ΕΝΟΤΗΤΑ 2.7 : ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΠΟΣΟΤΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Να διατάξετε τις παρακάτω τιμές του r σε αύξουσα τάξη του βαθμού γραμμικής συσχέτισης δύο ποσοτικών μεταβλητών X και Y: $-0,6,\ 0,9, -0,7\ , 0,2,\ 0, -1$.

Λύση

Με κριτήριο το πόσο ισχυρή είναι η γραμμική συσχέτιση και ανεξάρτητα από το αν αυτή είναι θετική ή αρνητική, η διάταξη των τιμών του r σε αύξουσα σειρά είναι:

0, 0,2, -0,6, -0,7, 0,9, -1

Άσκηση 2

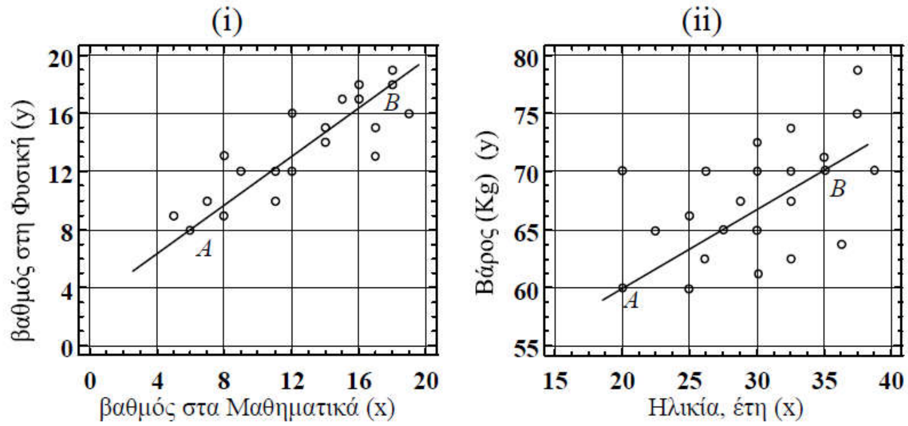
Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών X και Y είναι $0,96$, ενώ ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών Z και Φ είναι $-0,96$. Ποια είναι η διαφορά τους;

Λύση

Τα δύο ζευγάρια μεταβλητών έχουν το ίδιο ισχυρή γραμμική συσχέτιση, αλλά για τις μεταβλητές X και Y η συσχέτιση είναι θετική, ενώ για τις Z και Φ είναι αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι όταν οι τιμές της μεταβλητής X αυξάνονται, οι τιμές της Y τείνουν να αυξάνονται, ενώ όταν οι τιμές της μεταβλητής Z αυξάνονται, οι τιμές της Φ τείνουν να μειώνονται.

Άσκηση 3

Δίνονται δυο διαγράμματα διασποράς με χαραγμένες «με το μάτι» δύο ευθείες από έναν μαθητή.



α) Χρησιμοποιώντας τα σημεία Α και Β να βρείτε τις εξισώσεις των δύο ευθειών.
β) Πώς θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε τις ευθείες του ερωτήματος α);

Λύση
α) Για την περίπτωση (i) έχουμε Α(6,8), Β(18,18) και αναζητούμε την ευθεία $y = \alpha + \beta x$ η οποία διέρχεται από τα Α και Β. Οπότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 8 = \alpha + \beta \cdot 6 \\ 18 = \alpha + \beta \cdot 18 \end{cases}$$

από τη λύση του οποίου προκύπτει ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 0,83$. Οπότε η ευθεία είναι η $y = 3 + 0,83x$

Ομοίως για την περίπτωση (ii) βρίσκουμε την ευθεία $y = 46,66 + 0,66x$.

β) Οι ευθείες του ερωτήματος (α) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση του βαθμού στη Φυσική αν ξέρουμε το βαθμό στα Μαθηματικά (για την περ i) και για την εκτίμηση του βάρους αν ξέρουμε το ύψος (για την περ. ii). Αυτές οι εκτιμήσεις μπορούν να γίνουν με κάποιους περιορισμούς. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε το βάρος για ηλικία 15 ετών ή για ηλικία 60 ετών, γιατί οι τιμές αυτές βρίσκονται έξω από το πεδίο των δεδομένων που έχουμε.

