ΑΡΝΟΣ βιβλία με στόχο!

Μαζί μας η Εκπαίδευση γίνεται παιχνίδι

Μαθηματικά

Τετράδιο Σπουδής

α τεύχος

Β'
Γυμνασίου

ΑΡΝΟΣ Online Education

ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ
210-294 ΠΧ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ & ΑΣΚΗΣΕΩΝ

100%
επιτυχία
Μέθοδος ΑΡΝΟΣ

Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο για Διδασκαλία & Μελέτη

Τετράδιο Σπουδής - Γιατί;

Το Τετράδιο Σπουδής ΑΡΝΟΣ είναι βασισμένο στη Μέθοδο ΑΡΝΟΣ, ένα σύστημα μάθησης με Στόχους – Υλοποίηση – Πιστοποίηση.
Βοηθάει το μαθητή να οικοδομήσει τη σκέψη του βήμα-βήμα, απλά και κατανοητά. Είναι Φροντιστηριακό Εγχειρίδιο βάσει του οποίου γίνεται η διδασκαλία στο online μάθημα με «φυσικό» τρόπο. Ο δάσκαλος γράφει και υπογραμμίζει παράλληλα με το μαθητή.

Το Τετράδιο Σπουδής αποτελείται από:

- Οπτικοποιημένη Θεωρία με ροή & συνέχεια
- Ασκήσεις για Διδασκαλία και Εξάσκηση
- Συνδυαστικές και Επαναληπτικές Ασκήσεις
- Θέματα Προσομοίωσης Εξετάσεων

Πιστοποίηση Γνώσεων

Σε προγραμματισμένες ημερομηνίες διεξάγονται online ή/και δια ζώσης **Επαναληπτικά Τεστ Αξιολόγησης** στα οποία ο μαθητής πιστοποιεί και επαληθεύει τις γνώσεις του.

Για τους Γονείς

Πώς ο γονέας μπορεί να έχει εικόνα και εποπτεία στην πρόοδο του παιδιού του;
Το Τετράδιο Σπουδής είναι σχεδιασμένο με τέτοιον τρόπο για τη βήμα – βήμα εξάσκηση του μαθητή, μεταβαίνοντας με ασφάλεια από τα πιο απλά στα πιο σύνθετα. Επίσης, είναι ένας φυσικός τρόπος ο Γονέας να ελέγχει την πρόοδο του παιδιού του.

Πώς γίνεται η εποπτεία από το γονέα;

Σε κάθε μάθημα ελέγχει την ορθότητα των λύσεων, την κατανόηση και τη συμμετοχή του παιδιού στα μαθήματα.

Διδασκαλία στον ΑΡΝΟ σημαίνει:

- Απεριόριστη μελέτη με video lessons
- Αυτομάθηση στο App Arnos Learn
- Coaching εξατομικευμένο
- Μοτίβα Μάθησης και Εξάσκησης
- Κάθε Απορία για εμάς είναι Πρόκληση!

Μέθοδος ΑΡΝΟΣ

Η **Μέθοδος ΑΡΝΟΣ** οδηγεί κάθε μαθητή, ανεξαρτήτως γνώσεων ή επιπέδου, να μελετά από το επίπεδο όπου αισθάνεται άνετα, ώστε να διαμορφώσει γερές βάσεις για μάθηση.

Live Διδασκαλία Το online μάθημα γίνεται με φυσικό τρόπο, γιατί συνδυάζει την Τεχνολογία, το Πνεύμα, την Οργάνωση και την Εμπειρία.

Τετράδιο Σπουδής Είναι ο οδηγός για τη διδασκαλία του μαθήματος, την εξάσκηση του μαθητή και την πραγματοποίηση της online διδασκαλίας με Λόγο, Εικόνα και Παρατήρηση.

Καθηγητής Είναι ο σκηνοθέτης της διδακτικής πράξης, ο οποίος δρα σε ένα οργανωμένο εκπαιδευτικό οικοσύστημα με Στόχους, Μαθησιακό Πλάνο και Ευθύνη.

«Μέθοδος ΑΡΝΟΣ... το καταστάλαγμα μιας πορείας 35 ετών με εκπαιδευτικές και εκδοτικές επιτυχίες, με ταξίδια πολιτισμού, συμμετοχή σε Διεθνείς Εκθέσεις και αποτυχίες... μα, κυρίως, η παρακαταθήκη του ζευγολάτη πατέρα - Αρνού.»

Γιάννης Π. Κρόκος

ΑΡΝΟΣ Online Education

Σολωμού 29, Αθήνα 210 38 22 157 | 210 38 22 495

arnos.gr | info@arnos.gr

Τετράδιο Σπουδής

1ο Τεύχος

Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου

ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- Οδηγός για τη Διδασκαλία του Καθηγητή
- Οδηγός για τη Μελέτη του Μαθητή
- Διδασκαλία Online με φυσικό τρόπο
- Τόπος Εποπτείας Προόδου από το Γονέα
- Διδασκαλία με Πιστοποιημένους Καθηγητές ΑΡΝΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2021

ΑΡΝΟΣ
Online Education

Μαθηματικά Β’ Γυμνασίου – Λύσεις 1ου Τετραδίου Σπουδής

Συντακτική Ομάδα Κέντρου ΑΡΝΟΣ

Διευθυντής σειράς: Ιωάννης Π. Κρόκος

Συνεργάστηκαν: Ιωάννης Μαρδάκης

Βασίλειος Κ. Τσιλιβής

ΑΡΝΟΣ ONLINE EDUCATION

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

Μέρος Α΄: Αριθμητική - Άλγεβρα

1ο Κεφάλαιο: Εξισώσεις - Ανισώσεις

2ο Κεφάλαιο: Πραγματικοί αριθμοί

Κεφάλαιο 1 : Εξισώσεις-Ανισώσεις

1.1. Η Έννοια της μεταβλητής-Αλγεβρικές παραστάσεις

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

i. **Λάθος**

Με βάση τους κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων Σωστό είναι: α-β-γ.

ii. **Λάθος**

Αν οι αριθμοί εχουν γινόμενο 1 είναι αντίστροφοι σε αντίθετους Σωστό είναι: α+β=0

iii. Σωστό

iv. Σωστό

v. Σωστό

vi. **Λάθος**

vii. **Λάθος**

Το τετραπλάσιο ενός αριθμού x εκφράζεται ως 4x άρα Σωστό είναι: 4x+4

viii. Λάθος

Σωστό είναι: $\frac{x}{2} - 1$, η παράσταση που μας δίνεται εκφράζεται ως φυσική γλώσσα «Μειώνουμε έναν αριθμό κατά 1 και βρίσκουμε το μισό του».

ix. **Λάθος**

Κάθε αγελάδα εχει 4 πόδια,οι α αγελάδες θα εχουν 4α πόδια.Όμοια οι κ κατσίκες θα έχουν 4κ πόδια,Σωστό είναι: 4α+4κ

x. Σωστό

Ερώτηση Κατανόησης 2 – Απάντηση

i. 1 – Β Έστω x ο αριθμός, το τριπλάσιο του είναι 3x, μειωμένο κατά 2 είναι 3x-2

ii. 2 – Γ Έστω x ο αριθμός, το διπλάσιο του είναι 2x, μειωμένο κατά 3 είναι 2x-3

iii. 3 – Δ Έστω x ο αριθμός, το διπλάσιο του είναι 2x, αυξημένο κατά 3 είναι 2x+3

iv. 4 – Α Έστω x ο αριθμός, το τριπλάσιο του είναι 3x, αυξημένο κατά 2 είναι 3x+2

Ερώτηση Κατανόησης 3 - Απάντηση

i) Έστω x,y οι αριθμοί.Η διαφορά τους είναι (x-y),οπότε το διπλάσιο της διαφοράς θα είναι $2(x-y)$

ii) Έστω x,y,z, οι αριθμοί,το άθροισμα τους είναι $x+y+z$,άρα το άθροισμα αυξημένο κατά 3 θα είναι $x+y+z+3$

iii) Έστω x ο αριθμός,το ένα τέταρτο του x είναι $\frac{1}{4}x$,άρα το ένα τέταρτο αυξημένο κατά 1 θα είναι $\frac{1}{4}x+1$

iv) Έστω x και y οι αριθμοί.Το άθροισμα τους είναι (x+y) ,διαιρούμενο κατά 5 θα είναι $\frac{(x+y)}{5}$

v) Έστω x,y,z,w, οι αριθμοί.Το άθροισμα δύο εξ΄αυτών θα είναι $(x+y)$,ενώ η διαφορά των άλλων $(z-w)$.Άρα η ζητούμενη παράσταση γράφεται

$$(x+y)-(z-w)$$

vi) Έστω x ο αριθμός,το διπλάσιο του είναι 2x αρα η ζητούμενη παράσταση γράφεται

$$x+2x$$

vii) Έστω x ο αριθμός.Το 30% του αριθμού είναι $\frac{30}{100}x$, άρα η ζητούμενη παράσταση είναι

$$x+\frac{30}{100}x$$

viii) Έστω x ο αριθμός.Το 20% του αριθμού είναι $\frac{20}{100}x$, άρα η ζητούμενη παράσταση είναι

$$x-\frac{20}{100}x$$

ix) Έστω x και y οι αριθμοί οπότε το άθροισμα τους είναι $(x+y)$. Το 10% του αθροίσματος είναι $\frac{10}{100}(x+y)$ οπότε η ζητούμενη παράσταση είναι

$$(x+y)+\frac{10}{100}(x+y)$$

x) Έστω x και y οι αριθμοί.το ένα τρίτο του y γράφεται: $\frac{1}{3}y=\frac{y}{3}$.Το άθροισμα του x με το ένα τρίτο του y είναι $\left(x+\frac{y}{3}\right)$, άρα η ζητούμενη παράσταση θα είναι:

$$\frac{(x+\frac{y}{3})}{2}$$

Ερώτηση Κατανόησης 4 – Απάντηση

Η Περίμετρος δίνεται από το άθροισμα των πλευρών του σχήματος.Οπότε έχουμε

$$Π = (2x+1)+(x-y)+(x+y)+(2y+7)$$

Κάνοντας απαλοιφή παρενθέσεων και αναγωγή ομοίων όρων παίρνουμε

$$Π = 2x+x+x-y+y+2y+1+7=(2+1+1)x+(-1+1+2)y+8=$$
$$4x+2y+8$$

Το οποίο παρατηρούμε ότι γράφεται και στη μορφή

$$\Pi \ =4\mathrm{x}+2(\mathrm{y}+4)$$

χρησιμοποιώντας το αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας.

Οπότε Σωστή η επιλογή 3.

***Προσοχή :** Παρατηρούμε όμως ότι και η παράσταση:

$$\Pi = 2(2x + y + 4)$$

έπειτα από πράξεις καταλήγει στην

$$\Pi = 4x + 2y + 8$$

Οπότε Σωστή είναι και η επιλογή 4 . Προτείνεται λοιπόν σε ασκήσεις πολλαπλών απαντήσεων να γίνεται έλεγχος σε όλες τις πιθανές απαντήσεις!

Ερώτηση Κατανόησης 5 - Απάντηση

Θέτοντας λ την πλευρά του σχήματος και αντικαθιστώντας όπου α = 1 και β = $\frac{1}{2}$, τότε η κάθε μια από τις ίσες πλευρές του θα ισούται με:

$$\lambda = \frac{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}}{3} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$$

Άρα η περίμετρος θα δίνεται από τον τύπο

$$\Pi = 5\lambda = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \; \mu o \nu \acute{\alpha} \delta \varepsilon \varsigma$$

Οπότε Σωστή η επιλογή 2.

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

i. Θέτουμε την τελική τιμή της μπλούζας ως y και με την έκπτωση θα δίνεται από τη σχέση:

$$y = x - \frac{25}{100}\,x$$

Κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε σε μια απλοποιημένη μορφή της σχέσης:

$$y = \frac{100}{100}x - \frac{25}{100}x = \frac{100x}{100} - \frac{25x}{100} = \frac{75}{100}x = 0{,}75x$$

Δηλαδή: $y = 0{,}75x$

ii. Αντικαθιστούμε ως αρχική τιμή στην απλοποιημένη σχέση του ερωτήματος (i) όπου x= 40€ και έχουμε:

$$y = 0{,}75 \cdot 40 = 30$$

Η τελική τιμή της μπλούζας θα είναι 30€ .

Άσκηση 2 – Λύση

Με αναγωγή ομοίων όρων σε όλα τα ερωτήματα έχουμε:

i. $2x - 4x + 6x = (2 - 4 + 6)x = 4x$

ii. $2y + y - 8y = (2 + 1 - 8)y = -5y$

iii. $-\omega + 3 + 4\omega - 5\omega = (-1 + 4 - 5)\omega + 3 = -2\omega + 3$

iv. $4a - 3a - 2a + a = (4 - 3 - 2 + 1)a = 0a = 0$

v. $2\beta - \beta + 4\beta - 7\beta - 6\beta + 12\beta = (2 - 1 + 4 - 7 - 6 + 12)\beta = 4\beta$

Άσκηση 3 – Λύση

i. Με αναγωγή ομοίων όρων έχουμε

$$2x - 3y + 7x - y = 2x + 7x - 3y - y = (2 + 7)x + (-3 - 1)y = 9x - 4y$$

ii. Με αναγωγή ομοίων όρων έχουμε:

$$\begin{aligned} &4a + 2\beta - 6\alpha + 3\gamma - 9\beta - 11\gamma + 3\beta \\ &= 4\alpha - 6\alpha + 2\beta - 9\beta + 3\beta + 3\gamma - 11\gamma \\ &= (4 - 6)\alpha + (2 - 9 + 3)\beta + (3 - 11)\gamma \\ &= -2\alpha - 4\beta - 8\gamma \end{aligned}$$

iii. Με αναγωγή ομοίων όρων έχουμε:

$$\begin{aligned} &2x - 5a - 7 - 9x + 12a - 13 + 6x = 2x - 9x + 6x - 5a + 12a - 7 - 13 \\ &= (2 - 9 + 6)x + (-5 + 12)a - 20 \\ &= -x + 7a - 20 \end{aligned}$$

iv. Με χρήση επιμεριστικής ιδιοτητας και αναγωγή ομοίων όρων έχουμε:

$$\begin{aligned}2\alpha - 5(3\alpha+\beta) + 4(2\alpha+3\beta) &= 2\alpha - 15\alpha - 5\beta + 8\alpha + 12\beta\\ &= 2\alpha - 15\alpha + 8\alpha - 5\beta + 12\beta\\ &= (2-15+8)\alpha + (-5+12)\beta = -5\alpha + 7\beta\end{aligned}$$

v. Με χρήση του κανόνα απαλοιφής παρενθέσεων και αναγωγή ομοίων όρων

έχουμε:

$$\begin{aligned}13x - 7 + 3y - x - 2y + 7 - (11x+y) &= 13x - 7 + 3y - x - 2y + 7 - 11x - y\\ &= 13x - x - 11x + 3y - 2y - y - 7 + 7\\ &= (13-1-11)x + (3-2-1)y = x\end{aligned}$$

Άσκηση 4 – Λύση

i. A= $5a - 22\beta + 16\alpha - 5\beta + \alpha = 5\alpha + 16\alpha + \alpha - 22\beta - 5\beta$

$$= (5+16+1)\alpha + (-22-5)\beta$$

$$= 22\alpha - 27\beta$$

ii. $\mathrm{B} = -12\alpha + 3\beta + 9\alpha - 11\beta - \alpha + \beta = -12\alpha + 9\alpha - \alpha + 3\beta - 11\beta + \beta$

$$= (-12+9-1)\alpha + (3-11+1)\beta = -4\alpha - 7\beta$$

iii. $\Gamma = 0{,}6x - 1{,}3y + 2{,}5x - 1{,}5y = 0{,}6x + 2{,}5x - 1{,}3y - 1{,}5y$

$$= (0{,}6+2{,}5)x + (-1{,}3-1{,}5)y = 3{,}1x - 2{,}8y$$

iv. Με τη χρήση του κανόνα απαλοιφής παρενθέσεων και αναγωγή ομοίων όρων έχουμε:

$$\Delta = 0{,}9\alpha + 1{,}1\alpha - 2{,}1\beta + \beta - 0{,}1(\alpha + \beta)$$
$$= 0{,}9\alpha + 1{,}1\alpha - 2{,}1\beta + \beta - 0{,}1\alpha - 0{,}1\beta$$
$$= 0{,}9\alpha + 1{,}1\alpha - 0{,}1\alpha - 2{,}1\beta + \beta - 0.1\beta$$
$$= (0.9 + 1{,}1 - 0{,}1)\alpha + (-2{,}1 + 1 - 0{,}1)\beta = 1{,}9\alpha - 1{,}2\beta$$

v. Με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας και αναγωγή ομοίων όρων έχουμε:

$$\mathrm{E} = 19 - 2(\alpha - \beta) - (2\beta - \alpha) - (\alpha + 12) = 19 - 2\alpha + 2\beta - 2\beta + \alpha$$
$$= -2\alpha + \alpha + 2\beta - 2\beta + 19$$
$$= (-2 + 1)\alpha + (2 - 2)\beta + 19 = -\alpha + 19$$

Άσκηση 5 – Λύση

Θα εκτελέσουμε τις πράξεις σύμφωνα με την προτεραιότητα,τις ιδιότητες των δυνάμεων και τους κανόνες προσήμων και απαλοιφής παρενθέσεων:

i. $A = [(14 - 2 \cdot 2^3)^4 - (-3^2)]: 5 - (9 - 3 \cdot 2^2)^3$

$= [(14 - 2 \cdot 8)^4 - (-9)]: 5 - (9 - 3 \cdot 4)^3$

$= [(14 - 16)^4 + 9]: 5 - (9 - 12)^3$

$= [(-2)^4 + 9]: 5 - (-3)^3$ $\{(-\alpha)^\nu = \alpha^\nu \text{ αν } \nu \text{ άρτιος , ενώ } -\alpha^\nu \text{ αν } \nu \text{ περιττός}\}$

$= (16 + 9): 5 - (-27) = 25: 5 + 27 = 5 + 27 = 32$

ii. $B = 19(2^2 - 2^3) + (-2)^3(5 \cdot 2^2 - 3^3)$

$= 19(4 - 8) + (-8)(5 \cdot 4 - 27)$ $\{(-\alpha)^\nu = -\alpha^\nu \text{ , αν } \nu \text{ περιττός}\}$

$= 19(-4) + (-8)(20 - 27)$

$= -76 + (-8)(-7) = -76 + 56 = -20$

iii. $\Gamma = \frac{(-2)^3+(-2)^2+(-1)^{12}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{-2}\right)^3-(\frac{-1}{2})^4}$ $\{(-\alpha)^\nu = \alpha^\nu \; \alpha\nu \; \nu \; \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \;, \varepsilon\nu\acute{\omega} \; -\alpha^\nu \; \alpha\nu \; \nu \; \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma\}$

$= \frac{-8+4+1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}}$

$= \frac{-3}{\frac{4}{16}+\frac{2}{16}-\frac{1}{16}} = \frac{-3}{\frac{5}{16}} = -\frac{-3\cdot 16}{5} = \frac{-48}{5}$

iv. $\Delta = \frac{(-24)^3}{6^3} - \frac{15^4}{(-5)^4} - \frac{44^5}{(-22)^5} = \left(\frac{-24}{6}\right)^3 - \left(\frac{15}{-5}\right)^4 - \left(\frac{44}{-22}\right)^5$ $\{ (\frac{\alpha}{\beta})^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} \}$

$= (-4)^3 - (-3)^4 - (-2)^5 = -4^3 - 3^4 - (-2^5)$
$\{(-\alpha)^\nu = \alpha^\nu \; \alpha\nu \; \nu \; \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \;, \varepsilon\nu\acute{\omega} \; -\alpha^\nu \; \alpha\nu \; \nu \; \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma\}$

$= -64 - 81 + 32 = -113$

v. $E = 24(-2)^{-3} - 18\cdot 3^{-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ $\{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}, \; (\frac{\alpha}{\beta})^{-\nu} = (\frac{\beta}{\alpha})^\nu\}$

$= 24\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 18\left(\frac{1}{3}\right)^2 - (+2)^2$

$= 24\left(-\frac{1}{8}\right) - 18\left(\frac{1}{9}\right) - 4 = -3 - 2 - 4 = -9$

Άσκηση 6 – Λύση

Θα απλοποιήσουμε την παράσταση σε μια απλούστερη μορφη κάνοντας πράξεις ώστε να υπολογίσουμε με πιο εύκολο τρόπο την τιμή της

$$A = 5 - 3\alpha + 2(\alpha + 3\beta) - 5(2\beta - 3\alpha) + \beta - 7$$

$$= 5 - 3\alpha + 2\alpha + 6\beta - 10\beta + 15\alpha + \beta - 7$$

$$= -3\alpha + 2\alpha + 15\alpha + 6\beta - 10\beta + \beta + 5 - 7$$

$$= (-3 + 2 + 15)\alpha + (6 - 10 + 1)\beta - 2$$

$$= 14\alpha - 3\beta - 2$$

Αντικαθιστώντας όπου $\alpha = -\frac{1}{2}$ και $\beta = -2$ η παράσταση γίνεται

$$A = 14\left(-\frac{1}{2}\right) - 3(-2) - 2 = -7 + 6 - 2 = -3$$

Άσκηση 7 – Λύση

i. $A = 5\alpha + 3\alpha - \alpha - 2\alpha + 1 = (5 + 3 - 1 - 2)\alpha + 1 = 5\alpha + 1$

ii. Αντικαθιστώντας όπου $\alpha = 2$ στην απλοποιημένη μορφή έχουμε:

$$A = 5 \cdot 2 + 1 = 11$$

Θα απλοποιήσουμε την παράσταση με χρήση επιμεριστικής ιδιότητας και αναγωγής ομοίων όρων :

$$A = 2(5x-4y)-3(x-7y)-6y = 10x-8y-3x+21y-6y$$
$$= 10x-3x-8y+21y-6y = (10-3)x+(-8+21-6)y$$
$$= 7x+7y$$

Χρησιμοποιούμε το αντίστροφο της επιμεριστικης ιδιότητας και η παράσταση εχει την μορφή

$$A = 7(x+y)$$

Με δεδομένο ότι x+y=3 και αντικατάσταση η αριθμητική τιμή της, είναι:

$$A = 7\cdot 3 = 21$$

Άσκηση 9– Λύση

Απλοποιώντας την παράσταση με χρήση επιμεριστικής ιδιότητας, αναγωγή ομοίων όρων και έχοντας υπόψιν την προτεραιότητα των πράξεων σε παρενθέσεις και αγκύλες θα έχουμε:

$$\mathrm{A} = 6\alpha-6-2[5-3(\beta-1)] = 6\alpha-6-2[5-3\beta+3] = 6\alpha-6-2(8-3\beta)$$
$$= 6\alpha-6-16+6\beta = 6\alpha+6\beta-22$$

Οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι άρα το αθροισμά τους θα ισούται με μηδέν.Δηλαδή

$$\alpha+\beta=0$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση μπορεί να γραφεί και ως:

$$A = 6(\alpha+\beta)-22$$

Με αντικατάσταση έχουμε :

$$A = 6\cdot 0-22 = -22$$

Άσκηση 10 – Λύση

Απλοποιούμε την παράσταση με χρήση επιμεριστικής ιδιότητας και αναγωγή ομοίων όρων,ακολουθώντας και τους κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων:

$$A = 5(\alpha - 2\beta) - 2(\alpha - 3\beta) - (-\beta - 9) = 5\alpha - 10\beta - 2\alpha + 6\beta + \beta + 9$$
$$= 5\alpha - 2\alpha - 10\beta + 6\beta + \beta + 9 = (5-2)\alpha + (-10+6+1)\beta + 9$$
$$= 3\alpha - 3\beta + 9$$

Με δεδομένο ότι $\alpha - \beta = 7$ και ότι η παράσταση μπορεί να γραφεί και ως :

$$A = 3(\alpha - \beta) + 9$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$A = 3(\alpha - \beta) + 9 = 3 \cdot 7 + 9 = 21 + 9 = 30$$

Άσκηση 11 – Λύση

Η Περίμετρος του τριγώνου ισούται με το άθροισμα των μέτρων των πλευρών του.Οπότε έχουμε την παράσταση :

$$\Pi = (4y + 3) + (x - y) + (2x - 1)$$

Κάνοντας απαλοιφή παρενθέσεων και αναγωγή ομοίων όρων έχουμε :

$$\Pi = 4y + 3 + x - y + 2x - 1 = 4y - y + x + 2x + 3 - 1 = (4-1)y + (1+2)x + 2$$
$$= 3y + 3x + 2$$

Άρα η Περίμετρος δίνεται από την παράσταση :

$$\Pi = 3x + 3y + 2$$

Με δεδομένο ότι $x + y = 2$ και ότι η παράσταση εκφράζεται στην μορφή :

$$\Pi = 3(x + y) + 2$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε :

$$\Pi = 3(x + y) + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8 \; \mu o \nu \acute{\alpha} \delta \varepsilon \varsigma$$

Άσκηση 12 – Λύση

i. Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο γνωρίζουμε ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες. Η περίμετρος του θα δινεται από το διπλάσιο του αθροίσματος του μήκους και του πλάτους.Η παράσταση της Περιμέτρου είναι :

$$\Pi = 2[(2x+1)+(3y-2)] = 2[2x+1+3y-2] = 2(2x+3y-1)$$

$$\Pi = 4x+6y-2$$

Το εμβαδόν του δινεται από τον τύπο $E = \alpha \cdot \beta$ δηλαδή το γινόμενο του μήκους επι το πλάτος. Έχουμε την παράσταση Εμβαδού :

$$E = (2x+1)(3y-2)$$

ii. Θα υπολογίσουμε τις αριθμητικές τιμες της Περιμέτρου και του Εμβαδού αντικαθιστώντας στις παραστάσεις τις τιμές $x = 3 \; \kappa\alpha\iota \; y = 2$.Για την Περίμετρο έχουμε :

$$\Pi = 4x+6y-2 = 4\cdot 3+6\cdot 2-2 = 12+12-2 = 22 \text{ μονάδες}$$

Ενώ για το Εμβαδόν :

$$E = (2x+1)(3y-2) = (2\cdot 3+1)(3\cdot 2-2)$$

$$= (6+1)(6-2) = 7\cdot 4 = 28 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

Άσκηση 13 – Λύση

Θεωρούμε το πλάτος του Ορθογωνίου Παραλληλογράμμου ως x οπότε το μήκος του θα είναι x+2. Η Περίμετρος (Π) θα είναι το άθροισμα του διπλάσιου του μηκους με το διπλάσιο του πλάτους άρα δημιουργούμε την παράσταση:

$$\Pi = 2x + 2(x+2) = 2x + 2x + 4$$

$$\Pi = 4x + 4$$

Ομοίως αφού το Εμβαδόν (Ε) του Ορθογωνίου Παραλληλογράμμου ορίζεται ως το γινόμενο του μήκους επί το πλάτος του, δημιουργούμε την παράσταση :

$$E = 2x(x+2)$$

Άσκηση 14 – Λύση

i. Με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας και αναγωγή ομοίων όρων έχουμε:

$$A = 2(\alpha + 3\beta) - 3(\alpha - 2\beta) = 2\alpha + 6\beta - 3\alpha + 6\beta$$

$$= 2\alpha - 3\alpha + 6\beta + 6\beta = (2-3)\alpha + (6+6)\beta = -\alpha + 12\beta$$

Αντικαθιστώντας όπου $\alpha = 2 \; \kappa\alpha\iota \; \beta = -2$, εκτελούμε τις πράξεις και η αριθμητική τιμή της παράστασης είναι :

$$A = -\alpha + 12\beta = -2 + 12 \cdot (-2) = -2 - 24 = -26$$

ii. Όμοια με το ερώτημα (i) για την παράσταση Β έχουμε:

$$B = 3(x - 3y) + 2(5y - x) = 3x - 9y + 10y - 2x = 3x - 2x - 9y + 10y$$
$$= (3-2)x + (-9+10)y = x + y$$

Αντικαθιστώντας όπου $x = -3 \; \kappa\alpha\iota \; y = 7$, εκτελούμε τις πράξεις και η αριθμητική τιμή της παράστασης είναι: $B = x + y = -3 + 7 = 4$

Άσκηση 15 – Λύση

i. Με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας και αναγωγή ομοίων όρων έχουμε :

$$A = 3(2x-4y)+2(3x+6y) = 6x-12y+6x+12y$$
$$= 6x+6x-12y+12y = (6+6)x+(-12+12)y = 12x$$

Αντικαθιστώντας όπου $x = 0{,}02$, η αριθμητική τιμή της παράστασης είναι:

$$A = 12x = 12 \cdot 0{,}02 = 0{,}24$$

ii. Με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας και αναγωγή ομοίων όρων έχουμε :

$$B = 2(\alpha+3\beta)+3(2\alpha+\beta)-\beta = 2\alpha+6\beta+6\alpha+3\beta-\beta$$
$$= 2\alpha+6\alpha+6\beta+3\beta-\beta = (2+6)\alpha+(6+3-1)\beta = 8\alpha+8\beta$$

Παρατηρούμε ότι με το αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας η παράσταση Β γράφεται:

$$B = 8\alpha+8\beta = 8(\alpha+\beta)$$

Αντικαθιστώντας ως δεδομένο ότι $\alpha+\beta = \frac{2}{7}$ η αριθμητική τιμή της είναι:

$$B = 8(\alpha+\beta) = 8 \cdot \frac{2}{7} = \frac{16}{7}$$

iii. Με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας και αναγωγή ομοίων όρων έχουμε :

$$\Gamma = 3(x+2y)-5(2x-3y)-14y-2 = 3x+6y-10x+15y-14y-2$$
$$= 3x-10x+6y+15y-14y-2 = (3-10)x+(6+15-14)y-2$$
$$= -7x+7y-2 = 7y-7x-2$$

Παρατηρούμε ότι με το αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας η Γ γράφεται :

$$\Gamma = 7y-7x-2 = 7(y-x)-2$$

Αντικαθιστώντας ως δεδομένο ότι $y-x = \frac{2}{5}$ η αριθμητική τιμή της είναι:

$$\Gamma = 7(y-x)-2 = 7 \cdot \frac{2}{5} - 2 = \frac{14}{5} - 2 = \frac{14}{5} - \frac{10}{5} = \frac{4}{5}$$

Άσκηση 16 – Λύση

Η Περίμετρος του τριγώνου ($Π_1$) δίνεται από το άθροισμα των μέτρων των πλευρών του οπότε δημιουργούμε την παράσταση:

$$Π_1 = (x-4)+(y+2)+(\omega+2)$$

Κάνοντας απαλοιφή παρενθέσεων και αναγωγή ομοίων όρων έχουμε:

$$Π_1 = x-4+y+2+\omega+2 = x+y+\omega$$

Από τα δεδομένα μας έχουμε ότι $x+y+\omega+4=20cm.$(1)

Για την Περίμετρο του Ορθογωνίου Παραλληλογράμμου ($Π_2$) ξέρουμε ότι ισούται με το άθροισμα του διπλάσιου του μήκους με το διπλάσιο του πλάτους.

Οπότε δημιουργούμε την παράσταση:

$$Π_2 = 2(x+2y)+2(x+2\omega) = 2x+4y+2x+4\omega = 2x+2x+4y+4\omega$$
$$= (2+2)x+4y+4\omega = 4x+4y+4\omega$$

Λόγω της σχέσης (1) και τη χρήση του αντιστόφου της επιμεριστικής ιδιότητας έχουμε:

$$Π_2 = 4(x+y+\omega) = 4\cdot 20 = 80cm$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 – Λύση

Στην άσκηση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την διπλή επιμεριστική ιδιότητα με τύπο:

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\delta})=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\delta}$$

Ακολουθώντας τους κανόνες γινομένου των προσήμων

i. $(x-3)(x+3)=x\cdot x+x\cdot 3-3\cdot x-3\cdot 3$

ii. $(x+2)(x+4)=x\cdot x+x\cdot 4+2\cdot x+2\cdot 4$

iii. $(x+y)(x-2y)=x\cdot x-x\cdot 2y+y\cdot x-y\cdot 2y$

iv. $(x-5)(x-5)=x\cdot x-x\cdot 5-5\cdot x+5\cdot 5$

v. Στην περίπτωση που έχουμε 3 ή παραπάνω παράγοντες τότε θα χρησιμοποιούμε την διπλή επιμεριστική ιδιότητα για τους δύο πρώτους παράγοντες και το γινόμενο θα επιμεριστεί με τον τρίτο παράγοντα. Οπότε έχουμε:

$$(x-1)(x+2)(x-3)=(x\cdot x+x\cdot 2-1\cdot x-1\cdot 2)(x-3)=$$

$$x\cdot x\cdot x-x\cdot x\cdot 3+x\cdot 2\cdot x-x\cdot 2\cdot 3-1\cdot x\cdot x+1\cdot x\cdot 3-1\cdot 2\cdot x+1\cdot 2\cdot 3$$

Άσκηση 2– Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε σε όλα τα ερωτήματα την επιμεριστική ιδιότητα,τους κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων και θα κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων ώστε να φέρουμε τις παραστάσεις σε απλοποιημένη μορφή:

i. $(\alpha+2\beta)-(2\alpha-3\beta)=\alpha+2\beta-2\alpha+3\beta=\alpha-2\alpha+2\beta+3\beta$

$$=(1-2)\alpha+(2+3)-\alpha+5\beta$$

ii. $16-3(2x-1)-(2x+5)=16-6x+3-2x-5$

$$=-6x-2x+16+3-5=(-6-2)x+14=-8x+14$$

iii. $4a-(2\beta+2\alpha)-(3\alpha-5\beta)=4\alpha-2\beta-2\alpha-3\alpha+5\beta$
$$=4\alpha-2\alpha-3\alpha-2\beta+5\beta=(4-2-3)\alpha+(-2+5)\beta$$
$$=-\alpha+3\beta$$

iv. $5x-7-(-8)-x+3=5x-7+8-x+3=5x-x-7+8+3$
$$=(5-1)x+4=4x+4$$

v. $2(y+3)-2(7-y)+4=2y+6-14+2y+4$
$$=2y+2y+6-14+4=(2+2)y-4=4y-4$$

vi. $\frac{3x+2}{3}-\frac{x}{2}=\frac{2(3x+2)}{6}-\frac{3x}{6}=\frac{6x+4}{6}-\frac{3x}{6}=\frac{6x-3x+4}{6}=\frac{(6-3)x+4}{6}=\frac{3x+4}{6}$

vii. $\frac{-5(x-1)}{4}+\frac{3x-2}{3}=\frac{-5x+5}{4}+\frac{3x-2}{3}=\frac{3(-5x+5)}{12}+\frac{4(3x-2)}{12}=\frac{-15x+15}{12}+\frac{12x-8}{12}$
$$=\frac{-15x+12x+15-8}{12}=\frac{(-15+12)x+7}{12}=\frac{-3x+7}{12}$$

viii. $[7(x+3)-5]:4-8x:3=[7x+21-5]:4-8x:3$
$$=(7x+16):4-8x:3=\frac{7x+16}{4}-\frac{8x}{3}=\frac{3(7x+16)}{12}-\frac{32x}{12}$$
$$=\frac{21x+48}{12}-\frac{32x}{12}=\frac{21x-32x+48}{12}=\frac{(21-32)x+48}{12}$$
$$=\frac{-11x+48}{12}$$

ix. $y+3y-11+6\left[2-\frac{y}{3}\right]=y+3y-11+12-6\cdot\frac{y}{3}$
$$=y+3y-11+12-2y=y+3y-2y-11+12=(1+3-2)y+1=2y+1$$

x. $\frac{(1-a)}{4}+\frac{2(a-1)}{3}-1=\frac{3(1-a)}{12}+\frac{4\cdot 2(a-1)}{12}-1=\frac{3-3a}{12}+\frac{8a-8}{12}-\frac{12}{12}=$

$\frac{3-3a+8a-8-12}{12}=\frac{-3a+8a+3-8-12}{12}=\frac{(-3+8)a-17}{12}=\frac{5a-17}{12}$

Άσκηση 3 – Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε σε όλα τα ερωτήματα την επιμεριστική ιδιότητα,τους κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων-προσήμων και θα κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων τηρώντας την προτεραιότητα των πράξεων ώστε να φέρουμε τις παραστάσεις σε απλοποιημένη μορφή:

i. $3(2a-1)-5(3a+2)+4a+3=6a-3-15a-10+4a+3$
$=6a-15a+4a-3-10+3=(6-15+4)a-10=-5a-10$

ii. $3[3x-2(x+y)]-2[-3y-(y-x)]$
$=3[3x-2x-2y]-2[-3y-y+x]=3[(3-2)x-2y]-2[(-3-1)y+x]$
$=3(x-2y)-2(-4y+x)=3x-6y+8y-2x$
$=3x-2x-6y+8y=(3-2)x+(-6+8)y=x+2y$

iii. $2[4(x-3)-(x+2)]-3[6(x-4)-7(x-3)]=$
$2[4x-12-x-2]-3[6x-24-7x+21]$
$=2[(4-1)x-14]-3[(6-7)x-3]$
$=2(3x-14)-3(-x-3)=6x-28+3x+9$
$=6x+3x-28+9=(6+3)x-19=9x-19$

iv. $4(\alpha+3)-16-3(2\beta-3)-2(7+\alpha)+2-(2\beta+3)$
$=4\alpha+12-16-6\beta+9-14-2\alpha+2-2\beta-3$
$=4\alpha-2\alpha-6\beta-2\beta+12-16+9-14+2-3$
$=(4-2)\alpha+(-6-2)\beta-10=2\alpha-8\beta-10$

v. $3[5-2(x-2y)]-2[4x-(5-y)]$

$$=3[5-2x+4y]-2[4x-5+y]=15-6x+12y-8x+10-2y$$
$$=-6x-8x+12y-2y+15+10$$
$$=(-6-8)x+(12-2)y+25=-14x+10y+25$$

vi. $\frac{x}{4}+\frac{x+3}{6}-\frac{5x}{12}+\frac{1}{2}=\frac{3x}{12}+\frac{2(x+3)}{12}-\frac{5x}{12}+\frac{6}{12}=\frac{3x+2x+6-5x+6}{12}=$
$\frac{(3+2-5)x+6+6}{12}=\frac{0x+12}{12}=\frac{12}{12}=1$

vii. $(x-3)(x-1)-(x-2)(x+4)$

$$=(x\cdot x-1\cdot x-3\cdot x+3\cdot 1)-(x\cdot x+4\cdot x-2\cdot x-2\cdot 4)$$
$$=(x^2-x-3x+3)-(x^2+4x-2x-8)$$
$$=(x^2-4x+3)-(x^2+2x-8)=x^2-4x+3-x^2-2x+8$$
$$=-4x-2x+3+8=(-4-2)x+11=-6x+11$$

viii. $\frac{x}{14}+\frac{y}{5}+\frac{x}{10}+\frac{y}{7}=\frac{5x}{70}+\frac{14y}{70}+\frac{7x}{70}+\frac{10y}{70}$ {Ε.Κ.Π.[14,10,5,7] =70}

$$=\frac{5x+7x+14y+10y}{70}=\frac{(5+7)x+(14+10)y}{70}=\frac{12x+24y}{70}$$

ix. $\frac{x-y}{6}+\frac{y-2x}{9}-\frac{(x+y)}{1}=\frac{3(x-y)}{18}+\frac{2(y-2x)}{18}-\frac{18(x+y)}{18}$

$$=\frac{3x-3y}{18}+\frac{2y-4x}{18}-\frac{18x+18y}{18}=\frac{3x-3y+2y-4x-(18x+18y)}{18}$$

$$=\frac{3x-3y+2y-4x-18x-18y}{18}$$

$$=\frac{3x-4x-18x-3y+2y-18y}{18}$$

$$=\frac{(3-4-18)x+(-3+2-18)y}{18}=\frac{-19x-19y}{18}$$

x. $\left(\frac{0}{x}-\frac{x}{-1}\right):\left(\frac{-x}{x}\right)-\left(\frac{-x}{1}-\frac{-x}{-1}\right):\left(\frac{x}{x}-\frac{x}{-x}\right)$

$$=(0+x):(-1)-[-x-(+x)]:[1-(-1)]=x:(-1)-(-x-x):(1+1)$$

$$=-x-(-2x):2=-x+(2x):2=-x+x=0$$

***Η παράσταση έχει νόημα όταν $x\neq 0$**

Άσκηση 4 – Λύση

Θα απλοποιήσουμε την παράσταση με χρήση επιμεριστικής ιδιότητας και αναγωγής ομοίων όρων για να τη φέρουμε σε απλούστερη μορφή.

$$A=7(x-2y)-2(3x+3y)+2=7x-14y-6x-6y+2$$

$$=7x-6x-14y-6y+2=(7-6)x+(-14-6)y+2=x-20y+2$$

Αντικαθιστούμε τις αριθμητικές τιμές $x=7 \;\kappa\alpha\iota\; y=-1$ και η αριθμητική τιμή της παράστασης θα είναι:

$$A=x-20y+2=7-20(-1)+2=7+20+2=29$$

Άσκηση 5 – Λύση

i. Θα απλοποιήσουμε την παράσταση με χρήση επιμεριστικής ιδιότητας και αναγωγής ομοίων όρων για να τη φέρουμε σε απλούστερη μορφή.

$$A = 5(\alpha - 2\beta) - 3(2\alpha - 3\beta) + 1 = 5\alpha - 10\beta - 6\alpha + 9\beta + 1$$
$$= 5\alpha - 6\alpha - 10\beta + 9\beta + 1 = (5-6)\alpha + (-10+9)\beta + 1 = -\alpha - \beta + 1$$

ii. Από τους κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων γνωρίζουμε ότι :

$$-(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta$$

Δεδομένου ότι $\alpha + \beta = 2$ τότε η αριθμητική τιμή της παράστασης είναι:

$$A = -\alpha - \beta + 2 = -(\alpha + \beta) + 2 = -2 + 2 = 0$$

Άσκηση 6 – Λύση

i. Θα απλοποιήσουμε την παράσταση με χρήση επιμεριστικής ιδιότητας, αναγωγής ομοίων όρων και κανόνων απαλοιφής παρενθέσεων για να τη φέρουμε σε απλούστερη μορφή.

$$A = -x + 2(3x - y) - 4(y - 3) - (-x) = -x + 6x - 2y - 4y + 12 + x$$
$$= -x + 6x + x - 2y - 4y + 12 = (-1 + 6 + 1)x + (-2 - 4)y + 12$$
$$= 6x - 6y + 12$$

ii. Με το αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας η παράσταση γράφεται:

$$A = 6(x - y) + 12$$

Με δεδομένο ότι $x - y = \frac{1}{6}$ η αριθμητική τιμή της παράστασης θα είναι:

$$A = 6(x - y) + 12 = 6 \cdot \frac{1}{6} + 12 = 1 + 12 = 13$$

Θα απλοποιήσουμε την παράσταση με αναγωγή ομοίων όρων και κανόνων απαλοιφής παρενθέσεων για να τη φέρουμε σε απλούστερη μορφή.

$$A = 3 - a + (\beta - x) - (y - a) - (\beta - 1) = 3 - a + \beta - x - y + a - \beta + 1$$

$$= -a + a + \beta - \beta - x - y + 3 + 1 = -x - y + 4$$

Με το αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας η παράσταση γράφεται:

$$A = -x - y + 4 = -(x + y) + 4$$

Με δεδομένο ότι $x + y = -11$ αντικαθιστούμε και η αριθμητική τιμή της παράστασης είναι:

$$A = -(x + y) + 4 = -(-11) + 4 = +11 + 4 = 15$$

Άσκηση 8 – Λύση

Σε παραστάσεις όπου οι όροι που επιμερίζονται είναι κλάσματα, είναι πιθανό όταν εκτελέσουμε όλες τις πράξεις να είναι πιο δύσκολη η αναγωγή ομοίων όρων.Επειδή δεν αναφέρεται ή μας ζητείται η απλοποίηση της παράστασης,σε αυτή την περίπτωση είναι προτιμότερο να αντικαταστήσουμε εξ αρχής τις αριθμητικές τιμές των μεταβλητών. Οπότε για $x = -8 \; και \; y = 24$ έχουμε:

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2}(3x - y) - \frac{5}{4}(x - y) - \frac{1}{6}(y - 18) \\ &= \frac{1}{2}[3(-8) - 24] - \frac{5}{4}(-8 - 24) - \frac{1}{6}(24 - 18) \\ &= \frac{1}{2}(-24 - 24) - \frac{5}{4}(-32) - \frac{1}{6}(+6) = \frac{1}{2}(-48) - \frac{5}{4}(-32) - 1 \\ &= -24 + 40 - 1 = 15 \end{aligned}$$

Άσκηση 9 – Λύση

Οι αριθμοί ως αντίθετοι έχουν την ιδιότητα : $\alpha+\beta=0$

Με την απλοποίηση της παράστασης θα έχουμε ως στόχο να εμφανίσουμε το παραπάνω άθροισμα.Με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας και αναγωγή ομοίων όρων η παράσταση γίνεται:

$$A=2.021-8(2\alpha+\beta)+4(\alpha-\beta)=2.021-16\alpha-8\beta+4\alpha-4\beta$$
$$=2.021-16\alpha+4\alpha-8\beta-4\beta=2.021+(-16+4)\alpha+(-8-4)\beta$$
$$=2.021-12\alpha-12\beta$$

Με το αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας και ταυτόχρανα με τους κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων η παράσταση μπορει να γραφεί ως :

$$A=2.021-12\alpha-12\beta=2.021-12(\alpha+\beta)$$

Εφόσον $\alpha+\beta=0$ αντικαθιστώντας έχουμε :

$$A=2.021-12\cdot 0=2.021$$

Άσκηση 10 – Λύση

Απλοποιούμε την παράσταση με χρήση επιμεριστικής ιδιότητας και αναγωγής ομοίων όρων δίνοντας πάντα προσοχή στην προτεραιότητα των πράξεων που βρίσκονται μεσα σε παρενθέσεις ή αγκύλες.Οπότε η παράσταση γίνεται:

$$A=\alpha+3\beta-5[2(\alpha+2)-3(\alpha+\beta)]=\alpha+3\beta-5[2\alpha+4-3\alpha-3\beta]$$
$$=\alpha+3\beta-5[2\alpha-3\alpha-3\beta+4]=\alpha+3\beta-5[(2-3)\alpha-3\beta+4]$$
$$=\alpha+3\beta-5(-\alpha-3\beta+4)=\alpha+3\beta+5\alpha+15\beta-20$$
$$=\alpha+5\alpha+3\beta+15\beta-20=(1+5)\alpha+(3+15)\beta-20$$
$$=6\alpha+18\beta-20$$

Θα πρέπει να εκμεταλλευτούμε το δεδομένο ότι $\alpha+3\beta=-5$, το οποίο και πρέπει να εμφανίσουμε στην παράσταση.Με το αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας παρατηρούμε ότι το άθροισμα $6\alpha+18\beta$ γράφεται και ως:

$$6\alpha+18\beta=6(\alpha+3\beta)$$

Οπότε η παράσταση μετά από αντικατάσταση θα γίνει:

$$A = 6\alpha + 18\beta - 20 = 6(\alpha + 3\beta) - 20$$
$$= 6 \cdot (-5) - 20 = -30 - 20 - 50$$

Άσκηση 11 – Λύση

Αρχικά θα πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή της μεταβλητής x χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων.Για τον υπολογισμό της, έχουμε:

$x = \frac{(5^{-2}:5^{1})^{3})}{(5^{3}\cdot5^{-7})^{2}}$

$= \frac{(5^{-2-1})^{3}}{(5^{3+(-7)})^{2}}$ {Ιδιοτητα : $\alpha^{\nu}:\alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu}$},{Ιδιοτητα : $\alpha^{\nu}\cdot\alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}$}

$= \frac{(5^{-3})^{3}}{(5^{-4})^{2}}$ {Ιδιότητα : $(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu\cdot\mu}$}

$= \frac{5^{-9}}{5^{-8}} = 5^{-9-(-8)}$ {Ιδιοτητα : $\alpha^{\nu}:\alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu}$}

$= 5^{-9+8} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

Απλοποιούμε την παράσταση με χρήση επιμεριστικής ιδιότητας και αναγωγής ομοίων όρων,σύμφωνα πάντα με την προτεραιότητα των πράξεων σε παρενθέσεις και αγκύλες.

$$A = y - 3[2x - (x + y)] - 4[3y - 2(x + y)]$$
$$= y - 3[2x - x - y] - 4[3y - 2x - 2y]$$
$$= y - 3[(2 - 1)x - y] - 4[(3 - 2)y - 2x]$$
$$= y - 3(x - y) - 4(y - 2x) = y - 3x + 3y - 4y + 8x$$
$$= y + 3y - 4y - 3x + 8x = (1 + 3 - 4)y + (-3 + 8)x = 0y + 5x = 5x$$

Αντικαθιστούμε την τιμή x = $\frac{1}{5}$ και η αριθμητική τιμή της παράστασης γίνεται :

$$A = 5x = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$$

Άσκηση 12– Λύση

Θα υπολογίσουμε αρχικά την τιμή της μεταβλητής x,υπολογίζοντας την τιμή της αριθμητικής παράστασης χρησιμοποιώντας ιδιότητες δυνάμεων και εκτελώντας τις πράξεις κατά προτεραιότητα.

