-\frac{2}{x-2}=\frac{2}{x-2}$

iv. $\frac{8}{3x}+\frac{y}{5x}=\frac{40}{15x}+\frac{3y}{15x}=\frac{40+3y}{15x}$

Άσκηση 2-Λύση

i. $\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}=\frac{3x^2}{x^3}-\frac{4}{x^3}=\frac{3x^2-4}{x^3}$

ii. $\frac{5}{3x}-\frac{4}{6yx^2}=\frac{10xy}{6yx^2}-\frac{4}{6yx^2}=\frac{10xy-4}{6yx^2}=\frac{2(5xy-2)}{6yx^2}=\frac{5xy-2}{3yx^2}$

iii. $\frac{2x}{x-2}-\frac{3x}{(x-2)^2}=\frac{2x(x-2)}{(x-2)^2}-\frac{3x}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-7x}{(x-2)^2}$

iv. $2-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^2-2x-2}{x^2}$

Άσκηση 3-Λύση

i. $\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}=\frac{3x^2}{x^3}-\frac{4}{x^3}=\frac{3x^2-4}{x^3}$

ii. $\frac{3}{x^2-9}-\frac{4}{3+x}-\frac{5}{6-3x}=\frac{3}{(x-3)(x+3)}-\frac{4}{x+3}-\frac{5}{3(2-x)}$

iii. $\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{3}{3-x}=\frac{1}{(x-2)(x-3)}-\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{3}{x-3}$

$$=\frac{x-2}{(x-2)^2(x-3)}-\frac{2(x-3)}{(x-2)^2(x-3)}+\frac{3(x-2)^2}{(x-2)^2(x-3)}$$

$$=\frac{x-2-2x+6+3x^2-12x+12}{(x-2)^2(x-3)}=\frac{3x^2-13x+16}{(x-2)^2(x-3)}$$

iv. $\frac{1}{2x+4}-\frac{3}{2x-x^2}-\frac{5}{x^2-4}$

$$=\frac{1}{2(x+2)}+\frac{3}{x(x-2)}-\frac{5}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{2x(x-2)}{2x(x-2)(x+2)}+\frac{6(x+2)}{2x(x+2)(x-2)}-\frac{10x}{2x(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{2x^2-8x+12}{2x(x-2)(x+2)}$$

Άσκηση 4-Λύση

i. $$\frac{\frac{2}{x}-2}{\frac{2}{x^2}-2}=\frac{\frac{2}{x}-\frac{2x}{x}}{\frac{2}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}}=\frac{\frac{2-2x}{x}}{\frac{2-2x^2}{x^2}}=\frac{(2-2x)x^2}{x(2-2x^2)}=\frac{2(1-x)x}{2(1-x)(1+x)}=\frac{x}{1+x}$$

ii. $$\frac{\frac{2}{x}-\frac{2}{y}}{\frac{2}{xy}-2}=\frac{\frac{2y}{xy}-\frac{2x}{xy}}{\frac{2}{xy}-\frac{2xy}{xy}}=\frac{\frac{2y-2x}{xy}}{\frac{2-2xy}{xy}}=\frac{xy(2y-2x)}{xy(2-2xy)}=\frac{2(y-x)}{2(1-xy)}=\frac{y-x}{1-xy}$$

iii. $$\frac{2-\frac{2}{x}-\frac{2}{y}}{\frac{2}{x^2}-\frac{2}{y^2}-2}=\frac{\frac{2xy}{xy}-\frac{2y}{xy}-\frac{2x}{xy}}{\frac{2y^2}{x^2y^2}-\frac{2x^2}{y^2x^2}-\frac{2x^2y^2}{x^2y^2}}=\frac{\frac{2xy-2y-2x}{xy}}{\frac{2y^2-2x^2-2x^2y^2}{x^2y^2}}=\frac{x^2y^2(2xy-2y-2x)}{xy(2y^2-2x^2-2x^2y^2)}$$

$$=\frac{2xy(xy-y-x)}{2(y^2-x^2-x^2y^2)}=\frac{xy(xy-y-x)}{(y^2-x^2-x^2y^2)}$$

Άσκηση 5-Λύση

i. $$\left(\frac{x+2}{3x+3}-\frac{x+1}{3x-2}-\frac{2}{3x^2-3}\right)\cdot\left(\frac{2}{5x^2-5}\right)^{-1}$$