Άσκηση 4

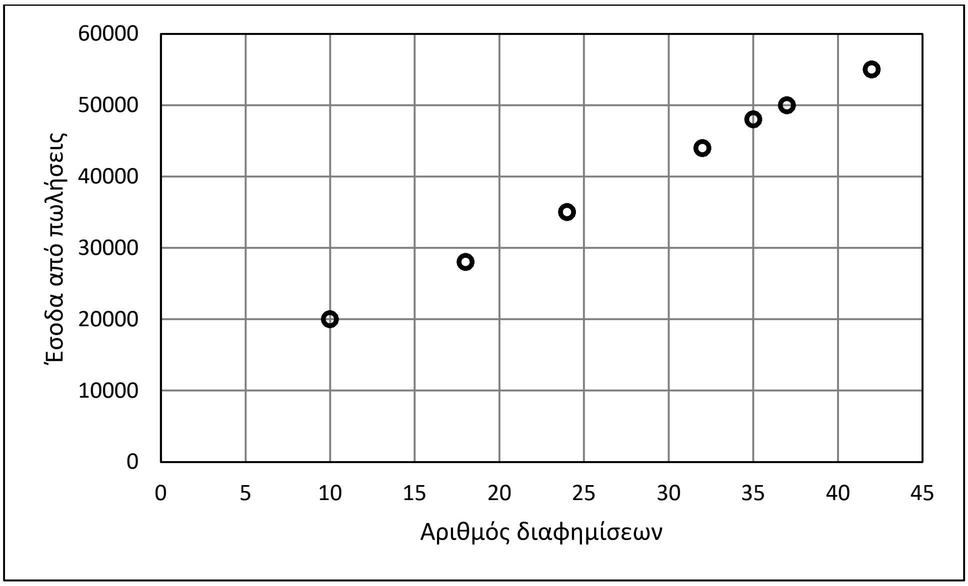
Μια εταιρεία διαφημίσεων παρουσίασε τον επόμενο πίνακα:

Αριθμός διαφημίσεων	Έσοδα από πωλήσεις
10	20000
18	28000
24	35000
32	44000
35	48000
37	50000
42	55000

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς και να εκτιμήσετε από αυτό τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ του αριθμού διαφημίσεων της εταιρείας και των εσόδων της από τις πωλήσεις.
β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ του αριθμού διαφημίσεων της εταιρείας και των εσόδων της από τις πωλήσεις.
γ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» την ευθεία που φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.
δ) Αν το πλήθος των διαφημίσεων που αγόραζε ένα κανάλι ήταν 30, πόσο εκτιμάτε ότι θα ήταν τα έσοδα της εταιρείας διαφημίσεων;
ε) Αν το πλήθος των διαφημίσεων που αγόραζε ένα κανάλι ήταν 60, θα ήταν ασφαλές να εκτιμήσετε τα έσοδα της εταιρείας διαφημίσεων, όπως στο δ);

<u>Λύση</u>

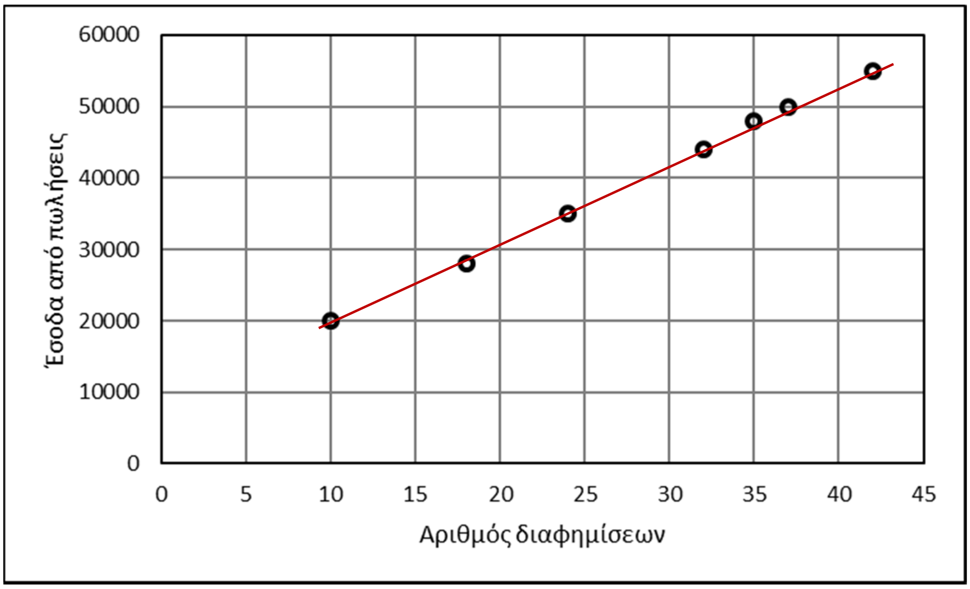
α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται παρακάτω:



Από το διάγραμμα διασποράς φαίνεται να υπάρχει ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ του αριθμού των διαφημίσεων και των εσόδων από πωλήσεις.