$x = -[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2] : (-2)^4$ {Ιδιότητα $(-\alpha)^\nu = \alpha^\nu, \acute{o}\tau\alpha\nu\ \nu\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma$}

$= -[2^8 : 4^2 + 4^2] : 2^4$ {εκφράσαμε το $4 = 2^2$}

$= -[2^8 : (2^2)^2 + (2^2)^2] : 2^4$ {Ιδιότητα : $(\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\nu \cdot \mu}$}

$= -[2^8 : 2^4 + 2^4] : 2^4$ {Ιδιοτητα : $\alpha^\nu : \alpha^\mu = \alpha^{\nu-\mu}$}

$= -[2^4 + 2^4] : 2^4 = -[16 + 16] : 16 = (-32) : 16 = -2$

Θα απλοποιήσουμε την παράσταση με επιμεριστική ιδιότητα,αναγωγή ομοίων όρων,απαλοιφή παρενθέσεων και με βαση την προτεραιότητα των πράξεων σε περενθέσεις και αγκύλες.

$A = -(x-3) - 3(y-4) - [x(y-2) - y(x+3)]$
$= -x + 3 - 3y + 12 - [xy - 2x - yx - 3y]$
$= -x + 3 - 3y + 12 - xy + 2x + yx + 3y$ {$xy = yx$ αντιμεταθετική ιδιότητα}
$= -x + 2x - 3y + 3y + 3 + 12 = (-1+2)x + (-3+3)y + 15$
$= x + 15$

Αντικαθιστώντας όπου x= -2 η αριθμητική τιμή της παράστασης είναι :

$$A = x + 15 = -2 + 15 = 13$$

Άσκηση 13– Λύση

Στην κατηγορία των ασκήσεων που μας δίνεται μια σχέση που συνδέει τις μεταβλητές x και y, θα εκφράζουμε με τη βοήθεια της σχέσης αυτής τη μια μεταβλητή σε σχέση με την άλλη και θα την αντικαθιστούμε στην παράσταση προς απλοποίηση,κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις.Οπότε εκφράζουμε την μεταβλητή x ως προς την μεταβλητή y,ως εξής:

$$\frac{x}{y} = -3 \text{ τότε}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{-3}{1} \text{ τότε}$$

$$x = -3y$$

Αντικαθιστούμε στην παράσταση Α όπου x = -3y και έχουμε:

$$A = \frac{4x - 3y}{x - 2y} = \frac{4(-3y) - 3y}{-3y - 2y} = \frac{-12y - 3y}{-5y} = \frac{-15y}{-5y} = 3$$

Άσκηση 14– Λύση

i. Η Περίμετρος του τριγώνου θα ισούται με το άθροισμα των μηκών των πλευρών του,δημιουργούμε την παράσταση:

$$\Pi = (3\beta - 2\alpha) + (\alpha + 3) + (2\beta - 1) = 3\beta - 2\alpha + \alpha + 3 + 2\beta - 1$$
$$= 3\beta + 2\beta - 2\alpha + \alpha + 3 - 1 = (3 + 2)\beta + (-2 + 1) + 2 = 5\beta - \alpha + 2$$

ii. Αντικαθιστούμε τις τιμές $\alpha = 2 \; \kappa\alpha\iota \; \beta = 3$ στην παράσταση Π και η τιμή της Περιμέτρου είναι:

$$\Pi = 5\beta - \alpha + 2 = 5 \cdot 3 - 2 + 2 = 15 \text{ μονάδες}$$

Ομοίως, αν αντικαταστήσουμε τις πλευρές του τριγώνου $\alpha = 2 \; και \; \beta = 3$.

Η κάθε μία θα είναι :

α) $3\beta - 2\alpha = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 9 - 4 = 5$ μονάδες
β) $\alpha + 3 = 2 + 3 = 5$ μονάδες
γ) $2\beta - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$ μονάδες

Όλες οι πλευρές του είναι ίσες και το τρίγωνο μας είναι ισόπλευρο για τις τιμές αυτές.

Άσκηση 15– Λύση

i. Σε κάθε Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες. Η Περίμετρος του (Π) θα είναι το άθροισμα του διπλάσιου του μήκου με το διπλάσιο του πλάτους του,ενώ το Εμβαδόν (Ε) είναι το γινόμενο τους.
Οπότε θα έχουμε τις εξής παραστάσεις:

$$\Pi = 2(2x+y) + 2(y+x) = 4x + 2y + 2y + 2x = 4x + 2x + 2y + 2y$$
$$= (4+2)x + (2+2)y =$$
$$6x + 4y$$
$$E = (2x+y)(y+x)$$

ii. Θα υπολογίσουμε αρχικά τις αριθμητικές τιμές των μεταβλητών x, y εκτελώντας τις απαραίτητες πράξεις σύμφωνα με τις ιδιότητες των δυνάμεων.
Για την τιμή της μεταβλητής x:

$$x = \frac{3^7 \cdot 5^8}{3^6 \cdot 5^9}$$

$$= 3^{7-6} \cdot 5^{8-9}$$ { Ιδιοτητα : $\alpha^\nu : \alpha^\mu = \alpha^{\nu-\mu}$}

$$= 3^1 \cdot 5^{-1} = \frac{3}{5}$$

Για την τιμή της μεταβλητής y :

$y = \frac{(2^4)^3}{2^6 \cdot 2^7}$ {Ιδιότητα : $(\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\nu \cdot \mu}$}

$= \frac{2^{12}}{2^{6+7}}$ {Ιδιοτητα : $\alpha^\nu \cdot \alpha^\mu = \alpha^{\nu+\mu}$}

$= \frac{2^{12}}{2^{13}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ {Ιδιοτητα : $\alpha^\nu : \alpha^\mu = \alpha^{\nu-\mu}$}

Αντικαθιστούμε στις παραστάσεις Π και Ε τις αριθμητικές τιμες των μεταβλητών x και y και έχουμε:

$$\Pi = 6x + 4y = 6 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{18}{5} + 2 = \frac{18}{5} + \frac{10}{5} = \frac{28}{5} \ \mu o\nu \acute{\alpha} \delta \varepsilon \varsigma$$

$$E = (2x + y)(y + x) = \left(2 \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{6}{5} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{10} + \frac{5}{10}\right) =$$

$$\left(\frac{12}{10} + \frac{5}{10}\right)\left(\frac{11}{10}\right) = \frac{17}{10} \cdot \frac{11}{10} = \frac{187}{100} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

Άσκηση 16– Λύση

Έστω ότι η δεύτερη πλευρά του είναι β.Τότε η Περίμετρος του θα δίνεται από τον τύπο

$$\Pi = 2\alpha + 2\beta$$

Επιπλέον το Εμβαδόν του θα δίνεται από τον τύπο:

$$E = \alpha \cdot \beta$$

Γνωρίζουμε ότι η Περίμετρος του για $\alpha = 2cm$ ισούται με $20cm$. Άρα, έχουμε:

$$\Pi = 2\alpha + 2\beta = 20$$

$$2 \cdot 2 + 2\beta = 20$$

$$4 + 2\beta = 20$$

$$2\beta = 20 - 4$$

$$\beta = 16 : 2 = 8 \ cm$$

Οπότε το Εμβαδόν θα έχει τιμή:

$$E = \alpha \cdot \beta = 2 \cdot 8 = 16cm^2$$

Άσκηση 17– Λύση

Αρχικά θα εκφράσουμε τις ποσότητες 6% του α και 4% τουβ.Το 6% του α είναι $\frac{6}{100}\alpha = 0{,}06\alpha$, ομοίως το 4% του β ισούται με $\frac{4}{100}\beta = 0{,}04\beta$. Έχουμε δεδομένο ότι αυτές οι ποσότητες είναι ίσες, άρα:

$$0{,}06\alpha = 0{,}04\beta$$

Πολλαπλασιάζουμε με 100 και τα δύο μέλη για να απαλλαγούμε από τους δεκαδικούς συντελεστές. Η ισότητα γίνεται: $6\alpha = 4\beta$

Απλοποιούμε και τα δύο μέλη με το 2 και καταλήγουμε στη:

$$3\alpha = 2\beta$$

Αντικαθιστούμε στην παράσταση Α την τιμη του 3α=2β και έχουμε:

$$A = \frac{3(3\alpha - \beta)}{6\alpha - \beta} = \frac{3(3\alpha - \beta)}{2 \cdot 3\alpha - \beta} = \frac{3(2\beta - \beta)}{2 \cdot 2\beta - \beta} = \frac{3\beta}{4\beta - \beta} = \frac{3\beta}{3\beta} = 1$$

Παρατήρηση: Η άσκηση θα μπορούσε να λυθεί και με αντικατάσταση του $\alpha = \frac{2}{3}\beta$ ή $\beta = \frac{3}{2}\alpha$ στην παράσταση Α απλά θα είχε πιο απαιτητικές πράξεις.

1.2. Εξισώσεις α΄Βαθμού

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

i. Λάθος.

Η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = 0$

ii. Λάθος.

Η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

iii. Σωστό.

iv. Λάθος.

Η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

v. Σωστό. .

vi. Λάθος.

Η εξίσωση εχει μοναδική λύση την $x = 0$

vii. Σωστό.

viii. Λάθος.

Υπάρχει και η περίπτωση της αδύνατης εξίσωσης στην οποία δεν έχουμε λύση

ix. Λάθος.

Η εξίσωση γράφεται $2x = 0$ η οποία έχει μοναδική λύση την $x = 0$

x. Λάθος.

Η μεταβλητή βρίσκεται υψωμένη στη δευτέρη δύναμη (είναι β΄βαθμού)

Ερώτηση Κατανόησης 2 – Απάντηση

i. Ως εξίσωση α΄βαθμού θεωρούμε την ισότητα με μια μεταβλητή η οποία είναι γραμμική.Δηλαδή η μεταβλητή βρίσκεται στην πρώτη δύναμη ($x = x^1$). Στις επιλογές (i) και (iii) παρατηρούμε ότι έχουμε ως μεταβλητές
x^2 *και* $\frac{1}{x} = x^{-1}$. Ενώ η εξίσωση $x + 2^2 = 0$ γράφεται $x + 4 = 0$.
Οπότε σωστή επιλογή η (ii).

ii. Κάθε αδύνατη εξίσωση α΄βαθμού έχει μορφή
$0x = b, b \neq 0$ άρα σωστη επιλογή η (i).

iii. Σωστή επιλογή η (ii) με μοναδική λύση $x = 1$, αφού οι άλλες δύο επιλογές είναι αόριστη (i) και αδύνατη (iii) αντίστοιχα.

iv. Αντικαθιστώντας την λύση $x = 1$ σε κάθε μια επιλογή έχουμε:
1) $2 \cdot 1 + 5 = 7 \neq 3$
2) $3 \cdot 1 + 2 = 5$
3) $2 \cdot 1 + 3 = 5$
Επαληθεύονται οι επιλογές (ii) και (iii).

Ερώτηση Κατανόησης 3 – Απάντηση

Έχουμε τρείς περιπτώσεις σε μια εξίσωση α΄βαθμού μίας μεταβλητής

i. Εάν ο συντελεστής α της μεταβλητής είναι διάφορος του μηδέν τότε η εξίσωση έχει <u>μοναδικη λύση</u> που δίνεται από τον τύπο :

$$ax = \beta \ \text{τότε} \ x = \frac{\beta}{a}$$

<u>Π.χ</u> $3x = 12 \ \text{τότε} \ x = \frac{12}{3} = 4$

ii. Εάν ο συντελεστής α της μεταβλητης είναι ίσος με μηδέν αλλά ο σταθερός όρος είναι διάφορος του μηδέν $(\beta \neq 0)$ τότε η εξίσωση θα είναι <u>αδύνατη.</u>

<u>Π.χ</u> $0x = 12$

iii. Εάν ο συντελεστής α της μεταβλητης είναι ίσος με μηδέν αλλά <u>και</u> ο σταθερός όρος είναι ίσος με το μηδέν $(\beta = 0)$ τότε η εξίσωση θα είναι <u>αόριστη ή ταυτότητα.</u>

<u>Π.χ</u> $0x = 0$

Ερώτηση Κατανόησης 4 – Απάντηση

i. 1-δ

Από την λύση της εξίσωσης έχουμε:

$$x + 5 = 8$$
$$x = 8 - 5 = 3$$

ii. 2-α

Από την λύση της εξίσωσης έχουμε :

$$-12x + 18 = 0$$
$$-12x = -18$$
$$x = \frac{-18}{-12} = \frac{3}{2}$$

iii. 3-β

Από την λύση της εξίσωσης έχουμε :

$$15 = 37 - 11x$$
$$11x = 37 - 15$$
$$11x = 22$$
$$x = \frac{22}{11} = 2$$

iv. 4-ε

Από την λύση της εξίσωσης έχουμε :

$$4x - 6 = 18$$

$$4x = 18 + 6$$

$$4x = 24$$

$$x = \frac{24}{4} = 6$$

v. 5-γ

Από την λύση της εξίσωσης έχουμε :

$$\frac{-x}{-2} = -7$$

$$\frac{-x}{-2} = \frac{-7}{1}$$

$$(-x)1 = (-7)(-2)$$

$$-x = 14$$

$$x = -14$$

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

i.

$3x - 5 = x + 2$

$3x - x = 2 + 5$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$2x = 7$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{2x}{2} = \frac{7}{2}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = \frac{7}{2}$

ii.

$11 - 2x + 7 - 10x = 0$

$-2x - 10x = -11 - 7$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-12x = -18$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-12x}{-12} = \frac{-18}{-12}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = \frac{3}{2}$

iii.

$0 = 7x - 8x + 3 + 5x + 5$

$-7x + 8x - 5x = 3 + 5$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-4x = 8$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-4x}{-4} = \frac{8}{-4}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = -2$

iv. $-8x + 9 + 3x - 34 = 0$

$-8x + 3x = -9 + 34$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-5x = 25$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-5x}{-5} = \frac{25}{-5}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = -5$

v. $5 - 7x + 2x = 12 - 2x - x - 15$

$-7x + 2x + 2x + x = -5 + 12 - 15$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-2x = -8$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = 4$

Άσκηση 2 – Λύση

i. $5 - 2(x - 3) = x - (2x - 8)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$5 - 2x + 6 = x - 2x + 8$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$-2x + 11 = -x + 8$

$-2x + x = -11 + 8$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-x = -3$

$\frac{-1x}{-1} = \frac{-3}{-1}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = 3$

ii. $5\omega - 3(2-\omega) = 2\omega - 8$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$5\omega - 6 + 3\omega = 2\omega - 8$

$8\omega - 6 = 2\omega - 8$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$8\omega - 2\omega = 6 - 8$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$6\omega = -2$

$\frac{6\omega}{6} = \frac{-2}{6}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$\omega = -\frac{1}{3}$

iii. $2(3y+2) - 3(4y-7) = 5$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$6y + 4 - 12y + 21 = 5$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$-6y = -4 - 21 + 5$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-6y = -20$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-6y}{-6} = \frac{-20}{-6}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$y = \frac{10}{3}$

iv. $9 - 2(w-5) = 11 - (4-w)$

$9 - 2w + 10 = 11 - 4 + w$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$19 - 2w = 7 + w$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$-2w - w = -19 + 7$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-3w = -12$

$\frac{-3w}{-3} = \frac{-12}{-3}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$w = 4$

v. $5-[x-2(x-1)]=4(x-3)$ {εκτέλεση πράξεων κατά προτεραιότητα}

$5-[x-2x+2]=4x-12$

$5-(-x+2)=4x-12$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$5+x-2=4x-12$

$3+x=4x-12$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$x-4x=-3-12$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-3x=-15$

$\frac{-3x}{-3}=\frac{-15}{-3}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=5$

Άσκηση 3 – Λύση

i. $\frac{2x-1}{3}-\frac{x-2}{6}=-2$

$6\left(\frac{2x-1}{3}\right)-6\left(\frac{x-2}{6}\right)=6(-2)$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$2(2x-1)-(x-2)=-12$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$4x-2-x+2=-12$ {αναγωγή ομοίων όρων στα δύο μέλη}

$3x=-12$

$3x=-12$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$\frac{3x}{3}=\frac{-12}{3}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=-4$

ii. $-\frac{x+3}{5}=\frac{-3x-1}{10}$

$-10\left(\frac{x+3}{5}\right)=10\left(\frac{-3x-1}{10}\right)$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$-2(x+3)=(-3x-1)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$-2x-6=-3x-1$

$-2x+3x=6-1$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$x=5$

iii. $\frac{2(3x+4)}{7}=\frac{5+x}{3}$

$\frac{6x+8}{7}=\frac{5+x}{3}$ {χιαστί γινόμενο}

$3(6x+8)=7(5+x)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$18x+24=35+7x$

$18x-7x=35-24$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$11x=11$ {αναγωγή ομοίων όρων στα δύο μέλη}

$\frac{11x}{11}=\frac{11}{11}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=1$

iv. $\frac{3-x}{5}+\frac{x-2}{2}=\frac{2(x-1)+5}{10}$

$10\left(\frac{3-x}{5}\right)+10\left(\frac{x-2}{2}\right)=10\left(\frac{2(x-1)+5}{10}\right)$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$2(3-x)+5(x-2)=2(x-1)+5$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$6-2x+5x-10=2x-2+5$

$3x-4=2x+3$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$3x-2x=4+3$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$x=7$

v. $2x-\left(\frac{x}{2}+1\right)=x-\left(\frac{x}{4}-2\right)$ {πράξεις στα κλάσματα εντός παρενθέσεων}

$2x-\left(\frac{x+2}{2}\right)=x-\left(\frac{x-8}{4}\right)$ {εκτέλεση πράξεων στις παρενθέσεις}

$4\cdot 2x-4\left(\frac{x+2}{2}\right)=4x-4\left(\frac{x-8}{4}\right)$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$8x-2(x+2)=4x-(x-8)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$8x-2x-4=4x-x+8$

$6x-4=3x+8$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$6x-3x=4+8$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$3x=12$

$\frac{3x}{3}=\frac{12}{3}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=4$

Άσκηση 4 – Λύση

i. $0{,}5w - 0{,}6w = 0{,}75w - 10{,}2$

$0{,}5w - 0{,}6w - 0{,}75w = -10{,}2$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-0{,}85w = -10{,}2$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-0{,}85w}{-0{,}85} = \frac{-10{,}2}{-0{,}85}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$w = 12$

ii. $0{,}4y + 0{,}27 = 0{,}7 + 0{,}83y$

$0{,}4y - 0{,}83y = 0{,}7 - 0{,}27$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-0{,}43y = 0{,}43$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-0{,}43y}{-0{,}43} = \frac{0{,}43}{-0{,}43}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$y = -1$

iii. $\frac{1}{5}(x-1) + \frac{1}{2}(x-9) = -1{,}2$

$0{,}2(x-1) + 0{,}5(x-9) = -1{,}2$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$0{,}2x - 0{,}2 + 0{,}5x - 4{,}5 = -1{,}2$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$0{,}2x + 0{,}5x = 0{,}2 + 4{,}5 - 1{,}2$

$0{,}7x = 3{,}5$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{0{,}7x}{0{,}7} = \frac{3{,}5}{0{,}7}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = 5$

iv. $0{,}25+\frac{1}{12}x=x-\frac{1}{6}(x+12)$ {εκτέλεση πράξεων}

$\frac{1}{4}+\frac{x}{12}=x-\frac{(x+12)}{6}$

$12\cdot\frac{1}{4}+\frac{12x}{12}=12x-12\frac{(x+12)}{6}$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$3\cdot 1+x=12x-2(x+12)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$3+x=12x-2x-24$

$3+x=10x-24$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$x-10x=-3-24$

$-9x=-27$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-9x}{-9}=\frac{-27}{-9}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=3$

v. $\frac{\frac{5x-4}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{3+\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{3}}$ {εκτέλεση πράξεων στα κλάσματα-μετατροπή σύνθετου σε απλό}

$\frac{\frac{5x-4}{2}}{\frac{2+1}{2}}=\frac{\frac{9+1}{3}}{\frac{6-1}{3}}$

$\frac{2(5x-4)}{2\cdot 3}=\frac{3\cdot 10}{3\cdot 5}$

$\frac{5x-4}{3}=\frac{10}{5}$

$\frac{5x-4}{3}=2$ {χιαστί γινόμενο}

$5x-4=6$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$5x=4+6$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$5x=10$

$\frac{5x}{5}=\frac{10}{5}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=2$

Άσκηση 5 – Λύση

i. $7-4x=-4(x-2)-1$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$7-4x=-4x+8-1$

$-4x+4x=-7+8-1$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$0x=0$

Η εξίσωση μας είναι αόριστη ή ταυτότητα οπότε έχει άπειρες λύσεις

ii. $2(4-x)-[3(x-2)-2(3x-1)]=x+5$

$8-2x-[3x-6-6x+2]=x+5$

$8-2x-(-3x-4)=x+5$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$8-2x+3x+4=x+5$

$12+x=x+5$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$x-x=-12+5$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$0x=-7$

Η εξίσωση μας είναι αδύνατη και δεν έχει καμία λύση

iii. $x+\frac{3-x}{3}-1=\frac{2x}{3}$

$3\cdot x+3\frac{(3-x)}{3}-3\cdot 1=3\cdot\frac{2x}{3}$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$3x+(3-x)-3=2x$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$3x+3-x-3=2x$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$2x=2x$

$2x-2x=0$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$0x=0$

Η εξίσωση μας είναι αόριστη ή ταυτότητα οπότε έχει άπειρες λύσεις

Άσκηση 6 – Λύση

i. Θα απλοποίησουμε τις παραστάσεις με χρήση επιμεριστικής ιδιότητας,κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων και αναγωγής ομοίων όρων,οπότε έχουμε :

$$A = 2(5-2x)-(2-x) = 10-4x-2+x$$
$$= -4x+x+10-2 = (-4+1)x+8 = -3x+8$$

$$B = 5(x-2)-3(x-1) = 5x-10-3x+3$$
$$= 5x-3x-10+3 = (5-3)x-7 = 2x-7$$

ii. $A+B+x=0$

$-3x+8+2x-7+x=0$

$-3x+2x+x=-8+7$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$0x=-1$

Η εξίσωση μας είναι <u>αδύνατη και δεν έχει καμία λύση</u>

Άσκηση 7 – Λύση

i. Θα αντικαταστήσουμε στην εξίσωση την τιμή $\lambda = 3$ και θα πάρει την μορφή:

$3(x+1)+2 = 3\cdot x+\frac{3}{2}$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$3x+3+2 = 3x+\dfrac{3}{2}$

$3x+5 = 3x+\frac{3}{2}$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$3x-3x = -5+\frac{3}{2}$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$0x = \dfrac{-10}{2}+\dfrac{3}{2}$

$0x = \dfrac{-7}{2}$

Η εξίσωση μας για $\lambda = 3$ είναι <u>αδύνατη και δεν έχει καμία λύση</u>

ii. Θα αντικαταστήσουμε στην εξίσωση την τιμή $\lambda = 1$ και θα πάρει την μορφή:

$$1(x+1)+2 = x+\frac{3}{2}$$

$$x+1+2 = x+\frac{3}{2}$$

$$x+3 = x+\frac{3}{2}$$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$$x-x = -3+\frac{3}{2}$$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$$0x = \frac{-6}{2}+\frac{3}{2}$$

$$0x = -\frac{3}{2}$$

Η εξίσωση μας για $\lambda = 1$ είναι αδύνατη και δεν έχει καμία λύση

Άσκηση 8 – Λύση

Θα αντικαταστήσουμε στην εξίσωση την τιμή $x = 2$, αφού την επαληθεύει και δημιουργούμε μια εξίσωση α΄ βαθμού ως προς την μεταβλητή λ. Έχουμε:

$$2+3(\lambda+2) = 2\lambda-5$$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$$2+3\lambda+6 = 2\lambda-5$$

$$3\lambda+8 = 2\lambda-5$$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$$3\lambda-2\lambda = -8-5$$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$$\lambda = -13$$

Άσκηση 9 – Λύση

i. $\frac{4-x-3[5(x+5)-6(x+4)]}{4}=2^{-1}x+2^{-2}$ {εκτέλεση πράξεων- ιδιότητες δυνάμεων}

$\frac{4-x-3[5x+25-6x-24]}{4}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

$\frac{4-x-3(-x+1)}{4}=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$

$\frac{4-x+3x-3}{4}=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$

$\frac{2x+1}{4}=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$

$4(\frac{2x+1}{4})=4\cdot\frac{x}{2}+4\cdot\frac{1}{4}$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$2x+1=2x+1$

$2x-2x=-1+1$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$0x=0$

Η εξίσωση είναι <u>αόριστη ή ταυτότητα και έχει άπειρες λύσεις</u>

ii. $\frac{2\left(6-\frac{x}{6}\right)}{3}=\frac{15}{4}-\frac{3}{4}[\frac{x}{3}-2\left((-\frac{2}{3})^3\right]$ {εκτέλεση πράξεων- ιδιότητες δυνάμεων}

$\frac{2\left(\frac{36}{6}-\frac{x}{6}\right)}{3}=\frac{15}{4}-\frac{3}{4}[\frac{x}{3}-2\left(-\frac{8}{27}\right)]$

$\frac{2\left(\frac{36-x}{6}\right)}{3}=\frac{15}{4}-\frac{3}{4}\left[\frac{x}{3}+\frac{16}{27}\right]$

$\frac{\frac{36-x}{3}}{3}=\frac{15}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{27}$

$\frac{36-x}{9}=\frac{15}{4}-\frac{x}{4}-\frac{4}{9}$

$36\left(\frac{36-x}{9}\right)=36\cdot\frac{15}{4}-36\cdot\frac{x}{4}-36\cdot\frac{4}{9}$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$4(36-x)=9\cdot 15-9\cdot x-4\cdot 4$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$144-4x=135-9x-16$

$-4x+9x=-144+135-16$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$5x=-25$

$\frac{5x}{5}=\frac{-25}{5}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=-5$

Άσκηση 10 – Λύση

i. $\frac{x}{6}-\frac{x-\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0$

$\frac{x}{6}-\frac{\frac{2x}{2}-\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{3}=0$

Εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ των κλασμάτων και μετατρέπουμε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά

$\frac{x}{6}-\frac{\frac{2x-1}{2}}{3}-\frac{2}{15}+\frac{x}{9}=0$

$\frac{x}{6}-\frac{2x-1}{6}-\frac{2}{15}+\frac{x}{9}=0$

$90\cdot\frac{x}{6}-90\cdot\frac{(2x-1)}{6}-90\cdot\frac{2}{15}+90\cdot\frac{x}{9}=0$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$15x-15(2x-1)-6\cdot 2+10\cdot x=0$

$15x-30x+15-12+10x=0$

$-5x+3=0$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$-5x=-3$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$\frac{-5x}{-5}=\frac{-3}{-5}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=\frac{3}{5}$

ii. $\frac{x-\frac{2x+3}{9}}{8}-\frac{x-\frac{1}{3}}{2}=\frac{2x-\frac{5(x+3)}{6}}{4}-\frac{x+1}{3}$

Εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ των κλασμάτων και μετατρέπουμε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά

$\frac{\frac{9x}{9}-\frac{2x+3}{9}}{8}-\frac{\frac{3x}{3}-\frac{1}{3}}{2}=\frac{\frac{12x}{6}-\frac{5x+15}{6}}{4}-\frac{x+1}{3}$

$\frac{\frac{9x-(2x+3)}{9}}{8}-\frac{\frac{3x-1}{3}}{2}=\frac{\frac{12x-(5x+15)}{6}}{4}-\frac{x+1}{3}$

$\frac{9x-2x-3}{72}-\frac{3x-1}{6}=\frac{12x-5x-15}{24}-\frac{x+1}{3}$

$\frac{7x-3}{72}-\frac{3x-1}{6}=\frac{7x-15}{24}-\frac{x+1}{3}$

$72\frac{(7x-3)}{72}-72\frac{(3x-1)}{6}=72\frac{(7x-15)}{24}-72\frac{(x+1)}{3}$ {πολλαπλασιασμός με το Ε.Κ.Π.}

$(7x-3)-12(3x-1)=3(7x-15)-24(x+1)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$7x-3-36x+12=21x-45-24x-24$

$-29x+9=-3x-69$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$-29x+3x=-9-69$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-26x=-78$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-26x}{-26}=\frac{-78}{-26}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=3$

Εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ των κλασμάτων και μετατρέπουμε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά

iii. $\frac{x-\frac{2(x-6)}{3}}{8}+\frac{x+3}{5}=x-10+\frac{x-\frac{3x-6}{5}}{3}$

$\frac{\frac{3x}{3}-\frac{2x-12}{3}}{8}+\frac{x+3}{5}=x-10+\frac{\frac{5x}{5}-\frac{3x-6}{5}}{3}$

$\frac{\frac{3x-2x+12}{3}}{8}+\frac{x+3}{5}=x-10+\frac{\frac{5x-3x+6}{5}}{3}$

$\frac{x+12}{24}+\frac{x+3}{5}=x-10+\frac{2x+6}{15}$

$120\frac{(x+12)}{24}+120\frac{(x+3)}{5}=120x-120\cdot 10+120\frac{(2x+6)}{15}$ {πολλαπλασιασμός με Ε.Κ.Π.}

$5(x+12)+24(x+3)=120x-1200+8(2x+6)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$5x+60+24x+72=120x-1200+16x+48$

$29x+132=136x-1152$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$29x-136x=-132-1152$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-107x=-1284$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-107x}{-107}=\frac{-1284}{-107}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=12$

iv. $\frac{x-\frac{5}{3}}{2}-\frac{1-\frac{x}{3}}{4}+\frac{\frac{x}{2}}{6}-.\frac{x+1}{3}=\frac{5x+8}{12}$

Εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ των κλασμάτων και μετατρέπουμε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά

$$\frac{\frac{3x}{3}-\frac{5}{3}}{2}-\frac{\frac{3}{3}-\frac{x}{3}}{4}+\frac{x}{12}-\frac{x+1}{3}=\frac{5x+8}{12}$$

$$\frac{\frac{3x-5}{3}}{2}-\frac{\frac{3-x}{3}}{4}+\frac{x}{12}-\frac{x+1}{3}=\frac{5x+8}{12}$$

$$\frac{3x-5}{6}-\frac{3-x}{12}+\frac{x}{12}-\frac{x+1}{3}=\frac{5x+8}{12}$$

$12\frac{(3x-5)}{6}-12\frac{(3-x)}{12}+12\frac{x}{12}-12\frac{(x+1)}{3}=12\frac{(5x+8)}{12}$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$2(3x-5)-(3-x)+x-4(x+1)=5x+8$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$6x-10-3+x+x-4x-4=5x+8$

$4x-17=5x+8$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$4x-5x=17+8$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-x=25$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$x=-25$

v. $$\frac{\frac{3x-5}{2}-1}{4}=\frac{4(2x-7)}{9}+\frac{3-\frac{5(x-2)}{3}}{3}+\frac{13}{24}$$

$$\frac{\frac{3x-5}{2}-\frac{2}{2}}{4}=\frac{8x-28}{9}+\frac{\frac{9}{3}-\frac{5x-10}{3}}{3}+\frac{13}{24}$$

$$\frac{\frac{3x-5-2}{2}}{4}=\frac{8x-28}{9}+\frac{\frac{9-5x+10}{3}}{3}+\frac{13}{24}$$

Εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ των κλασμάτων και μετατρέπουμε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά

$$\frac{3x-7}{8}=\frac{8x-28}{9}+\frac{-5x+19}{9}+\frac{13}{24}$$

$72\frac{(3x-7)}{8}=72\frac{(8x-28)}{9}+72\frac{(-5x+19)}{9}+72\cdot\frac{13}{24}$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$9(3x-7)=8(8x-28)+8(-5x+19)+3\cdot 13$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$27x-63=64x-224-40x+152+39$

$27x-63=24x-33$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$27x-24x=63-33$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$3x=30$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{3x}{3}=\frac{30}{3}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=10$

Άσκηση 11 – Λύση

Στα δύο ερωτήματα της άσκησης,αρχικά θα απλοποιήσουμε τις παραστάσεις με χρήση επιμεριστικής ιδιότητας και αναγωγής ομοίων όρων, ώστε να τις φέρουμε σε απλούστερη μορφή και να δημιουργήσουμε τις εξισώσεις:

i. $A = 2(7x-4) - 0{,}3 - 5{,}4x = 14x - 8 - 0{,}3 - 5{,}4x$
$= 14x - 5{,}4x - 8 - 0{,}3 = 8{,}6x - 8{,}3$

$$B = 5 + 2{,}5(x+2) = 5 + 2{,}5x + 5 = 2{,}5x + 10$$

Δημιουργούμε την εξίσωση :

$A = B$

$8{,}6x - 8{,}3 = 2{,}5x + 10$

$8{,}6x - 2{,}5x = 8{,}3 + 10$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$6{,}1x = 18{,}3$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{6{,}1x}{6{,}1} = \frac{18{,}3}{6{,}1}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = \frac{183}{61}$

$x = 3$

ii. $A = 0{,}3(x-6) - 0{,}9(x-2) = 0{,}3x - 1{,}8 - 0{,}9x + 1{,}8 = -0{,}6x$

$B = 6{,}6 - 2(x + 3{,}3) = 6{,}6 - 2x - 6{,}6 = -2x$

Δημιουργούμε την εξίσωση :

$A = B$

$-0{,}6x = -2x$

$-0{,}6x + 2x = 0$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$1{,}4x = 0$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$x = 0$

Άσκηση 12 – Λύση

i. $3[2(x+5)-1]-x+2(x+6)=20x$ {εκτέλεση πράξεων κατά προτεραιότητα}

$3[2x+10-1]-x+2x+12=20x$

$3(2x+9)-x+2x+12=20x$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$6x+27-x+2x+12=20x$

$7x+39=20x$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$7x-20x=-39$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-13x=-39$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-13x}{-13}=\frac{-39}{-13}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=3$

ii. $2\{x+3[-(x+1)+2]\}=6(x+1)$ {εκτέλεση πράξεων κατά προτεραιότητα}

$2\{x+3[-x-1+2]\}=6x+6$

$2\{x+3[-x+1]\}=6x+6$

$2[x-3x+3]=6x+6$

$2(-2x+3)=6x+6$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$-4x+6=6x+6$

$-4x-6x=-6+6$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-10x=0$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-10x}{-10}=\frac{0}{-10}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=0$

iii. $1+5\{3[5-(7+x)+9]-7\}=26$ {εκτέλεση πράξεων κατά προτεραιότητα}

$1+5\{3[5-7-x+9]-7\}=26$

$1+5\{3[-x+7]-7\}=26$

$1+5[-3x+21-7]=26$

$1+5(-3x+14)=26$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$1-15x+70=26$

$-15x=-1-70+26$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-15x=-45$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-15x}{-15}=\frac{-45}{-15}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=3$

<u>Παρατήρηση</u> : Σε όλες τις ασκήσεις Διδασκαλίας, επιλέχθηκε να γίνεται η μεταφορά των αγνώστων-μεταβλητών στο αριστερό μέλος της εξίσωσης και των σταθερών όρων στο δεξί μέλος. Δεν υπάρχει γενικός κανόνας για την μεταφορά, απλά μια άτυπη σύμβαση.Οι εξισώσεις θα μπορούσαν να λυθούν με μεταφορά των αγνώστων στο δεξί μελος και των σταθερών όρων στο αριστερό.Η επιλογή είναι καθαρά στην κρίση του καθενός.