$$=\left[\frac{x+2}{3(x+1)}-\frac{x+1}{3(x-1)}-\frac{2}{3(x-1)(x+1)}\right]\cdot\frac{5(x-1)(x+1)}{2}$$

$$=\left[\frac{(x+2)(x-1)-(x+1)^2}{3(x+1)(x-1)}-\frac{2}{3(x-1)(x+1)}\right]\cdot\frac{5(x-1)(x+1)}{2}$$

$$=\frac{-x-5}{3(x+1)(x-1)}\cdot\frac{5(x-1)(x+1)}{2}=\frac{-5(x+5)}{6}$$

ii. $$\left(\frac{2x}{x^2+6x+9}-\frac{3x}{x+3}\right):\left(\frac{x}{x^2+4x+3}\right)=\left[\frac{2x}{(x+3)^2}-\frac{3x}{x+3}\right]\cdot\frac{x^2+4x+3}{x}$$

$$=\left[\frac{2x}{(x+3)^2}-\frac{3x(x+3)}{(x+3)^2}\right]\cdot\frac{(x+1)(x+3)}{x}$$

$$=\frac{(-3x^2-7x)}{(x+3)^2}\cdot\frac{(x+1)(x+3)}{x}=\frac{x(-3x-7)(x+1)}{x(x+3)}$$

$$=\frac{(-3x-7)(x+1)}{x+3}$$

Άσκηση 6-Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις και όταν εμφανιστούν οι ποσότητες $x+y$, $y-x$ και xy αντικαθιστούμε με τις τιμές που δίνονται.

$$A=\frac{3}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3y}{xy}+\frac{3x}{xy}=\frac{3(x+y)}{xy}=\frac{3\cdot 2}{6}=1$$

$$B=\left(\frac{4}{x}-\frac{4}{y}\right)^2=\left(\frac{4y}{xy}-\frac{4x}{xy}\right)^2=\left[\frac{4(y-x)}{xy}\right]^2=\frac{16(y-x)^2}{(xy)^2}=\frac{16\cdot 4^2}{6^2}=\frac{64}{9}$$

Άσκηση 7-Λύση

$$A=\left[\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]^{-1}=\left[\left(\frac{x^3}{y^2x^2}+\frac{y^3}{y^2x^2}\right)\cdot\left(\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy}\right)\right]^{-1}$$

$$=\left(\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}\cdot\frac{x+y}{xy}\right)^{-1}=\left(\frac{x^3y^3}{x^4+x^3y+y^3x+y^4}\right)^{-1}=\frac{x^4+x^3y+y^3x+y^4}{x^3y^3}$$

Γιατί επιλέγω Τετράδιο Σπουδής;

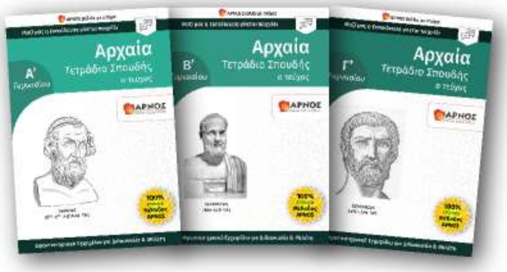
- Είναι απαραίτητο διδακτικό εργαλείο βασισμένο στους στόχους του μαθήματος και τον τρόπο Υλοποίησής του.
- Σε αυτό βρίσκεται το υλικό Διδασκαλίας για τον Καθηγητή και Μελέτης για το Μαθητή.
- Το Τετράδιο Σπουδής σε συνδυασμό με το course οδηγούν το **Μαθητή** στην **Αυτομάθηση**.
- Είναι το Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο πραγματοποίησης της **online διδασκαλίας με φυσικό τρόπο**.
- Με αυτό **ενημερώνονται** άμεσα **οι γονείς** και **ελέγχουν την πρόοδο** του παιδιού τους.

Τετράδια Σπουδής για:

Γυμνάσιο

Μαθηματικά

Αρχαία



Γλώσσα

Φυσικά

13-15 ετών

arnos.gr | info@arnos.gr