β) Χρησιμοποιώντας λογιστικό φύλλο ή κάποια εφαρμογή στατιστικής επεξεργασίας, ή ακόμη και τον τύπο για τον συντελεστή Pearson, βρίσκουμε $r = 0,9995$. Επειδή η τιμή του συντελεστή είναι πολύ κοντά στο 1, ο αριθμός των διαφημίσεων και τα έσοδα από πωλήσεις έχουν σχεδόν τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση.

γ) Επιλέγουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (10,20000) και (42,55000).



δ) Αν το πλήθος των διαφημίσεων που αγόραζε ένα κανάλι ήταν 30, τα έσοδα της εταιρείας διαφημίσεων εκτιμάμε ότι θα ήταν περίπου 42000.

ε) Για πλήθος διαφημίσεων 60, δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε τα έσοδα, εφόσον το 60 βρίσκεται έξω από το πεδίο των δεδομένων που έχουμε στη διάθεσή μας.

Άσκηση 5

Τα δεδομένα του επόμενου πίνακα παριστάνουν τους βαθμούς (στην κλίμακα του 100) 10 μαθητών/τριών της Β΄ τάξης του Γενικού Λυκείου στα μαθήματα της Φυσικής (Χ) και των Μαθηματικών (Υ) κορμού σε μια γραπτή αξιολόγηση.

Βαθμός- Χ	Βαθμός- Υ	Βαθμός- Χ	Βαθμός- Υ
67	63	81	85
74	67	93	89
67	70	81	89
78	74	96	96
89	81	89	100

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς και να εκτιμήσετε από αυτό τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των βαθμών της Φυσικής (Χ) και των Μαθηματικών (Υ) των 10 μαθητών/τριών της Β τάξης του Γενικού Λυκείου.

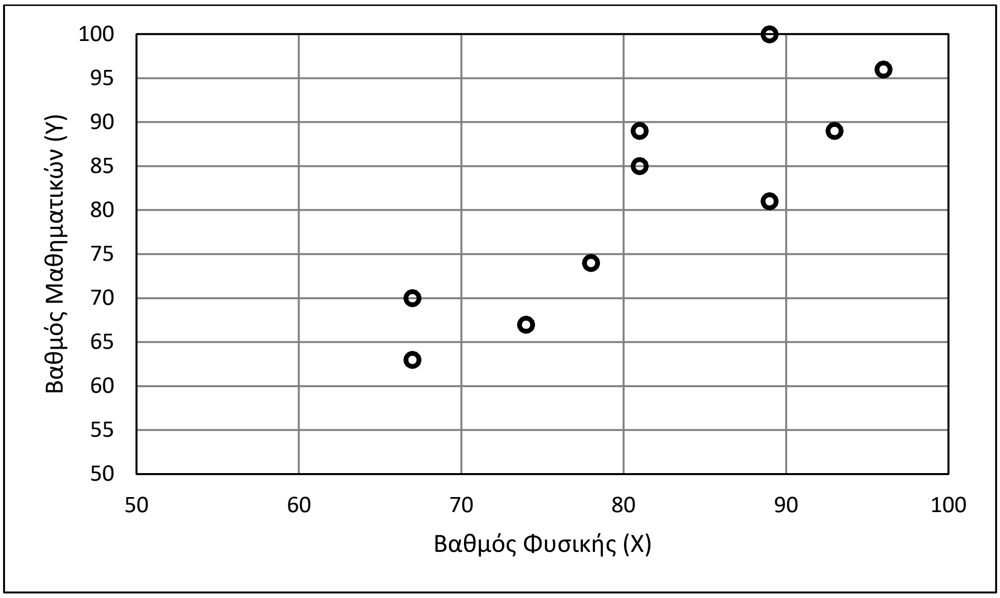
β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των βαθμών της Φυσικής (Χ) και των Μαθηματικών (Υ) των 10 μαθητών/τριών της Β΄ τάξης του Γενικού Λυκείου.