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 – Λύση

i. $5 - 7x + 2x = 12 - 2x - x - 15$

$5 - 5x = -3 - 3x$

$-5x + 3x = -5 - 3$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-2x = -8$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = 4$

ii. $3 - 2(x + 1) = 7 - 4(x + 2)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$3 - 2x - 2 = 7 - 4x - 8$

$1 - 2x = -4x - 1$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$-2x + 4x = -1 - 1$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$2x = -2$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{2x}{2} = \frac{-2}{2}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = -1$

iii. $2[4(x - 3) - (3 - x)] = 2(x + 2) - 5(5 - x)$

$2[4x - 12 - 3 + x] = 2x + 4 - 25 + 5x$

$2(5x - 15) = 7x - 21$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$10x - 30 = 7x - 21$

$10x - 7x = 30 - 21$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$3x = 9$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = 3$

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

iv. $-5-3[4-3(x+1)]=2[-2(1-x)-(1-2x)]$

$-5-3[4-3x-3]=2[-2+2x-1+2x]$

$-5-3(1-3x)=2(4x-3)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$-5-3+9x=8x-6$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$-8+9x=8x-6$

$9x-8x=8-6$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$x=2$

v. $7[4x-5(x-5)]-2x=2[3(x-8)-1]$ {εκτέλεση πράξεων κατά προτεραιότητα}

$7[4x-5x+25]-2x=2[3x-24-1]$

$7(-x+25)-2x=2(3x-25)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$-7x+175-2x=6x-50$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$-9x+175=6x-50$

$-9x-6x=-175-50$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-15x=-225$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-15x}{-15}=\frac{-225}{-15}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=15$

Άσκηση 2– Λύση

i. $-\frac{x+1}{2}-\frac{3x-1}{4}=1$

$-4\frac{(x+1)}{2}-4\frac{(3x-1)}{4}=4\cdot 1$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$-2(x+1)-(3x-1)=4$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$-2x-2-3x+1=4$

$-5x-1=4$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$-5x=4+1$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-5x=5$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-5x}{-5}=\frac{5}{-5}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=-1$

ii. $\frac{6+2(x-1)}{4}=\frac{5-2x}{2}$

$\frac{6+2x-2}{4}=\frac{5-2x}{2}$

$\frac{4+2x}{4}=\frac{5-2x}{2}$ {χιαστί γινόμενο}

$2(4+2x)=4(5-2x)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$8+4x=20-8x$

$4x+8x=20-8$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$12x=12$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{12}{12}=\frac{12}{12}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=1$

iii. $\frac{2(y+2)}{3}-\frac{20-y}{9}=\frac{5y-1}{18}-\frac{3y-13}{6}-1$

$\frac{2y+4}{3}-\frac{20-y}{9}=\frac{5y-1}{18}-\frac{3y-13}{6}-1$

$18\frac{(2y+4)}{3}-18\frac{(20-y)}{9}=18\frac{(5y-1)}{18}-18\frac{(3y-13)}{6}-18\cdot 1$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$6(2y+4)-2(20-y)=(5y-1)-3(3y-13)-18$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$12y+24-40+2y=5y-1-9y+39-18$

$16y-16=-4y+20$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$16y+4y=20+16$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$20y=36$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{20y}{20}=\frac{36}{20}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$y=\frac{9}{5}$

iv. $1-\left(\frac{y-5}{6}+2\right)=3-\left(1-\frac{y-7}{9}\right)$ {εκτέλεση πράξεων στα κλάσματα των πρενθέσεων}

$1-\left(\frac{y-5}{6}+\frac{12}{6}\right)=3-\left(\frac{9}{9}-\frac{y-7}{9}\right)$

$1-\left(\frac{y-5+12}{6}\right)=3-\left(\frac{9-y+7}{9}\right)$

$1-\left(\frac{y+7}{6}\right)=3-\left(\frac{16-y}{9}\right)$

$18\cdot 1-18\left(\frac{y+7}{6}\right)=3\cdot 18-18\left(\frac{16-y}{9}\right)$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$18-3(y+7)=54-2(16-y)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$18-3y-21=54-32+2y$

$-3y-3=22+2y$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$-3y-2y=22+3$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-5y=25$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-5y}{-5}=\frac{25}{-5}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$y=-5$

v. $\omega-\left(\frac{\omega+3}{2}-1\right)=2-\left(\frac{7\omega-4}{4}+\frac{2-4\omega}{6}\right)$ {εκτέλεση πράξεων στα κλάσματα των πρενθέσεων}

$\omega-\left(\frac{\omega+3}{2}-\frac{2}{2}\right)=2-\left(\frac{3(7\omega-4)}{12}+\frac{2(2-4\omega)}{12}\right)$

$\omega-\left(\frac{\omega+3-2}{2}\right)=2-\left(\frac{21\omega-12}{12}+\frac{4-8\omega}{12}\right)$

$\omega-\left(\frac{\omega+1}{2}\right)=2-\left(\frac{21\omega-12+4-8\omega}{12}\right)$

$\omega-\left(\frac{\omega+1}{2}\right)=2-\left(\frac{13\omega-8}{12}\right)$

$12\omega-12\left(\frac{\omega+1}{2}\right)=12\cdot 2-12\left(\frac{13\omega-8}{12}\right)$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$12\omega-6(\omega+1)=24-(13\omega-8)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$12\omega-6\omega-6=24-13\omega+8$

$6\omega-6=32-13\omega$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$6\omega+13\omega=32+6$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$19\omega=38$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{19\omega}{19}=\frac{38}{19}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$\omega=2$

vi. $\omega-\left(0{,}5\omega-\frac{\omega}{3}\right)=2\omega-\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\omega}{6}\right)$ {εκτέλεση πράξεων στα κλάσματα των πρενθέσεων}

$\omega-\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\omega}{3}\right)=2\omega-\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\omega}{6}\right)$

$\omega-\left(\frac{3\omega}{6}-\frac{2\omega}{6}\right)=2\omega-\left(\frac{3\omega}{12}-\frac{2\omega}{12}\right)$

$\omega-\left(\frac{\omega}{6}\right)=2\omega-\left(\frac{\omega}{12}\right)$

$12\omega-12\left(\frac{\omega}{6}\right)=12\cdot 2\omega-12\left(\frac{\omega}{12}\right)$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$12\omega-2\omega=24\omega-\omega$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$10\omega=23\omega$

$10\omega-23\omega=0$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$-13\omega=0$, άρα ω = 0

vii. $\frac{t-\frac{1}{4}}{3+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{t}{6}}{1-\frac{1}{3}}$

Εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ των κλασμάτων και μετατρέπουμε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά

$$\frac{\frac{4t}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{6}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{4}{6}-\frac{t}{6}}{\frac{3}{3}-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\frac{4t-1}{4}}{\frac{7}{2}}=\frac{\frac{4-t}{6}}{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{2(4t-1)}{28}=\frac{3(4-t)}{12}$$

$$\frac{4t-1}{14}=\frac{4-t}{4}$$

$4(4t-1)=14(4-t)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$16t-4=56-14t$

$16t+14t=56+4$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$30t=60$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$t=\frac{60}{30}=2$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

viii. $\frac{\frac{2t-3}{4}-\frac{1}{2}}{2-\frac{3}{4}}=\frac{\frac{t}{15}+\frac{1}{3}}{3-\frac{1}{3}}$

Εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ των κλασμάτων και μετατρέπουμε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά

$$\frac{\frac{2t-3}{4}-\frac{2}{4}}{\frac{8}{4}-\frac{3}{4}}=\frac{\frac{t}{15}+\frac{5}{15}}{\frac{9}{3}-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\frac{2t-3-2}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{\frac{t+5}{15}}{\frac{8}{3}}$$

$$\frac{4(2t-5)}{20}=\frac{3(t+5)}{120}$$

$\frac{2t-5}{5}=\frac{t+5}{40}$ {απλοποίηση παρανομαστών}

$8(2t-5)=t+5$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$16t - 40 = t + 5$

$16t - t = 40 + 5$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$15t = 45$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{15t}{15} = \frac{45}{15}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$t = 3$

Άσκηση 3 – Λύση

i. $5[2 - 3(x + 2)] - 2[x - 2(1 - x)] = \frac{3^{11}}{3^8} - 7^0$ {πράξεις και ιδιότητες δυνάμεων}

$5[2 - 3x - 6] - 2[x - 2 + 2x] = 3^{11-8} - 1$

$5(-3x - 4) - 2(3x - 2) = 3^3 - 1$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$-15x - 20 - 6x + 4 = 27 - 1$

$-21x - 16 = 26$

$-21x = 26 + 16$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-21x = 42$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-21x}{-21} = \frac{42}{-21}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = -2$

ii. $7-2^2[5-2(x+1)]=-(-2)^3(x-1)$

$7-4[5-2x-2]=-(-8)(x-1)$

$7-4(3-2x)=8(x-1)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$7-12+8x=8x-8$

$8x-5=8x-8$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$8x-8x=5-8$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$0x=-3$

Η εξίσωση είναι αδύνατη και δεν έχει καμία λύση.

iii. $2\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{6}(2x-1)\right]=\frac{3}{4}[2x-(x-1)]$

$2\left[\frac{x}{2}-\frac{2x-1}{6}\right]=\frac{3}{4}[2x-x+1]$

$2\left[\frac{3x}{6}-\frac{2x-1}{6}\right]=\frac{3}{4}(x+1)$

$2\left[\frac{3x-2x+1}{6}\right]=\frac{3}{4}(x+1)$

$2\left(\frac{x+1}{6}\right)=\frac{3}{4}(x+1)$

$\left(\frac{x+1}{3}\right)=\frac{3(x+1)}{4}$

$\left(\frac{x+1}{3}\right)=\frac{3x+3}{4}$

$4(x+1)=3(3x+3)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$4x+4=9x+9$

$4x-9x=9-4$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-5x=5$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-5x}{-5}=\frac{5}{-5}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=-1$

iv. $\frac{1-5(1-x)}{5}=\frac{x+2[3(x-2)+1]}{7}+\frac{22}{35}$

$\frac{1-5+5x}{5}=\frac{x+2[3x-6+1]}{7}+\frac{22}{35}$

$\frac{5x-4}{5}=\frac{x+2(3x-5)}{7}+\frac{22}{35}$

$\frac{5x-4}{5}=\frac{x+6x-10}{7}+\frac{22}{35}$

$\frac{5x-4}{5}=\frac{7x-10}{7}+\frac{22}{35}$

Εκτελούμε τις πράξεις με την προτεραιότητα,με χρήση επιμεριστικής ιδιότητας και ομώνυμων κλασμάτων

$35\left(\frac{5x-4}{5}\right)=35\left(\frac{7x-10}{7}\right)+35\cdot\frac{22}{35}$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$7(5x-4)=5(7x-10)+22$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$35x-28=35x-50+22$

$35x-35x=28-50+22$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$0x=0$

Η εξίσωση είναι αόριστη ή ταυτότητα και έχει άπειρες λύσεις.

v. $1+\{3[5-(7+x):9]-7\}\cdot 5=26$

$1+\left\{3\left[5-\frac{7+x}{9}\right]-7\right\}\cdot 5=26$

$1+\left\{3\left[\frac{45}{9}-\frac{7+x}{9}\right]-7\right\}\cdot 5=26$

$1+\left\{3\left[\frac{45-7-x}{9}\right]-7\right\}\cdot 5=26$

$1+\left\{3\left[\frac{38-x}{9}\right]-7\right\}\cdot 5=26$

$1+\left[\frac{38-x}{3}-7\right]\cdot 5=26$

$1+\left[\frac{38-x}{3}-\frac{21}{3}\right]\cdot 5=26$

$1+\left[\frac{38-x-21}{3}\right]\cdot 5=26$

$1+\left(\frac{17-x}{3}\right)\cdot 5=26$

$1+\left(\frac{85-5x}{3}\right)=26$

$3\cdot 1+3\left(\frac{85-5x}{3}\right)=3\cdot 26$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$3+85-5x=78$

$88-5x=78$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$-5x=78-88$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-5x=-10$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-5x}{-5}=\frac{-10}{-5}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=2$

Εκτελούμε τις πράξεις συμφωνα με την προτεραιότητα σε αγκύλες και παρενθέσεις

vi. $\frac{14x+1}{3} - x = \frac{17x+4}{3} - (2x+1)$

$\frac{14x+1}{3} - \frac{3x}{3} = \frac{17x+4}{3} - \frac{3(2x+1)}{3}$

$\frac{14x+1-3x}{3} = \frac{17x+4-6x-3}{3}$

$\frac{11x+1}{3} = \frac{11x+1}{3}$ {απλοποίηση παρανομαστών}

$11x+1 = 11x+1$

$11x - 11x = 1 - 1$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$0x = 0$

Η εξίσωση είναι αόριστη ή ταυτότητα και έχει άπειρες λύσεις.

vii. $\frac{x-5}{2} - \frac{7x}{2} = -\frac{14}{4} - (3x-9)$

$\frac{x-5-7x}{2} = -\frac{7}{2} - (3x-9)$

$2(\frac{x-5-7x}{2}) = 2(-\frac{7}{2}) - 2(3x-9)$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$-5 - 6x = -7 - 6x + 18$

$-5 - 6x = -6x + 11$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$-6x + 6x = 5 + 11$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$0x = 16$.

Η εξίσωση είναι αδύνατη και δεν έχει καμία λύση.

Άσκηση 4 – Λύση

i. $\frac{x-\frac{5}{2}}{3}-\frac{3\left(x+\frac{4}{3}\right)}{5}+\frac{7}{2}=0$

$30\left(\frac{x-\frac{5}{2}}{3}\right)-30\left(\frac{3\left(x+\frac{4}{3}\right)}{5}\right)+30\cdot\frac{7}{2}=0$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$10\left(x-\frac{5}{2}\right)-6\left[3\left(x+\frac{4}{3}\right)\right]+15\cdot 7=0$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$10x-\frac{50}{2}-6\left(3x+\frac{12}{3}\right)+105=0$

$10x-25-18x-24+105=0$

$-8x+56=0$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$-8x=-56$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$\frac{-8x}{-8}=\frac{-56}{-8}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=7$

ii. $\frac{\frac{x}{2}+3}{2}-\frac{2(3x+4)}{3}=\frac{5\left(\frac{3x}{2}-5\right)}{6}$

$6\left(\frac{\frac{x}{2}+3}{2}\right)-6\left(\frac{6x+8}{3}\right)=6\left[\frac{5\left(\frac{3x}{2}-5\right)}{6}\right]$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$3\left(\frac{x}{2}+3\right)-2(6x+8)=5\left(\frac{3x}{2}-5\right)$

$\frac{3x}{2}+9-12x-16=\frac{15x}{2}-25$

$\frac{3x}{2}-12x-7=\frac{15x}{2}-25$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$2\cdot\frac{3x}{2}-2\cdot 12x-2\cdot 7=2\cdot\frac{15x}{2}-2\cdot 25$

$3x-24x-14=15x-50$

$-21x-14=15x-50$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$-21x-15x=14-50$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-36x=-36$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-36x}{-36}=\frac{-36}{-36}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=1$

iii. $\dfrac{\frac{5x+1}{2}-\frac{x}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}=\dfrac{14x+8}{5}$

Εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ των κλασμάτων και μετατρέπουμε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά

$\dfrac{\frac{3(5x+1)}{6}-\frac{x}{6}}{\frac{4}{6}+\frac{1}{6}}=\dfrac{14x+8}{5}$

$\dfrac{\frac{15x+3}{6}-\frac{x}{6}}{\frac{5}{6}}=\dfrac{14x+8}{5}$

$\dfrac{\frac{15x+3-x}{6}}{\frac{5}{6}}=\dfrac{14x+8}{5}$

$\dfrac{14x+3}{5}=\dfrac{14x+8}{5}$ {απλοποίηση παρανομαστών}

$14x+3=14x+8$

$14x-14x=8-3$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$0x=5$

Η εξίσωση είναι αδύνατη και δεν έχει καμία λύση.

iv. Υπολογίζουμε την τιμή της παραμέτρου από την αριθμητική τιμή της παράστασης.Την τιμή που θα βρούμε θα την αντικαταστήσουμε στην εξίσωση και έχουμε :

$$\lambda=\frac{3\cdot 7-2^4+5}{2(-3)^2-4(-2)^2}=\frac{21-16+5}{2\cdot 9-4\cdot 4}=\frac{10}{2}=5$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και γίνεται:

$(5-7)x=6$

$-2x=6$

$\dfrac{-2x}{-2}=\dfrac{6}{-2}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=-3$

Άσκηση 5 – Λύση

Θα απλοποιήσουμε τις παραστάσεις με χρήση επιμεριστικής ιδιότητας (με την προτεραιότητα των πράξεων σε παρενθέσεις και αγκύλες) και κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων. Όποτε έχουμε:

i. $A = 3 - 2[x - 3 - 2(x-2)] = 3 - 2[x - 3 - 2x + 4]$

$$= 3 - 2(-x+1) = 3 + 2x - 2 = 2x + 1$$

$$B = 5[4 - 3(x+2)] - 3[-2(x-5) - 9] + 4x + 3 =$$
$$5[4 - 3x - 6] - 3[-2x + 10 - 9] + 4x + 3 =$$
$$5(-3x - 2) - 3(-2x + 1) + 4x + 3 =$$
$$-15x - 10 + 6x - 3 + 4x + 3 = -15x + 6x + 4x - 10 - 3 + 3$$
$$= (-15 + 6 + 4)x - 10 = -5x - 10$$

ii. $A - B = -3$

$2x + 1 - (-5x - 10) = -3$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$2x + 1 + 5x + 10 = -3$

$7x + 11 = -3$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$7x = -11 - 3$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$7x = -14$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{7x}{7} = \frac{-14}{7}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = -2$

Άσκηση 6 – Λύση

i. Θα μετατρέψουμε τους όρους σε ομώνυμα κλάσματα και θα κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

$$A=\frac{x-3}{2}+5=\frac{x-3}{2}+\frac{10}{2}=\frac{x-3+10}{2}=\frac{x+7}{2}$$

$$B=1-\frac{4-x}{5}=\frac{5}{5}-\frac{4-x}{5}=\frac{5-4+x}{5}=\frac{1+x}{5}$$

ii. Για την εξίσωση $A=B$ αντικαθιστώντας έχουμε :

$\frac{x+7}{2}=\frac{1+x}{5}$ {χιαστί γινόμενο}

$5(x+7)=2(1+x)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$5x+35=2+2x$

$5x-2x=2-35$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$3x=-33$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{3x}{3}=\frac{-33}{3}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=-11$

Ενώ για την εξίσωση $A=-B$ αντικαθιστώντας έχουμε :

$\frac{x+7}{2}=-\frac{1+x}{5}$ {χιαστί γινόμενο}

$5(x+7)=-2(1+x)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$5x+35=-2-2x$

$5x+2x=-2-35$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$7x=-37$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{7x}{7}=\frac{-37}{7}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=\frac{-37}{7}$

Άσκηση 7 – Λύση

i. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση όπου λ=0 και έχουμε:

$(0-4)x = 3 \cdot 0 - 2x$

$-4x = -2x$

$-4x + 2x = 0$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-2x = 0$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$x = 0$

Για την τιμή της παραμέτρου $\lambda = 0$ η εξίσωση εχει μοναδική λύση την $x = 0$

ii. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση όπου λ=2 και έχουμε:

$(2-4)x = 3 \cdot 2 - 2x$

$-2x = 6 - 2x$

$-2x + 2x = 6$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$0x = 6$

Για την τιμή της παραμέτρου $\lambda = 2$ η εξίσωση είναι αδύνατη (καμία λύση)

Άσκηση 8 – Λύση

i. Θα υπολογίσουμε την τιμη της παραμέτρου λ από την λύση της δοθείσας αριθμητικής παράστασης, έχοντας υπόψιν τις ιδιότητες των δυνάμεων και εκτελώντας τις πράξεις σύμφωνα με την προτεραιότητα τους :

$$\lambda = [5^2 + (2^7)^3 : 2^{20}] : (-3)^2 = [25 + 2^{21} : 2^{20}] : 9 = [25 + 2^{21-20}] : 9$$
$$= (25 + 2) : 9 = 27 : 9 = 3$$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην εξίσωση έχουμε :

$3^2(x-1) = 4(x-3+1)$

$9(x-1) = 4(x-2)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$9x - 9 = 4x - 8$

$9x - 4x = 9 - 8$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$5x = 1$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{5x}{5} = \frac{1}{5}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = \frac{1}{5}$

Για $\lambda = 3$ η εξίσωση έχει μοναδιή λύση την $x = \frac{1}{5}$.

ii. Όμοια με το πρώτο ερώτημα θα βρούμε την τιμή της παραμέτρου κι θα την αντικαταστήσουμε στην εξίσωση :

$$\lambda = \frac{(-2)^3(-3)^2 - 7(-6) - 6(-4)}{-6 \cdot 8 - 5(-7) + 10} = \frac{-8 \cdot 9 + 42 + 24}{-48 + 35 + 10} = \frac{-72 + 66}{-3} = \frac{-6}{-3}$$
$$= 2$$

Αντικαθιστώντας την τιμη αυτή στην εξίσωση έχουμε :

$$2^2(x-1) = 4(x-2+1)$$

$$4(x-1) = 4(x-1)$$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$$4x-4 = 4x-4$$

$$4x-4x = 4-4$$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$$0x = 0$$

Για $\lambda = 2$ η εξίσωση είναι αόριστη ή ταυτότητα και έχει άπειρες λύσεις.

Άσκηση 9 – Λύση

Αφού η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = 7$, θα την αντικαταστήσουμε και θα προκύψει μια εξίσωση α΄βαθμού ως προς λ. Η εξίσωση γίνεται :

$$\frac{3+(\lambda-3)\cdot 7}{5} + \frac{(\lambda-1)\cdot 7-2}{2} = \frac{7\lambda+\lambda+1}{10}$$ {πράξεις στους αριθμητές των κλασμάτων}

$$\frac{3+7\lambda-21}{5} + \frac{7\lambda-7-2}{2} = \frac{8\lambda+1}{10}$$

$$\frac{7\lambda-18}{5} + \frac{7\lambda-9}{2} = \frac{8\lambda+1}{10}$$

$$10\left(\frac{7\lambda-18}{5}\right) + 10\left(\frac{7\lambda-9}{2}\right) = 10\left(\frac{8\lambda+1}{10}\right)$$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$$2(7\lambda-18) + 5(7\lambda-9) = 8\lambda+1$$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$$14\lambda - 36 + 35\lambda - 45 = 8\lambda + 1$$

$$49\lambda - 81 = 8\lambda + 1$$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$$49\lambda - 8\lambda = 81 + 1$$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$$\lambda = \frac{82}{41} = 2$$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

Για την λύση $x = 2$ αντιστοιχεί η τιμή $\lambda = 2$, της παραμέτρου.

Άσκηση 10 – Λύση

Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι για να είναι μια εξίσωση α΄βαθμού στην μορφή $\boldsymbol{\alpha x} = \boldsymbol{\beta}$ αδύνατη θα πρέπει ταυτόχρονα να ισχύει :

1. Ο συντελεστής α του αγνώστου να είναι ίσος με το μηδέν.
2. Ο σταθερός όρος β να είναι διάφορος του μηδέν.

Στην περιπτωσή μας, θα πρέπει $\boldsymbol{\lambda + 1 = 0}$ ή $\boldsymbol{\lambda = -1}$

Οπότε καταλήγουμε στην μορφή:

$$0x = 2$$

Άσκηση 11 – Λύση

Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι για να είναι μια εξίσωση α΄βαθμού στην μορφή $\boldsymbol{\alpha x} = \boldsymbol{\beta}$, ταυτότητα θα πρέπει ταυτόχρονα να ισχύει:

1. Ο συντελεστής α του αγνώστου να είναι ίσος με το μηδέν.
2. Ο σταθερός όρος β να είναι ίσος με το μηδέν.

Θα πρέπει $\boldsymbol{2\lambda - 1 = 0}$ και ταυτόχρονα $\boldsymbol{5 + 3\mu = 0.}$ Επιλύουμε κάθε μια εξίσωση α΄βαθμου ως προς λ και μ και έχουμε :

- $2\lambda - 1 = 0$, άρα $2\lambda = 1$ άρα $\lambda = \frac{1}{2}$
- $5 + 3\mu = 0$, άρα $3\mu = -5$ άρα $\mu = \frac{-5}{3}$

Άσκηση 12 – Λύση

i. $3(x-1)+5=\frac{x}{2}+3$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$3x-3+5=\frac{x}{2}+3$

$3x+2=\frac{x}{2}+3$

$2\cdot 3x+2\cdot 2=2\frac{x}{2}+2\cdot 3$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$6x+4=x+6$

$6x-x=6-4$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$5x=2$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{5x}{5}=\frac{2}{5}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x=\frac{2}{5}$

ii. Αντικαθιστούμε την τιμή $x=\frac{2}{5}$ στην εξίσωση (2) , αφού είναι κοινή τους λύση. Θα καταλήξουμε σε μια εξίσωση α΄βαθμού ως προς λ,οπότε έχουμε :

$(\lambda+2)\frac{2}{5}=2\lambda-4$

$\frac{2(\lambda+2)}{5}=2\lambda-4$ {χιαστί γινόμενο}

$2(\lambda+2)=5(2\lambda-4)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$2\lambda+4=10\lambda-20$

$2\lambda-10\lambda=-4-24$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-8\lambda=-28$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-8\lambda}{-8}=\frac{-28}{-8}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$\lambda=\frac{7}{2}$

Άσκηση 13 – Λύση

i. Η Περίμετρος του τετραπλεύρου ισούται με το άθροισμα των μηκών των πλευρών του. Δημιουργούμε την παράσταση της Περιμέτρου (Π) την οποία θα απλοποιήσουμε με αναγωγή όμοιων όρων. Η παράσταση είναι :

$$\varPi = (2x-3)+x+(x+2)+2(x+1) = 2x-3+x+x+2+2x+2$$
$$= x+x+2x+2x-3+2+2 = (1+1+2+2)x+1 = 6x+1$$

Δημιουργούμε την εξίσωση $\varPi = 25$ από τα δεδομένα και έχουμε :

$6x+1=25$

$6x=25-1$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$6x=24$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{6x}{6}=\frac{24}{6}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = 4\ cm$

ii. Αντικαθιστούμε την τιμή του x σε κάθε μία από τις πλευρές και υπολογίζουμε τα μέτρα τους:

$A\varDelta = 2x-3 = 2\cdot 4-3 = 5\ cm$

$AB = x = 4\ cm$

$B\varGamma = x+2 = 4+2 = 6\ cm$

$\varGamma\varDelta = 2(x+1) = 2(4+1) = 10\ cm$

Άσκηση 14 – Λύση

i. Η Περίμετρος του Τριγώνου ισούται με το άθροισμα των μηκών των τριών πλευρών του. Δημιουργούμε την παράσταση της Περιμέτρου (Π) την οποία θα απλοποιήσουμε με αναγωγή ομοίων όρων. Η παράσταση είναι :

$$\begin{aligned} \Pi &= (3x-4)+(2x-3)+(x+6) = 3x-4+2x-3+x+6 \\ &= 3x+2x+x-4-3+6 = (3+2+1)x-1 = 6x-1 \end{aligned}$$

Δημιουργούμε την εξίσωση $\Pi = 17cm$ και έχουμε :

$6x-1=17$

$6x = 17+1$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$6x = 18$

$\frac{6x}{6} = \frac{18}{6}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = 3\ cm$

ii. Αντικαθιστούμε την τιμή του x σε κάθε μία από τις πλευρές και υπολογίζουμε τα μέτρα τους

$$\Gamma A = 3x-4 = 3\cdot 3-4 = 5\ cm$$
$$AB = 2x-3 = 2\cdot 3-3 = 3\ cm$$
$$B\Gamma = x+6 = 3+6 = 9\ cm$$

Άσκηση 15 – Λύση

i. Το Τρίγωνο είναι ισοσκελές οπότε θα ισχύει $AB = A\Gamma$. Από την ισότητα αυτή δημιουργούμε την εξίσωση :

$AB = A\Gamma$

$3(x+1) - 4 = 6 - (x-1)$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$3x + 3 - 4 = 6 - x + 1$ {αναγωγή ομοίων όρων}

$3x - 1 = 7 - x$

$3x + x = 7 + 1$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$4x = 8$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = 2\ cm$

Υπολογίζουμε τις ίσες πλευρές του Τριγώνου αντικαθιστώντας όπου $x = 2\ cm$

$$AB = A\Gamma = 3(x+1) - 4 = 3(2+1) - 4 = 9 - 4 = 5\ cm$$

Για την Περίμετρο του θα ισχύει η ισότητα:

$$\Pi = AB + A\Gamma + B\Gamma = 14\ cm$$

Οπότε δημιουργούμε την εξίσωση :

$5 + 5 + \frac{y+7}{2} - \frac{y+1}{4} = 14$ {εκτέλεση των δυνατών πράξεων}

$10 + \frac{y+7}{2} - \frac{y+1}{4} = 14$

$\frac{y+7}{2} - \frac{y+1}{4} = 14 - 10$

$\frac{y+7}{2} - \frac{y+1}{4} = 4$

$4\frac{(y+7)}{2} - 4\frac{(y+1)}{4} = 4 \cdot 4$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$2(y+7) - (y+1) = 16$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$2y + 14 - y - 1 = 16$

$y + 13 = 16$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$y = 16 - 13$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$y = 3\,cm$

Άσκηση 16 – Λύση

Στην εξίσωση αυτή παρατηρούμε την ύπαρξη δυνάμεων με βάση το δύο. Λόγω του ότι οι εκθέτες είναι αρκετά μεγάλοι δεν μπορούν να υπολογιστούν , οπότε σκεφτόμαστε ότι ο αριθμός 64 μπορεί να γραφτεί ως δύναμη με βάση του 2.

Ισχύει ότι: $64 = 2^6$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση λαμβάνουμε τα ακόλουθα:

$\frac{2^{2021}+x}{2^{2015}} = 2^6$

$2^{2021} + x = 2^{2015} \cdot 2^6$

$2^{2021} + x = 2^{2015+6}$

$2^{2021} + x = 2^{2021}$

$x = 2^{2021} - 2^{2021}$

$x = 0$

Άσκηση 17 – Λύση

i. Θα υπολογίσουμε την παράσταση με χρήση των ιδιοτήτων των δυνάμεων ως εξής :

$$A = [\left(\frac{-3}{2}\right)^{-2}]^3 : [\left(-\frac{4}{8}\right)^4]^{-2} =$$

$$(\frac{-3}{2})^{-6} : (\frac{-1}{2})^{-8} =$$

$$(\frac{3}{2})^{-6} : (\frac{1}{2})^{-8} =$$

$$(\frac{2}{3})^6 : (\frac{2}{1})^8 =$$

$$\frac{2^6}{3^6} \cdot \frac{1}{2^8} =$$

$$\frac{2^6}{3^6 \cdot 2^8} =$$

$$\frac{1}{3^6 \cdot 2^2}$$

ii. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση την τιμή της παράστασης και έχουμε :

$$Ax = \frac{1}{81}$$

$$\frac{1}{3^6 \cdot 2^2}x = \frac{1}{81}$$

$$\frac{x}{3^6 \cdot 2^2} = \frac{1}{3^4}$$

$$3^4 x = 3^6 \cdot 2^2$$

$$\frac{3^4 x}{3^4} = \frac{3^6 \cdot 4}{3^4}$$

$$x = 3^{6-4} \cdot 4$$

$$x = 3^2 \cdot 4$$

$$x = 9 \cdot 4$$

$$x = 36$$

Άσκηση 18 – Λύση

i. $A = 3(2^3 - 1) - 3^2[20 + (-3)^3] - 8[(-5)^2 - 15] = 3(8 - 1) - 9[20 - 27] - 8[25 - 15] = 3 \cdot 7 - 9 \cdot (-7) - 8 \cdot 10 = 21 + 63 - 80 = 4$

$$B = (2^8)^5(2^{-9})^4 - \frac{[-8 - 3(9 - 11)]^{24}}{2^{22}} = 2^{40}2^{-36} - \frac{[-8 - 27 + 33]^{24}}{2^{22}}$$
$$= 2^{40-36} - \frac{[-2]^{24}}{2^{22}} = 2^4 - \frac{2^{24}}{2^{22}} = 16 - 2^{24-22} = 16 - 2^2$$
$$= 16 - 4 = 12$$

ii. $\frac{x-1}{4} - \left[\frac{x+2}{12:4} - \left(\frac{5-x}{12} + 1\right) - 3\right] = 1$

$\frac{x-1}{4} - \left[\frac{(x+2)}{3} - \left(\frac{5-x}{12} + \frac{12}{12}\right) - 3\right] = 1$

$\frac{x-1}{4} - \left[\frac{(x+2)}{3} - \left(\frac{5-x+12}{12}\right) - 3\right] = 1$

$\frac{x-1}{4} - \left[\frac{x+2}{3} - \left(\frac{17-x}{12}\right) - 3\right] = 1$

$\frac{x-1}{4} - \left[\frac{4(x+2)}{12} - \left(\frac{17-x}{12}\right) - \frac{36}{12}\right] = 1$

$\frac{x-1}{4} - \left[\frac{4x+8}{12} - \left(\frac{17-x}{12}\right) - \frac{36}{12}\right] = 1$

$\frac{x-1}{4} - \left[\frac{4x+8-17+x-36}{12}\right] = 1$

$\frac{x-1}{4} - \left[\frac{5x-45}{12}\right] = 1$

Εκτελούμε τις πράξεις κατά προτεραιότητα μεσα σε

αγκύλες ή παρενθέσεις μετατρέποντας κλάσματα σε ομώνυμα.

$12\frac{(x-1)}{4} - 12\left[\frac{5x-45}{12}\right] = 12 \cdot 1$ {πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π.}

$3(x - 1) - (5x - 45) = 12$ {επιμεριστική ιδιότητα}

$3x - 3 - 5x + 45 = 12$

$-2x + 42 = 12$

$-2x = -42 + 12$ {χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους}

$-2x = -30$ {αναγωγή ομοίων όρων και στα δύο μέλη}

$\frac{-2x}{-2} = \frac{-30}{-2}$ {διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}

$x = 15$

1.3. Επίλυση Τύπων

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Άσκηση 1 – Λύση

i. Λάθος.

Η λύση είναι : $2\alpha = \beta + \gamma$ άρα $\beta = 2\alpha - \gamma$.

ii. Λάθος.

Με κατάλληλη μεταφορά γνωστών – αγνώστων έχουμε :$\alpha - \gamma - \delta = \beta$.

iii. Λάθος.

Η λύση ως προς β είναι : $\frac{2E}{\upsilon}$.

iv. Λάθος.

Η λύση ως προς α είναι : $\frac{E}{\beta\gamma}$

v. Σωστό.

vi. Σωστό.

Άσκηση 2 – Λύση

i. Λύνοντας τον τύπο της Περιμέτρου θεωρώντας ως μεταβλητή το β και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς έχουμε :

$4\alpha + 3\beta + 2\gamma + \delta = \Pi$

$3\beta = \Pi - 4\alpha - 2\gamma - \delta$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$\beta = \frac{\Pi - 4\alpha - 2\gamma - \delta}{3}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

Οπότε σωστή επιλογή η (ii).

ii. Λύνοντας τον τύπο της Ενεργειας (Ε) θεωρώντας ως μεταβλητή το m και θεωρώντας τους υπόλοιπους όρους σταθερούς έχουμε :

$mgh + \frac{1}{2}mu^2 = E$

$2mgh + mu^2 = 2E$ {Πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π}

$m(2gh + u^2) = 2E$ {Αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας}

$m = \frac{2E}{2gh+u^2}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

Οπότε σωστή επιλογή η (iii).

iii. Λύνοντας τον τύπο θεωρώντας ως μεταβλητή το x_1 και θεωρώντας τους υπόλοιπους όρους σταθερούς έχουμε :

$ax^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$

$\alpha(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + \beta x + \gamma$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$(x - x_1) = \frac{ax^2+\beta x+\gamma}{\alpha(x-x_2)}$ {Διαίρεση με τον σταθερό όρο $\alpha(x - x_2)$}

$x - x_1 = \frac{ax^2+\beta x+\gamma}{a(x-x_2)}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

$-x_1 = \frac{ax^2+\beta x+\gamma}{a(x-x_2)} - x$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$x_1 = -\left(\frac{ax^2+\beta x+\gamma}{a(x-x_2)} - x\right)$ {Αν ισχύει $-\alpha = \beta$ τότε $\alpha = -\beta$}

$x_1 = -\frac{ax^2+\beta x+\gamma}{a(x-x_2)} + x$

$x_1 = x - \frac{ax^2+\beta x+\gamma}{a(x-x_2)}$ {Απαλοιφή Παρενθέσεων}

Οπότε σωστή επιλογή η (iv).

Ασκήσεις Για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

i. Θεωρούμε ως μεταβλητή το β και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς και έχουμε:

$E = \frac{\beta\cdot\upsilon}{2}$ {Χιαστί γινόμενο}

$2E = \beta\cdot\upsilon$

$\beta\cdot\upsilon = 2E$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$\beta = \frac{2E}{\upsilon}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

ii. Θεωρούμε ως μεταβλητή το t και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς και έχουμε:

$\upsilon = \upsilon_0 + a\cdot t$

$\upsilon - \upsilon_0 = a\cdot t$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$a\cdot t = \upsilon - \upsilon_0$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$t = \frac{\upsilon-\upsilon_0}{a}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

iii. Θεωρούμε ως μεταβλητή το ρ και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς και έχουμε:

$L = 2\pi\rho$

$2\pi\rho = L$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$\rho = \frac{L}{2\pi}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

iv. Θεωρούμε ως μεταβλητή το $\alpha + \beta$ και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς και έχουμε:

$\Pi = 2\alpha + 2\beta$

$\Pi = 2(\alpha + \beta)$ {Αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας}

$2(\alpha + \beta) = \Pi$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$\alpha + \beta = \frac{\Pi}{2}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

v. Θεωρούμε ως μεταβλητή το z και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς και έχουμε:

$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$

$\gamma z = -\alpha x - \beta y$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$z = \frac{-\alpha x - \beta y}{\gamma}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

Άσκηση 2 – Λύση

i. Θεωρούμε ως μεταβλητή το ρ και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς και έχουμε:

$E = 2\pi \cdot \rho \cdot \upsilon$

$2\pi \cdot \upsilon \cdot \rho = E$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$\rho = \frac{E}{2\pi \cdot \upsilon}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

ii. Θεωρούμε ως μεταβλητή το υ και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς και έχουμε:

$E = 2\pi \cdot \rho \cdot \upsilon$

$2\pi \cdot \upsilon \cdot \rho = E$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$\upsilon = \frac{E}{2\pi \cdot \rho}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

Άσκηση 3 – Λύση

i. Θεωρούμε ως μεταβλητή το v_0 και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς και έχουμε:

$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$

$2s = 2v_0 \cdot \mathrm{t} + \alpha \cdot t^2$ {Πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π}

$2s - a \cdot t^2 = 2v_0 \cdot \mathrm{t}$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$2v_0 \cdot \mathrm{t} = 2s - a \cdot t^2$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$v_0 = \frac{2s - a \cdot t^2}{2t}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

ii. Θεωρούμε ως μεταβλητή το α και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς και έχουμε:

$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$

$2s = 2v_0 \cdot \mathrm{t} + \mathrm{\alpha} \cdot t^2$ {Πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π}

$2s - 2v_0 \cdot t = a \cdot t^2$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$a \cdot t^2 = 2s - 2v_0 \cdot t$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$a = \frac{2s - 2v_0 \cdot t}{t^2}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

Άσκηση 4 – Λύση

i. Θεωρούμε ως μεταβλητή το C και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς και έχουμε:

$F = 1{,}8 \cdot C + 32$

$F - 32 = 1{,}8 \cdot C$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$1{,}8 \cdot C = F - 32$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$C = \frac{F-32}{1{,}8}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

a) Αντικαθιστούμε στον τύπο του (i), $F = 0$ και έχουμε:

$C = \frac{0-32}{1{,}8}$

$C = \frac{-32}{1{,}8}$

$C = -\frac{160}{9}$ βαθμοί Κελσίου

b) Αντικαθιστούμε στην αρχική μας εξίσωση, όπου $C = 0$ και έχουμε:

$F = 1{,}8 \cdot C + 32$

$F = 1{,}8 \cdot 0 + 32$

$F = 32$ βαθμοί Φαρενάιτ

ii. Θεωρούμε ως μεταβλητή το K και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς και έχουμε:

$$K = C + 273$$

Οπότε αντικαθιστούμε όπου $K = 300$ και έχουμε:

$K = C + 273$

$K - 273 = C$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$C = K - 273$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$C = 300 - 273$

$C = 27\ βαθμούς\ Κελσίου$

Άσκηση 5 – Λύση

i. Θεωρούμε ως μεταβλητή το β και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς. Οπότε έχουμε:

$E = \frac{(\beta+B)\upsilon}{2}$ {Χιαστί γινόμενο}

$2E = (\beta + B)\upsilon$

$\frac{2E}{\upsilon} = \beta + B$ {Διαίρεση με τον σταθερό όρο υ}

$\beta + B = \frac{2E}{\upsilon}$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$\beta = \frac{2E}{\upsilon} - B$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

Αν θεωρήσουμε ως μεταβλητή το υ και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς, τότε η ισότητα γίνεται:

$E = \frac{(\beta+B)\upsilon}{2}$ {Χιαστί γινόμενο}

$2E = (\beta + B)\upsilon$

$(\beta + B)\upsilon = 2E$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$\upsilon = \frac{2E}{(\beta+B)}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

ii. Αντικαθιστούμε στον τύπο του ύψους, όπου $E = 35cm^2, B = 8cm, \beta = 6cm$ και λαμβάνουμε ότι:

$$\upsilon = \frac{2E}{(\beta+B)}$$

$$\upsilon = \frac{2\cdot 35}{(6+8)}$$

$$\upsilon = \frac{70}{14}$$

$$\upsilon = 5cm$$

iii. Αντικαθιστούμε στον τύπο της μικρής βάσης, όπου $E = 80cm^2, \beta = 8cm, \upsilon = 8cm$ και έχουμε:

$$\beta = \frac{2E}{\upsilon} - B$$

$$8 = \frac{2\cdot 80}{8} - B$$

$$B = \frac{160}{8} - 8$$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$B = 20 - 8$ = 12 cm

Άσκηση 6 – Λύση

i. Θεωρώντας μεταβλητή τις μοίρες μ και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς, έχουμε:

$$l = \frac{\pi\cdot\rho\cdot\mu}{180}$$ {Χιαστί γινόμενο}

$$180\cdot l = \pi\cdot\rho\cdot\mu$$

$$\pi\cdot\rho\cdot\mu = 180\cdot l$$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$$\mu = \frac{180\cdot l}{\pi\rho}$$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

ii. Θα αντικαταστήσουμε στον αρχικό μας τύπο $\mu = 60^0, \rho = 4cm$.Οπότε έχουμε:

$$l = \frac{\pi\cdot\rho\cdot\mu}{180} = \frac{\pi\cdot 4\cdot 60}{180} = \frac{240\pi}{180} = \frac{4\pi}{3}\ cm$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 – Λύση

i. $E = \alpha \cdot \beta$ {Θεωρούμε μεταβλητή το β}

$\alpha \cdot \beta = E$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$\beta = \frac{E}{\alpha}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

ii. $s = (v - v_0)t$ {Θεωρούμε μεταβλητή το v}

$s = vt - v_0 t$ {Επιμεριστική ιδιότητα}

$vt - v_0 t = s$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$vt = v_0 t + s$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$v = \frac{v_0 t + s}{t}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

iii. $pV = nRT$ {Θεωρούμε μεταβλητή το T}

$nRT = pV$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$T = \frac{pV}{nR}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

iv. $\Pi = 2\alpha + 2\beta$ {Θεωρούμε μεταβλητή το $\alpha + \beta$}

$\Pi = 2(\alpha + \beta)$ {Αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας}

$2(\alpha + \beta) = \Pi$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$\alpha + \beta = \frac{\Pi}{2}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

v. $a = \frac{v-v_0}{t-t_0}$ {Θεωρούμε μεταβλητή το t}

$a(t-t_0) = v - v_0$ {Χιαστί γινόμενο}

$at - at_0 = v - v_0$ {Επιμεριστική ιδιότητα}

$at = at_0 + v - v_0$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$t = \frac{at_0+v-v_0}{a}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

vi. $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta z + \eta = 0$ {Θεωρούμε μεταβλητή το δ}

$\delta x = -\alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2 - \varepsilon y - \zeta z - \eta$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$\delta = \frac{-\alpha x^2-\beta y^2-\gamma z^2-\varepsilon y-\zeta z-\eta}{x}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

Άσκηση 2– Λύση

i. $E = 2\pi\rho(\rho + h)$ {Θεωρούμε μεταβλητή το h}

$E = 2\pi\rho \cdot \rho + 2\pi\rho \cdot h$ {Επιμεριστική ιδιότητα}

$2\pi\rho \cdot \rho + 2\pi\rho \cdot h = E$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$2\pi\rho \cdot h = E - 2\pi\rho^2$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$h = \frac{E-2\pi\rho^2}{2\pi\rho}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

ii. $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ {Θεωρούμε μεταβλητή το ν}

$\alpha_\nu = \alpha_1 + \nu\omega - \omega$ {Επιμεριστική ιδιότητα}

$\alpha_1 + \nu\omega - \omega = \alpha_\nu$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$\nu\omega = -\alpha_1 + \omega + \alpha_\nu$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$\nu = \frac{\alpha_\nu-\alpha_1+\omega}{\omega}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

iii. $p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{(V+\varepsilon b)(V+\sigma b)}$ {Θεωρούμε μεταβλητή το T}

$\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{(V+\varepsilon b)(V+\sigma b)} = p$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$\frac{RT}{V-b} = \frac{a}{(V+\varepsilon b)(V+\sigma b)} + p$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$(V-b)\left(\frac{RT}{V-b}\right) = (V-b)\left(\frac{a}{(V+\varepsilon b)(V+\sigma b)} + p\right)$ {Πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π}

$RT = (V-b)\left(\frac{a}{(V+\varepsilon b)(V+\sigma b)} + p\right)$

$T = \frac{(V-b)\left(\frac{a}{(V+\varepsilon b)(V+\sigma b)}+p\right)}{R}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

iv. $F = G\frac{mM}{r^2}$ {Θεωρούμε μεταβλητή το r^2}

$F = \frac{GmM}{r^2}$ {Χιαστί γινόμενο}

$F \cdot r^2 = GmM$

$r^2 = \frac{GmM}{F}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

v. $mg - \gamma v = \frac{mv^2}{r}$ {Θεωρούμε μεταβλητή το m}

$mgr - \gamma vr = mv^2$ {Πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π}

$mgr - mv^2 = \gamma vr$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$m(gr - v^2) = \gamma vr$

$m = \frac{\gamma vr}{(gr-v^2)}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

Άσκηση 3 – Λύση

Αρχικά θα λύσουμε τον τύπο θεωρώντας ως μεταβλητή τους βαθμούς Κελσίου C. Ο τύπος γίνεται:

$F = 1{,}8 \cdot C + 32$

$F - 32 = 1{,}8 \cdot C$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$1{,}8 \cdot C = F - 32$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$C = \frac{F-32}{1{,}8}$ (1) {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

Αντικαθιστούμε στον τύπο (1) όπου $F = 73{,}4$ και έχουμε:

$C = \frac{F-32}{1{,}8}$

$C = \frac{73{,}4-32}{1{,}8}$

$C = \frac{41{,}4}{1{,}8}$

$C = 23\ βαθμοί\ Κελσίου$

Άσκηση 4 – Λύση

Ο τύπος που μας δίνεται είναι ήδη εκφρασμένος σε εκατοστά, άρα θα αντικαταστήσουμε στην ισότητα όπου $i = 45$ ίντσες και έχουμε:

$\varepsilon = 2{,}54 \cdot\ i$

$\varepsilon = 2{,}54 \cdot 45$

$\varepsilon = 114{,}3\ cm$

Άσκηση 5 – Λύση

i. Θα πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους του τύπου με το Ε.Κ.Π. των παρανομαστών για να οδηγηθούμε σε μια απλούστερη μορφή.

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{R}$$

$$\alpha\cdot\beta\cdot R\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\alpha\cdot\beta\cdot R\left(\frac{1}{\beta}\right)=\alpha\cdot\beta\cdot R\left(\frac{1}{R}\right)$$ {Πολλαπλασιασμός με το Ε.Κ.Π}

$$\beta\cdot R+\alpha\cdot R=\alpha\cdot\beta \text{ (1)}$$

Θεωρούμε ως μεταβλητή το α και σταθερούς τους υπόλοιπους όρους. Οπότε η ισότητα (1) γίνεται:

$$\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot R+\beta\cdot R$$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$$\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot R=\beta\cdot R$$ {Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους}

$$\alpha\cdot(\beta-R)=\beta\cdot R$$ {Αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας}

$$\alpha=\frac{\beta\cdot R}{(\beta-R)}$$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

ii. Θεωρούμε ως μεταβλητή το R και σταθερούς τους υπόλοιπους όρους. Οπότε η ισότητα (1) γίνεται:

$$\beta\cdot R+\alpha\cdot R=\alpha\cdot\beta$$

$$(\alpha+\beta)R=\alpha\cdot\beta$$ {Αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας}

$$R=\frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha+\beta}$$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

Άσκηση 6 – Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο απαλοιφής μιας μεταβλητής.Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε δύο ή περισσότερους τύπους, οι οποίοι έχουν κοινή μεταβλητή, τότε λύνοντας έναν από τους τύπους ως προς τη μεταβλητή αυτή και αντικαθιστούμε ότι βρήκαμε στην άλλη.

Οπότε θα απαλείψουμε τον χρόνο t από την εξίσωση $v = gt$ και θα αντικαταστήσουμε στον τύπο $h = \frac{1}{2}gt^2$, ως ακολούθως:

$v = gt$

$gt = v$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$t = \frac{v}{g}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

Με αντικατάσταση ο τύπος $h = \frac{1}{2}gt^2$ γίνεται:

$h = \frac{1}{2}gt^2$

$h = \frac{1}{2}g\left(\frac{v}{g}\right)^2$ {Αντικατάσταση $t = \frac{v}{g}$}

$h = \frac{1}{2}g\frac{v^2}{g^2}$ {Ιδιότητες δυνάμεων}

$h = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$ {απλοποίηση του όρου g}

$h = \frac{v^2}{2g}$

Άσκηση 7 – Λύση

Από τον τύπο θα απαλείψουμε την μεταβλητή p αντικαθιστώντας $p = mv$ στον τύπο $F = \frac{p}{t}$. Έπειτα θα λύσουμε τον τύπο θεωρώντας μεταβλητή το m και τους υπόλοιπους όρους σταθερούς.

$F = \frac{p}{t}$

$F = \frac{mv}{t}$ {Χιαστί γινόμενο}

$F \cdot t = mv$

$mv = F \cdot t$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$m = \frac{F \cdot t}{v}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

Άσκηση 8 – Λύση

Αρχικά θα επιλύσουμε τον τύπο θεωρώντας μεταβλητή το R και θα αντικαταστήσουμε τελικά τις τιμές των R_1, R_2.

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$R_1 \cdot R_2 \cdot R\left(\frac{1}{R}\right) = R_1 \cdot R_2 \cdot R\left(\frac{1}{R_1}\right) + R_1 \cdot R_2 \cdot R\left(\frac{1}{R_2}\right)$ {Πολλαπλασιασμός όρων με το Ε.Κ.Π}

$R_1 \cdot R_2 = R_2 \cdot R + R_1 \cdot R$

$R_2 \cdot R + R_1 \cdot R = R_1 \cdot R_2$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$(R_1 + R_2)R = R_1 \cdot R_2$ {Αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας}

$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

Αντικαθιστούμε $R_1 = 50, R_2 = 80$ και έχουμε:

$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)}$

$R = \frac{50 \cdot 80}{(50+80)} = \frac{4000}{130} = \frac{400}{13}$

Άσκηση 9 – Λύση

i. Το τελικό κεφάλαιο θα προκύψει αν προσθέθουμε στο αρχικό κεφάλαιο τον τόκο του έτους. Έστω K'το τελικό κεφάλαιο,τοτε ο τύπος που θα το υπολογίζει είναι:

$$K' = K + T = K + \frac{\varepsilon}{100} \cdot K$$

ii. Από τον τύπο $T = \frac{\varepsilon}{100} \cdot K$, αντικαθιστώντας $\varepsilon = 2$ και $K = 10.000$ έχουμε:

$$T = \frac{\varepsilon}{100} \cdot K = \frac{2}{100} \cdot 10.000 = \frac{20.000}{100} = 200\ €$$

iii. Από τον τύπο $T = \frac{\varepsilon}{100} \cdot K$ θα αντικαταστήσουμε $T = 70$ και $K = 10.000$ αφού τον λύσουμε ως προς τη μεταβλητή ε,θεωρώντας σταθερούς τους υπόλοιπους όρους. Άρα έχουμε:

$T = \frac{\varepsilon}{100} \cdot K$ {Χιαστί γινόμενο}

$100 \cdot T = \varepsilon \cdot K$

$\varepsilon \cdot K = 100 \cdot T$ {Αν ισχύει α=β τότε β=α}

$\varepsilon = \frac{100 \cdot T}{K}$ {διαίρεση με τον συντελεστή της μεταβλητής}

Με την αντικατάσταση έχουμε : $\varepsilon = \frac{100 \cdot T}{K} = \frac{100 \cdot 70}{10000} = \frac{7000}{10000} = 0{,}7\%$

iv. Θα σκεφτούμε ως εξής: Αν αφήσουμε το αρχικό κεφάλαιο να τοκιστεί για δεύτερο χρόνο, αυτό θα σημαίνει ότι στο τέλος του α΄έτους θα έχουμε τελικό κεφάλαιο K', αλλά κατά το β΄έτος θα θεωρηθεί ως νέο αρχικό κεφάλαιο. Οπότε πρέπει να υπολογίσουμε το τελικό κεφάλαιο του α΄έτους ώστε να το θέσουμε αρχικό κεφάλαιο του β΄έτους.Οπότε εχουμε τα βήματα.

$K' = K + \frac{\varepsilon}{100} \cdot K$ {Κ΄=Τελικό Κεφάλαιο στο τέλος του α΄έτους}

$K'' = K' + \frac{\varepsilon}{100} \cdot K'$

όπου Κ΄΄=Τελικό Κεφάλαιο στο τέλος του β΄έτους και Κ΄=νέο Αρχικο Κεφάλαιο

1.4. Επίλυση Προβλημάτων Με Χρήση Εξισώσεων

Λύσεις

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

Δεδομένα: Τρείς διαδοχικοί ακέραιοι με άθροισμα 159.	
Ζητούμενα: Οι διαδοχικοί ακέραιοι.	

Γνωρίζουμε ότι κάθε ακέραιος διαφέρει από τον προηγούμενο του κατά ένα. Έστω ο $\boldsymbol{x}$ πρώτος ακέραιος, $\boldsymbol{x+1}$ ο επόμενος και $\boldsymbol{x+2}$ ο μεθεπόμενος.

Αφού έχουν άθροισμα 159, δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$x+(x+1)+(x+2)=159$$

$$x+x+1+x+2=159$$

$$3x+3=159$$

$$3x=159-3$$

$$3x=156$$

$$x=\frac{156}{3}=52$$

Οπότε ο πρώτος ακέραιος είναι 52, ο επόμενος 53 και ο μεθεπόμενος 54.

Επαλήθευση: Προσθέτουμε τους ακέραιους που βρήκαμε και έχουμε:

$$52+53+54=159$$

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 2 – Λύση

Δεδομένα: Ο αριθμός διαιρείται με το 417, με πηλίκο 34 και υπόλοιπο 9.	Έστω x ο διαιρέτης. Απο τον τύπο της Ευκλείδιας Διαίρεσης $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$, δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:
Ζητούμενα: Ο διαιρέτης της διαίρεσης.	

$$417 = x \cdot 34 + 9$$

$$34x + 9 = 417$$

$$34x = 417 - 9$$

$$34x = 408$$

$$x = \frac{408}{34} = 12$$

Επαλήθευση: $34 \cdot 12 + 9 = 408 + 9 = 417$

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 3 – Λύση

Δεδομένα: Συνολικό ποσό 280€. Η 1η 20€ λιγότερα από τον 2ο .Η 3η το σύνολο των δύο.	Έστω $\boldsymbol{x}$ το ποσό του Αντώνη, τότε το ποσό της Μαρίας είναι $\boldsymbol{x - 20}$ και το ποσό της Εύας θα είναι $\boldsymbol{x + (x - 20)}$. Το άθροισμα των τριών ποσών είναι 280 €, έχουμε λοιπόν την ακόλουθη εξίσωση:
Ζητούμενα: Το ποσό του καθενός.	

$$x + (x - 20) + x + (x - 20) = 280$$

$$x + x - 20 + x + x - 20 = 280$$

$$4x - 40 = 280$$

$$4x = 280 + 40$$

$$4x = 320$$

$$x = \frac{320}{4} = 80€$$

Οπότε η Μαρία θα πάρει 60€,ο Αντώνης 80€ και η Εύα 140€.

Επαλήθευση: $60 + 80 + 140 = 280€$

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 4 – Λύση

Δεδομένα: Ο Κώστας έχει διπλάσια χρήματα από τον Νίκο.Μείωση κατά 50€ του Νίκου τετραπλασιάζει το ποσό του Κώστα.
Ζητούμενα: Το ποσό του καθενός.

Έστω x το ποσό του Νίκου.Το ποσό του Κώστα θα είναι $\boldsymbol{2x}$.

Αν ο Νίκος δώσει 50€ το ποσό του τελικά θα γίνει

$\boldsymbol{x-50}$, τότε ο Κώστας θα έχει $\boldsymbol{4(x-50)}$.Το συνολικό ποσό που είχαν στην αρχή,θα πρέπει να ισούται με το συνολικό ποσό που έχουν στο τέλος. Δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$x+2x=x-50+4(x-50)$$

$$3x=x-50+4x-200$$

$$3x=5x-250$$

$$3x-5x=-250$$

$$-2x=-250$$

$$x=\frac{-250}{-2}=125$$

Ο Νίκος είχε αρχικά 125€ και ο Κώστας 250€. Μετά την συναλλαγή ο Νίκος έχει 75€ και ο Κώστας 300€.

Επαλήθευση: ΤΟ διπλάσιο των 125€ είναι 250€. Αφαιρούμε 50€ από το ποσό του Νίκου,οπότε πλέον έχει 75€.Ισχύει $4\cdot 75=300$€,το οποίο είναι το νέο ποσό του Κώστα.
Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 5 – Λύση

Δεδομένα: Η μητέρα είναι 40 χρονών.Μετά από 8 χρόνια θα έχει τριπλάσια ηλικία της κόρης.
Ζητούμενα: Η ηλικία της Ελένης σήμερα.

Έστω x η ηλικία της Ελένης.Η ηλικία της μητέρας σήμερα είναι 48 έτη.

Όμως η σημερινή ηλικία της μητέρας είναι *τριπλάσια* της Ελένης, δηλαδή $3x$. Δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$3x = 48$$

$$x = \frac{48}{3}$$

$$x = 16$$

Η σημερινή ηλικία της Ελένης είναι 16 έτη.

Άσκηση 6 – Λύση

Δεδομένα: Η σημερινή ηλικία του πατέρα είναι 41 έτη,ενώ του γιού 9 έτη.
Ζητούμενα:Τα χρόνια ώστε ο πατέρας να έχει τριπλάσια ηλικία από τον γιό και τις ηλικίες του καθενός τότε.

Έστω $\boldsymbol{x}$ τα χρόνια που θα περάσουν ώστε ο πατέρας να έχει τριπλάσια ηλικία από το γιό.Τότε ο πατέρας θα έχει ηλικια $\mathbf{41} + \boldsymbol{x}$ έτη, ενώ ο γιός $\mathbf{9} + \boldsymbol{x}$.

Οπότε δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$3(9 + x) = 41 + x$$

$$27 + 3x = 41 + x$$

$$3x - x = 41 - 27$$

$$2\mathrm{x} = 14$$

$$x = \frac{14}{2} = 7$$

Μετά από 7 χρόνια ο πατέρας θα έχει την τριπλάσια ηλικία του γιού.Τότε ο πατέρας θα είναι 48 ετών και ο γιός 16 ετών.Το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 7 – Λύση

Δεδομένα: Βαθμοί στα δύο διαγωνίσματα 13 και 17.
Ζητούμενα: i)Τον βαθμό του 3^{ου} διαγωνίσματος ώστε να χει μέσο όρο 16. ii) Αν υπάρχει βαθμός 3^{ου} διαγωνίσματος ώστε να έχει μέσο όρο 18.

i. Έστω x ο βαθμός στο 3^{ο} διαγώνισμα. Ο μέσος όρος προκύπτει από το άθροισμα των διαγωνισμάτων προς το πλήθος των διαγωνισμάτων. Δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$16 = \frac{13+17+x}{3}$$

$$16 = \frac{30+x}{3}$$

$$3 \cdot 16 = 30 + x$$

$$30 + x = 48$$

$$x = 48 - 30$$

$$x = 18$$

Ο βαθμός στο 3^{ο} διαγώνισμα για να έχει μέσο όρο 16, είναι το 18.

Επαλήθευση: $\left(\frac{18+13+17}{3}\right) = \frac{48}{3} = 16.$

Η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

ii. Ελέγχουμε αν μπορεί να υπάρξει βαθμός x ώστε να έχουμε μέσο όρο 18.

Δημιουργούμε την εξίσωση:

$$18 = \frac{13+17+x}{3}$$

$$18 = \frac{30+x}{3}$$

$$30 + x = 3 \cdot 18$$

$$30 + x = 54$$

$$x = 54 - 30$$

$$x = 24$$

Η λύση είναι αδύνατη αφού ο μέγιστος βαθμός που μπορεί ο μαθητής να επιτύχει είναι 20.

Άσκηση 8 – Λύση

Δεδομένα: Τα μέρη του ποσού σε κάθε παιδι καθώς και το υπόλοιπο του ποσού.
Ζητούμενα: Το αρχικό ποσό και το ποσό που πήρε κάθε παιδί.

Έστω $\boldsymbol{x}$ το αρχικό ποσό.Το πόσο της κόρης αντιστοιχεί στο $\frac{1}{3}\boldsymbol{x}$ ενώ του γιού σε $\frac{1}{5}\boldsymbol{x}$. Αφού περίσσεψαν 56€, τότε το άθροισμα των μερών με το περίσσευμα, θα ισούται με όλο το ποσό.Δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + 56$$

$$15 \cdot x = 15\frac{1}{3}x + 15\frac{1}{5}x + 15 \cdot 56$$

$$15x = 5x + 3x + 840$$

$$15x = 8x + 840$$

$$15x - 8x = 840$$

$$7x = 840$$

$$x = \frac{840}{7} = 120$$

Το αρχικό ποσό είναι 120€, οπότε το ποσό της κόρης είναι $\frac{1}{3}120 = 40€$, ενώ του γιού το ποσό είναι $\frac{1}{5}120 = 24€$.

Η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος αφού: $40 + 24 + 56 = 120€$

Άσκηση 9 – Λύση

Δεδομένα: Η Περίμετρος $\Pi = 80m$, το μήκος κατά $10m$ μεγαλύτερο από το πλάτος.
Ζητούμενα: Οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Έστω το πλάτος, τότε το μήκος θα είναι . Ο τύπος της Περιμέτρου ισούται με το άθροισμα του διπλάσιου του μήκους και του διπλάσιου του πλάτους. Δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$2(x + 10) + 2x = 80$$

$$2x + 20 + 2x = 80$$

$$4x = 80 - 20$$

$$4x = 60$$

$$x = \frac{60}{4} = 15m$$

Το πλάτος του είναι $15m$ ενώ το μήκος του $25m$.

Επαλήθευση: $2 \cdot 15 + 2 \cdot 25 = 30 + 50 = 80\ m$

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 10 – Λύση

Δεδομένα: Ισχύει $\hat{B} = 2\hat{A}$, $\hat{\Gamma}$ κατά 5° μεγαλύτερη από τη $\hat{B}$.Δεδομένο είναι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου ισούται με 180° .
Ζητούμενα: Οι γωνίες του τριγώνου.

Έστω $\boldsymbol{x}$ η γωνία $\hat{A}$,τότε η γωνία $\hat{B}$ θα είναι $\mathbf{2}\boldsymbol{x}$.Η σχέση που συνδέει τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}} = \widehat{\boldsymbol{B}} + \mathbf{5}$. Αντικαθιστώντας στην ισότητα αυτή $\widehat{\boldsymbol{B}} = \mathbf{2}\boldsymbol{x}$, προκύπτει $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}} = \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}$.

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι για κάθε τρίγωνο ισχύει η σχέση $\widehat{\boldsymbol{A}} + \widehat{\boldsymbol{B}} + \widehat{\boldsymbol{\Gamma}} = \mathbf{180}^{\boldsymbol{o}}$, δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180$$

$$x + 2x + 2x + 5 = 180$$

$$5x = 180 - 5$$

$$5x = 175$$

$$x = \frac{175}{5} = 35^o$$

Οπότε για τις γωνίες του τριγώνου θα έχουμε τις τιμές $\hat{A} = 35^o, \hat{B} = 70^o, \hat{\Gamma} = 75^o$.

Επαλήθευση: Αν $\hat{A} = 35^o$ τότε $\hat{B} = 2 \cdot 35^o = 70^o και$ $\hat{\Gamma} = 2 \cdot \hat{B} + 5 = 2 \cdot 35^o + 5 = 75^o$

Άρα οι λύσεις ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 11 – Λύση

Δεδομένα: το 25% του προϊόντος,κοστίζει 4€ λιγότερα από το προϊόν με 20% έκπτωση.
Ζητούμενα: Η τιμή του προϊόντος.

Έστω $\boldsymbol{x}$ η αρχική τιμή του. Το 25% της τιμής αντιστοιχεί σε $\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{100}}\boldsymbol{x}$. Το 20% αντιστοιχεί σε $\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{100}}\boldsymbol{x}$.Δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{25}{100}x = \frac{20}{100}x - 4$$

$$100 \cdot \frac{25}{100}x = 100 \cdot \frac{20}{100}x - 100 \cdot 4$$

$$25x = 20x + 400$$

$$25x - 20x = 400$$

$$5x = 400$$

$$x = \frac{400}{5} = 80$$

Η τιμή του πρϊόντος είναι 80€

Επαλήθευση: Το 25% των 80€ είναι $\frac{25}{100} \cdot 80 = 20$€ ενώ το 20% των 80€ είναι $\frac{20}{100} \cdot 80 = 16$€.

Η τελική τιμή με έκπτωση 25% είναι 60€ , ενώ με έκπτωση 20% θα είναι 64€.Δηλαδή στην έπτωση 25% θα είχαμε 4€ λιγότερα σε κόστος.

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 12 – Λύση

Δεδομένα: $\frac{1}{6}$ της ζωής νέος, $\frac{1}{12}$ φύτρωσε γένια, $\frac{1}{7}$ ο γάμος, μετά από 5 χρόνια απέκτησε γιό που έφτασε τα μισά χρόνια. Το τέλος της ζωής του ήρθε 4 χρονια μετά.
Ζητούμενα: Τα χρόνια ζωής του Διόφαντου.

Έστω x τα χρόνια της ζωής του. Από τα δεδομένα και τα μέρη της ζωής που αναφέρονται, δημιουργούμε την εξίσωση:

$$x=\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$$

$$84\cdot x=84\cdot\frac{1}{6}x+84\cdot\frac{1}{12}x+84\cdot\frac{x}{7}+84\cdot 5+84\cdot\frac{x}{2}+84\cdot 4$$

$$84x=14x+7x+12x+420+42x+336$$

$$84x-75x=756$$

$$9x=756$$

$$x=\frac{756}{9}=84 \text{ έτη}$$

Τα χρόνια ζωής του Διόφαντου ήταν <u>84 έτη</u>.

Επαλήθευση: Έζησε ως νέος $\frac{1}{6}\cdot 84=14$ χρόνια, ¨φύτρωσε¨ γένια στα επόμενα $\frac{1}{12}\cdot 84=7$ χρόνια, ήδη ζεί 21 οπότε παντρεύτηκε μετα από $\frac{1}{7}\cdot 84=12$ χρόνια άρα παντρεύτηκε στα 33 του. Μετά 5 χρόνια, δηλαδή στα 38 έτη απέκτησε γιό ο οποίος πέθανε στα $\frac{1}{2}\cdot 84=42$ χρόνια του. Ο Διόφαντος μέχρι το θάνατο του γιού του έφτασε στα $38+42=80$ χρόνια. Μετά από 4 χρόνια, δηλαδη στα $80+4=84$ απεβίωσε.

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 – Λύση

εδομένα: Το άθροισμα τριών ριθμών είναι 40.Ο 2ος είναι ατά 4 μεγαλύτερος από τον 1ο αι ο 3ος διπλάσιος του 1ου .
ητούμενα: Οι τιμές των ριθμών.

Έστω $\boldsymbol{x}$ ο πρώτος αριθμός.Απο τα δεδομένα ο δεύτερος θα είναι $\boldsymbol{x+4}$,ενώ ο τρίτος $2x$.Δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$x + x + 4 + 2x = 40$$
$$4x = 40 - 4$$
$$4x = 36$$
$$x = \frac{36}{4} = 9$$

Οπότε ο πρώτος αριθμός είναι 9, ο δεύτερος 13 και ο τρίτος 18.

Επαλήθευση: Εάν ο 1ος αριθμός είναι 9, ο 2ος αυξημένος κατά 4 θα είναι 13.Το διπλάσιο του 9 είναι 18,ο τρίτος αριθμός.Θα ισχύει $9 + 13 + 18 = 40$.

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 2 – Λύση

Δεδομένα: Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 45.Το άθροισμα των $\frac{2}{3}$ του $1^{ου}$ και του $\frac{1}{6}$ του $2^{ου}$ είναι 28.
Ζητούμενα: Οι τιμές των αριθμών.

Έστω ο $\boldsymbol{x}$ πρώτος αριθμός.Αφού το αθροισμά τους είναι 45 τότε ο δεύτερος εκφράζεται,σε σχέση με τον πρώτο, ως $\boldsymbol{45-x}$. Από το άθροισμα των κλασμάτων τους δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}(45-x)=28$$

$$6\cdot\frac{2}{3}x+6\cdot\frac{1}{6}(45-x)=6\cdot 28$$

$$4x+(45-x)=168$$

$$4x+45-x=168$$

$$3x=168-45$$

$$3x=123$$

$$x=\frac{123}{3}=41$$

Οπότε οι αριθμοί είναι το 41 και το 4.

Επαλήθευση: Τα $\frac{2}{3}$ του 4, είναι $\frac{2}{3}\cdot 41=\frac{82}{3}$. Ενώ το $\frac{1}{6}$ του 4 είναι $\frac{1}{6}\cdot 4=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Το άθροισμα τους ισούται με $\frac{82}{3}+\frac{2}{3}=\frac{84}{3}=28$.

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 3 – Λύση

Δεδομένα: Η μείωση του επταπλάσιου κατά το μισό του αριθμού,ισούται με τον αριθμο αυξημένο κατά 22.
Ζητούμενα: Ο αριθμός με τις παραπάνω συνθήκες.

Έστω ο αριθμός.Το επταπλάσιο του θα είναι και μειωμένο κατά το μισό του θα ισούται με.Από τα δεδομένα δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$7x - \frac{x}{2} = x + 22$$

$$2 \cdot 7x - 2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \cdot x + 2 \cdot 22$$

$$14x - x = 2x + 44$$

$$14x - x - 2x = 44$$

$$11x = 44$$

$$x = \frac{44}{11} = 4$$

Ο ζητούμενος αριθμός είναι το 4.

Επαλήθευση: Το επταλάσιο του 4 είναι 28.Το μισό του 4 είναι 2,αρα η διαφορά του επταπλάσιου με το μισό του αριθμού είναι 26.Ο αριθμός αυξημένος κατά 22 είναι 26.

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 4 – Λύση

Δεδομένα: Αρχικά ποσά 12€ και 8€.Μετά την συναλλαγή ο 2^{ος} έχει πλεον τα $\frac{3}{8}$ του 1^{ου} .
Ζητούμενα: Τα τελικά ποσά.

Έστω το $\boldsymbol{x}$ ποσό που έδωσε ο Πάνος. Οπότε ο Παύλος έχει πλέον $\mathbf{12}+\boldsymbol{x}$,ενώ ο Πάνος $\mathbf{8}-\boldsymbol{x}$.Από τα δεδομένα δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$8-x=\frac{3}{7}(12+x)$$

$$7(8-x)=7\cdot\frac{3}{7}(12+x)$$

$$56-7x=3(12+x)$$

$$56-7x=36+3x$$

$$3x+7x=56-36$$

$$10x=20$$

$$x=\frac{20}{10}=2\text{ €}$$

Το ποσό που έδωσε ο Πάνος είναι 2€ ,άρα τελικά ο Πάυλος θα έχει 14€ και ο Πάνος 6€.

Επαλήθευση: Τα $\frac{3}{7}$ των 14€ είναι $\frac{3}{7}\cdot 14=\frac{42}{7}=6$€.

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 5 – Λύση

Δεδομένα: Κάθε μαθητής πληρώνει 2,5€. Χωρίς 6 μαθητές το ποσό ανα μαθητή είναι 3,25€.
Ζητούμενα: Ο αριθμός των μαθητών.

Έστω $\boldsymbol{x}$ ο αριθμός των μαθητών. Αν όλοι οι μαθητές πήγαιναν στην εκδρομή το συνολικό ποσό θα ήταν $\mathbf{2,5}\boldsymbol{x}$. Χωρίς 6 μαθητές το ποσό είναι $\mathbf{3,25}(\boldsymbol{x}-\mathbf{6})$.Οπότε έχουμε την ακόλουθη εξίσωση των δύο ποσών:

$$2.5x = 3{,}25(x-6)$$
$$2{,}5x = 3{,}25x - 19{,}5$$
$$3{,}25x - 2{,}5x = 19{,}5$$
$$0{,}75x = 19{,}5$$
$$x = \frac{19{,}5}{0{,}75} = 26$$

Ο αριθμός των μαθητών είναι 26 άτομα.

Επαλήθευση: Το αρχικό ποσό θα ήταν $2{,}5 \cdot 26 = 65€$,χωρίς 6 μαθητές θα είναι $3{,}25 \cdot 20 = 65€$.

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 6 – Λύση

Δεδομένα: Μετά 19 χρόνια η ηλικία τριπλασιάζεται από την περσινη.
Ζητούμενα: Η σημερινή ηλικία της Μαρίνας.

Έστω $\boldsymbol{x}$ η σημερινή ηλικία.Η περσινή θα είναι $\boldsymbol{x-1}$. Μετά από 19 χρόνια η ηλικία θα είναι $\boldsymbol{x+19}$.Όμως η ηλικία της τότε θα είναι τριπλάσια από την περσινή, δηλαδή $\boldsymbol{3(x-1)}$. Οπότε έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$x+19=3(x-1)$$

$$3x-3=x+19$$

$$3x-x=19+3$$

$$2x=22$$

$$x=\frac{22}{2}=11$$

Οπότε η Μαρίνα σήμερα είναι 11 χρονών.

Επαλήθευση: Η σημερινή ηλικία είναι 11 χρονια.Οπότε η περσινή είναι 10 έτη,μετά από 19 χρόνια θα έιναι 30 χρονών.Η οποία είναι η τριπλάσια της περσινής ηλικίας.

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 7 – Λύση

Δεδομένα: Στα 2 διαγωνίσματα οι βαθμοί είναι 12 και 16.
Ζητούμενα: ο βαθμός στο 3$^{\text{ο}}$ διαγώνισμα ώστε να έχει μέσο όρο 15,16,17 αντίστοιχα.

i. Έστω ο βαθμός που πρέπει να γράψει στο 3$^{\text{ο}}$ διαγώνισμα.Τότε από τον ορισμό του μέσου όρου,έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{12+16+x}{3}=15$$

$$28+x=3\cdot 15$$

$$x=45-28=17$$

ii. Ομοίως δημιουργούμε την εξίσωση:

$$\frac{12+16+x}{3}=16$$

$$28+x=3\cdot 16$$

$$x=48-28=\ 20$$

iii. Ομοίως δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{12+16+x}{3}=17$$

$$28+x=3\cdot 17$$

$$x=51-28=23$$

Για να έχει μέσο όρο 15 στο 3$^{\text{ο}}$ διαγώνισμα πρέπει να γράψει 17,για να έχει μέσο όρο 16 πρέπει να γράψει στο 3$^{\text{ο}}$ διαγώνισμα 20,ενώ δεν είναι δυνατό να γράψει ικανό βαθμό στο 3$^{\text{ο}}$ διαγώνισμα, ώστε ο μέσος όρος να μετακινηθεί στο 17.

Άσκηση 8 – Λύση

Δεδομένα: Μέσος όρος πόντων 20.Στον 2^{o} αγώνα διπλάσιους πόντους,ενώ στον 3^{o} τα $\frac{3}{4}$ του $1^{ου}$ αγώνα.
Ζητούμενα: Οι πόντοι ανά αγώνα.

Έστω $\boldsymbol{x}$ οι πόντοι του $1^{ου}$ αγώνα. Στον δεύτερο οι πόντοι είναι $\boldsymbol{2x}$ ενώ στον 3^{o} $\boldsymbol{\frac{3}{4}x}$. Αθροίζοντας τους πόντους και διαρώντας με το πλήθος των αγώνων, έχουμε τον μέσο όρο.Δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{x+2x+\frac{3}{4}x}{3} = 20$$

$$x + 2x + \frac{3}{4}x = 3 \cdot 20$$

$$4 \cdot x + 4 \cdot 2x + 4 \cdot \frac{3}{4}x = 4 \cdot 60$$

$$4x + 8x + 3x = 240$$

$$15x = 240$$

$x = \frac{240}{15} = 16$ πόντους

$1^{ος}$ αγώνας: 16 πόντους

$2^{ος}$ αγώνας: $2 \cdot 16 = 32$ πόντους

$3^{ος}$ αγώνας: $\frac{3}{4} \cdot 16 = \frac{48}{4} = 12$ πόντους

Επαλήθευση: Υπολογίζουμε τον μέσο όρο των τριών αγώνων: $\frac{16+32+12}{3} = \frac{60}{3} = 20.$

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 9 – Λύση

Δεδομένα: Τρία μερίδια ενός ποσού. Το 1ο μερίδιο το $\frac{1}{4}$ του ποσού,το 2ο μερίδιο 5€ λιγότερα από τα $\frac{2}{3}$ του ποσού,το 3ο μερίδιο 30€ λιγότερα από το $\frac{1}{2}$ του ποσού.
Ζητούμενα: Το συνολικό ποσό και τα μερίδια.

Έστω $\boldsymbol{x}$ όλο το ποσό. Ο 1ος πήρε $\boldsymbol{\frac{1}{4}x}$, ο 2ος πήρε $\boldsymbol{\frac{2}{3}x-5}$ και ο 3ος πήρε $\boldsymbol{\frac{1}{2}x}$**-30** . Το άθροισμα των τριών αυτών ποσών θα ισούται με το αρχικό ποσό. Δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$x=\frac{1}{4}x+\frac{2}{3}x-5+\frac{1}{2}x-30$$

$$12\cdot x=12\cdot\frac{1}{4}x+12\cdot\frac{2}{3}x-12\cdot 5+12\cdot\frac{1}{2}x-12\cdot 30$$

$$12x=3x+8x-60+6x-360$$

$$12x=17x-420$$

$$17x-12x=420$$

$$5x=420$$

$$x=\frac{420}{5}=84€$$

Το συνολικό ποσο είναι 84€.

Οπότε ο 1ος πήρε $\frac{1}{4}\cdot 84=21€$, ο 2ος πήρε $\frac{2}{3}\cdot 84-5=51€$, ενώ ο 3ος πήρε $\frac{1}{2}\cdot 84-30=12€$.

Επαλήθευση: Αθροίζουμε τα τρία ποσά $21+51+12=84€$.

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 10 – Λύση

Δεδομένα: Το 30% και το 55% των χρημάτων ξοδεύτηκαν και περίσσεψαν 27€.
Ζητούμενα: Το αρχικό ποσό.

Έστω $\boldsymbol{x}$ το αρχικό ποσό. Ξόδεψε $\frac{\mathbf{55}}{\mathbf{100}}\boldsymbol{x}$ για παντελόνι και $\frac{\mathbf{30}}{\mathbf{100}}\boldsymbol{x}$ για παπούτσια. Το άθροισμα των ποσοστών που ξοδεύτηκαν μαζί με το ποσό που περίσσεψε, θα ισούται με το αρχικό ποσό. Δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$x = \frac{30}{100}x + \frac{55}{100}x + 27$$

$$100 \cdot x = 100 \cdot \frac{30}{100}x + 100 \cdot \frac{55}{100}x + 100 \cdot 27$$

$$100x = 30x + 55x + 2700$$

$$100x - 85x = 2700$$

$$15x = 2700$$

$$x = \frac{2700}{15} = 180€$$

Το αρχικό ποσό ήταν 180€.

Άσκηση 11 – Λύση

Δεδομένα: Δύο βαρέλια, το 1ο έχει διπλάσια ποσότητα από το 2ο . Αφαιρέθηκαν 50 λίτρα από το 1ο και προστέθηκαν στο 2ο . Το 2ο έχει πλέον τριπλάσια ποσότητα.
Ζητούμενα: Τα λίτρα σε κάθε βαρέλι.

Έστω $\boldsymbol{x}$ τα λίτρα στο δεύτερο βαρέλι.Το πρώτο έχει $\mathbf{2}\boldsymbol{x}$ λίτρα. Μετά την αφαίρεση το πρώτο έχει $2\boldsymbol{x} - \mathbf{50}$ ενώ το δεύτερο $\boldsymbol{x} + \mathbf{50}$. Από τα δεδομένα δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$3(2x - 50) = x + 50$$

$$6x - 150 = x + 50$$

$$6x - 1x = 150 + 50$$

$$5x = 200$$

$$x = \frac{200}{5} = 40 \text{ λίτρα}$$

<u>Το 2ο είχε 40 λίτρα ενώ το πρώτο 80 λίτρα</u>

Άσκηση 12 – Λύση

Δεδομένα: Αρχικό μήκος $31cm$.Χωρίζουμε σε 2 τυχαία κομμάτια,η πλευρά του τριγώνου είναι κατά $1cm$ μεγαλύτερη από του τετραγώνου.
Ζητούμενα: Η Περίμετρος κάθε σχήματος.

Έστω $\boldsymbol{x}$ το μήκος του ενός κομματιού (κατασκευή τετραγώνου) τότε το μήκος του άλλου (κατασκευή τριγώνου) θα είναι $\mathbf{31-x}$.Η κάθε πλευρά του τετραγώνου θα είναι $\frac{x}{4}$,ενώ του ισοπλεύρου τριγώνου θα είναι $\frac{31-x}{3}$.
Από τα δεδομένα δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{x}{4}+1=\frac{31-x}{3}$$
$$12\cdot\frac{x}{4}+12\cdot 1=12\cdot\frac{31-x}{3}$$
$$3x+12=4(31-x)$$
$$3x+12=124-4x$$
$$3x+4x=124-12$$
$$7x=112$$
$$x=\frac{112}{7}=16cm$$

Άρα η πλευρά του τετραγώνου θα έιναι $\frac{16}{4}=4cm$ ενώ του τριγώνου θα είναι $\frac{31-16}{3}=5cm$
Οπότε η Περίμετρος του τετραγώνου θα είναι $16cm$ ενώ του τριγώνου $15cm$.

Επαλήθευση: Το άθροισμα των κομματιών είναι $16+15=31\ cm$ ενώ η πλευρά του τριγώνου είναι κατά $1\ cm$ μεγαλύτερη από την πλευρά του τριγώνου.

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 13 – Λύση

Δεδομένα: Συνολικά 35 δωμάτια.Σύνολο κρεβατιών 94.
Ζητούμενα: Ο αριθμός δίκλινων και τρίκλινων δωματίων.

Έστω $\boldsymbol{x}$ ο αριθμός των δίκλινων δωματίων άρα $\mathbf{35} - \boldsymbol{x}$ θα είναι τα τρίκλινα δωμάτια. Ο αριθμός των κρεβατιών στα δίκλινα θα είναι $\mathbf{2}\boldsymbol{x}$, ενώ ο αριθμός των κρεβατιών στα τρίκλινα θα είναι $\mathbf{3}(\mathbf{35} - \boldsymbol{x})$. Από τα δεδομένα δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$2x + 3(35 - x) = 94$$
$$2x + 105 - 3x = 94$$
$$-x = 94 - 105$$
$$-x = -11$$
$$x = 11$$

Οπότε τα δίκλινα δωμάτια είναι 11 και τα τρίκλινα 24.

Επαλήθευση: Συνολικά δωμάτια $24 + 11 = 35$,τα 9 δίκλινα έχουν $2 \cdot 11 = 22$ κρεβάτια ενώ τα 24 τρίκλινα έχουν $3 \cdot 24 = 72$ κρεβάτια. Σύνολο κρεβατιών $22 + 72 = 94$.

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 14 – Λύση

Δεδομένα: Αρχικά οι γυναίκες είναι τριπλάσιες σε πλήθος.Μετά την μείωση 4 ζευγαριων οι γυναίκες ήταν επταπλάσιες.
Ζητούμενα: Το πλήθος αντρών και γυναικών αρχικά.

Έστω $\boldsymbol{x}$ οι άντρες αρχικά.Τότε οι γυναίκες ήταν $\boldsymbol{3x}$.

Εάν αποχωρήσουν 4 ζευγάρια αυτό σημαίνει ότι οι άντρες αλλά και οι γυναίκες μειώθηκαν ταυτόχρονα κατά τέσσερις.

Άρα οι άντρες έμειναν $\boldsymbol{x-4}$ και οι γυναίκες $\boldsymbol{3x-4}$.

Από τα δεδομένα έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$7(x-4)=3x-4$$

$$7x-28=3x-4$$

$$7x-3x=28-4$$

$$4x=24$$

$$x=\frac{24}{4}=6 \text{ άντρες}$$

Οπότε οι γυναίκες αρχικά ήταν 18 και οι άντρες 6. Μετά την αποχώρηση 4 αντρων και 4 γυναικών, παρέμειναν 14 γυναίκες και 2 άντρες.Γεγοωός που επαληθεύει τα δεδομένα.

Άσκηση 15 – Λύση

Δεδομένα: Ο 1ος εργάτης χρειάζεται 4 ώρες,ο 2ος χρειάζεται 6 ώρες και ο 3ος χρειάζεται 12 ώρες.
Ζητούμενα: Ο μέσος όρος της εργασίας

Έστω x ο μέσος όρος σε ώρες.Τότε δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$x=\frac{4+6+12}{3}$$

$$x=\frac{22}{3} \text{ ώρες}$$

Άσκηση 16 – Λύση

Δεδομένα: Η πρώτη βρύση χρειάζεται 6 ώρες ενώ η δεύτερη 4 ώρες.Πρώτα ανοίγει η 1η για μια ώρα και μετά ανοίγουν ταυτόχρονα.
Ζητούμενα: Ο χρόνος να γεμίσει η δεξαμενή.