γ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» την ευθεία που φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.

δ) Πώς θα μπορούσατε να εκτιμήσετε τον βαθμό των Μαθηματικών ενός μαθητή της Β΄ Λυκείου, εάν γνωρίζατε ότι στη Φυσική έγραψε 70;

<u>Λύση</u>

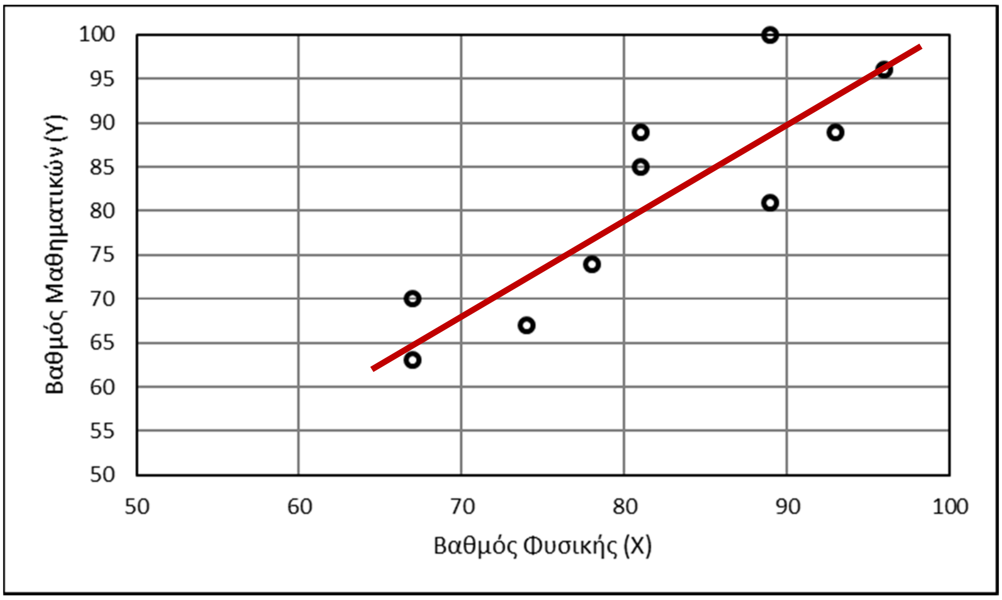
α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται παρακάτω:



Από το διάγραμμα διασποράς φαίνεται ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των βαθμών των δύο μαθημάτων.

β) Υπολογίζουμε (πχ με χρήση λογιστικού φύλλου) ότι $r = 0,86$. Η τιμή αυτή του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης Pearson δείχνει ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των βαθμών των δύο μαθημάτων.

γ) Επιλέγουμε την ευθεία που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



δ) Για έναν μαθητή που έγραψε στη Φυσική 70, ένας αναμενόμενος βαθμός για το μάθημα των Μαθηματικών είναι περίπου 68.

Άσκηση 6

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ηλικίες και οι (συστολικές) πιέσεις αίματος 10 γυναικών.

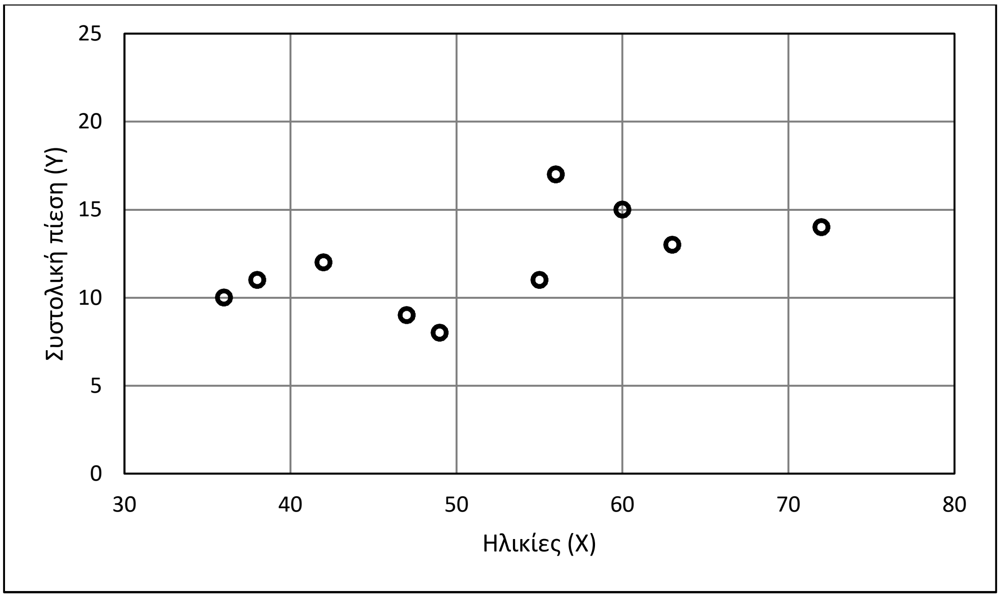
Ηλικία (x)	**56**	**42**	**72**	**36**	**63**	**47**	**55**	**49**	**38**	**60**
Πίεση αίματος (y)	**17**	**12**	**14**	**10**	**13**	**9**	**11**	**8**	**11**	**15**