Έστω $\boldsymbol{x}$ οι ώρες που θα χρειαστεί ώστε να γεμίσει η δεξαμενή.Όταν ανοίξει η 2η βρύση θα έχουμε ήδη λειτουργία της 1ης για μια ώρα.Δηλαδή ο υπόλοιπος χρόνος θα είναι $\boldsymbol{x-1}$.

Θεωρούμε το γέμισμα της δεξαμενής ως ακέραια μονάδα. Οπότε ένα μέρος θα γεμίσει η 1η βρύση και ένα μέρος η 2η .Το μέρος που αντιστοιχεί στην 1η είναι $\frac{\boldsymbol{x}}{6}$ τότε στη 2η θα αντιστοιχεί $\boldsymbol{\frac{x-1}{4}}$. Δημιουργούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{x}{6}+\frac{x-1}{4}=1$$

$$12\cdot\frac{x}{6}+12\cdot\frac{x-1}{4}=12\cdot 1$$

$$2x+3(x-1)=12$$

$$2x+3x-3=12$$

$$5x=15$$

$$x=\frac{15}{5}=3 \text{ ώρες}$$

Επαλήθευση: Μετα το πέρας μιας ώρας η δεξαμενή θα έχει καλυφθεί κατά το $\boldsymbol{\frac{1}{6}}$.Μένει να κάλυφθούν τα $\boldsymbol{\frac{5}{6}}$.

Σε 2 ώρες που απομένουν στην ταυτόχρφονη παροχή η 1η καλύπτει τα $\boldsymbol{\frac{2}{6}}$ ενώ η 2η τα $\boldsymbol{\frac{2}{4}}$.

Συνολικά στις 2 ώρες θα έχουμε:$\frac{2}{6}+\frac{2}{4}=\frac{4}{12}+\frac{6}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 17 – Λύση

Δεδομένα: Το και το ενός αριθμού αθροιστικά, ισούται με τον αριθμό μειωμένο κατά 1.225.
Ζητούμενα: Ο αριθμός αυτός.

Έστω $\boldsymbol{x}$ ο αριθμός. Το $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$ του αριθμού είναι $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\boldsymbol{x}$ και το $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ του αριθμού είναι $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x}$. Από τα δεδομένα, δημιουργούμε την εξίσωση :

$$x - 1.225 = \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}x$$

$$8 \cdot x - 8 \cdot 1.225 = 8 \cdot \frac{1}{8}x + 8 \cdot \frac{1}{4}x$$

$$8x - 9.800 = x + 2x$$

$$8x - 3x = 9.800$$

$$5x = 9.800$$

$$x = \frac{9.800}{5} = 1.960$$

Επαλήθευση: Το $\frac{1}{8}$ του 1.960 είναι:$\frac{1}{8} \cdot 1960 = \frac{1960}{8} = 245$. Το $\frac{1}{4}$ του 1.960 είναι:

$\frac{1}{4} \cdot 1.960 = \frac{1.960}{4} = 490$. Το άθροισμα τους είναι $245 + 490 = 735$, ενώ η διαφορά $1.960 - 1.225$ ομοίως ισούται με 735.

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 18 – Λύση

Δεδομένα: Τα σχήματα είναι ισοπεριμετρικά.
Ζητούμενα: Ο αριθμός x και η Περίμετρος των σχημάτων.

Αφού τα σχήματα έχουν ίσες Περιμέτρους,Δημιουργούμε την εξίσωση:

$$2x-1+x+5+3x-1=2(9-x)+2\left(6-\frac{x}{2}\right)$$
$$6x+3=18-2x+12-x$$
$$6x+2x+x=30-3$$
$$9x=27$$
$$x=\frac{27}{9}=3 \text{ μονάδες}$$

Υπολογίζουμε τις Περιμέτρους του κάθε σχήματος κάνοντας ταυτόχρονα επαλήθευση του αποτελέσματος.

$\Pi_{\tau\rho}=2x-1+x+5+3x-1=6x+3=6\cdot 3+3=21$ μονάδες

$\Pi_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda}=2(9-x)+2\left(6-\frac{x}{2}\right)=18-2x+12-x=30-3x=30-3\cdot 3=21$ μονάδες

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 19 – Λύση

Δεδομένα: Ισχύει η σχέση $\frac{\hat{A}}{3}=\frac{\hat{B}}{4}=\frac{\hat{\Gamma}}{5}$. Επιπλέον το άθροισμα των τριών γωνιών είναι 180° .
(Ζητούμενα: Το μέτρο κάθε γωνίας.

Θέτουμε $\frac{\hat{\boldsymbol{A}}}{\mathbf{3}}=\frac{\hat{\boldsymbol{B}}}{\mathbf{4}}=\frac{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}}{\mathbf{5}}=\boldsymbol{x}$. Εκτελώντας τα σταυρωτά «χιαστί») γινόμενα, η κάθε γωνία εκφράζεται σε σχέση με το $\boldsymbol{x}$ ως εξής:

$$\hat{A}=3x,\ \hat{B}=4x,\ \hat{\Gamma}=5x$$

Δημιουργούμε την εξίσωση, αξιοποιώντας το 2° δεδομένο για το άθροισμα γωνιων τριγώνου και έχουμε:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^0$$

$$3x+4x+5x=180^0$$

$$12x=180^0$$

$$x=\frac{180^0}{12}=15^0$$

Οπότε κάθε γωνία θα έχει μέτρο:

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{3x}=\mathbf{3}\cdot\mathbf{15}=\mathbf{45^0},\hat{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{4x}=\mathbf{4}\cdot\mathbf{15}=\mathbf{60^0},\ \hat{\boldsymbol{\Gamma}}=\boldsymbol{5x}=\mathbf{5}\cdot\mathbf{15}=\mathbf{75^0}$$

Επαλήθευση: Υπολογίζουμε το άθροισμα των τριών γωνιών:$45^0+60^0+75^0=180^0$

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 20 – Λύση

Δεδομένα: Τα αυτοκίνητα κινούνται με ταχύτητες $v_1 = 18\,{}^{m}/_{s}$,$v_2 = 7\,{}^{m}/_{s}$. Απέχουν αρχικά $5km$.
Ζητούμενα: Ο χρόνος συνάντησης.

Αρχικά θα μετατρέψουμε τις μονάδες στο S.I.Δηλαδή $5km = 5000m$.
Τα δύο σώματα εκτελούν Ε.Ο.Κ με αντίθετες φορές, οπότε ο τύπος που δίνει το διάστημα της κίνησης είναι: $\boldsymbol{S = v \cdot t}$.

Υποθέτουμε ότι το αυτοκίνητο σε χρόνο t διένυσε απόσταση $\boldsymbol{S_1}$,ενώ ο ποδηλάτης στον ίδιο χρόνο διένυσε $\boldsymbol{S_2}$ Τότε θα ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$S_1 + S_2 = 5000$$
$$v_1 t + v_2 t = 5000$$
$$18t + 7t = 5000$$
$$25t = 5000$$
$$t = \frac{5000}{25} = 200 \text{ δευτερόλεπτα}$$

Επαλήθευση: Το αυτοκίνητο σε χρόνο 200 δευτερολέπτων διένυσε διάστημα που δίνεται από τον τύπο:

$$S_1 = v_1 t = 18 \cdot 200 = 3600m.$$

Ο ποδηλάτης αντίστοιχα διένυσε διάστημα που δίνεται από τον τύπο:

$$S_2 = v_2 t = 7 \cdot 200 = 1400m.$$

Το άθροισμα των δύο διαστημάτων θα είναι:

$$S_1 + S_2 = 3600 + 1400 = 5000m = 5km$$

Άρα η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

1.5. Ανισώσεις α΄βαθμού

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

i. Λάθος.
Δεν γνωρίζουμε το πρόσημο του αριθμού γ,ώστε να εξετάσουμε τη φορά.

ii. Σωστό.

iii. Λάθος.
Ο αριθμός γ είναι θετικός οπότε δεν αλλάζει η φορά της ανίσωσης.

iv. Σωστό.

v. Λάθος.
Δεν γνωρίζουμε το πρόσημο των αριθμών ή αν ο αριθμός β είναι διάφορος του μηδέν.

vi. Σωστό.

vii. Λάθος.
Αντιπαράδειγμα:Ο αριθμός 0,5 είναι μεγαλύτερος του μηδέν αλλα όχι και του ένα.

viii. Σωστο.

ix. Λάθος.
Η ανίσωση είναι ταυτότητα αφου ισχύει πάντα 0>1.

x. Σωστό.

Ερώτηση Κατανόησης 2 - Απάντηση

i. Σωστή επιλογή η (iii) αφού η ανίσωση έχει μη αρνητικές λύσεις.
ii. Σωστή επιλογή η (i) αφού η ανίσωση ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.
iii. Σωστή η επιλογή (i) αφού αν απαλείψουμε την μεταβλητή και στα δυο μέλη έχουμε $1 \leq 2$, που ισχύει πάντα.
iv. Σωστή η επιλογή (ii) αφού αν απαλείψουμε την μεταβλητή και στα δυο μέλη έχουμε $-1 \geq 1$, που είναι αδύνατο.

Ερώτηση Κατανόησης 3 - Απάντηση

i. Αδύνατη.
ii. Ταυτότητα.
iii. Αδύνατη.
iv. Αδύνατη.
v. Αδύνατη.
vi. Ταυτότητα.
vii. Ταυτότητα.
viii. Ταυτότητα.
ix. Ταυτότητα.
x. Αδύνατη.

Ερώτηση Κατανόησης 4 - Απάντηση

i. Όλα τα σύμβολα είναι διάταξης. Το σύμβολο $>$ σημαίνει μεγαλύτερο με το αρίστερο μέλος να δέχεται την μεγαλύτερη ποσότητα και δεξιά την μικρότερη. Το σύμβολο $<$ σημαίνει μικρότερο,με το αριστερό μέλος να δέχεται την μικρότερη ποσότητα και το δεξί την μεγαλύτερη. Το σύμβολο $\geq$ σημαίνει, μεγαλύτερο ή ίσο με την διαφορά ότι μπορεί να ισχύει είτε η ανισότητα είτε η ισότητα. Το σύμβολο $\leq$ σημαίνει, μικρότερο ή ίσο με την διαφορά ότι μπορεί να ισχύει είτε η ανισότητα είτε η ισότητα.

ii. Η ανισοτική σχέση των αριθμών σημαίνει ότι ο αριθμός α βρίσκεται δεξιότερα στην ευθεία των πραγματικών αριθμών από τον αριθμό β.

iii. Οι βασικές ιδιότητες ανισοτήτων είναι οι εξής:

a. Αν $\alpha < \beta$, τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$
b. Αν $\alpha < \beta$, τότε $\alpha - \gamma < \beta - \gamma$
c. Αν $\alpha < \beta$, και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
d. Αν $\alpha < \beta$, και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
e. Αν $\alpha < \beta$, και $\gamma > 0$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$
f. Αν $\alpha < \beta$, και $\gamma < 0$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

iv. Η ανίσωση είναι μια ανισότητα, η οποία περιέχει στα δύο μέλη της δύο παραστάσεις, όπου τουλαχιστον μια από αυτές περιέχει, τουλάχιστον μια μεταβλητή.

v. Κάνουμε τα εξής βήματα:

a. Εκτελούμε με επιμεριστική ιδιότητα όλες τις πράξεις και κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων.(Αν αυτές υπάρχουν)
b. Εάν έχουμε κλάσματικές παραστάσεις απαλείφουμε τους παρανομαστές πολλαπλασιάζοντας με το Ε.Κ.Π. όλους τους όρους.
c. Χωρίζουμε γνωστούς αγνώστους.
d. Σε κάθε μέλος κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
e. Διαρούμε και στα δύο μέλη με τον συντελεστή του αγνώστου,έχοντας υπόψη ότι αν αυτός είναι θετικός **δεν** αλλάζει η φορά της ανίσωσης, ενώ αν είναι αρνητικός αλλάζει η φορά της.Στην ειδική περίπτωση που ο συντελεστής είναι μηδέν θα πρέπει να εξετάσουμε αν η ανίσωση είναι **ταυτότητα ή αδύνατη.**

vi. Μια ανίσωση θα λέγεται **ταυτότητα** εάν επαληθεύεται για κάθε πραγματική τιμή της μεταβλητής.

vii. Μια ανίσωση θα λέγεται **αδύνατη** εάν **δεν** επαληθεύεται για καμία πραγματική τιμή της μεταβλητής.

Ασκήσεις για Διδασκαλία

*Σε κάθε ανίσωση ακολουθούμε τα βήματα επίλυσης,δηλαδή απαλοιφη παρενθέσεων (αν υπάρχουν), απαλοιφή παρανομαστών (αν υπάρχούν) ,χωρίζουμε γνωστούς-αγνώστους,διαιρούμε με τον συντελεστή, **προσέχοντας** την διατήρηση ή την αλλαγη φοράς,ανάλογα με το πρόσημο του.

Άσκηση 1 – Λύση

i. $2x-8\leq 0$ άρα $2x\leq 8$ άρα $x\leq 4$

ii. $2x>5x$ άρα $2x-5x>0$ άρα $-3x>0$ άρα $x<0$

iii. $29-4x>5$ άρα $-4x>5-29$ άρα $-4x>-24$ άρα $x<6$

iv. $5x+11\leq 21+6x$ άρα $5x-6x\leq 21-11$ άρα $-1x\leq 10$ άρα $x\geq -10$

v. $-3x+9\geq 2x-6$ άρα $-3x-2x\geq -6-9$ άρα $-5x\geq -15$ άρα $x\leq 3$

Άσκηση 2 – Λύση

i. $4(x-2)+5<2(x-1)+3$
$4x-8+5<2x-2+3$
$4x-2x<8-5-2+3$
$2x<4$
$x<2$

ii. $25x-[22-(4x-5)]>3x-(6x-5)$
$25x-[22-4x+5]>3x-6x+5$
$25x-22+4x-5>3x-6x+5$
$25x+4x-3x+6x>22+5+5$
$32x>32$
$x>1$

iii. $2(5-2x)-7 \geq -26-3(x-6)$
$10-4x-7 \geq -26-3x+18$
$-4x+3x \geq -10+7-26+18$
$-x \geq -11$
$x \leq 11$

iv. $8(x-3)-(6-2x) \leq 2(x+2)-5(5-x)$
$8x-24-6+2x \leq 2x+4-25+5x$
$8x+2x-2x-5x \leq 24+6+4-25$
$3x \leq 9$
$x \leq 3$

v. $x-7[2(2x-5)-3(x-3)] > -5$
$x-7[4x-10-3x+9] > -5$
$x-7(x-1) > -5$
$x-7x+7 > -5$
$-6x > -12$
$x < 2$

Άσκηση 3 – Λύση

i. $\frac{1}{2}-\frac{1-y}{3} \leq \frac{5}{6}$
$6 \cdot \frac{1}{2}-6 \cdot \frac{1-y}{3} \leq 6 \cdot \frac{5}{6}$
$3-2(1-y) \leq 5$
$3-2+2y \leq 5$
$2y \leq 5-3+2$
$2y \leq 4$
$y \leq 2$

ii. $\frac{y+1}{4}-\frac{y}{2} \geq 1$
$4 \cdot \frac{y+1}{4}-4 \cdot \frac{y}{2} \geq 4 \cdot 1$
$y+1-2y \geq 4$
$-y \geq 4-1$ άρα $y \leq -3$

iii. $1-\frac{4-y}{3}>\frac{16}{21}-\frac{1-y}{7}$

$21\cdot 1-21\cdot\frac{4-y}{3}>21\cdot\frac{16}{21}-21\cdot\frac{1-y}{7}$

$21-7(4-y)>16-3(1-y)$

$21-28+7y>16-3+3y$

$7y-3y>-21+28-3+16$

$4y>20$ άρα $y>5$

iv. $\frac{4x-8}{-5}\leq 0$

$(-5)\cdot\frac{4x-8}{-5}\geq(-5)\cdot 0$

$4x-8\geq 0$

$4x\geq 8$ άρα $x\geq 2$

v. $\frac{x+2}{3}>\frac{1}{2}-\frac{x}{-4}$

$12\cdot\frac{x+2}{3}>12\cdot\frac{1}{2}+12\cdot\frac{x}{4}$

$4(x+2)>6+3x$

$4x-3x>6-8$ άρα $x>-2$

Άσκηση 4 – Λύση

i. $\frac{3(x-4)}{5} - \frac{5x-1}{10} > \frac{x+5}{3}$

$\frac{3x-12}{5} - \frac{5x-1}{10} > \frac{x+5}{3}$

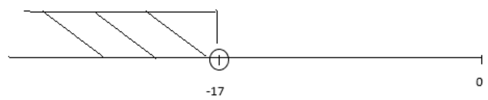
$30 \cdot \frac{3x-12}{5} - 30 \cdot \frac{5x-1}{10} > 30 \cdot \frac{x+5}{3}$

$6(3x-12) - 3(5x-1) > 10(x+5)$

$18x - 72 - 15x + 3 > 10x + 50$

$18x - 10x - 15x > 72 - 3 + 50$

$-7x > 119$ άρα $x < -17$



ii. $\frac{4}{3}(x+2) - \frac{6}{7}(x-7) > 12$

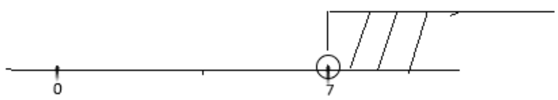
$21 \cdot \frac{4}{3}(x+2) - 21 \cdot \frac{6}{7}(x-7) > 21 \cdot 12$

$28(x+2) - 18(x-7) > 252$

$28x + 56 - 18x + 126 > 252$

$10x > 252 - 56 - 126$

$10x > 70$ άρα $x > 7$



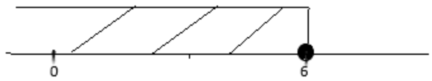
iii. $1+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x \geq \frac{3}{4}x-\frac{9}{2}$

$12\cdot 1+12\cdot\frac{1}{2}x-12\cdot\frac{2}{3}x \geq 12\cdot\frac{3}{4}x-12\cdot\frac{9}{2}$

$12+6x-8x \geq 9x-54$

$6x-8x-9x \geq -54-12$

$-11x \geq -66$ άρα $x \leq 6$



iv. $-(x-3)-\frac{2(4-x)}{3}<\frac{1}{2}-\frac{7(x+1)}{24}$

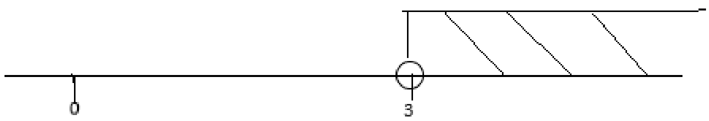
$-24\cdot(x-3)-24\cdot\frac{2(4-x)}{3}<24\cdot\frac{1}{2}-24\cdot\frac{7(x+1)}{24}$

$-24x+72-16(4-x)<12-7(x+1)$

$-24x+72-64+16x<12-7x-7$

$-24x+16x+7x<-72+64+12-7$

$-x<-3$ άρα $x>3$



Άσκηση 5 – Λύση

i. $5(x-2)-4(2x+1)>-3(x+4)$
$5x-10-8x-4>-3x-12$
$5x-8x+3x>10+4-12$
$0x>2$
Αδύνατη

ii. $2(y-1)+3\geq -y-3(2-y)$
$2y-2+3\geq -y-6+3y$
$2y+y-3y\geq 2-3-6$
$0y\geq -7$
Ταυτότητα

iii. $2(3\omega-1)-3(4-2\omega)>4(3\omega-5)$
$6\omega-2-12+6\omega>12\omega-20$
$6\omega+6\omega-12\omega>2+12-20$
$0\omega>-6$
Ταυτότητα

iv. $\frac{\alpha-3}{2}-\frac{\alpha+3}{6}>\frac{\alpha-3}{3}$
$6\cdot\frac{\alpha-3}{2}-6\cdot\frac{\alpha+3}{6}>6\cdot\frac{\alpha-3}{3}$
$3(\alpha-3)-(\alpha+3)>2(\alpha-3)$
$3\alpha-9-\alpha-3>2\alpha-6$
$3\alpha-2\alpha-\alpha>9+3-6$
$0\alpha>6$
Αδύνατη

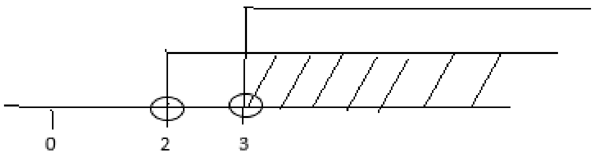
v. $\frac{\beta-15}{2}+\frac{5}{4}\leq\beta-\frac{\beta-3}{2}-3$
$4\cdot\frac{\beta-15}{2}+4\cdot\frac{5}{4}\leq 4\cdot\beta-4\cdot\frac{\beta-3}{2}-4\cdot 3$
$2(\beta-15)+5\leq 4\beta-2(\beta-3)-12$
$2\beta-30+5\leq 4\beta-2\beta+6-12$
$2\beta-4\beta+2\beta\leq 30-5+6-12$
$0\beta\leq 19$
Ταυτότητα

Άσκηση 6 – Λύση

Σε κάθε ένα από τα ερωτήματα, θα λύσουμε χωρισυτά την κάθε ανίσωση και θα βρούμε , αν υπάρχουν, τα διαστήματα που αυτές συναληθεύουν.

i.

$3x-2(1-x)>2x+7$	$5x<2(7x-3)-12$
$3x-2+2x>2x+7$	$5x<14x-6-12$
$3x+2x-2x>2+7$	$5x-14x<-6-12$
$3x>9$	$-9x<-18$
$\frac{3x}{3}>\frac{9}{3}$	$\frac{-9x}{-9}>\frac{-18}{-9}$
$x>3$	$x>2$



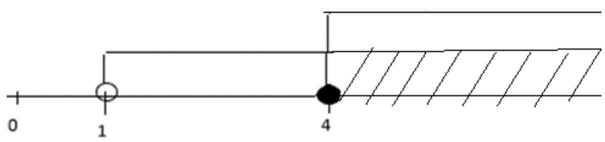
ii.

$2(x-3)-4(x+2)\geq 6$	$-7\geq -3(4-x)-5(x+1)$
$2x-6-4x-8\geq 6$	$-7\geq -12+3x-5x-5$
$2x-4x\geq 6+6+8$	$-3x+5x\geq 7-12-5$
$-2x\geq 20$	$2x\geq -10$
$\frac{-2x}{-2}\leq\frac{20}{-2}$	$\frac{2x}{2}\geq\frac{-10}{2}$
$x\leq -10$	$x\geq -5$

Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε διαστήματα όπου οι ανισώσεις συναληθεύουν.

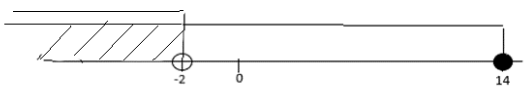
iii.

$\frac{x-1}{2} < x-1$ $2\cdot\frac{x-1}{2} < 2\cdot(x-1)x$ $x-1 < 2x-2$ $x-2x < -2+1$ $-x < -1$ $\frac{-x}{-1} > \frac{-1}{-1}$ $x > 1$	$\frac{x-4}{4} \geq \frac{x+4}{8} - 1$ $8\cdot\frac{x-4}{4} \geq 8\cdot\frac{x+4}{8} - 8\cdot 1$ $2(x-4) \geq x+4-8$ $2x-8 \geq x-4$ $2x - x \geq 8-4$ $x \geq 4$



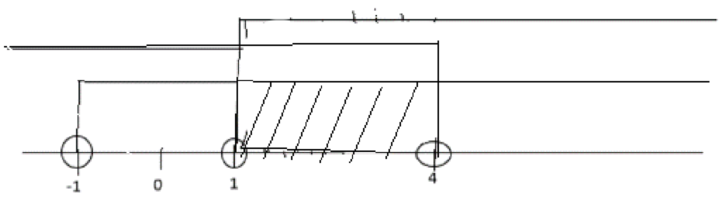
iv.

$\frac{x+4}{6} + 2 \geq \frac{x-2}{4} + \frac{x-2}{6}$ $12\cdot\frac{x+4}{6} + 12\cdot 2 \geq 12\cdot\frac{x-2}{4} + 12\cdot\frac{x-2}{6}$ $2(x+4)+24 \geq 3(x-2)+2(x-2)$ $2x+8+24 \geq 3x-6+2x-4$ $2x-3x-2x \geq -24-8-6-4$ $-3x \geq -42$ $\frac{-3x}{-3} \leq \frac{-42}{-3}$ $x \leq 14$	$x - \frac{x-3}{2} < \frac{x}{2} - \frac{x-4}{4}$ $4\cdot x - 4\cdot\frac{x-3}{2} < 4\cdot\frac{x}{2} - 4\cdot\frac{x-4}{4}$ $4x - 2(x-3) < 2x - (x-4)$ $4x-2x+6 < 2x-x+4$ $4x-2x-2x+x < -6+4$ $x < -2$



v.

$\frac{3x+5}{2} > 4$ $2 \cdot \frac{3x+5}{2} > 2 \cdot 4$ $3x + 5 > 8$ $3x > 8 - 5$ $3x > 3$ $x > 1$	$\frac{3-2x}{5} < 1$ $5 \cdot \frac{3-2x}{5} < 5 \cdot 1$ $3 - 2x < 5$ $-2x < 5 - 3$ $\frac{-2x}{-2} > \frac{2}{-2}$ $x > -1$	$\frac{6-x}{2} > 1$ $2 \cdot \frac{6-x}{2} > 2 \cdot 1$ $6 - x > 2$ $-x > -6 + 2$ $-x > -4$ $\frac{-x}{-1} < \frac{-4}{-1}$ $x < 4$



Άσκηση 7 – Λύση

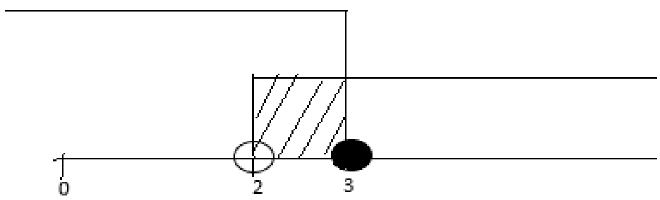
i. $4 < 3x - 2 \leq 7$

$4 + 2 < 3x - 2 + 2 \leq 7 + 2$

$6 < 3x \leq 9$

$\frac{6}{3} < \frac{3x}{3} \leq \frac{9}{3}$

$2 < x \leq 3$



ii. $-8 < -3 - 5(x-2) \leq 2$

$-8 < -3 - 5x + 10 \leq 2$

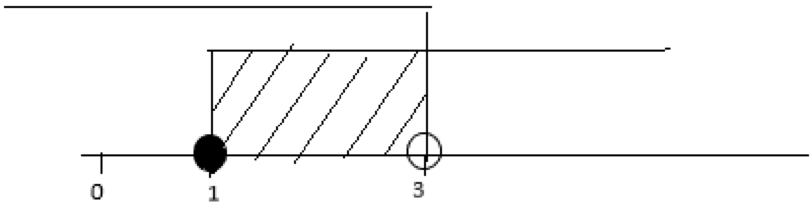
$-8 + 3 - 10 < -3 - 5x + 10 + 3 - 10 \leq 2 + 3 - 10$

$-15 < -5x \leq -5$

$\frac{-15}{-5} > \frac{-5x}{-5} \geq \frac{-5}{-5}$

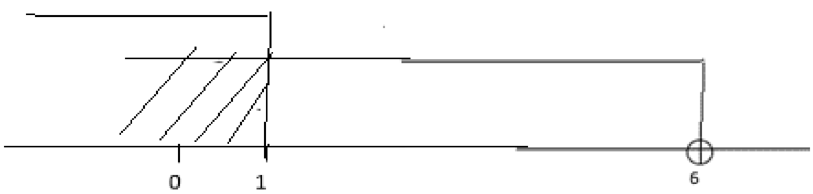
$3 > x \geq 1$

$1 \leq x < 3$



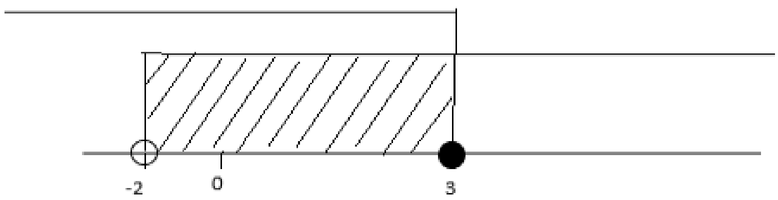
iii.

$2x - 5 < 7$ $2x < 7 + 5$ $2x < 12$ $\frac{2x}{2} < \frac{12}{2}$ $x < 6$	$10 - 3x > 7$ $-3x > -10 + 7$ $-3x > -3$ $\frac{-3x}{-3} < \frac{-3}{-3}$ $x < 1$



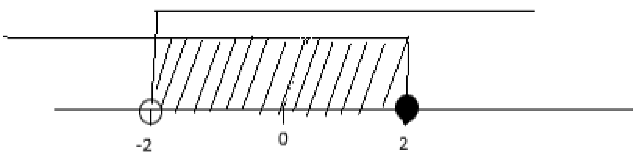
iv.

$-2[7-2(2-x)]<6+2x$	$6+2x\leq -2(x-9)$
$-2[7-4+2x]<6+2x$	$6+2x\leq -2x+18$
$-14+8-4x<6+2x$	$2x+2x\leq 18-6$
$-4x-2x<14-8+6$	$4x\leq 12$
$-6x<12$	$\frac{4x}{4}\leq\frac{12}{4}$
$\frac{-6x}{-6}>\frac{12}{-6}$	$x\leq 3$
$x>-2$	



v.

$5-2(11-4x)\leq 3x-7$	$3x-7<5(x-1)+2$
$5-22+8x\leq 3x-7$	$3x-7<5x-5+2$
$8x-3x\leq -5+22-7$	$3x-5x<7-5+2$
$5x\leq 10$	$-2x<4$
$\frac{5x}{5}\leq\frac{10}{5}$	$\frac{-2x}{-2}x>\frac{4}{-2}$
$x\leq 2$	$x>-2$



Άσκηση 8 – Λύση

Θα πρέπει να λύσουμε την ανίσωση $A > 0$.Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$A > 0$$
$$3(2-x) - 9 > 0$$
$$6 - 3x - 9 > 0$$
$$-3x > 3 \text{ άρα}$$
$$x < -1$$

Άσκηση 9 – Λύση

i. Θα απλοποιήσουμε τις παραστάσεις χρησιμοποιώνατας επιμεριστική ιδιότητα,κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων και αναγωγή ομοίων όρων.Για τις παραστάσεις έχουμε:

$$A = 1 - (4-x) - 5[4x - 3(x-1)] = -3 + x - 5(x+3) = -3 + x - 5x - 15$$
$$= -4x - 18$$

$$B = 2x - 3[2(x+1) - x] = 2x - 3[2x + 2 - x] = 2x - 3x - 6 = -x - 6$$

ii. Θα πρέπει να λύσουμε αρχικά την ανίσωση $A < B$. Δημιουργούμε την ανίσωση:

$$A < B$$
$$-4x - 18 < -x - 6$$
$$-4x + x < 18 - 6$$
$$-3x < 12$$
$$\frac{-3x}{-3} > \frac{12}{-3}$$
$$x > -4$$

Θέλουμε τις αρνητικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει η παραπάνω ανίσωση.Οπότε το ζητούμενο διάστημα λύσεων είναι το:

$$\boldsymbol{-4 < x < 0}$$

Άσκηση 10 – Λύση

i. Θα πρέπει στην ανίσωση να αντικαταστήσουμε την τιμή $x = 3$,και να λύσουμε την ανίσωση ως προς α. Οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$\frac{3\alpha - \alpha}{3} + 1 > \frac{3}{3}$$

$$\frac{2\alpha}{3} + 1 > 1$$

$$\alpha > 0$$

ii. α) Θα αντικαταστήσουμε στην ανίσωση την τιμή $\alpha = -1$ και έχουμε:

$$\frac{-x - (-1)}{3} + 1 > \frac{x}{3}$$

$$\frac{-x + 1}{3} + 1 > \frac{x}{3}$$

$$3 \cdot \frac{-x + 1}{3} + 3 \cdot 1 > 3 \cdot \frac{x}{3}$$

$$-x + 1 + 3 > x$$

$$-x - x > -4$$

$$-2x > -4$$

$$x < 2$$

b) Θα αντικαταστήσουμε στην ανίσωση την τιμή $\alpha = 1$ και έχουμε:

$$\frac{x - 1}{3} + 1 > \frac{x}{3}$$

$$3 \cdot \frac{x - 1}{3} + 3 \cdot 1 > 3 \cdot \frac{x}{3}$$

$$x - x > 1 - 3$$

$$0x > -2$$

Οπότε η ανίσωση είναι **Ταυτότητα.**

Άσκηση 11 – Λύση

Γνωρίζουμε ότι ο μέσος όρος προκύπτει από το άθροισμα των βαθμών προς το πλήθος των διαγωνισμάτων. Έστω x ο βαθμός στο τελευταίο διαγώνισμα.Οπότε δημιουργούμε την ανίσωση:

$$\frac{13+16+\mathrm{x}}{3} > 15$$

$$3 \cdot \frac{13+16+\mathrm{x}}{3} > 3 \cdot 15$$

$$29 + x > 45$$

$$x > 45 - 26$$

$$x > 19$$

Οπότε ο μοναδικός εφικτός βαθμός που μπορούμε να έχουμε είναι το 20.

Άσκηση 12 – Λύση

Έστω $\boldsymbol{x}$ το πλήθος των εκδρομών (**ακέραιος και θετικός)** ανεξαρτήτως εγγραφής.Το κόστος για όλες τις εκδρομές χωρίς εγγραφη θα είναι $\mathbf{75}\boldsymbol{x}$, ενώ το κόστος με εγγραφή $\mathbf{50}\boldsymbol{x} + \mathbf{150}$. Για να συμφέρει η εγγραφή θα πρέπει το κόστος με εγγραφή να είναι μικρότερο του κόστους χωρίς εγγραφή.
Έχουμε την ακόλουθη ανίσωση:

$$50x + 150 < 75x$$

$$50x - 75x < -150$$

$$-25x < -150$$

$$\frac{-25x}{-25} > \frac{-150}{-25}$$

$$x > 6$$

Άρα ο ελάχιστος αριθμός εκδρομών που πρέπει να γίνουν ώστε να συμφέρει στο κόστος είναι 7 εκδρομες. Σε ακριβώς 6 εκδρομές το κόστος ανα περίπτωση θα ναι το ίδιο.

Άσκηση 13 – Λύση

Το σταθερό κόστος για την ενοικίαση στη διάρκεια 6 ημερών θα είναι 75€.Έστω $\boldsymbol{x}$ τα χιλιόμετρα που θα διανύσουν.Οπότε το κόστος για τα διανυόμενα χιλιόμετρα θα είναι $\mathbf{0,25}\boldsymbol{x}$ και συνολικά με το πάγιο $\mathbf{0,25}\boldsymbol{x}+\mathbf{75}$. Για να μην ξεπεράσουν τα 200€, έχουμε την ανίσωση:

$$0{,}25x+75\leq 200$$
$$0{,}25x\leq 200-75$$
$$0{,}25x\leq 125$$
$$\frac{0{,}25x}{0{,}25}\leq\frac{125}{0{,}25}$$
$$x\leq 500km$$

Άρα μπορούν να διανύσουν το πολύ 500 χιλιόμετρα.

Άσκηση 14 – Λύση

Έστω $\boldsymbol{x}$ ο αριθμός των προσκλητηρίων (**ακέραιος και θετικός)**.Το κέρδος από τα προσκλητήρια είναι $\mathbf{2,5}\boldsymbol{x}$ είναι τα συνολικά κέρδη του λόγω των μηνιαίων εξόδων θα είναι $\mathbf{2,5}\boldsymbol{x}-\mathbf{750}$.Με τα δεδομένα δημιουργούμε την ανίσωση:

$$2{,}5x-750\geq 1500$$
$$2.5x\geq 1500+750$$
$$2{,}5x\geq 2250$$
$$\frac{2{,}5x}{2{,}5}\geq\frac{2250}{2{,}5}$$
$$x\geq 900$$

Χρειάζεται τουλάχιστον 900 προσκλητήρια για να έχει κέρδος το διπλάσιο των εξόδων.

Άσκηση 15 – Λύση

Έστω $\boldsymbol{x}$ ο φυσικός.Το τριπλάσιο του αυξημένο κατά 5 θα είναι $\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{5}$.Ενω το τετραπλάσιο του αυξημένο κατά 2 είναι $\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}$.

Έχουμε την ανίσωση:

$$3x+5<4x+2$$

$$3x-4x<-5+2$$

$$-x<-3$$

$$\frac{-x}{-1x}>\frac{-3}{-1}$$

$$x>3$$

Οπότε ο μικρότερος φυσικός για να ισχύει η ανίσωση, είναι ο αριθμός 4.

Άσκηση 16 – Λύση

Έστω $\boldsymbol{x}$ ο φυσικός αριθμός.Εφόσον διαιρεθεί με το 15 και αφήνει υπόλοιπο 8 θα ισχύει

$\boldsymbol{x}=\mathbf{15}\boldsymbol{\delta}+\mathbf{8}$.

Δημιουργούμε την ανίσωση με άγνωστο τον διαιρέτη δ:

$$53<15\delta+8<83$$

$$53-8<15\delta+8-8<83-8$$

$$45<15\delta<75$$

$$\frac{45}{15}<\frac{15\delta}{15}<\frac{75}{15}$$

$$3<\delta<5$$

Ο μοναδικός φυσικός ανάμεσα στο 3 και στο 5, είναι το 4.Οπότε ισχύει $\delta=4$.

Ο φυσικός αριθμός που αναζητούμε είναι:

$$x=15\delta+8=15\cdot 4+8=68$$

Άσκηση 17 – Λύση

Έστω **x** το πλήθος των διαδρομών (**ακέραιος και θετικός)**.Το συνολικό κόστος τους θα είναι $\mathbf{1{,}2x}$.

Για να συμφέρει η μηνιαία κάρτα θα πρέπει, το αντίτιμο της να είναι μικρότερο από το κόστος των διαδρομών. Έχουμε την ανίσωση:

$$1{,}2x > 30$$

$$\frac{1{,}2x}{1{,}2} > \frac{30}{1{,}2}$$

$$x > 25$$

Οπότε η μηνιαία κάρτα θα συμφέρει μετα τις 25 διαδρομές.

Άσκηση 18 – Λύση

Έστω $\boldsymbol{x}$ ο αριθμός των γραμματοσήμων (**ακέραιος και θετικός)**.Με τα δεδομένα δημιουργούμε τις ανισώσεις:

$$3x > 750$$

$$\frac{3x}{3} > \frac{750}{3}$$

$$x > 250$$

Και ισχύει επιπλέον :

$$\frac{x}{2} < 126$$

$$2 \cdot \frac{x}{2} < 2 \cdot 126$$

$$x < 252$$

Για το πλήθος των γραμματοσήμων ισχύει $250 < x < 252$.

Ο μοναδικός φυσικός που επαληθεύει την ανίσωση είναι ο 251, που είναι και το πλήθος τους.

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

i. $4x - 16 > 0$ άρα $4x > 16$ άρα $\frac{4x}{4} > \frac{16}{4}$ άρα $x > 4$

ii. $8 - 5(2 - x) < 11 + 6(x - 2)$

$8 - 10 + 5x < 11 + 6x - 12$

$5x - 6x < -8 + 10 + 11 - 12$

$x > -1$

iii. $-5(2 - x) + 13 \leq 9 - (x - 6)$

$-10 + 5x + 13 \leq 9 - x + 6$

$5x + x \leq 10 - 13 + 9 + 6$

$6x \leq 12$

$x \leq 2$

iv. $2[3(5 - x) - (x + 5)] \geq -5x - (4 - x)$

$2[15 - 3x - x - 5] \geq -5x - 4 + x$

$20 - 8x \geq -5x - 4 + x$

$-8x + 5x - x \geq -20 - 4$

$-4x \geq -24$

$x \leq 6$

v. $38 - 3x > 4[4(x - 10) - (x - 12)]$

$38 - 3x > 4(3x - 28)$

$38 - 3x > 12x - 112$

$-15x > -150$

$x < 10$

Άσκηση 2 – Λύση

i. $2 - \frac{4-9x}{6} \geq x - \frac{2}{3}$

$12 - (4 - 9x) \geq 6x - 4$

$\frac{3x}{3} \geq \frac{-12}{3}$ άρα $x \geq -4$

ii. $10 - \frac{y-1}{2} > y - \frac{2y+1}{3}$

$6 \cdot 10 - 6 \cdot \frac{y-1}{2} > 6 \cdot y - 6 \cdot \frac{2y+1}{3}$

$-3y - 6y + 4y > -60 - 3 - 2$

$\frac{-5y}{-5} < \frac{-65}{-5}$ άρα $y < 13$

iii. $\frac{5\omega-16}{6} - \frac{\omega+1}{3} \leq -1 - \frac{\omega-4}{12}$

$12 \cdot \frac{5\omega-16}{6} - 12 \cdot \frac{\omega+1}{3} \leq -1 \cdot 12 - 12 \cdot \frac{\omega-4}{12}$

$10\omega - 4\omega + \omega \leq 32 + 4 - 12 + 4$ άρα $\omega \leq 4$

iv. $\frac{1-2\alpha}{8} - \frac{1-10\alpha}{24} \leq \frac{2\alpha+5}{4} - \frac{\alpha+3}{2}$

$24 \cdot \frac{1-2\alpha}{8} - 24 \cdot \frac{1-10\alpha}{24} \leq 24 \cdot \frac{2\alpha+5}{4} - 24 \cdot \frac{\alpha+3}{2}$

$3 - 6\alpha - 1 + 10\alpha \leq 12\alpha + 30 - 12\alpha - 36$

$-6\alpha + 10\alpha - 12\alpha + 12\alpha \leq -3 + 1 + 30 - 36$

$\alpha \leq -2$

v. $\frac{3\beta+2}{5} - \frac{4\beta-1}{10} \geq \frac{\beta+1}{4} - \frac{5\beta-2}{8}$

$40 \cdot \frac{3\beta+2}{5} - 40 \cdot \frac{4\beta-1}{10} \geq 40 \cdot \frac{\beta+1}{4} - 40 \cdot \frac{5\beta-2}{8}$

$24\beta + 16 - 16\beta + 4 \geq 10\beta + 10 - 25\beta + 10$

$23\beta \geq 0$ άρα $\beta \geq 0$

Άσκηση 3 – Λύση

i. $2(x+4)-\frac{3x+15}{2}<0$

$2\cdot 2(x+4)-2\cdot\frac{3x+15}{2}<2\cdot 0$

$4x+16-3x-15<0$ άρα $x<-1$

ii. $\frac{1-3(x+2)}{4}-\frac{x+2}{2}>1-\frac{2(x+4)}{3}$

$12\cdot\frac{1-3(x+2)}{4}-12\cdot\frac{x+2}{2}>12\cdot 1-12\cdot\frac{2(x+4)}{3}$

$3[1-3x-6]-6x-12>12-8x-32$

$-15-9x-6x-12>-20-8x$ άρα $x<-1$

iii. $16-3(1-3x)\geq 6x-\frac{5(2-3x)}{2}$

$2\cdot 16-2\cdot 3(1-3x)\geq 2\cdot 6x-2\cdot\frac{5(2-3x)}{2}$

$32-6+18x\geq 12x-10+15x$

$-9x\geq -36$ άρα $x\leq 4$

iv. $\frac{3}{16}(y-1)-\frac{5}{12}(y-4)<\frac{1}{6}(y-6)+\frac{5}{48}$

$48\cdot\frac{3}{16}(y-1)-48\cdot\frac{5}{12}(y-4)<48\cdot\frac{1}{6}(y-6)+48\cdot\frac{5}{48}$

$9y-9-20y+80<8y-48+5$

$-19y<-114$ άρα $y>6$

v. $2y-3(2-y)>\frac{2}{3}(y+11)+7y$

$6y-9(2-y)>2(y+11)+21y$

$6y+9y-2y-21y>18+22$

$-8y>40$ άρα $y<-5$

vi. $\frac{y-4}{6}-\frac{1-2(y-4)}{3}\leq 1-\frac{6-y}{2}$

$6\cdot\frac{y-4}{6}-6\cdot\frac{1-2(y-4)}{3}\leq 6\cdot 1-6\cdot\frac{6-y}{2}$

$y-4-2[1-2y+8]\leq 6-18+3y$

$y-4-18+4y\leq -12+3y$

$2y\leq 10$ άρα $y\leq 5$

Άσκηση 4 – Λύση

i. $12(x+2)+5<3(4x+9)+4$

$12x+24+5<12x+27+4$

$0x<2$

Ταυτότητα

ii. $7-4(3-2x)-3x\leq 3(x-2)-2(5-x)$

$7-12+8x-3x\leq 3x-6-10+2x$

$0x\leq -11$

Αδύνατη

iii. $4(x+3)-7(x-1)+10<23+3(2-x)$

$4x+12-7x+7+10<23+6-3x$

$0x<0$

Αδύνατη

iv. $\frac{y-3}{2}+\frac{2}{5}<\frac{y-1}{10}-\frac{3-2y}{5}$

$10\cdot\frac{y-3}{2}+10\cdot\frac{2}{5}<10\cdot\frac{y-1}{10}-10\cdot\frac{3-2y}{5}$

$5y-y-4y<15-4-1-6$

$0y<4$

Ταυτότητα

v. $\frac{2y+3}{4} > y - \frac{y+1}{2}$

$4 \cdot \frac{2y+3}{4} > 4 \cdot y - 4 \cdot \frac{y+1}{2}$

$2y + 3 > 4y - 2(y + 1)$

$2y - 4y + 2y > -3 - 2$

$0y > -5$

Ταυτότητα

vi. $\frac{y+1}{16} - \frac{1+y}{2} > \frac{y-1}{16} - \frac{1+2y}{4}$

$16 \cdot \frac{y+1}{16} - 16 \cdot \frac{1+y}{2} > 16 \cdot \frac{y-1}{16} - 16 \cdot \frac{1+2y}{4}$

$y - 8y - y + 8y > -1 + 8 - 1 - 4$

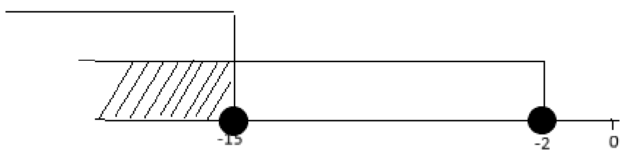
$0y > 2$

Αδύνατη

Άσκηση 5 – Λύση

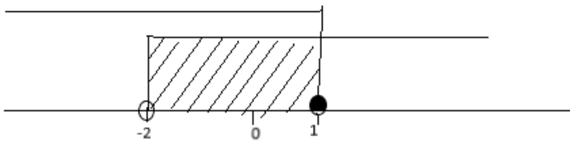
i.

$6 - 3(-2 - \mathrm{x}) \leq 3 - 2(3 - \mathrm{x})$	$-4(-3 - x) - 5(-2 - 2x) \leq -6$
$6 + 6 + 3\mathrm{x} \leq 3 - 6 + 2\mathrm{x}$	$12 + 4x + 10 + 10x \leq -6$
$3\mathrm{x} - 2\mathrm{x} \leq -6 - 6 + 3 - 6$	$4x + 10x \leq -12 - 10 - 6$
$\mathrm{x} \leq -15$	$14x \leq -28$
	$\frac{14x}{14} \leq \frac{-28}{14}$
	$x \leq -2$



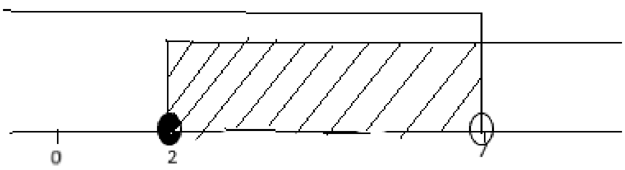
ii.

$-x-2(x+1)-3x<10$	$3-x-2(3-3x)\leq 2$
$-x-2x-2-3x<10$	$3-x-6+6x\leq 2$
$-x-2x-3x<2+10$	$-x+6x\leq -3+6+2$
$-6x<12$	$5x\leq 5$
$\frac{-6x}{-6}>\frac{12}{-6}$	$\frac{5x}{5}\leq\frac{5}{5}$
$x>-2$	$x\leq 1$



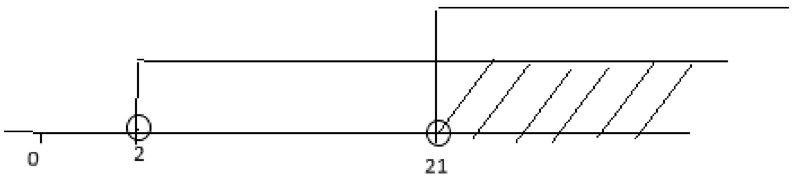
iii.

$\frac{x+5}{4}-\frac{x}{3}>\frac{x-3}{6}$	$\frac{7-3x}{12}+\frac{3}{4}-2x\leq\frac{5(5-2x)}{6}-4$
$12\cdot\frac{x+5}{4}-12\cdot\frac{x}{3}>12\cdot\frac{x-3}{6}$	$12\cdot\frac{7-3x}{12}+12\cdot\frac{3}{4}-12\cdot 2x\leq 12\cdot\frac{5(5-2x)}{6}-12\cdot 4$
$3(x+5)-4x>2(x-3)$	$7-3x+9-24x\leq 10(5-2x)-48$
$3x+15-4x>2x-6$	$16-3x-24x\leq 50-20x-48$
$3x-4x-2x>-15-6$	$-3x-24x+20x\leq -16+50-48$
$-3x>-21$	$-7x\leq -14$
$x<7$	$x\geq 2$



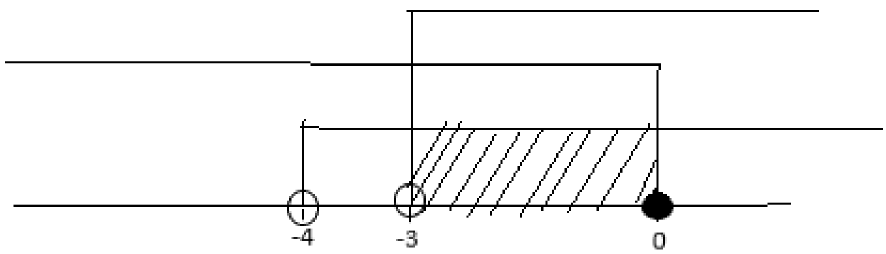
iv.

$\frac{4x-9}{5}-\frac{x-9}{6}>\frac{2x+6}{3}-\frac{2x-15}{9}$ $90\cdot\frac{4x-9}{5}-90\cdot\frac{x-9}{6}>90\cdot\frac{2x+6}{3}-90\cdot\frac{2x-15}{9}$ $72x-162-15x+135>60x+180-20x+150$ $17x>357$ $x>21$	$\frac{4-2x}{5}-\frac{x}{2}>\frac{3}{2}(2-x)-1$ $10\cdot\frac{4-2x}{5}-10\cdot\frac{x}{2}>10\cdot\frac{3}{2}(2-x)-10$ $2(4-2x)-5x>15(2-x)-10$ $-4x-5x+15x>-8+30-10$ $x>2$



v.

$\frac{-x}{2}-1<1$ $2\cdot\frac{-x}{2}-2\cdot1<2\cdot1$ $-x-2<2$ $-x<2+2$ $-x<4$ $\frac{-x}{-1}>\frac{4}{-1}$ $x>-4$	$-x-3<0$ $-x<3$ $\frac{-x}{-1}>\frac{3}{-1}$ $x>-3$	$5x\le 3x$ $5x-3x\le 0$ $2x\le 0$ $x\le 0$



Άσκηση 6 – Λύση

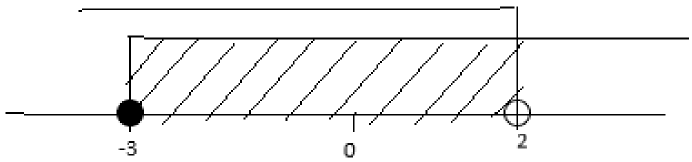
i. $-3 \leq \frac{x}{2} - \frac{x}{4} < 2$

$-3 \leq \frac{2x}{4} - \frac{x}{4} < 2$

$-3 \cdot 4 \leq 4 \cdot \frac{x}{4} < 4 \cdot 2$

$-12 \leq 4x < 8$

$-3 \leq x < 2$



ii. $-2 < \frac{x+3}{4} - \frac{2x+1}{6} < 1$

$-2 < \frac{3(x+3)}{12} - \frac{2(2x+1)}{12} < 1$

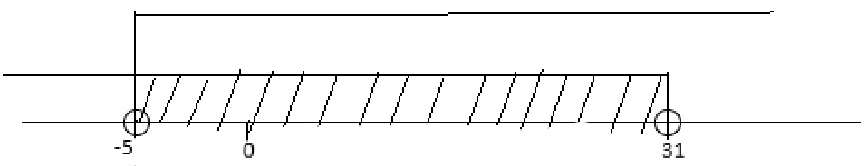
$-2 \cdot 12 < 12 \cdot \frac{7-x}{12} < 12 \cdot 1$

$-24 < 7 - x < 12$

$-24 - 7 < -x < 12 - 7$

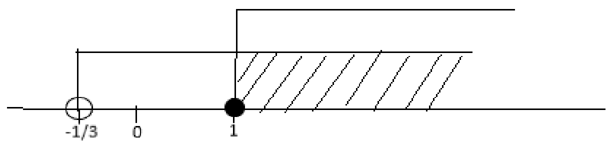
$-31 < -x < 5$

$-5 < x < 31$



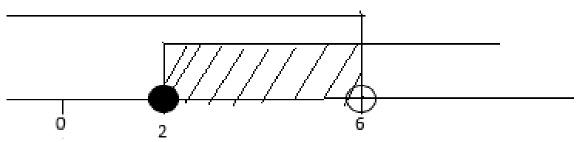
iii.

$\frac{-3(x+1)}{2} < -1$	$\frac{1-3(2-x)}{2} \geq -1$
$2 \cdot \frac{-3(x+1)}{2} < -1 \cdot 2$	$2 \cdot \frac{1-3(2-x)}{2} \geq -2 \cdot 1$
$-3(x+1) < -2$	$1-3(2-x) \geq -2$
$-3x-3 < -2$	$1-6+3x \geq -2$
$-3x < -2+3$	$3x \geq -1+6-2$
$\frac{-3x}{-3} > \frac{1}{-3}$	$3x \geq 3$
$x > -\frac{1}{3}$	$x \geq 1$



iv.

$\frac{10-2x}{3} \leq 2(x-1)$	$\frac{3x+2}{2} > 2(x-1)$
$3 \cdot \frac{10-2x}{3} \leq 3 \cdot 2(x-1)$	$2 \cdot \frac{3x+2}{2} > 2 \cdot 2(x-1)$
$10-2x \leq 6(x-1)$	$3x+2 > 4(x-1)$
$-2x-6x \leq -10-6$	$3x-4x > -2-4$
$-8x \leq -16$	$-x > -6$
$x \geq 2$	$x < 6$



v. $1 < 3 - \frac{x-3}{2} \leq 3$

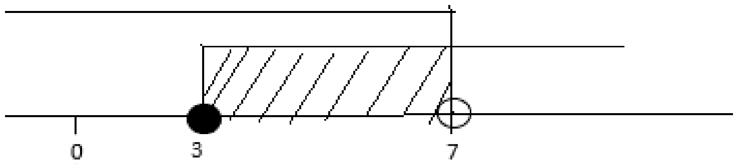
$1 - 3 < 3 - \frac{x-3}{2} - 3 \leq 3 - 3$

$-2 < -\frac{x-3}{2} \leq 0$

$4 > x - 3 \geq 0$

$7 > x \geq 3$

$3 \leq x < 7$



Άσκηση 7 – Λύση

Αρχικά θα απλοποιήσουμε την παράσταση φέρνοντας την σε απλούστερη μορφη:

$$A = 5(4 - x) - 2(3 - x) + 1 = 20 - 5x - 6 + 2x + 1 = -3x + 15$$

Θα λύσουμε την ανίσωση $A > 0$. Οπότε έχουμε:

$-3x + 15 > 0$

$-3x > -15$

$\frac{-3x}{-3} < \frac{-15}{-3}$

$x < 5$

Αφού ζητούμε τις θετικές τιμές θα ισχύει: $0 < x < 5$

Άσκηση 8 – Λύση

Αρχικά θα απλοποιήσουμε την παράσταση φέρνοντας την σε απλούστερη μορφή:

$$A = 2[3-(x-3)] - 3[3(x-1) - 2x + 1] + 1 = 2[3 - x + 3] - 3[3x - 3 - 2x + 1] + 1$$
$$= 2(6-x) - 3(x-2) + 1 = 12 - 2x - 3x + 6 + 1 = -5x + 19$$

Θα λύσουμε την ανίσωση $A \geq 0$. Οπότε έχουμε:

$$-5x + 19 \geq 0$$
$$-5x \geq -19$$
$$\frac{-5x}{-5} \leq \frac{-19}{-5}$$
$$x \leq \frac{19}{5} = 3{,}8$$

Αφού ζητούμε ακέραιο και μικρότερο του 3,8 οι πιθανές τιμές είναι :0,1,2,3

Άσκηση 9 – Λύση

Θα λύσουμε τις ανισώσεις : $A < 0$ και $B > 0$.

$$A < 0$$
$$1 + x - \frac{5x-1}{3} < 0$$
$$3 \cdot 1 + 3 \cdot x - 3 \cdot \frac{5x-1}{3} < 3 \cdot 0$$
$$3x - 5x < -3 - 1$$
$$x > 2$$

Οπότε οι ακέραιες τιμές ώστε να έχουμε αρνητικές τιμές στην παράσταση Α είναι όσοι ακέραιοι επαληθεύουν την ανίσωση:

$$x \geq 3$$

Για την παράσταση Β, έχουμε:

$B > 0$

$5(1-x) - \dfrac{4-9x}{2} > 0$

$2 \cdot 5(1-x) - 2 \cdot \dfrac{4-9x}{2} > 2 \cdot 0$

$10 - 10x - 4 + 9x > 0$

$-x > -6$

$x < 6$

Οπότε οι ακέραιες τιμές ώστε να έχουμε θετικές τιμές στην παράσταση Β είναι ολοι οι ακέραιοι που ικανοποιούν την ανίσωση: $x \leq 5$

Άσκηση 10 – Λύση

i. Θα αντικαταστήσουμε στην ανίσωση την τιμή $x = -1$ και θα λύσουμε ως προς a.Τότε έχουμε:

$\dfrac{a(x-1)}{2} - \dfrac{2x-a}{5} < \dfrac{x}{10} + \dfrac{2}{5}$

$\dfrac{a(-1-1)}{2} - \dfrac{2(-1)-a}{5} < \dfrac{-1}{10} + \dfrac{2}{5}$

$\dfrac{-2\alpha}{2} - \dfrac{-2-a}{5} < \dfrac{-1}{10} + \dfrac{2}{5}$

$10 \cdot \dfrac{-2\alpha}{2} - 10 \cdot \dfrac{-2-a}{5} < 10 \cdot \dfrac{-1}{10} + 10 \cdot \dfrac{2}{5}$

$-10\alpha + 4 + 2\alpha < 3$

$\alpha > \dfrac{1}{8}$

ii. Θα αντικαταστήσουμε στην ανίσωση την τιμή $a = 1$, και θα λύσουμε ως προς .Τότε έχουμε:

$$\frac{a(x-1)}{2} - \frac{2x-a}{5} < \frac{x}{10} + \frac{2}{5}$$

$$\frac{1(x-1)}{2} - \frac{2x-1}{5} < \frac{x}{10} + \frac{2}{5}$$

$$10 \cdot \frac{(x-1)}{2} - 10 \cdot \frac{2x-1}{5} < 10 \cdot \frac{x}{10} + 10 \cdot \frac{2}{5}$$

$$5(x-1) - 2(2x-1) < x + 4$$

$$5x - 4x - x < 5 - 2 + 4$$

$$0x < 7$$

Η ανίσωση είναι **Ταυτότητα.**

iii.Αρχικά θα αντικατααστήσουμε στην ανίσωση την τιμή $a = \frac{3}{2}$ και στις λύσεις θα βρούμε τις ακέραιες τιμές του x. Τότε έχουμε:

$$\frac{a(x-1)}{2} - \frac{2x-a}{5} < \frac{x}{10} + \frac{2}{5}$$

$$\frac{3(x-1)}{4} - \frac{\frac{4x-3}{2}}{5} < \frac{x}{10} + \frac{2}{5}$$

$$20 \cdot \frac{3(x-1)}{4} - 20 \cdot \frac{4x-3}{10} < 20 \cdot \frac{x}{10} + 20 \cdot \frac{2}{5}$$

$$15x - 15 - 8x + 6 < 2x + 8$$

$$5x < 17$$

$$x < \frac{17}{5}$$

Το κλάσμα $\frac{17}{5}$ ισούται με 3,4. Οπότε οι μη αρνητικές ακέραιες τιμές είναι : $x = 0,1,2,3$

Άσκηση 11 – Λύση

i. Εκτελώντας τις πράξεις στις αριθμητικές παραστάσεις έχουμε:

$$\alpha = \left(\frac{1}{-3}\right):\left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{3^{-7}:3^{-8}}{5^{6}\cdot 5^{-7}} = \left(\frac{1}{-3}\right)\cdot\left(-\frac{6}{1}\right) + \frac{3^{-7-(-8)}}{5^{6-7}} = \frac{6}{3} + \frac{3^{1}}{5^{-1}} = 2 + 3\cdot 5 = 17$$

$$\beta = 12\left(\frac{-13}{4} - \frac{19}{-6}\right) = 12\left(\frac{-39}{12} + \frac{38}{12}\right) = 12\left(-\frac{1}{12}\right) = -1$$

ii. Απλοποιούμε την παράσταση εκτελώντας επιμεριστική ιδιότητα,κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων και αναγωγής ομοίων όρων.Τότε έχουμε:

$$A = 41 - 3[-10x - 4(-2x - 3)] = 41 - 3(12 - 2x) = 41 - 36 + 6x = 5 + 6x$$

iii. Αντικαθιστούμε στην ανίσωση τις ποσότητες των προηγούμενων ερωτημάτων και αυτή γίνεται:

$$-1 < 6x + 5 < 17$$
$$-1 - 5 < 6x + 5 - 5 < 17 - 5$$
$$-6 < 6x < 12$$
$$-1 < x < 2$$

Άσκηση 12 – Λύση

Έστω $\boldsymbol{x}$ ο αριθμός των σωλήνων.Το συνολικό τους βάρος θα δίνεται από τη σχέση $\mathbf{200}\boldsymbol{x}$.Το συνολικό βάρος τους μαζί με το φορτηγό θα είναι $\mathbf{4.000} + \mathbf{200}\boldsymbol{x}$, αφου μετατρέψουμε τους τόνους σε κιλά.Με τα δεδομένα δημιουργούμε την ανίσωση:

$$4000 + 200x \leq 11000$$

$$200x \leq 11000 - 4000$$

$$200x \leq 7000 \text{ άρα } x \leq 35$$

Ο μέγιστος αριθμός σωληνων που μπορεί να μεταφέρει,με ασφάλεια,είναι 35 σωλήνες.

Άσκηση 13 – Λύση

Έστω α το μήκος του. Απο τα δεδομένα θα ισχύει $2\alpha + 2\beta < 60$ και από τον τύπο του Εμβαδου προκύπτει και η ανίσωση $10\alpha > 150$. Λύνοντας την ανίσωση του Εμβαδού, έχουμε:

$$10\alpha > 150 \text{ άρα } \frac{10\alpha}{10} > \frac{150}{10} \text{ άρα } \alpha > 15m$$

Από την ανίσωση της περιμέτρου παίρνουμε:

$$2\alpha + 2 \cdot 10 < 60 \text{ άρα } 2\alpha < 60 - 20 \text{ άρα } \alpha < 20m$$

Το μήκος βρίσκεται ανάμεσα σε $15m$ και $20m$.

Άσκηση 14 – Λύση

Έστω $\boldsymbol{x}$ τα κυβικά μέτρα του νερου που θα καταναλώσουμε.Το κόστος της κατανάλωσης θα δίνεται από τη σχέση $\mathbf{0,35}\boldsymbol{x}$, ενώ το συνολικό κόστος με το πάγιο από τη σχέση $\mathbf{0.35}\boldsymbol{x} + \mathbf{1,5}$ Με τα δεδομένα δημιουργούμε την ανίσωση:

$0{,}35x + 1{,}5 \leq 40$

$0{,}35x \leq 40 - 1{,}5$

$0{,}35x \leq 38{,}5$

$x \leq 110$

Η μεγιστη ποσότητα που μπορούμε να καταναλώσουμε είναι $110m^3$.

Άσκηση 15 – Λύση

'Εστω $\boldsymbol{x}$ ο ακέραιος αριθμός.Τότε το τριπλάσιο του ελαττωμένο κατά 6 είναι $\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{6}$.Δημιουργουμε την ανίσωση:

$3x-6>-27$

$3x>6-27$

$3x>-21$

$x>-7$

Οπότε ο μικρότερος ακέραιος που αναζητούμε είναι ο αριθμός -6.

Άσκηση 16 – Λύση

Έστω $\boldsymbol{x}$ ο αριθμός των λεπτών.Το κόστος των κλήσεων τότε θα δίνεται από τη σχέση $\mathbf{0,05}\boldsymbol{x}$ ενώ το συνολικό κόστος με το πάγιο θα είναι $\mathbf{0,05}\boldsymbol{x}+\mathbf{4}$. Με τα δεδομένα δημιουργούμε την ανίσωση :

$0{,}05x+4\leq 9$

$0{,}05x\leq 9-4$

$0{,}05x\leq 5$

$x\leq 100$

Οπότε ο μέγιστος χρόνος ομιλίας είναι 100 λεπτά.

Άσκηση 17 – Λύση

Έστω $\boldsymbol{x}$ οι ημέρες εργασίας.Το ποσό της εργασίας δίνεται από τη σχέση $\mathbf{25}\boldsymbol{x}$,ενώ τα συνολικό ποσό με την αποταμίευση είναι **25x+650** .Το κόστος ανα ημέρα στο ταξίδι είναι 90€,οπότε για τις 5 μέρες είναι 450€. Αν συμπεριλάβουμε και τα εισητήρια το συνολικό κόστος του ταξιδιού είναι 950€.

Δημιουργούμε την ανίσωση :

$25x+650\geq 950$

$25x\geq 950-650$

$\frac{25x}{25}\geq\frac{300}{25}$ άρα $x\geq 12$

Θα πρέπρι να εργασθεί τουλάχιστον 12 ημέρες.

Άσκηση 18 – Λύση

Έστω $\boldsymbol{x}$ ο αριθμός από τις μπλούζες που αγοράστηκαν.Τότε το κόστος μαζί με το παντελόνι θα δίνεται από τη σχέση $\mathbf{12}\boldsymbol{x}+\mathbf{30}$.Από τα δεδομένα δημιουργούμε την ακόλουθη ανίσωση:

$$72<12x+30<90$$
$$72-30<12x+30-30<90-30$$
$$42<12x<60$$
$$\frac{7}{2}<x<5$$

Όμως ο αριθμός που ψάχνουμε είναι ακέραιος οπότε βρίσκεται μεταξύ του αριθμού $\frac{7}{2}=3{,}5$ και του αριθμού 5. Ο μοναδικός ακέραιος που επαληθεύει την ανίσωση είναι ο αριθμός 4.
Οπότε η Άννα αγόρασε 4 μπλούζες.

Άσκηση 19 – Λύση

Έστω $\boldsymbol{x}$ τα συνολικά χιλιόμετρα.Το συνολικό κόστος από το 1ο γραφείο θα δίνεται από τη σχέση $\mathbf{0{,}5}\boldsymbol{x}+\mathbf{100}$**,** ενώ από το 2ο $\mathbf{0{,}3}\boldsymbol{x}+\mathbf{150}$.Για να συμφέρει η προσφορα του 2ου γραφείου, θα πρέπει το συνολικό κοστος της προσφοράς του να είναι μικρότερο από το συνολικό κόστος του 1ου γραφείου.Δημιουργούμε την ανίσωση:

$$0{,}5x+100>0{,}3x+150$$
$$0{,}5x-0{,}3x>150-100$$
$$0{,}2x>50$$
$$\frac{0{,}2x}{0{,}2}>\frac{50}{0{,}2}$$
$$x>250$$

Οπότε η προσφορά του 2ου γραφείου θα είναι συμφέρουσα από το 250ο χιλιόμετρο.

Κεφάλαιο 2 : Πραγματικοί Αριθμοί

2.1. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1- Απάντηση

a. Σωστό.
b. Λάθος.
   Θα έπρεπε να ισχύει $9^2 = 18$,όμως $9^2 = 81$.
c. Λάθος.
   Θα έπρεπε να ισχύει $25^2 = 5$,όμως $25^2 = 625$
d. Λάθος.
   Δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού.
e. Λάθος
   Η τετραγωνική ρίζα του αριθμού 100 είναι ο αριθμός 10.
f. Λάθος.
   Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός.
g. Σωστο.
h. Λάθος.
   Ισχύει $\sqrt{16+25} = \sqrt{41} \cong 6{,}4$ ενώ $\sqrt{16} + \sqrt{25} = 4 + 5 = 9$.
i. Λάθος.
   Ισχύει $7^2 = 49$ που μας δίνει μια λύση αλλά και $(-7)^2 = 49$, που είναι δεύτερη λύση.
j. Σωστό.

Ερώτηση Κατανόησης 2 – Απάντηση

a. Γνωρίζουμε ότι για να έχει νόημα μία τετραγωνική ρίζα θα πρέπει το υπόριζο να είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του μηδέν.

Λύνουμε την ανίσωση $x-1 \geq 0$ και καταλήγουμε $x \geq 1$. Σωστή επιλογή είναι η (iii).

b. Λύνουμε τις ανισώσεις $x-2 \geq 0, x-3 \geq 0$ οι οποίες θα πρέπει να συναληθεύουν.
Έχουμε $x \geq 2 \; και \; x \geq 3$. Συναληθεύουν για $x \geq 3$. Σωστή επιλογή είναι η (i).

c. Η εξίσωση επαληθεύεται από τους αεριθμούς $9 \; και \; -9$, αφού ισχύει $9^2 = 81$ αλλά και $(-9)^2 = 81$. Σωστή επιλογή είναι η (i).

d. Ισχύει η ανισότητα $\lambda > 1$,πολλαπλασιάζοντας με τον θετικό αριθμό λ και τα δύο μέλη καταλήγουμε στην $\lambda^2 > \lambda$. Από την ανισότητα που προέκυψε ισχύει :

$\sqrt{\lambda^2} > \sqrt{\lambda}$

$|\lambda| > \sqrt{\lambda}$

{ισχύει $\boldsymbol{\lambda > 1}$ τοτέ με την μεταβατική ιδίοτητα θα ισχύει και $\boldsymbol{\lambda > 0}$ άρα $\boldsymbol{|\lambda| = \lambda}$}

$\lambda > \sqrt{\lambda}$

Καταλήξαμε ότι ισχύει $\sqrt{\lambda} < \lambda < \lambda^2$ οπότε Σωστή επιλογη η (ii).

e. Ισχύει η ανισότητα $0 < \lambda < 1$ ώστε να έχει νόημα η τετραγωνική ρίζα του αριθμού λ. Όμοια με το ερώτημα (iv), καταλήγουμε στην ανισότητα $\lambda^2 < \lambda$ και προκύπτει:

$\sqrt{\lambda^2} < \sqrt{\lambda}$

$|\lambda| < \sqrt{\lambda}$ **{ισχύει $\boldsymbol{\lambda > 0}$ άρα $\boldsymbol{|\lambda| = \lambda}$}**

$\lambda < \sqrt{\lambda}$

Καταλήξαμε ότι ισχύει $\sqrt{\lambda} > \lambda > \lambda^2$ οπότε Σωστή επιλογή είναι η (ii).

Ερώτηση Κατανόησης 3 – Απάντηση

a. Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας θα ισχύει $x = 100^2 = 10.000$.
Οπότε Σωστή επιλογή είναι η (ii).

b. Η ποσότητα $-x$ θα πρέπει να είναι ένας μη αρνητικός αριθμός, δηλαδή ισχύει η ανίσωση $-x \geq 0$ με λύση $x \leq 0$. Μας δίνεται όμως ότι ο αριθμος x είναι μεγαλύτερος του μηδέν.
Οπότε Σωστή επιλογή είναι η (iv).

c. Από τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας θα ισχύει $\sqrt{36} = 6$.
Οπότε Σωστή επιλογή είναι η (i).

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

a. α) $\sqrt{36} = 6$
β) $\sqrt{0{,}36} = \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{100}} = \frac{6}{10} = 0{,}6$
γ)$\sqrt{3600} = \sqrt{36 \cdot 100} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{100} = 6 \cdot 10 = 60$

b. α) $\sqrt{169} = 13$
β) $\sqrt{0{,}0169} = \sqrt{\frac{169}{10.000}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{10.000}} = \frac{13}{100} = 0{,}13$
γ) $\sqrt{1{,}69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{100}} = \frac{13}{10} = 1{,}3$
δ) $\sqrt{16.900} = \sqrt{169 \cdot 100} = \sqrt{169} \cdot \sqrt{100} = 13 \cdot 10 = 130$

c. α) $\sqrt{100} = 10$

β) $\sqrt{0{,}01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

γ) $\sqrt{10.000} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{100} = 10 \cdot 10 = 100$

δ) $\sqrt{0{,}0001} = \sqrt{\frac{1}{10.000}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{10.000}} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

d. α) $\sqrt{\frac{16}{36}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

β) $\sqrt{\frac{0{,}16}{0{,}36}} = \frac{\sqrt{0{,}16}}{\sqrt{0{,}36}} = \frac{\sqrt{\frac{16}{100}}}{\sqrt{\frac{36}{100}}} = \frac{\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}}}{\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{100}}} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

γ) $\sqrt{\frac{0{,}16}{36}} = \frac{\sqrt{0{,}16}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{\frac{16}{100}}}{\sqrt{36}} = \frac{\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}}}{6} = \frac{\frac{4}{10}}{6} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$

δ) $\sqrt{\frac{1600}{0{,}36}} = \frac{\sqrt{1600}}{\sqrt{0{,}36}} = \frac{\sqrt{16 \cdot 100}}{\sqrt{\frac{36}{100}}} = \frac{\sqrt{16} \cdot \sqrt{100}}{\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{100}}} = \frac{4 \cdot 10}{\frac{6}{10}} = \frac{40}{\frac{6}{10}} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3}$

Άσκηση 2 – Λύση

a. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας και θα κάνουμε τις απαραίτητες πράξεις:

$$A = \sqrt{81} + \sqrt{196} = 9 + 14 = 23$$

b. Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες $\boldsymbol{(-\alpha)^2 = \alpha^2, \sqrt{\alpha^2} = \alpha \; o\tau\alpha\nu \; \alpha \geq 0}$ και με τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας, εκτελούμε τις πράξεις:

$$B = \sqrt{(-16)^2 + \sqrt{16^2}} = \sqrt{16^2} + \sqrt{16^2} = 16 + 16 = 32$$

c. Εκτελούμε τις πράξεις στο υπόριζο σύμφωνα με την προτεραιότητα κι έχουμε:

$$\Gamma = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

d. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας και τις ιδιότητες

$$\boldsymbol{(-\alpha)^2 = \alpha^2,\ \ \sqrt{\alpha^2} = \alpha} \ \text{ όταν } \ \boldsymbol{\alpha \geq 0,}$$

οπότε έχουμε:

$$\Delta = \sqrt{100} - \sqrt{(-8)^2} = \sqrt{100} - \sqrt{8^2} = 10 - 8 = 2$$

e. Θα υπολογίσουμε την τιμη της παράστασης με τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας, ξεκινώντας τους υπολογισμούς από τις εσωτερικές τετραγωνικές ρίζες.

Οπότε έχουμε:

$$E = \sqrt{\sqrt{\mathbf{81}}} - \sqrt{\sqrt{\mathbf{16}}} = \sqrt{\mathbf{9}} - \sqrt{\mathbf{4}} = 3 - 2 = 1$$

Άσκηση 3 – Λύση

a. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$, έχουμε:

$$\left(\sqrt{25}\right)^2 = x \ \text{ άρα } \ \ x = 25$$

b. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$, έχουμε για $x \geq 0$:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = 16 \ \text{ άρα } \ x = 16$$

c. Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας έχουμε για $x \geq 0$:

$$x = \sqrt{169} \ \text{ άρα } \ x = 13$$

d. Κάνουμε τις απαραίτητες πράξεις και έχουμε για $x > 0$:

$$\sqrt{\frac{16}{x}} = \frac{4}{9} \ \text{ άρα } \ \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{x}} = \frac{4}{9} \ \text{ άρα } \ \frac{4}{\sqrt{x}} = \frac{4}{9}$$

Οπότε, με σταυρωτά «χιαστί» γινόμενα, έχουμε ότι: $4 \cdot \sqrt{x} = 4 \cdot 9$ άρα $\sqrt{x} = 36{:}\,4 = 9$

Η λύση είναι $x = 81$ αφού ισχύει $9^2 = 81$

e. Εκτελούμε τις πράξεις και έχουμε για $x \geq 0$:

$$\sqrt{x} + 3 = 7 \quad \text{άρα} \quad \sqrt{x} = 7 - 3 = 4 \quad \text{άρα} \quad x = 4^2 = 16$$

f. Εκτελούμε τις πράξεις και έχουμε για $x \geq 0$:

$$3 - \sqrt{x} = 0 \quad \text{άρα} \quad \sqrt{x} = 3 \quad \text{άρα} \quad x = 3^2 = 9$$

g. Ο αριθμός 12 γράφεται $9 + 3 = 12$ ή $3^2 + 3 = 12$ το οποίο επαληθεύει την εξίσωση. Οπότε για $x \geq 0$ έχουμε:

$$\sqrt{x} = 3 \quad \text{άρα} \quad x = 9$$

h. Αρχικα υψώνουμε και τα δύο μέλη της ισότητας στο τετράγωνο ώστε να απαλείψουμε την εξωτερική τετραγωνική ρίζα,οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\sqrt{\sqrt{x}} = 3 \quad \text{άρα} \quad \left(\sqrt{\sqrt{x}}\right)^2 = 3^2 \quad \text{οπότε} \quad \sqrt{x} = 9 \quad \text{και τελικά} \quad x = 9^2 = 81$$

i. Αρχικα υψώνουμε και τα δύο μέλη της ισότητας στο τετράγωνο ώστε να απαλείψουμε την εξωτερική τετραγωνική ρίζα,οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\sqrt{16 + \sqrt{x}} = 5 \quad \text{άρα} \quad \left(\sqrt{16 + \sqrt{x}}\right)^2 = 5^2 \quad \text{άρα} \quad 16 + \sqrt{x} = 25$$

Οπότε, έχουμε ότι:

$$\sqrt{x} = 25 - 16 = 9, \text{ άρα } x = 9^2 = 81$$

Άσκηση 4 – Λύση

Για να έχει νόημα η τετραγωνική ρίζα θα πρέπει το υπόρριζο να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδέν. Δηλαδη η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}$ έχει νόημα αν και μόνο αν $\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}$.

a. Θα πρέπει να ισχύει:

$$x + 1 \geq 0 \text{ άρα } x \geq -1$$

b. Θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{x}{2} \geq 0 \text{ άρα } x \geq 0$$

c. Θα πρέπει να ισχύει: $x \geq 0$

d. Θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{x+1}{2} \geq 0 \text{ άρα } 2 \cdot \frac{x+1}{2} \geq 2 \cdot 0 \quad \text{ άρα } x + 1 \geq 0 \text{ άρα } x \geq -1$$

e. Θα πρέπει να ισχύει: $x \geq 0$

Άσκηση 5 – Λύση

Στις περιπτώσεις όπου στο υπόριζο μιας τετραγωνικής ρίζας υπάρχει τουλάχιστον μια άλλη τετραγωνική ρίζα,υπολογίζουμε τις τιμές των τετραγωνικών ριζών στο υπόριζο (ξεκινούμε από το εσωτερικό), κάνουμε τις απαραίτητες πράξεις και καταλήγουμε στην μορφη $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\beta}$, από το οποίο υπολογίζουμε το τελικό αποτέλεσμα.

a. $\sqrt{6 + \sqrt{3 + \sqrt{36}}} = \sqrt{6 + \sqrt{3 + 6}} = \sqrt{6 + \sqrt{9}} = \sqrt{6 + 3} = \sqrt{9} = 3$

b. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{36} + \sqrt{100}} + \sqrt{\sqrt{400} + \sqrt{25}}} = \sqrt{\sqrt{6 + 10} + \sqrt{20 + 5}} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3$

Άσκηση 6 – Λύση

a. Θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ, με υποτείνουσα την πλευρα ΑΓ:

$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$

$x^2 = 3^2 + 4^2$

$x^2 = 9 + 16$

$x^2 = 25$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις, μία θετική $(x = 5)$ και μία αρνητική $(x = -5)$,εφόσον έχουμε να υπολογίσουμε μήκος πλευράς θα δεχτούμε μόνο τη θετική.Οπότε η υποτείνουσα έχει μήκος τη θετική λύση της εξίσωσης, δηλαδή:

$$x = 5\ cm$$

b. Θα εφαρμόσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔΕΖ, με υποτείνουσα την πλευρα ΔΖ:

$\Delta Z^2 = \Delta E^2 + EZ^2$

$13^2 = 5^2 + x^2$

$169 = 25 + x^2$

$x^2 = 169 - 25$

$x^2 = 144$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις, μία θετική $(x = 12)$ και μία αρνητική $(x = -12)$, εφόσον έχουμε να υπολογίσουμε μήκος πλευράς θα δεχτούμε μόνο τη θετική.

Οπότε η κάθετος ΕΖ έχει μήκος τη θετική λύση της εξίσωσης, δηλαδή:

$$x = 12\ cm$$

Άσκηση 7 – Λύση

a. Η εξίσωση έχει δύο λύσεις,μία αρνητική και μία θετική. Ισχύει $4^2 = 16$ αλλα και $(-4)^2 = 16$. Οι λύσεις είναι $x = 4$ ή $x = -4$.

b. Η εξίσωση έχει δύο λύσεις,μία αρνητική και μία θετική. Ισχύει $5^2 = 25$ αλλα και $(-5)^2 = 25$. Οι λύσεις είναι $x =$ ή $x = -5$.

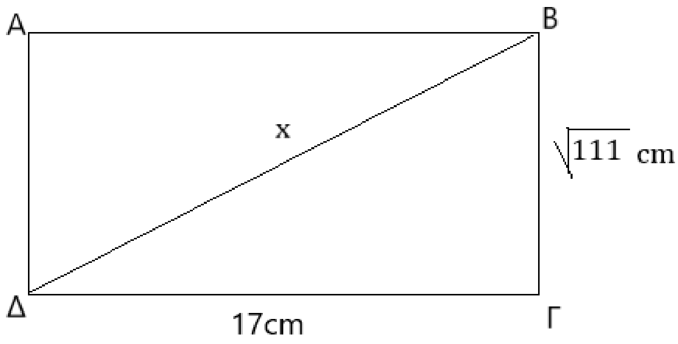
c. Η εξίσωση έχει δύο λύσεις,μία αρνητική και μία θετική. Αρκει να υπολογίσουμε την τιμή $\sqrt{\frac{100}{64}}$. Οπότε έχουμε:

$$\sqrt{\frac{100}{64}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{64}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Άρα οι λύσεις είναι $x = \frac{5}{4}$ ή $x = -\frac{5}{4}$.

Άσκηση 8 – Λύση

Στο διπλανό σχήμα θεωρούμε x την διαγώνιο ΔΒ. Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΔΒ.



Θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΒΔΓ:

$$ΔB^2 = BΓ^2 + ΓΔ^2$$

$$x^2 = 17^2 + \left(\sqrt{111}\right)^2$$

$$x^2 = 289 + 111 = 400$$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις, μία θετική($x = 20$) και μία αρνητική ($x = -20$), δεχόμαστε τη θετική λύση γιατι ζητάμε μήκος πλευράς που είναι θετική ποσότητα. Άρα το μήκος της διαγωνίου αντιστοιχεί στην λύση $x = 20\ cm$

Άσκηση 9 – Λύση

Θα υπολογίσουμε τις τιμές των παραστάσεων εκτελώντας πράξεις σύμφωνα με την προτεραιότητα, χρησιμοποιώντας τον ορισμό και τις ιδιότητες της τεραγωνικής ρίζας.

a. $A = \sqrt{5+2(3-1)} \cdot \sqrt{10^2-6^2} \cdot \frac{\sqrt{5^2-3^2}}{\sqrt{3^2 \cdot \sqrt{16}}} = \sqrt{5+4} \cdot \sqrt{100-36} \cdot \frac{\sqrt{25-9}}{\sqrt{9 \cdot 4}} =$

$\sqrt{9} \cdot \sqrt{64} \cdot \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}} = 3 \cdot 8 \cdot \frac{4}{6} = 16$

b. $B = \sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{4}}}} = \sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{2+2}}} = \sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}} =$

$\sqrt{13+\sqrt{7+2}} = \sqrt{13+\sqrt{9}} = \sqrt{13+3} = \sqrt{16} = 4$

c. $\Gamma = \left[\sqrt{3^2} - 2\sqrt{(-3)^2} + 4\sqrt{9}\right] : \sqrt{\frac{1+\sqrt{9}}{\sqrt{64}+1}} = \left[3 - 2\sqrt{3^2} + 4 \cdot 3\right] : \sqrt{\frac{1+3}{8+1}} =$

$[3 - 2 \cdot 3 + 12] : \sqrt{\frac{4}{9}} = 9 : \frac{2}{3} = 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2}$

Άσκηση 10 – Λύση

i.

α	**β**	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$
9	49	**3**	**7**	$\sqrt{58}$	**10**
81	25	**9**	**5**	$\sqrt{106}$	**14**

Από τις δύο τελευταίες στήλες, φαίνεται ότι γενικά ισχύει $\sqrt{\alpha+\beta} \neq \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

Με μία προσεκτική ματια,φαίνεται επιπλέον ότι ισχύει και $\sqrt{\alpha-\beta} \neq \sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$

ii.

α	**β**	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$	$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$
9	49	**3**	**7**	**21**	**21**
81	25	**9**	**5**	**45**	**45**

Από τις δύο τελευταίες στήλες, φαίνεται ότι γενικά ισχύει $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

iii.

α	**β**	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha:\beta}$	$\sqrt{\alpha}:\sqrt{\beta}$
9	49	**3**	**7**	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$
81	25	**9**	**5**	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{5}$

Από τις δύο τελευταίες στήλες, φαίνεται ότι γενικά ισχύει $\sqrt{\alpha:\beta} = \sqrt{\alpha}:\sqrt{\beta}$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 – Λύση

a. α) $\sqrt{81} = 9$

β) $\sqrt{0{,}81} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10} = 0{,}9$

γ) $\sqrt{8100} = \sqrt{81 \cdot 100} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{100} = 9 \cdot 10 = 90$

b. α) $\sqrt{144} = 12$

β) $\sqrt{0{,}0144} = \sqrt{\frac{144}{10.000}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{10.000}} = \frac{12}{100} = 0{,}12$

γ) $\sqrt{1{,}44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \frac{12}{10} = 1{,}2$

δ) $\sqrt{14.400} = \sqrt{144 \cdot 100} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{100} = 12 \cdot 10 = 120$

c. α) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

β) $\sqrt{\frac{0{,}04}{900}} = \frac{\sqrt{0{,}04}}{\sqrt{900}} = \frac{\sqrt{\frac{4}{100}}}{\sqrt{9 \cdot 100}} = \frac{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}}}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{100}} = \frac{\frac{2}{10}}{3 \cdot 10} = \frac{2}{300} = \frac{1}{150}$

γ) $\sqrt{\frac{400}{900}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 100}{9 \cdot 100}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

d. α) $\sqrt{\frac{0{,}16}{0{,}49}} = \sqrt{\frac{\frac{16}{100}}{\frac{49}{100}}} = \sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}$

β) $\sqrt{\frac{0{,}16}{49}} = \sqrt{\frac{\frac{16}{100}}{49}} = \sqrt{\frac{16}{49 \cdot 100}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49 \cdot 100}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{100}} = \frac{4}{7 \cdot 10} = \frac{2}{35}$

γ) $\sqrt{\frac{0{,}49}{16}} = \sqrt{\frac{\frac{49}{100}}{16}} = \sqrt{\frac{49}{16 \cdot 100}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16 \cdot 100}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{100}} = \frac{7}{4 \cdot 10} = \frac{7}{40}$

δ) $\sqrt{\frac{0{,}0049}{16}} = \sqrt{\frac{\frac{49}{10.000}}{16}} = \sqrt{\frac{49}{16 \cdot 10.000}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16 \cdot 10.000}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{10.000}} = \frac{7}{4 \cdot 100} = \frac{7}{400}$

Άσκηση 2 – Λύση

a. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας και θα κάνουμε τις απαραίτητες πράξεις:

$$A = \sqrt{100} + \sqrt{121} + \sqrt{144} + \sqrt{169} = 10 + 11 + 12 + 13 = 46$$

b. Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες $(-\boldsymbol{\alpha})^2 = \boldsymbol{\alpha}^2, \sqrt{\boldsymbol{\alpha}^2} = \boldsymbol{\alpha}$, όταν $\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}$ και με τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας, εκτελούμε τις ακόλουθες πράξεις:

$$B = \sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2} + \sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2} + \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

c. Εκτελούμε τις πράξεις στο υπόριζο σύμφωνα με την προτεραιότητα κι έχουμε:

$$\Gamma = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

d. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας και θα κάνουμε τις απαραίτητες πράξεις:

$$\Delta = \sqrt{10.000} - \sqrt{\frac{(-8)^2}{0{,}01}} = 100 - \sqrt{\frac{8^2}{(0{,}1)^2}} = 100 - \frac{8}{0{,}1} = 100 - 80 = 20$$

Άσκηση 3 – Λύση

Για να έχει νόημα η τετραγωνική ρίζα θα πρέπει το υπόριζο να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδέν. Δηλαδη η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}$ έχει νόημα αν και μόνο αν $\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}$.

a. Θα πρέπει να ισχύει $x - 2 \geq 0$ δηλαδή $x \geq 2$

b. Λύνουμε τις ανισώσεις $x \geq 0, x - 1 \geq 0$ οι οποίες θα πρέπει να συναληθεύουν. Έχουμε $x \geq 0 \ και \ x \geq 1$. Συναληθεύουν για $x \geq 1$

c. Λύνουμε τις ανισώσεις $x - \frac{2}{3} \geq 0, x - \frac{3}{2} \geq 0$ οι οποίες θα πρέπει να συναληθεύουν. Έχουμε: $x \geq \frac{2}{3} \ και \ x \geq \frac{3}{2}$ και συναληθεύουν για $x \geq \frac{3}{2}$

d. Θα πρέπει να ισχύει $2 - x \geq 0$ δηλαδή $x \leq 2$

e. Θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι ανισώσεις $x \geq 0$ και $3 - \sqrt{x} \geq 0$. Για τη δεύτερη έχουμε:

$$3 - \sqrt{x} \geq 0 \ \text{ άρα } \ 3 \geq \sqrt{x} \ \text{ άρα } \ 3^2 \geq \left(\sqrt{x}\right)^2 \ \ άρα \ \ x \leq 9$$

Συναληθεύουν όταν ισχύει $0 \leq x \leq 9$

Άσκηση 4 – Λύση

a. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$, έχουμε για $x \geq 0$:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = 4 \ \text{ άρα } \ x = 4$$

b. Λύνουμε την εξίσωση και έχουμε για $x \geq 0$:

$$\sqrt{x} - 1 = 7 \ \text{ άρα } \ \sqrt{x} = 8 \ \text{ άρα } \ x = 8^2 = 64$$

c. Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ και έχουμε για $x \geq 2$:

$$\sqrt{x-2} = 5 \ \text{ άρα } \ \left(\sqrt{x-2}\right)^2 = 5^2 = 25 \ \text{ άρα } \ x = 25 + 2 = 27$$

d. Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ και έχουμε για $x \geq \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{2x-1} = 1 \quad \text{άρα} \quad 2x - 1 = 1 \quad \text{άρα} \quad 2x = 2 \;\; \text{άρα} \;\; x = \frac{2}{2} = 1$$

e. Για να έχει νόημα η εξίσωση θα πρέπει να ισχύει $x \geq 0$: .

$$x + \sqrt{x} = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad \sqrt{x} = -x$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης λόγω περιορισμού $x \geq 0$,είναι μικρότερο ή ισο του μηδέν.Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας θα πρέπει η ποσότητα $-x$ να είναι μη αρνητική.Η μόνη δεκτή λύση είναι $x = 0$.

Άσκηση 5 – Λύση

Στις περιπτώσεις όπου στο υπόριζο μιας τετραγωνικής ρίζας υπάρχει τουλάχιστον μια άλλη τετραγωνική ρίζα, υπολογίζουμε τις τιμές των τετραγωνικών ριζών στο υπόριζο (ξεκινούμε από το εσωτερικό), κάνουμε τις απαραίτητες πράξεις και καταλήγουμε στην μορφη $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\beta}$, από το οποίο υπολογίζουμε το τελικό αποτέλεσμα.

a. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}} = \sqrt{2+\sqrt{2+2}} = \sqrt{2+\sqrt{4}} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

b. $\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{9}}}} = \sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{1+3}}} = \sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{4}}} = \sqrt{7+\sqrt{2+2}} =$

$\sqrt{7+\sqrt{4}} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$

Άσκηση 6 – Λύση

a. Θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ,με υποτείνουσα την πλευρά ΑΓ:

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$$

$x^2 = 6^2 + 8^2$= 36 + 64 = 100

$$x^2 = 100$$

Η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς $x = 10$ ή $x = -10$. Αναζητούμε το μήκος της πλευράς ΑΓ, το οποίο είναι θετικός αριθμός. Οπότε η πλευρά ΑΓ έχει μήκος $10cm$.

b. Θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ, με υποτείνουσα την πλευρά ΔΖ:

$$\Delta Z^2 = \Delta E^2 + EZ^2$$

$$\left(\sqrt{20}\right)^2 = x^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2$$

$x^2 = 20 - 5$ = 15

Η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς $x = \sqrt{15}$ ή $x = -\sqrt{15}$. Αναζητούμε το μήκος της πλευράς ΕΖ , το οποίο είναι θετικός αριθμός.Οπότε η πλευρά ΕΖ έχει μήκος $\sqrt{15}cm$.

Άσκηση 7 – Λύση

Ορίζουμε το σημείο Μ ως το μέσο της πλευράς ΒΓ.Τα τμήματα ΒΜ και ΜΓ είναι ίσα με μέτρο $3cm$ το κάθε ένα. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά $AM = x$ αντιστοιχεί στο ύψος του στη βάση, η οποία είναι διάμεσος και διχοτόμος ως ιδιότητα ισοσκελούς τριγώνου. Θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΜ, με υποτείνουσα την πλευρά ΑΒ.

$$AB^2 = AM^2 + BM^2$$

$\mathrm{x}^2 = 5^2 - 3^2$= 25 - 9

$$x^2 = 16$$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις, μία θετική και μία αρνητική με τιμές $x = 4$ ή $x = -4$. Η λύση αντιστοιχεί σε μήκος πλευράς οπότε δεχόμαστε τη θετική.

Το μήκος της πλευρας $AM = x$ είναι ίσο με $4cm$.

Άσκηση 8 – Λύση

a. Η εξίσωση έχει δύο λύσεις μία θετική και μία αρνητική. Ισχύει $15^2 = 225$ αλλά και $(-15)^2 = 225$.

   Άρα οι λύσεις είναι $x = 15$ ή $x = -15$

b. Αρχικά θα υπολογίσουμε την $\sqrt{\frac{16}{121}}$ και έχουμε: $\sqrt{\frac{16}{121}} = \frac{4}{11}$.

   Η εξίσωση έχει δύο λύσεις μία θετική και μία αρνητική, δηλαδή:

$$x = \sqrt{\frac{16}{121}} \quad ή \quad x = -\sqrt{\frac{16}{121}}$$

   Διότι: $(\sqrt{\frac{16}{121}})^2 = \frac{16}{121}$ και $(-\sqrt{\frac{16}{121}})^2 = \frac{16}{121}$.

   Οπότε οι λύσεις της εξίσωσης θα είναι $x = \frac{4}{11}$ ή $x = -\frac{4}{11}$

c. Η εξίσωση είναι αδύνατη γιατι το αριστερό μέλος είναι μη αρνητική ποσότητα ενώ το δεξί αρνητικός αριθμός (δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού).

   Επιπλέον αυτή γράφεται $x^2 + 81 = 0$, όπου το άθροισμα δύο μη αρνητικών αριθμών ισούται με μηδεν το οποίο είναι αδύνατο.

d. Ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση η εξίσωση είναι αδύνατη ως μηδενικό άθροισμα δύο μη αρνητικών αριθμών.

e. Η εξίσωση γράφεται $\mathrm{x}^2 = 25$ και έχει δύο λύσεις, μία θετική και μία αρνητική.Ισχύει $5^2 = 25 \; και \; (-5)^2 = 25$.

   Οπότε οι λύσεις είναι $x = 5$ ή $x = -5$

Άσκηση 9 – Λύση

i.

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$
16	121	**4**	**11**	$\sqrt{137}$	**15**
100	64	**10**	**8**	$\sqrt{164}$	**18**

Από τις δύο τελευταίες στήλες, φαίνεται ότι γενικά ισχύει $\sqrt{\alpha+\beta} \neq \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

ii.

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$	$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$
16	121	**4**	**11**	**44**	**44**
100	64	**10**	**8**	**80**	**80**

Από τις δύο τελευταίες στήλες, φαίνεται ότι γενικά ισχύει $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

iii.

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha:\beta}$	$\sqrt{\alpha}:\sqrt{\beta}$
16	121	**4**	**11**	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{11}$
100	64	**10**	**8**	$\frac{10}{8}$	$\frac{10}{8}$

Από τις δύο τελευταίες στήλες, φαίνεται ότι γενικά ισχύει $\sqrt{\alpha:\beta} = \sqrt{\alpha}:\sqrt{\beta}$

2.2. Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

i. Λάθος.

Με υπολογισμό η ρητή προσέγγιση δεκάτου είναι $\sqrt{2{,}6} \cong 1{,}6$

ii. Σωστό.

iii. Σωστό.

iv. Σωστό.

v. Σωστό.

vi. Λάθος.

Η ποσότητα $\sqrt{3}$ είναι άρρητος άρα και το κλάσμα $\frac{\sqrt{3}}{3}$ θα είναι άρρητος.

vii. Λάθος.

Όλοι οι ακέραιοι ανήκουν στους πραγματικούς αριθμούς.

viii. Λάθος.

Οι περιοδικοί αριθμοί μπορούν να γραφούν ως κλάσματα με όρους ακέραιους.

ix. Λάθος.

Ισχύει $\sqrt{1} = 1$,το οποίο είναι ρητός αριθμός ως ακέραιος.

x. Σωστό.

Ερώτηση Κατανόησης 2 - Απάντηση

Από τους αριθμούς αυτούς άρρητοι είναι οι εξής:

$$\sqrt{7}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3}, \pi \cdot \sqrt{2}$$

Αυτό συμβαίνει διότι είναι άρρητοι εξ΄ορισμού ή είναι πράξεις μεταξύ άρρητων αριθμών,που δεν δύναται απλοποίηση σε ρητό.

Από τους αριθμούς αυτούς ρητοί είναι οι εξής:

$$\sqrt{9}, (\sqrt{3})^2, \sqrt{\frac{9}{25}}, -\sqrt{16}, \sqrt{\frac{72}{2}}$$

Αν υπολογίσουμε τις τετραγωνικές ρίζες έχουμε:

$$\sqrt{9} = 3, (\sqrt{3})^2 = 3, \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}, -\sqrt{16} = -4, \sqrt{\frac{72}{2}} = \sqrt{36} = 6$$

Δηλαδή κάθε ένας από τους αριθμούς καταλήγει έπειτα από πράξεις σε ρητό αριθμό.

Ερώτηση Κατανόησης 3 - Απάντηση

$\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{2} = 1{,}414$

$\sqrt{3} = 1{,}732$

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{5} = 2{,}236$

$\sqrt{6} = 2{,}449$

$\sqrt{7} = 2{,}645$

$\sqrt{8} = 2{,}828$

$\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{10} = 3{,}162$

$\sqrt{11} = 3{,}316$

$\sqrt{12} = 3{,}464$

$\sqrt{13} = 3{,}605$

$\sqrt{14} = 3{,}741$

$\sqrt{15} = 3{,}872$

$\sqrt{16} = 4$

$\sqrt{17} = 4{,}123$

$\sqrt{18} = 4{,}242$

$\sqrt{19} = 4{,}358$

$\sqrt{20} = 4{,}472$

Ένας γενικός κανόνας που μπορούμε να διατυπώσουμε είναι ο εξής: *Η τετραγωνική ρίζα ενός φυσικού αριθμού είναι ρητός, αν ο φυσικός προκύπτει ως το τετράγωνο ενός άλλου φυσικού αριθμού. Δηλαδή ο φυσικός αριθμός α έχει ρητό αριθμό ως τετραγωνική ρίζα, αν υπάρχει φυσικός β ώστε να ισχύει $\beta^2 = \alpha$.*

Ερώτηση Κατανόησης 4 – Απάντηση

Από τον προηγούμενο πίνακα ισχύει ότι $\sqrt{3} \cong 1{,}73$ σε προσέγγιση εκατοστού και $\sqrt{3} = 1{,}732$. Υπολογίζουμε τον αριθμό $2\sqrt{3}$ εκτελώντας τις πράξεις και έχουμε:

$2\sqrt{3} = 2 \cdot 1{,}73 = 3{,}46$ **με προσέγγιση εκατοστού**

$2\sqrt{3} = 2 \cdot 1{,}732 = 3{,}464$ **με προσέγγιση χιλιοστού**

Θα υπολογίσουμε και τον αριθμό $\sqrt{12}$ με διαδοχικές προσεγγίσεις εκατοστού και χιλιοστού,

Ισχύει:

$9 < 12 < 16$

$\sqrt{3^2} < \sqrt{12} < \sqrt{4^2}$

$3 < \sqrt{12} < 4$

$3{,}4 < \sqrt{12} < 3{,}5$ $\quad \{\text{αφού } 3{,}4^2 = 11{,}56 \; \textit{και} \; 3{,}5^2 = 12{,}25\}$

$3{,}46 < \sqrt{12} < 3{,}47$ $\{\text{αφού } 3{,}46^2 = 11{,}9716 \ \kappa\alpha\iota\ 3{,}47^2 = 12{,}0409\}$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση εκατοστού είναι $\sqrt{12} \cong 3{,}46$

Επιπλέον ισχύει:

$3{,}46 < \sqrt{12} < 3{,}47$

$3{,}464 < \sqrt{12} < 3{,}466$ $\{\text{αφού } 3{,}464^2 = 11{,}9992 \ \kappa\alpha\iota\ 3{,}466^2 = 12{,}0131\}$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση χιλιοστού είναι $\sqrt{12} \cong 3{,}464$

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $\sqrt{12}$ και $2\sqrt{3}$ είναι ίσοι. Αυτό οφείλεται στην ιδιότητα $\sqrt{\boldsymbol{\alpha\beta}} = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{\beta}}$ που αν εφαρμοστει τον αριθμό $\sqrt{12}$ μας δίνει: $\sqrt{12} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

1. a) Για τον αριθμό $\sqrt{10}$ και με διαδοχικές προσεγγίσεις έχουμε:

$$9 < 10 < 16$$
$$\sqrt{3^2} < \sqrt{10} < \sqrt{4^2}$$
$$3 < \sqrt{10} < 4$$
$$3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2 \quad \{\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 3{,}1^2 = 9{,}61\ \kappa\alpha\iota\ 3{,}2^2 = 10{,}24\}$$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση δεκάτου είναι $\sqrt{10} \cong 3{,}1$

Για τον αριθμό $\sqrt{11}$ και με διαδοχικές προσεγγίσεις έχουμε:

$$9 < 11 < 16$$
$$\sqrt{3^2} < \sqrt{11} < \sqrt{4^2}$$
$$3 < \sqrt{11} < 4$$
$$3{,}3 < \sqrt{11} < 3{,}4 \quad \{\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 3{,}3^2 = 10{,}89\ \kappa\alpha\iota\ 3{,}4^2 = 11{,}56\}$$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση δεκάτου είναι $\sqrt{11} \cong 3{,}3$

Για τον αριθμό $\sqrt{12}$ και με διαδοχικές προσεγγίσεις έχουμε:

$$9 < 12 < 16$$
$$\sqrt{3^2} < \sqrt{12} < \sqrt{4^2}$$
$$3 < \sqrt{12} < 4$$
$$3{,}4 < \sqrt{12} < 3{,}5 \qquad \{\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 3{,}4^2 = 11{,}56\ \kappa\alpha\iota\ 3{,}5^2 = 12{,}25\}$$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση δεκάτου είναι $\sqrt{12} \cong 3{,}4$

2. α) Για τον αριθμό $\sqrt{10}$ και με διαδοχικές προσεγγίσεις έχουμε:

$9 < 10 < 16$
$\sqrt{3^2} < \sqrt{10} < \sqrt{4^2}$
$3 < \sqrt{10} < 4$
$3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2$ $\{\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 3{,}1^2 = 9{,}61\ \kappa\alpha\iota\ 3{,}2^2 = 10{,}24\}$
$3{,}16 < \sqrt{10} < 3{,}17$ $\{\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 3{,}16^2 = 9{,}98\ \kappa\alpha\iota\ 3{,}17^2 = 10{,}04\}$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση εκατοστού είναι $\sqrt{10} \cong 3{,}16$

Για τον αριθμό $\sqrt{11}$ και με διαδοχικές προσεγγίσεις έχουμε:

$9 < 11 < 16$
$\sqrt{3^2} < \sqrt{11} < \sqrt{4^2}$
$3 < \sqrt{11} < 4$
$3{,}3 < \sqrt{11} < 3{,}4$ $\{\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 3{,}3^2 = 10{,}89\ \kappa\alpha\iota\ 3{,}4^2 = 11{,}56\}$
$3{,}31 < \sqrt{11} < 3{,}32$ $\{\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 3{,}31^2 = 10{,}95\ \kappa\alpha\iota\ 3{,}32^2 = 11{,}02\}$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση εκατοστού είναι $\sqrt{11} \cong 3{,}31$

Για τον αριθμό $\sqrt{12}$ και με διαδοχικές προσεγγίσεις έχουμε:

$9 < 12 < 16$
$\sqrt{3^2} < \sqrt{12} < \sqrt{4^2}$
$3 < \sqrt{12} < 4$
$3{,}4 < \sqrt{12} < 3{,}5$ $\{\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 3{,}4^2 = 11{,}56\ \kappa\alpha\iota\ 3{,}5^2 = 12{,}25\}$
$3{,}46 < \sqrt{12} < 3{,}47$ $\{\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 3{,}46^2 = 11{,}9716\ \kappa\alpha\iota\ 3{,}47^2 = 12{,}0409\}$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση εκατοστού είναι $\sqrt{12} \cong 3{,}46$

3. α) Για τον αριθμό $\sqrt{10}$ και με διαδοχικές προσεγγίσεις έχουμε:

$$9 < 10 < 16$$
$$\sqrt{3^2} < \sqrt{10} < \sqrt{4^2}$$
$$3 < \sqrt{10} < 4$$
$$3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2 \quad \{\text{αφού } 3{,}1^2 = 9{,}61 \text{ και } 3{,}2^2 = 10{,}24\}$$
$$3{,}16 < \sqrt{10} < 3{,}17 \quad \{\text{αφού } 3{,}16^2 = 9{,}98 \text{ και } 3{,}17^2 = 10{,}04\}$$
$$3{,}162 < \sqrt{10} < 3{,}163 \quad \{\text{αφού } 3{,}162^2 = 9{,}9982 \text{ και } 3{,}163^2 = 10{,}0045\}$$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση χιλιοστού είναι $\sqrt{10} \cong 3{,}162$

Για τον αριθμό $\sqrt{11}$ και με διαδοχικές προσεγγίσεις έχουμε:

$$9 < 11 < 16$$
$$\sqrt{3^2} < \sqrt{11} < \sqrt{4^2}$$
$$3 < \sqrt{11} < 4$$
$$3{,}3 < \sqrt{11} < 3{,}4 \quad \{\text{αφού } 3{,}3^2 = 10{,}89 \text{ και } 3{,}4^2 = 11{,}56\}$$
$$3{,}31 < \sqrt{11} < 3{,}32 \quad \{\text{αφού } 3{,}31^2 = 10{,}95 \text{ και } 3{,}32^2 = 11{,}02\}$$
$$3{,}316 < \sqrt{11} < 3{,}317 \quad \{\text{αφού } 3{,}316^2 = 10{,}9958 \text{ και } 3{,}317^2 = 11{,}0024\}$$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση χιλιοστού είναι $\sqrt{11} \cong 3{,}316$
Για τον αριθμό $\sqrt{12}$ και με διαδοχικές προσεγγίσεις έχουμε:

$$9 < 12 < 16$$
$$\sqrt{3^2} < \sqrt{12} < \sqrt{4^2}$$
$$3 < \sqrt{12} < 4$$
$$3{,}4 < \sqrt{12} < 3{,}5 \quad \{\text{αφού } 3{,}4^2 = 11{,}56 \text{ και } 3{,}5^2 = 12{,}25\}$$
$$3{,}46 < \sqrt{12} < 3{,}47 \quad \{\text{αφού } 3{,}46^2 = 11{,}9716 \text{ και } 3{,}47^2 = 12{,}0409\}$$
$$3{,}464 < \sqrt{12} < 3{,}465 \quad \{\text{αφού } 3{,}464^2 = 11{,}9992 \text{ και } 3{,}465^2 = 12{,}0062\}$$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση χιλιοστού είναι $\sqrt{12} \cong 3{,}464$

Άσκηση 2 – Λύση

Υπολογίζοντας τα τετράγωνα των αριθμών αυτών θα ορίσουμε και την διάταξη τους αφού για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ιδιότητα: $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ **τότε** $\boldsymbol{\alpha^2 > \beta^2}$

Οπότε έχουμε: $(\sqrt{3})^2 = 3, (\sqrt{10})^2 = 10, (\sqrt{2})^2 = 2, (\sqrt{9})^2 = 9, (2\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$

Η αύξουσα σειρά των τετραγώνων των ριζών είναι:

$$2 < 3 < 9 < 10 < 12$$

Οπότε και η αντίστοιχη αύξουσα σειρά των τετραγωνικών ριζών θα είναι:

$$\sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{9} < \sqrt{10} < 2\sqrt{3}$$

Άσκηση 3 – Λύση

a) Γνωρίζουμε ότι με προσέγγιση δεκάτου ισχύει $\boldsymbol{\sqrt{2} = 1,4}$. Οπότε υπολογίζουμε προσεγγιστικά τις παραστάσεις ως εξής:

$$\sqrt{2} - 1 \cong 1{,}4 - 1 \cong 0{,}4$$
$$2 + \sqrt{2} = 2 + 1{,}4 = 3{,}4$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η αύξουσα σειρά των αριθμών είναι:

$$\sqrt{2} - 1 < \sqrt{2} < 3 < 2 + \sqrt{2}$$

b) Γνωρίζουμε ότι με προσέγγιση δεκάτου ισχύει $\boldsymbol{\sqrt{5} \cong 2,2, \sqrt{3} \cong 1,7, \sqrt{2} \cong 1,4}$. Οπότε υπολογίζουμε προσεγγιστικά τις παραστάσεις ως εξής:

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} \cong 1{,}7 + 1{,}4 \cong 3{,}1$$

Οπότε θα ισχύει:

$$\sqrt{5} < \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

c) Υπολογίζουμε προσεγγιστικά τη παράσταση $\sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{3}}}$ ως εξής:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cong \sqrt{2+1{,}7} = \sqrt{3{,}17}$$

Ισχύει η ανισότητα $3 < 3{,}17$ άρα και η διάταξη των τετραγωνικών ριζών θα είναι:

$$\sqrt{3} < \sqrt{3{,}17}$$

Οπότε έχουμε:

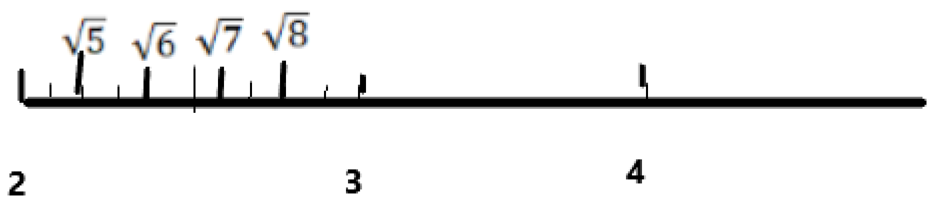
$$\sqrt{3} < \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Άσκηση 4 – Λύση

Υπολογίζουμε τους άρρητους αριθμούς $\sqrt{7}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{5}$ με προσέγγιση δεκάτου και τη χρήση υπολογιστή τσέπης.

$$\sqrt{7} = 2{,}6\,, \sqrt{6} = 2{,}4, \sqrt{5} = 2{,}2, \sqrt{8} = 2{,}8$$

Η παράσταση των αριθμών στην ευθεία των πραγματικών με προσέγγιση δεκάτου, είναι:



Άσκηση 5 – Λύση

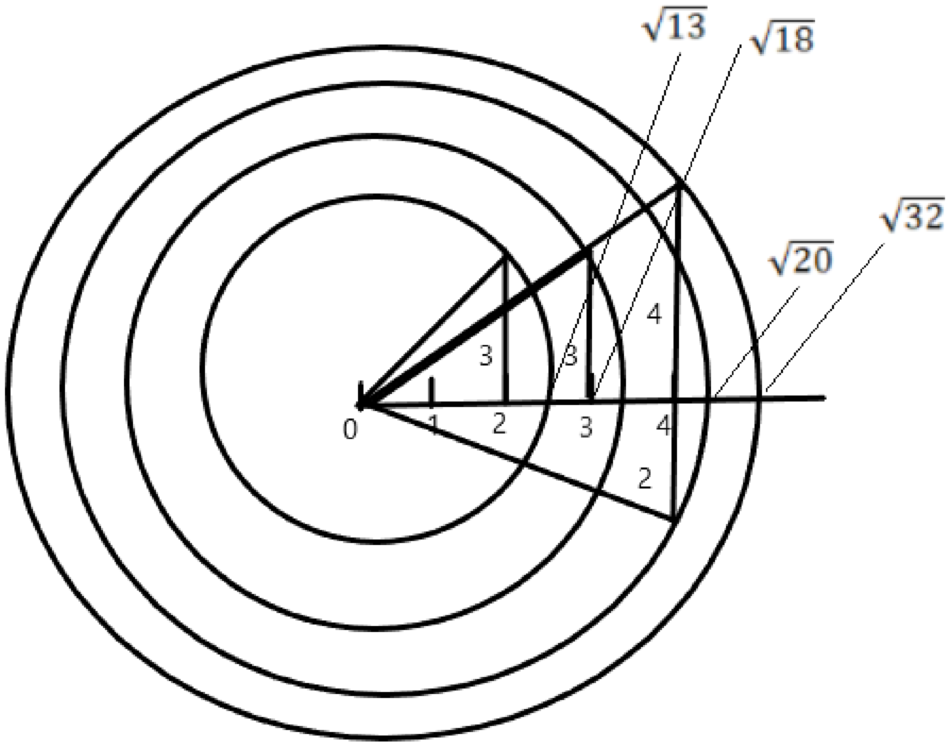
Θα πρέπει να εκφράσουμε τους αριθμούς στις τετραγωνικές ρίζες ως άθροισμα τετραγώνων δύο αριθμών με ρητές ρίζες. Κατόπιν με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος θα τοποθετήσουμε τους αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών.

$(\sqrt{13})^2 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$

$(\sqrt{18})^2 = 9 + 9 = 3^2 + 3^2$

$(\sqrt{20})^2 = 16 + 4 = 4^2 + 2^2$

$(\sqrt{32})^2 = 16 + 16 = 4^2 + 4^2$



Άσκηση 6 – Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα $\boldsymbol{x^2=\alpha}$ τότε $\boldsymbol{x=\sqrt{\alpha}}$ ή $\boldsymbol{x=-\sqrt{\alpha}}$ αν $\boldsymbol{\alpha \geq 0}$.

a) $x^2=7$
$x=\sqrt{7}$ ή $x=-\sqrt{7}$

b) $x^2=6$
$x=\sqrt{6}$ ή $x=-\sqrt{6}$

c) $x^2=0$

$x=0$

d) Η εξίσωση δεν έχει νόημα γιατί κανείς αριθμός υψωμένος στο τετράγωνο δεν μπορεί να ισούται με αρνητικό αριθμό. Επομένως είναι αδύνατη.

e) $x^2=1$
$x=\sqrt{1}$ ή $x=-\sqrt{1}$
$x=1$ ή $x=-1$

f) $x^2=1+\sqrt{2}$
$x=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ ή $x=-\sqrt{1+\sqrt{2}}$

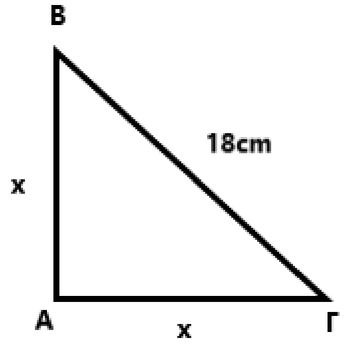
g) $x^2-1=0$
$x^2=1$
$x=\sqrt{1}$ ή $x=-\sqrt{1}$
$x=1$ ή $x=-1$

h) Η παράσταση $1-\sqrt{2}\cong -0{,}4$ έχει αρνητική τιμή, οπότε είναι αδύνατη όπως στο ερώτημα (d)

i) $x^2-\sqrt{3}=\sqrt{6}$
$x^2=\sqrt{3}+\sqrt{6}$
$x=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ ή $x=-\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

Άσκηση 7 – Λύση

Στο Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος, ισχύει $AB = A\Gamma$, εφόσον είναι και ισοσκελές. Θεωρούμε $\boldsymbol{x}$ τις άγνωστες και ίσες πλευρες $AB, A\Gamma$ και εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και έχουμε:



$$\mathrm{B\Gamma}^{\mathbf{2}} = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2$$

$$18^2 = x^2 + x^2$$

$$2x^2 = 324$$

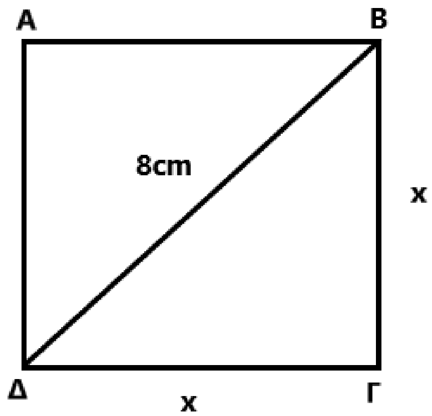
$$x^2 = \frac{324}{2} = 162$$

$$x = \sqrt{162} \text{ ή } x = -\sqrt{162}$$

Εφόσον αναφερόμαστε σε πλευρά ορθογωνίου τριγώνου, θα πρέπει να δεχτούμε τη θετική λύση της εξίσωσης. Οπότε κάθε κάθετη πλευρά θα ισούται με $\sqrt{162}cm \cong 12{,}73cm$ με προσέγγιση εκατοστού.

Άσκηση 8 – Λύση

Από το Ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$, με υποτείνουσα την πλευρά $B\Delta$, εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και έχουμε:



$$B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$$

$$8^2 = x^2 + x^2$$

$$2x^2 = 64$$

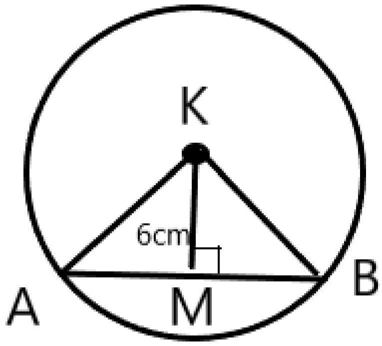
$$x^2 = 32$$

$$x = \sqrt{32} \text{ ή } x = -\sqrt{32}$$

Δεχόμαστε τη θετική λύση της εξίσωσης αφού ανφερόμαστε σε πλευρές τετραγώνου. Οπότε η κάθε μία πλυρά του τετραγώνου θα ισούται με $\sqrt{32}\ cm \cong 5{,}6\ cm$ με προσέγγιση δεκάτου.

Άσκηση 9 – Λύση

Το τρίγωνο AKM, είναι Ορθογώνιο με υποτείνουσα την AK.



Έστω $\boldsymbol{x}$ η πλευρά AK, τότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο Ορθογώνιο τρίγωνο και ξέουμε ότι :

$KM = 6cm$, $AM=\frac{AB}{2} = 12\ cm$, έχουμε:

$AK^2 = KM^2 + AM^2$

$x^2 = 6^2 + 12^2$

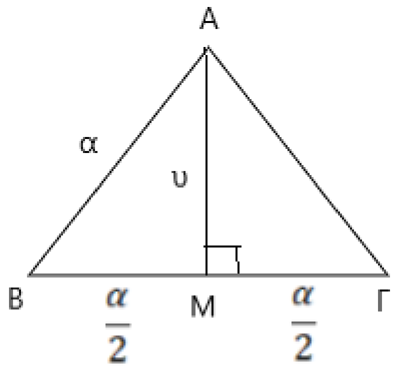
$x^2 = 36 + 144$

$x^2 = 180$

$x = \sqrt{180}$ ή $x = -\sqrt{180}$

Δεχόμαστε τη θετική λύση της εξίσωσης αφού αναφερόμαστε σε μήκος ακτίνας κύκλου. Το μηκος της είναι $\sqrt{180} \cong 13{,}4\ cm$ με προσέγγιση δεκάτου. Άρα η διάμετρος του κύκλου θα είναι το διπλασοιο της ακτίνας δηλαδή $\delta = 2 \cdot \rho = 2 \cdot \sqrt{180} \cong 2 \cdot 13{,}4 \cong 26{,}8\ cm$

Άσκηση 10 – Λύση



Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α. Το τρίγωνο ABM είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά $AB = \alpha$, με την πλευρά $BM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ABM και έχουμε:

$$AB^2 = AM^2 + BM^2$$

$$\alpha^2 = \upsilon^2 + (\frac{\alpha}{2})^2$$

$$\alpha^2 = \upsilon^2 + \frac{\alpha^2}{4}$$

$$4\alpha^2 = 4\upsilon^2 + 4 \cdot \frac{\alpha^2}{4}$$

$$4\upsilon^2 = 4\alpha^2 - \alpha^2$$

$$4\upsilon^2 = 3\alpha^2$$

$$\upsilon^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$$

$$\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

Το Εμβαδό του τριγώνου δίνεται από τον τύπο: $E = \frac{B\Gamma \cdot \upsilon}{2}$ όπου αντικαθιστώντας έχουμε:

$$E = \frac{B\Gamma \cdot \upsilon}{2}$$

$$64\sqrt{3} = \frac{\alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$64\sqrt{3} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

$$4 \cdot 64\sqrt{3} = 4 \cdot \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

$$256\sqrt{3} = \alpha^2\sqrt{3}$$

$$\alpha^2 = 256$$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις $\alpha = \sqrt{256} = 16$ ή $\chi = -\sqrt{256} = -16$. Δεχόμαστε τη θετική λύση $\alpha = 16\ cm$ γιατί αναφερόμαστε σε πλευρά τριγώνου. Από τον τύπο $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ υπολογίζουμε το ύψος του τριγώνου:

$$\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}cm$$

Η πλευρά του τριγώνου είναι $16cm$ και το ύψος του $8\sqrt{3}cm \cong 13{,}6cm$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 – Λύση

1. a) Για τον αριθμό $\sqrt{7}$ και με διαδοχικές προσεγγίσεις έχουμε:

$$4 < 7 < 9$$
$$\sqrt{2^2} < \sqrt{7} < \sqrt{3^2}$$
$$2 < \sqrt{7} < 3$$
$$2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7 \quad \{\text{αφού } 2{,}6^2 = 6{,}76 \ \kappa\alpha\iota\ 2{,}7^2 = 7{,}29\}$$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση δεκάτου είναι $\sqrt{7} \cong 2{,}6$

b) Για τον αριθμό $\sqrt{14}$ παρατηρούμε ότι γράφεται $\sqrt{14} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{2}$.Γνωρίζουμε ότι $\sqrt{2} = 1{,}4$ με προσέγγιση δεκάτου. Οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα και δεδομένου πλέον ότι $\sqrt{7} \cong 2{,}6$, έχουμε:

$$\sqrt{14} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} \cong 2{,}6 \cdot 1{,}4 \cong 3{,}64$$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση δεκάτου είναι $\sqrt{14} \cong 3{,}7$

c) Για τον αριθμό $\sqrt{21}$ παρατηρούμε ότι γράφεται $\sqrt{21} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$.Γνωρίζουμε ότι $\sqrt{3} = 1,7$ με προσέγγιση δεκάτου. Οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα και δεδομένου πλέον ότι $\sqrt{7} \cong 2,6$ έχουμε:

$$\sqrt{21} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cong 2,6 \cdot 1,7 \cong 4,22$$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση δεκάτου είναι $\sqrt{21} \cong 4,2$

2. a) Για τον αριθμό $\sqrt{7}$ και με διαδοχικές προσεγγίσεις έχουμε:

$$4 < 7 < 9$$
$$\sqrt{2^2} < \sqrt{7} < \sqrt{3^2}$$
$$2 < \sqrt{7} < 3$$
$$2,6 < \sqrt{7} < 2,7 \quad \{\alpha\varphi\text{ού } 2,6^2 = 6,76 \ \kappa\alpha\iota \ 2,7^2 = 7,29\}$$
$$2,64 < \sqrt{7} < 2,65 \quad \{\alpha\varphi\text{ού } 2,63^2 = 6,9696 \ \kappa\alpha\iota \ 2,65^2 = 7,0225\}$$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση εκατοστού είναι $\sqrt{7} \cong 2,64$

b) Για τον αριθμό $\sqrt{14}$ παρατηρούμε ότι γράφεται $\sqrt{14} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{2}$.Γνωρίζουμε ότι $\sqrt{2} = 1,41$ με προσέγγιση εκατοστού. Οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα και δεδομένου πλέον ότι $\sqrt{7} \cong 2,64$, έχουμε:

$$\sqrt{14} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} \cong 2,64 \cdot 1,41 \cong 3,744$$

Οπότε με έλλειψη η προσέγγιση εκατοστού είναι $\sqrt{14} \cong 3,74$

c) Για τον αριθμό $\sqrt{21}$ παρατηρούμε ότι γράφεται $\sqrt{21} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$.Γνωρίζουμε ότι $\sqrt{3} = 1,72$ (με έλλειψη)με προσέγγιση εκατοστού. Οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα και δεδομένου πλέον ότι $\sqrt{7} \cong 2,64$, έχουμε:

$$\sqrt{21} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cong 2,64 \cdot 1,72 \cong 4,5408$$

Οπότε με υπερβολή η προσέγγιση εκατοστού είναι $\sqrt{21} \cong 4,54$

Άσκηση 2 – Λύση

1. Είναι φανερό ότι η παράσταση $1+\sqrt{3}$ είναι μεγαλύτερη από την ποσότητα $\sqrt{3}$ διότι είναι αυξημένη κατά μία μονάδα. Επιπλέον η παράσταση $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ είναι μικρότερη από την ποσότητα $\sqrt{3}$, διότι είναι μειωμένη κατά $\sqrt{2}$. Αρκεί να τοποθετήσουμε και την ποσότητα $\frac{\sqrt{3}}{3}$ στην διάταξη αυτή. Προσεγγιστικά έχουμε: $\frac{\sqrt{3}}{3} \cong \frac{1,7}{3} \cong 0,57$.
   Όμως $\sqrt{3}-\sqrt{2} \cong 1,73-1,41 \cong 0,32$ προσέγγιση εκατοστού.Οπότε η διάταξη κάτα αύξουσα σειρά των αριθμών θα είναι:

   $$\sqrt{3}-\sqrt{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} < \sqrt{3} < 1+\sqrt{3}$$

2. Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}$ και $2\sqrt{3}$ μπορούν να γραφούν ως εξής:
   $\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6\cdot 2}=\sqrt{12}$ και $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{12}$. Οπότε ισχύει $\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{3}=\sqrt{12}\cong 3,46$ με προσέγγιση εκατοστού. Αρκεί να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης $2+\sqrt{3}$. Με προσέγγιση εκατοστού και δεδομένο ότι $\sqrt{3}\cong 1,73$, παίρνουμε:

   $$2+\sqrt{3}\cong 2+1,73\cong 3,73$$

   Η διάταξη των αριθμών κατά αύξουσα σειρά θα είναι :

   $$\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{3}=\sqrt{12} < 2+\sqrt{3}$$

Άσκηση 3 – Λύση

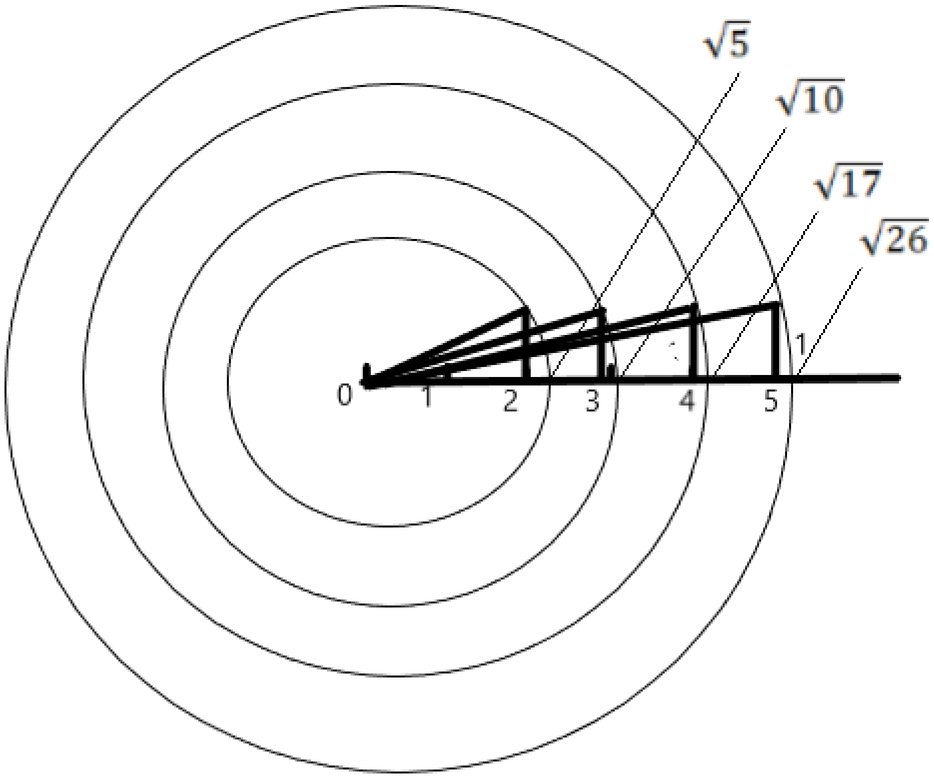
Θα πρέπει να εκφράσουμε τους αριθμούς στις τετραγωνικές ρίζες ως άθροισμα τετραγώνων δύο αριθμών με ρητές ρίζες. Κατόπιν με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος θα τοποθετήσουμε τους αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών.

$(\sqrt{5})^2 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2$

$(\sqrt{10})^2 = 1 + 9 = 1^2 + 3^2$

$(\sqrt{17})^2 = 16 + 1 = 4^2 + 1^2$

$(\sqrt{26})^2 = 25 + 1 = 5^2 + 1^2$



Άσκηση 4 – Λύση

Γνωρίζουμε ότι το ύψος υ σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α, δίνεται από τον τύπο $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Αντικαθιστώντας στον τύπο όπου $\alpha = 8\ cm$ παίρνουμε:

$$\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ cm$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\sqrt{3} \cong 1{,}73$ με προσέγγιση εκατοστού. Άρα:

$$\upsilon = 4\sqrt{3} = 4 \cdot 1{,}73 = 6{,}92\ cm$$

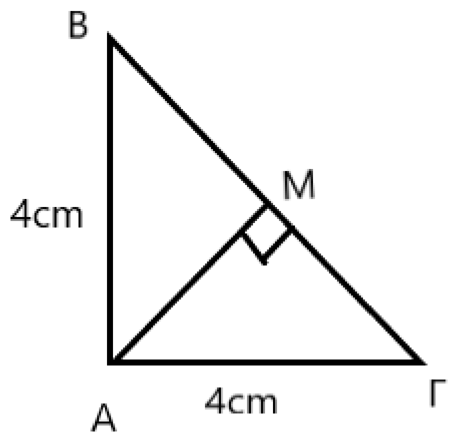
Το Εμβαδό δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\alpha \cdot \upsilon}{2}$, αντικαθιστούμε και παίρνουμε:

$$E = \frac{\alpha \cdot \upsilon}{2} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = \frac{32\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}\ cm$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\sqrt{3} \cong 1{,}73$ με προσέγγιση εκατοστού. Άρα:

$$E = 16\sqrt{3} = 16 \cdot 1{,}73 = 27{,}68\ cm^2$$

Άσκηση 5 – Λύση



\`

Το τρίγωνο είναι ισοσκελές ορθογώνιο αφού κάθε οξεία γωνία του είναι 45^o. Άρα οι κάθετες πλευρές του είναι ίσες, με $4\ cm$ μέτρο η κάθε μία. Το ύψος AM που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι και διάμεσος, συμφωνα με τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου. Αρχικά θα υπολογίσουμε την υποτείνουσα ΒΓ με χρήση Πυθαγορείου Θεωρήματος, οπότε έχουμε:

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$$

$$B\Gamma^2 = 4^2 + 4^2$$

$$B\Gamma^2 = 2 \cdot 4^2$$

$$B\Gamma = \sqrt{2 \cdot 4^2}$$

$$B\Gamma = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4^2}$$

$B\Gamma = 4\sqrt{2}\ cm$ {δεχόμαστε τη θετική λύση ως μέτρο πλευράς}

Τα ευθύγραμμα τμήματα $M\Gamma, BM$ είναι ίσα μεταξύ τους με το κάθε ένα να έχει μέτρο:

$$\frac{B\Gamma}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\ cm$$

Με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΜΒ, με υποτείνουσα την AB παίρνουμε:

$$AB^2 = AM^2 + MB^2$$

$$4^2 = (2\sqrt{2})^2 + AM^2$$

$$16 = 4 \cdot 2 + AM^2$$

$$AM^2 = 16 - 8$$

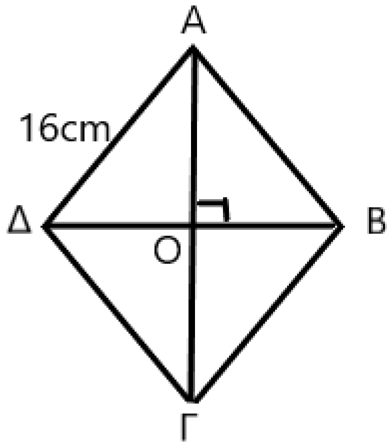
$$AM^2 = 8$$

$AM = \sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ cm$ {δεχόμαστε τη θετική λύση ως μέτρο πλευράς}

Το ύψος AM ισούται με $2\sqrt{2}\ cm$, γνωρίζουμε όμως ότι η προσέγγιση εκατοστού του αριθμού $\sqrt{2}$ είναι 1,41 οπότε το ύψος με προσέγγιση εκατοστού, θα είναι:

$$AM = 2\sqrt{2} = 2 \cdot 1{,}41 = 2{,}82\ cm$$

Άσκηση 6 – Λύση



Για τον ρόμβο ισχύει $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A = 16\ cm$. Δεδομένου ότι η γωνία $\hat{A} = 60^o$, αυτό σημαίνει πως τα τρίγωνα $ABD, B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρα. Τα ύψη $OA, O\Gamma$ είναι ίσα μεταξύ τους και θα δίνονται από τον τύπο $OA = O\Gamma = \upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, όπου $\alpha = AB = 16\ cm$. Με αντικατάσταση έχουμε:

$$OA = O\Gamma = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}\ cm$$

Οπότε η διαγώνιος $A\Gamma$ θα έχει μέτρο:

$$A\Gamma = OA + O\Gamma = 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 16\sqrt{3}\ cm$$

Όμοια και για τις διαγωνίους $\Delta O, OB$ με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ABO, με υποτείνουσα την πλευρά AB, θα έχουμε:

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$16^2 = (8\sqrt{3})^2 + OB^2$$

$$256 = 64 \cdot 3 + OB^2$$

$$OB^2 = 256 - 192$$

$$OB^2 = 64$$

$OB = \sqrt{64} = 8\ cm$ {δεχόμαστε τη θετική λύση ως μέτρο πλευράς}

Άρα $Ο\Delta = ΟΒ = 8\ cm$ και η διαγώνιος $\Delta Β$ θα έχει μέτρο:

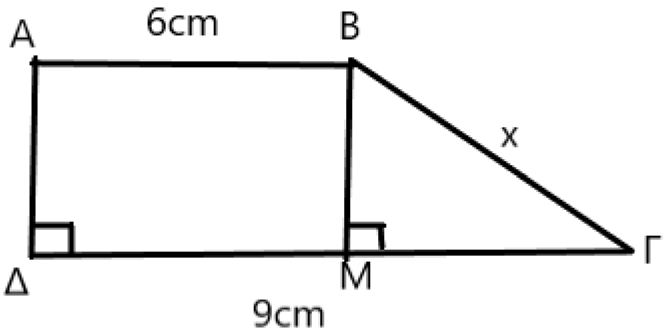
$$\Delta Β = Ο\Delta + ΟΒ = 8 + 8 = 16\ cm$$

Παρατήρηση: Στον υπολογισμό της διαγωνίου αναπτύχθηκε πλήρως η μεθοδολογία. Στην περίπτωση που έχουμε, μπορούμε να συμπεράνουμε απευθείας ότι $\Delta B = 16\ cm$ αφού το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

Το Εμβαδό του ρόμβου ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων του δια δύο. Χρησιμοποιούμε τον τύπο: $E = \frac{A\Gamma \cdot B\Delta}{2}$ και με αντικατάσταση έχουμε:

$$E = \frac{A\Gamma \cdot B\Delta}{2} = \frac{16 \cdot 16\sqrt{3}}{2} = \frac{256\sqrt{3}}{2} = 128\sqrt{3}\,cm^2$$

Άσκηση 7 – Λύση



Το τετράπλευρο $ABM\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οπότε η πλευρά ΔM θα έχει μέτρο $6cm$. Η πλευρά $M\Gamma$ συνεπαγωγικά θα έχει μέτρο $3cm$, αφού $M\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta M = 9 - 6 = 3cm$. Αναζητούμε την πλευρά $B\Gamma = x$. Υπολογίζουμε αρχικά το ύψος $BM = A\Delta$ του τραπεζίου από την επίλυση του τύπου $E = \frac{(\beta + B)\cdot \upsilon}{2}$. Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$E = \frac{(\beta + B)\cdot \upsilon}{2}$ άρα $45 = \frac{(6+9)\cdot \upsilon}{2}$

$15\upsilon = 2 \cdot 45$ άρα $15\upsilon = 90$

$\upsilon = 6\ cm$

Το τρίγωνο $ΒΜΓ$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά $ΒΓ$. Επιπλέον η κάθετη πλευρά του $ΒΜ$, θα ισούται με το ύψος $υ$ που είναι ίσο με $6\ cm$. Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο $ΒΜΓ$,παίρνουμε:

$$ΒΓ^2 = ΒΜ^2 + ΜΓ^2$$

$$\mathrm{x}^2 = 6^2 + 3^2$$

$$x^2 = 36 + 9$$

$x^2 = 45$ {δεχόμαστε τη θετική λύση ως μέτρο πλευράς}

$$x = \sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}\ cm$$

Η προσέγγιση της $\sqrt{5}$ με δύο δεκαδικά ψηφία είναι: $\sqrt{5} \cong 2{,}23$ άρα η αντίστοιχη προσέγγιση της πλευράς $ΒΓ$ θα είναι: $ΒΓ = 3\sqrt{5} \cong 3 \cdot 2{,}23 \cong 6{,}69\ cm$.

Υπολογίζουμε την Περίμετρο $Π$ από τον τύπο:

$$ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 6 + 6{,}69 + 9 + 6 = 27{,}69\ cm$$

2.3. Προβλήματα

Λύσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση Κατανόησης 1 - Απάντηση

a) Σε κάθε τετράγωνο, δύο κάθετες πλευρές σχηματίζουν Ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη διαγώνιο. Έστω $\boldsymbol{x}$ η διαγώνιος, τότε με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος θα έχουμε:

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2}$$

Η λύση είναι άρρητος αριθμός, οπότε σωστή επιλογή η (ii).

b) Το ύψος σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α δίνεται από τον τύπο: $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Αντικαθιστούμε την τιμή $\alpha = 10\ cm$ και παίρνουμε:

$$\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ cm$$

Η λύση είναι άρρητος αριθμός, οπότε σωστή επιλογή η (ii).

c) Έστω $\boldsymbol{\alpha}$ η πλευρά του τετραγώνου. Γνωρίζουμε ότι το Εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο: $E = \alpha^2$. Θα υπολογίσουμε αρχικά την κάθε πλευρά του και τελικά την Περίμετρο του με τύπο $\Pi = 4 \cdot \alpha$. Από τον τύπο του Εμβαδού, παίρνουμε:

$$\mathrm{E} = \alpha^2$$
$$\alpha^2 = 7$$
$$\alpha = \sqrt{7}cm$$

Οπότε η περίμετρος θα είναι: $\Pi = 4 \cdot \alpha = 4\sqrt{7}cm$. Άρα σωστή επιλογή η (iv).

d) Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οι κάθετες πλευρές μήκος και πλάτος, σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη διαγώνιο. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \sqrt{25} = 5\ cm$$

Οπότε σωστή επιλογή η (iii).

e) Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οι κάθετες πλευρές μήκος και πλάτος, σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη διαγώνιο. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

$$10^2 = x^2 + 8^2$$
$$x^2 = 100 - 64$$
$$x^2 = 36$$
$$x = \sqrt{36} = 6\ cm$$

Οπότε σωστή επιλογή η (ii).

f) Σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος, το τρίγωνο θα είναι ορθογώνιο αν τα μήκη των πλευρών του επαληθεύουν τη σχέση: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Δεδομένου ότι η υποτείνουσα είναι η πλευρά $\alpha = 17\ cm$, παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$
$$17^2 = 8^2 + 15^2$$
$$289 = 64 + 225$$

Οπότε σωστή επιλογή η (i).

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 – Λύση

Η απόσταση AB θα ισούται με το άθροισμα του ύψους του ισοπλεύρου τριγώνου με το ύψος της αποθήκης. Αρκεί να υπολογίσουμε το ύψος του τριγώνου από τον τύπο: $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ με

$\alpha = 6\ cm$. Αντικαθιστώντας στην σχέση υπολογίζουμε:

$$\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ m$$

Οπότε η απόσταση AB θα είναι: $AB = 3,5 + 3\sqrt{3}\ m$, με προσέγγιση δεκάτου

$$AB = 3,5 + 3 \cdot 1,7 \cong 8,6\ m$$

Άσκηση 2 – Λύση

Παρατηρούμε ότι τα τμήματα AE, EB είναι ισα μεταξύ τους ως ακτίνες του κύκλου. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $BE\Delta$ (με υποτείνουσα την BE) αρχικά θα υπολογίσουμε την κάθετη πλευρά $B\Delta$. Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος, έχουμε:

$$BE^2 = E\Delta^2 + B\Delta^2$$

$$20^2 = 16^2 + B\Delta^2$$

$$400 = 256 + B\Delta^2$$

$$B\Delta^2 = 400 - 256 = 144$$

$$B\Delta = \sqrt{144} = 12\ cm$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta A$, με υποτείνουσα την AB εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα λαμβάνοντας υπόψην ότι $A\Delta = AE + E\Delta = 20 + 16 = 36\ cm$ και παίρνουμε:

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 = 36^2 + 12^2 = 1.296 + 144 = 1.440$$

$$AB = \sqrt{1.440}\ \ cm$$

Οπότε $AB = A\Gamma = \sqrt{1.440} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{10} = 12\sqrt{10}\ \ cm.$

Άσκηση 3 – Λύση

Έστω $\boldsymbol{x}$ η πλευρά του τετραγώνου και $\boldsymbol{y}$ η διαγώνιος του. Η σχέση με την οποία συνδέονται είναι: $y + x = 12{,}07$ την οποία λύνουμε ως προς y και παίρνουμε:

$$y = 12{,}07 - x \quad (1)$$

Η διαγώνιος αποτελεί την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές τις πλευρές του τετραγώνου. Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος παίρνουμε:

$$y^2 = x^2 + x^2$$

$$y^2 = 2x^2$$

$y = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2}$ {Δεχόμαστε τη θετική λύση ως μέτρο πλευράς}

$y = x\sqrt{2} \cong 1{,}41x$ {Με προσέγγιση εκατοστού}

Με βάση τη σχέση (1) και με αντικατάσταση της τιμής του y, έχουμε:

$$12{,}07 - x = x\sqrt{2}$$

$$1{,}41x = 12{,}07 - x$$

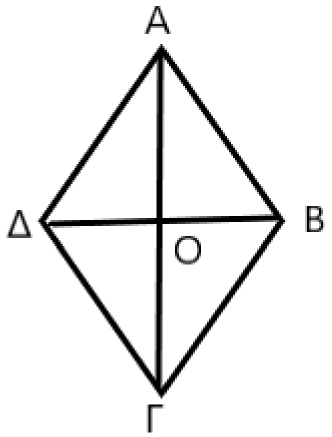
$$1{,}41x + x = 12{,}07$$

$$2{,}41x = 12{,}07$$

$$x = \frac{12{,}07}{2{,}41} \cong 5{,}01cm$$

Οπότε η περίμετρος θα έχει τιμή: $\Pi = 4x = 4 \cdot 5{,}01 \cong 20{,}04\ cm$, με προσέγγιση εκατοστού, ενώ το Εμβαδόν του θα έχει τιμή: $E = x^2 = (5{,}01)^2 \cong 25{,}10\ cm^2$ αντίστοιχα.

Άσκηση 4 – Λύση



Θα πρέπει να υπολογίσουμε το Εμβαδόν κάθε πινακίδας σχήματος ρόμβου. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η επιφάνεια αποτελείται από τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Επιπλέον μας δίνεται ο λόγος $\frac{\boldsymbol{\varDelta B}}{\boldsymbol{A\varGamma}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$. Επειδή στον ρόμβο (όπως και σε κάθε παραλληλόγραμμο) οι διαγώνιοι διχοτομούνται, αυτό έχει ως συνέπεια να ισχύει και ο λόγος: $\frac{\boldsymbol{O\varDelta}}{\boldsymbol{O\varGamma}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$. Από τη σχέση αυτή καταλήγουμε ότι $\boldsymbol{O\varDelta} = \frac{3}{5}\boldsymbol{O\varGamma}$. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\varDelta O\varGamma$ με υποτείνουσα την πλευρά $\varDelta\varGamma = \sqrt{408}\ cm$ και παίρνουμε:

$$\varDelta\varGamma^2 = O\varDelta^2 + O\varGamma^2$$

$$\left(\sqrt{408}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\cdot O\varGamma\right)^2 + O\varGamma^2$$

$$408 = \frac{9}{25}\cdot O\varGamma^2 + O\varGamma^2$$

$$25\cdot 408 = 9\cdot O\varGamma^2 + 25\cdot O\varGamma^2$$

$$34\cdot O\varGamma^2 = 10.200$$

$$O\varGamma^2 = \frac{10.200}{34} = 300$$

$$O\varGamma = \sqrt{300} = \sqrt{100}\cdot\sqrt{3} = 10\sqrt{3}\ cm$$

Οπότε για την πλευρά $O\varDelta$ θα ισχύει: $O\varDelta = \frac{3}{5}O\varGamma = \frac{3}{5}\cdot 10\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\ cm$.

Το Εμβαδόν του ορθογωνιού τριγώνου $\varDelta O\varGamma$ δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{O\varDelta\cdot O\varGamma}{2} = \frac{10\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{3}}{2} = \frac{60\cdot 3}{2} = 90\ cm^2.$$

Το Εβαδόν του ρόμβου θα είναι το τετραπλάσιο του Εμβαδού του τριγώνου $\varDelta O\varGamma$, δηλαδή $E_{AB\varGamma\varDelta} = 4\cdot 90 = 360\ cm^2$.

Θέλουμε να βάψουμε και τις δύο όψεις άρα το συνολικό εμβαδόν για κάθε πινακίδα θα είναι 720 cm^2. Για 400 πινακίδες έχουμε συνολικό Εμβαδόν $\mathbf{400 \cdot 720 = 288.000\ cm^2}$. Κάθε λίτρο μπογιάς καλύπτει επιφάνεια μέτρου 2,88 m^2, οπότε πρέπει το συνολικό Εμβαδόν να μετατραπει σε τετραγωνικά μέτρα:

$$288.000\ cm^2 = \frac{288.000}{10.000} = 28{,}8\ m^2$$

Οπότε θα χρειαστούμε συνολικά $\frac{28{,}8}{2{,}88} = 10$ λίτρα μπογιάς.

Άσκηση 5 – Λύση

Για το τρίγωνο $ΔΚΒ$ δεν έχουμε επαρκή στοιχεία ώστε να υπολογίσουμε το Εμβαδόν του. Θα προκύψει αν αφαιρέσουμε από το Εμβαδόν του Ορθογωνίου Παραλληλογράμμου, τα εμβαδά των Ορθογωνίων Τριγώνων $ΔΚΑ, ΔΒΓ$. Αρχικά θα υπολογίσουμε την πλευρά $ΒΓ$, που είναι ίση με την πλευρά $ΑΔ$, με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο τρίγωνο $ΔΓΒ$, με υποτείνουσα την πλευρά $ΔΒ$. Οπότε παίρνουμε:

$$ΔΒ^2 = ΒΓ^2 + ΔΓ^2$$

$$29^2 = ΒΓ^2 + 21^2$$

$$841 = ΒΓ^2 + 441$$

$$ΒΓ^2 = 841 - 441$$

$$ΒΓ^2 = 400$$

$$ΒΓ = \sqrt{400} = 20\ cm = ΑΔ$$

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το Εμβαδόν του ισούται με το γινόμενο των δύο καθέτων πλευρών διαιρούμενο με το δύο. Για κάθε ένα από τα ορθογώνια τρίγωνα, έχουμε:

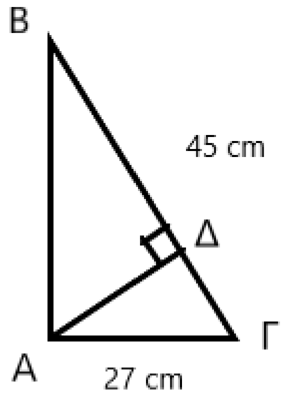
$$E_{ΑΔΚ} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΚ}{2} = \frac{6 \cdot 20}{2} = 60\ cm^2$$

$$E_{ΔΒΓ} = \frac{ΔΓ \cdot ΓΒ}{2} = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210\ cm^2$$

Έπιπλέον $E_{ΑΒΓΔ} = 21 \cdot 20 = 420\ cm^2$

Άρα $E_{ΚΔΒ} = E_{ΑΒΓΔ} - E_{ΑΔΚ} - E_{ΔΒΓ} = 420 - 60 - 210 = 150\ cm^2$

Άσκηση 6 – Λύση



Αρχικά θα υπολογίσουμε την κάθετη πλευρά AB με τη χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Οπότε έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$$

$$45^2 = AB^2 + 27^2$$

$$2.025 = AB^2 + 729$$

$$AB^2 = 2.025 - 729$$

$$AB^2 = 1.296$$

$$AB = \sqrt{1.296} = 36\ cm$$

Θα υπολογίσουμε το Εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, από τον τύπο: $E = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2}$

$$E = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \frac{36 \cdot 27}{2} = 486\ cm^2$$

Εναλλακτικά το Εμβαδόν με βάση την πλευρά $B\Gamma$, θα δίνεται από τον τύπο: : $E = \frac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2}$

$$E = \frac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2}$$

$$486 = \frac{45 \cdot A\Delta}{2}$$

$$45 \cdot A\Delta = 2 \cdot 486$$

$$A\Delta = \frac{972}{45} = 21{,}6\ cm$$

Άσκηση 7 – Λύση

Στο Ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ του σχήματος, ισχύει $ΑΓ = 5\ cm$, $ΒΓ = 10\ cm$. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα με υποτείνουσα την πλευρά $ΒΓ$και έχουμε:

$$\mathrm{Β}\Gamma^{\mathbf{2}} = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A}\Gamma^2$$

$$10^2 = 5^2 + \omega^2$$

$$\omega^2 = 75$$

$$\omega = \sqrt{75} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3}$$

$$\omega = 5\sqrt{3}\ cm$$

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα τρίγωνα με υποτείνουσες τις πλευρές $ΑΓ$και $ΑΒ$ αντίστοιχα και έχουμε:

$$Α\Gamma^2 = 3^2 + x^2$$

$$5^2 = 9 + x^2$$

$$x^2 = 25 - 9 = 16$$

$$x = \sqrt{16} = 4cm$$

Ομοίως:

$$\omega^2 = 3^2 + y^2$$

$$\left(5\sqrt{3}\right)^2 = 9 + y^2$$

$$25 \cdot 3 = 9 + y^2$$

$$y^2 = 75 - 9 = 66$$

$$y = \sqrt{66}\ cm$$

Άσκηση 8 – Λύση

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν η υποτείνουσα είναι η πλευρά με μέτρο $5cm$ (ως η μεγαλύτερη από τις δύο) τότε θέτουμε τη δεύτερη κάθετο ως $\boldsymbol{x}$. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και παίρνουμε:

$$5^2 = 4^2 + x^2$$
$$25 = 16 + x^2$$
$$x^2 = 25 - 16 = 9$$
$$x = \sqrt{9} = 3\ cm$$

2. Αν καμία από τις γνωστές πλευρές δεν είναι η υποτείνουσα, τότε θεωρούμε ως $\boldsymbol{x}$ την υποτείνουσα και εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$\mathrm{x}^2 = 5^2 + 3^2$$
$$x^2 = 25 + 9 = 34$$
$$x = \sqrt{34}\ cm$$

Άσκηση 9 – Λύση

Από τον τύπο της Περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου μήκους α και πλάτους β, με αντικατάσταση έχουμε:

$$\Pi = 2\alpha + 2\beta$$

$$12 = 2 \cdot 4 + 2\beta$$

$$2\beta = 12 - 8$$

$$\beta = \frac{4}{2} = 2\ cm$$

Άρα η πλευρά $B\Gamma$ έχει μέτρο $2\ cm$.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$, με υποτείνουσα την $B\Delta$ και παίρνουμε:

$B\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 + B\Gamma^2$

$B\Delta^2 = 4^2 + 2^2$

$B\Delta^2 = 16 + 4 = 20$

$B\Delta = \sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}\ cm$

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta E\Gamma$, με υποτείνουσα την $E\Gamma = B\Gamma + 1 = 3\ cm$ και παίρνουμε:

$E\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 + E\Gamma^2$

$E\Delta^2 = 4^2 + 3^2$

$E\Delta^2 = 16 + 9 = 25$

$E\Delta = \sqrt{25} = 5\ cm$

Άσκηση 10 – Λύση

a) Από τον τύπο του Εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με αντικατάσταση θα υπολογίσουμε το μήκος $\Delta\Gamma$ και το πλάτος $B\Gamma$.
$E = A\Delta \cdot \Gamma\Delta$
$8 = A\Delta \cdot 2A\Delta$
$2A\Delta^2 = 8$
$A\Delta^2 = \frac{8}{2} = 4$
$A\Delta = \sqrt{4} = 2\ cm$

Οπότε η πλευρά $\Gamma\Delta$ θα έχει μέτρο $4\ cm$

b) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$, με υποτείνουσα την $A\Gamma$ και παίρνουμε:

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$$
$$A\Gamma^2 = 2^2 + 4^2$$
$$A\Gamma^2 = 4 + 16 = 20$$
$$A\Gamma = \sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}\ cm$$

c) Υπολογίζουμε αρχικά το τμήμα ΔM, ισχύει $\Gamma M = \Delta M + 2$. Όμως $\Gamma M + M\Delta = \Gamma\Delta$ οπότε:

$$M\Delta + 2 + M\Delta = 4$$
$$2M\Delta = 2$$
$$M\Delta = 1\ cm$$

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAM, με υποτείνουσα την AM και παίρνουμε:

$$AM^2 = A\Delta^2 + \Delta M^2$$
$$AM^2 = 2^2 + 1^2$$
$$AM^2 = 5$$
$$AM = \sqrt{5}\ cm$$

Οπότε ο λόγος $\frac{A\Gamma}{AM}$ γίνεται:

$$\frac{A\Gamma}{AM} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$$

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 – Λύση

Θα υπολογίσουμε την πλευρά α των τετραγώνων με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε την υποτείνουσα $AB = 30\ cm$, την πρώτη κάθετο ίση με α και τη δεύτερη κάθετο ίση με 3α. Οπότε έχουμε:

$$30^2 = \alpha^2 + (3\alpha)^2$$

$$900 = \alpha^2 + 9\alpha^2$$

$$10\alpha^2 = 900$$

$$\alpha^2 = \frac{900}{10} = 90$$

$$\alpha = \sqrt{90} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{10}\ cm$$

Κάθε ένα από τα τετράγωνα έχει Εμβαδόν:

$$E = \alpha^2 = (3\sqrt{10})^2 = 9 \cdot 10 = 90\ cm^2$$

Το σχήμα αποτελείται από πέντε ίσα τετράγωνα, άρα το συνολικό Εμβαδόν θα είναι:

$$E_{o\lambda} = 5\alpha^2 = 5 \cdot 90 = 450\ cm^2$$

Άσκηση 2 – Λύση

Αρχικά θα υπολογίσουμε την υποτείνουσα ΔB, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAB. Με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, παίρνουμε:

$$\Delta B^2 = A\Delta^2 + AB^2$$

$$\Delta B^2 = 17^2 + 22^2$$

$$\Delta B^2 = 289 + 484 = 773$$

$$\Delta B = \sqrt{773}\ cm$$

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΓΒ$, με υποτείνουσα την $ΔΒ$ και έχουμε:

$$ΔΒ^2 = ΓΔ^2 + ΓΒ^2$$

$$\left(\sqrt{773}\right)^2 = 20^2 + ΓΒ^2$$

$$ΓΒ^2 = 773 - 400 = 373$$

$$ΓΒ = \sqrt{373}\ cm$$

Η Περίμετρος του τετραπλεύρου θα υπολογιστει ως το άθροισμα των πλευρών του:

$Π = ΑΔ + ΔΓ + ΓΒ + ΒΑ = 17 + 20 + \sqrt{373} + 22 = 59 + \sqrt{373} \cong 59 + 19{,}3 \cong 78{,}3\ cm$. Με προσέγγιση δεκάτου.

Το Εμβαδόν θα προκύψει από το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων τριγώνων. Για το Εμβαδόν του τριγώνου $ΑΔΒ$, έχουμε:

$$E_{ΑΒΔ} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΒ}{2} = \frac{17 \cdot 22}{2} = 187\ cm^2$$

Για το Εμβαδόν του τριγώνου $ΓΔΒ$, έχουμε:

$$E_{ΓΒΔ} = \frac{ΓΔ \cdot ΓΒ}{2} = \frac{\sqrt{373} \cdot 20}{2} \cong \frac{19{,}3 \cdot 20}{2} \cong 193\ cm^2$$

Οπότε το συνολικό Εμβαδόν είναι $E = E_{ΑΒΔ} + E_{ΓΒΔ} \cong 187 + 193 \cong 380\ cm^2$ με προσέγγιση δεκάτου.

Άσκηση 3 – Λύση

Θα πρέπει να υπολογίσουμε την υποτρίνουσα $ΓΒ$ στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΓΕΒ$, με τη χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Αρχικά πρέπει να βρεθεί η άγνωστη πλευρά $ΕΒ$, η οποία προκύπτει από την αφαίρεση των ευθυγράμμων τμημάτων $ΑΒ, ΑΕ$ ως εξής:

$$ΕΒ = ΑΒ - ΑΕ = 18 - 16 = 2\ m$$

Απο το Πυθαγόρειο Θεώρημα, παίρνουμε:

$$ΓΒ^2 = ΕΒ^2 + ΕΓ^2$$

$$ΓΒ^2 = 2^2 + 15^2$$

$$ΓΒ^2 = 4 + 225 = 229$$

$ΓΒ = \sqrt{229}\ cm \cong 15{,}1\ m$ με προσέγγιση δεκάτου.

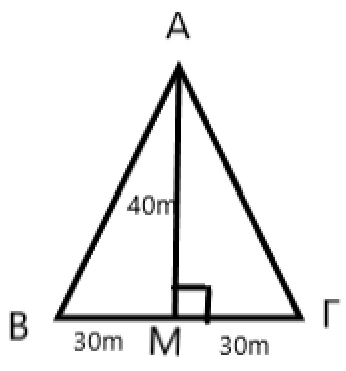
Η Περίμετρος θα υπολογιστεί με τον τύπο:

$$Π = ΑΔ + ΔΓ + ΓΒ + ΒΑ \cong 15 + 16 + 15{,}1 + 18 \cong 64{,}1\ m$$

Το συνολικό κόστος θα είναι:

$$Κ = 64{,}1 \cdot 8 \cong 512{,}8\ €$$

Άσκηση 4 – Λύση



Το ύψος σε ισοσκελές τρίγωνο είναι και διάμεσος της βάσης. Οπότε τα τμήματα $ΒΜ, ΜΓ$ είναι ίσα με μέτρο $30m$, το κάθε ένα. Θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΜ$, με υποτείνουσα την πλευρά $ΑΒ. Οπότε\ παίρνουμε$:

$$ΑΒ^2 = ΒΜ^2 + ΑΜ^2$$

$$ΑΒ^2 = 30^2 + 40^2$$

$$ΑΒ^2 = 900 + 1600 = 2500$$

$$ΑΒ = \sqrt{2500} = 50\ m$$

Η Περίμετρος θα δίνεται από τον τύπο:

$$\Pi = AB + B\Gamma + \Gamma A = 50 + 60 + 50 = 160m$$

Το συνολικό κόστος για την περίφραξη, θα είναι:

$$K = 160 \cdot 12 = 1920\ €$$

Άσκηση 5 – Λύση

` -Για να βρούμε τη διαγώνιο του οικοπέδου θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με υποτείνουσα την πλευρά $A\Gamma$. Οπότε παίρνουμε:

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$$

$$A\Gamma^2 = 18^2 + 9^2$$

$$A\Gamma^2 = 324 + 81 = 405$$

$A\Gamma = \sqrt{405} \cong 20{,}1\ m$ με προσέγγιση δεκάτου.

Το συνολικό κόστος για την τοποθέτηση του σωλήνα θα είναι με προσέγγιση δεκάτου:

$$K = 20{,}1 \cdot 3{,}5 \cong 70{,}4€$$

Άσκηση 6 – Λύση

1. Θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $BA\Gamma$, με υποτείνουσα την πλευρά $B\Gamma$. Οπότε παίρνουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$$
$$B\Gamma^2 = 3^2 + 4^2$$
$$B\Gamma^2 = 9 + 16 = 25$$
$$B\Gamma = \sqrt{25} = 5\ m$$

2. Θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΑΔ$, με υποτείνουσα την πλευρά $ΒΔ$. Οπότε παίρνουμε:

$$ΒΔ^2 = ΑΔ^2 + ΑΒ^2$$
$$ΒΔ^2 = 4^2 + 4^2$$
$$ΒΔ^2 = 16 + 16 = 32$$
$$ΒΔ = \sqrt{32} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}\, m$$

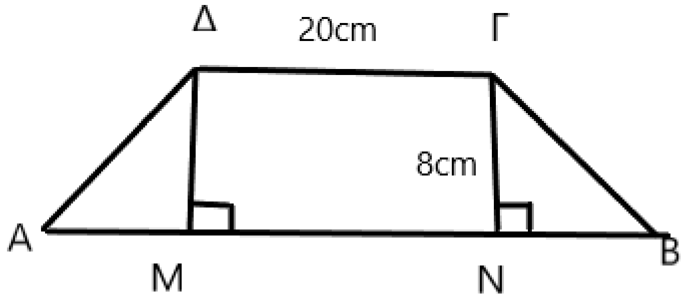
3. Το συνολικό μήκος του καλωδίου που θα χρειαστεί είναι το άθροισμα των μέτρων των τμημάτων $ΒΓ, ΒΔ$. Προσεγγίζουμε το μήκος του τμήματος $ΒΔ$ χρησιμοποιώντας την προσέγγιση εκατοστού $\sqrt{2} \cong 1{,}41$ και μας δίνει:

$$ΒΔ = 4\sqrt{2} = 4 \cdot 1{,}41 = 5{,}64\, m$$

Άρα το συνολικό μήκος καλωδίου θα είναι:

$$ΒΓ + ΒΔ \cong 5 + 5{,}64 \cong 10{,}64\, m$$

Άσκηση 7 – Λύση



Στο ισοσκελές τραπέζιο οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες, δηλαδη $A\Delta = B\Gamma$. Επιπλέον το ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta M, \Gamma NB$ είναι ισοσκελή,αφού κάθε μια οξεία γωνία είναι 45^o. Αυτό σημάινει ότι οι πλευρές $AM, M\Delta, \Gamma N, NB$ είναι ίσες μεταξύ τους, με μέτρο $8\ cm$. Με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΓNB, με υποτείνουσα την πλευρά $B\Gamma$, παίρνουμε:

$$B\Gamma^2 = \Gamma N^2 + NB^2$$

$$B\Gamma^2 = 8^2 + 8^2$$

$$B\Gamma^2 = 2 \cdot 8^2$$

$$B\Gamma = \sqrt{2 \cdot 8^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8^2} = 8\sqrt{2}\ cm$$

Επιπλέον η πλευρά MN ισούται με $20\ cm$, αφού το τετράπλευρο $MN\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και για την πλευρα AB ισχύει:

$$AB = AM + MN + NB = 8 + 20 + 8 = 36\ cm$$

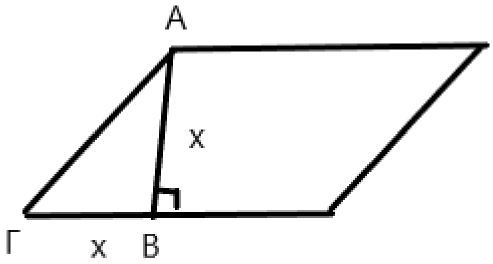
Οπότε η Περίμετρος του τραπεζίου υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Pi = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 36 + 8\sqrt{2} + 20 + 8\sqrt{2} = 56 + 16\sqrt{2}\ cm$$

Το Εμβαδόν του θα υπολογιστεί με τον τύπο:

$$E = \frac{(\beta + B) \cdot \upsilon}{2} = \frac{(20+36) \cdot 8}{2} = 224\ cm^2$$

Άσκηση 8 – Λύση



Φέρουμε το ύψος $AB = x$, οπότε το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές ορθογώνιο (αφού οι οξείες γωνίες είναι $45^o η\ κάθε\ μία$), με υποτείνουσα την πλευρά $ΑΓ$. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και παίρνουμε:

$$ΑΓ^2 = ΒΓ^2 + ΑΒ^2$$

$$ΑΓ^2 = x^2 + x^2$$

$$2x^2 = \left(100\sqrt{2}\right)^2$$

$$2x^2 = 10.000 \cdot 2$$

$$x^2 = 10.000$$

$$x = \sqrt{10.000} = 100\ m$$

Το Εμβαδόν του θα υπολογιστεί με τουν τύπο $Ε = α \cdot υ$, οπότε με αντικατάσταση έχουμε:

$$Ε = 150 \cdot 100 = 15.000\ m^2 = 15\ στρεμματα$$

Τα συνολικά κιλά σπόρων που θα χρειαστούμε είναι :

$$Β = 15 \cdot 50 = 750\ κιλά$$

Άσκηση 9 – Λύση

Ορίζονται τρία ορθογώνια τρίγωνα οπου οι συντεταγμένες των κορυφών είναι:

$\{(0,4),(0,6),(4,6)\},\{(0,0),(2,0),(0,4)\},\{(2,0),(4,0),(4,6)\}$

Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος σε κάθε ένα από τα τρίγωνα παίρνουμε:

i. $B\Gamma^2 = 2^2 + 4^2$
$B\Gamma^2 = 4 + 16 = 20$
$B\Gamma = \sqrt{20}\ \mu o\nu \acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$

ii. $BA^2 = 2^2 + 4^2$
$BA^2 = 4 + 16 = 20$
$BA = \sqrt{20}\ \mu o\nu \acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$

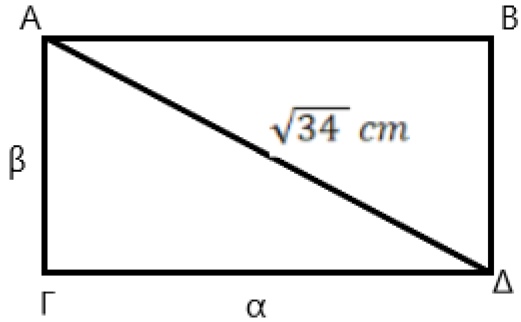
iii. $A\Gamma^2 = 2^2 + 6^2$
$A\Gamma^2 = 4 + 36 = 40$
$A\Gamma = \sqrt{40}\ \mu o\nu \acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$

Για να είναι το τρίγωνο $AB\Gamma$ ορθογώνιο, θα πρέπει να επαληθέυεται το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Θεωρώντας ως υποτείνουσα την μεγαλύτερη σε μήκος πλευρά, δηλαδή την πλευρά $A\Gamma$ και εφαρμογή, παίρνουμε:

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$$
$$\left(\sqrt{40}\right)^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2 + \left(\sqrt{20}\right)^2$$
$$40 = 20 + 20$$
$$40 = 40 \text{ που ισχύει}$$

Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά $A\Gamma$.

Άσκηση 10 – Λύση



Θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΓΔ$, με υποτείνουσα την πλευρά $ΓΔ$. Δεδομένου ότι $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{5}$ καταλήγουμε ότι: $\beta = \frac{3}{5} \cdot \alpha$ (1)

$$ΑΓ^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$(\sqrt{34})^2 = \alpha^2 + \left(\frac{3}{5} \cdot \alpha\right)^2$$

$$34 = \alpha^2 + \frac{9\alpha^2}{25}$$

$$25 \cdot 34 = 25\alpha^2 + 9\alpha^2$$

$$34\alpha^2 = 25 \cdot 34$$

$$\alpha^2 = \frac{25 \cdot 34}{34} = 25$$

$$\alpha = \sqrt{25} = 5\ cm$$

Οπότε το μήκος του είναι $\alpha = 5\ cm$, ενώ το πλάτος του είναι $\beta = \frac{3}{5} \cdot \alpha = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3\ cm$.