α) Να σημειώσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα σημεία (x, y) σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, όπου x είναι η ηλικία των γυναικών σε έτη και y είναι η πίεση αίματος των γυναικών σε cm Hg.

β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών της ηλικίας των γυναικών σε έτη (x) και της πίεσης τους σε cm Hg (y).

<u>Λύση</u>

α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται παρακάτω:



β) Βρίσκουμε ότι $r = 0,57$. Αυτή η τιμή δηλώνει ότι υπάρχει θετική γραμμική συσχέτιση, η οποία όμως δεν είναι ισχυρή.

Άσκηση 7

Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται στην πρώτη γραμμή οι τιμές (σε €) για διαφορετικά κράνη ποδηλασίας και στη δεύτερη γραμμή η βαθμολογία ποιότητάς τους που έγινε από ειδικούς (σε μια κλίμακα από 0 έως 100, όπου όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή τόσο πιο ποιοτικό είναι το κράνος).

Τιμή (€)	**35**	**22**	**33**	**42**	**50**	**23**	**29**	**18**	**39**	**28**	**20**	**25**
Βαθμολογία ποιότητας	**64**	**60**	**58**	**55**	**54**	**45**	**47**	**43**	**42**	**41**	**40**	**32**

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς.

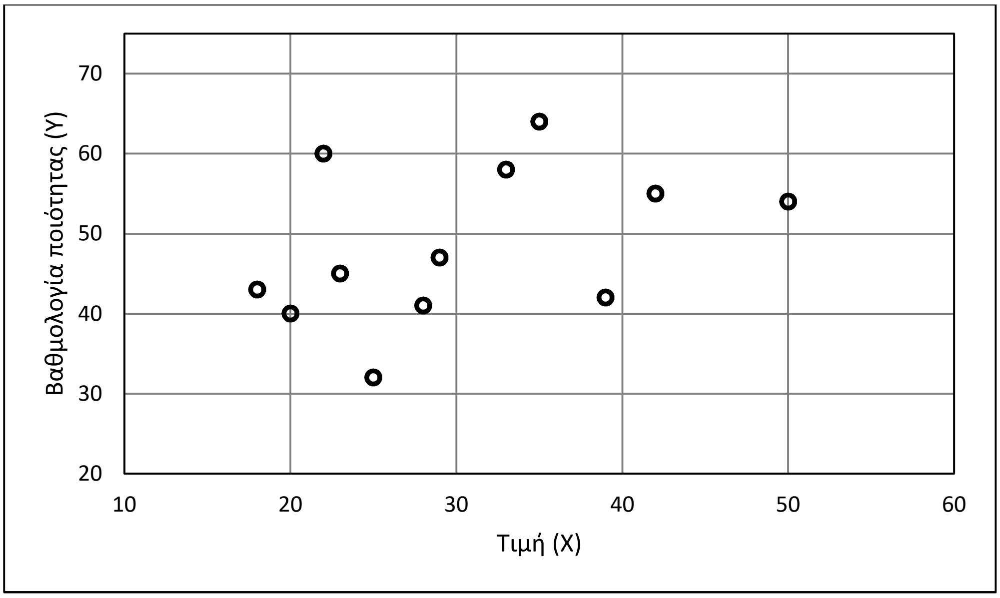
β) Υπάρχει γραμμική συσχέτιση ανάμεσα στην τιμή και τη βαθμολογία ποιότητας;

γ) Θα μπορούσαμε να πούμε με βεβαιότητα ότι αν αγοράσουμε πιο φθηνό κράνος θα έχει πιο χαμηλή ποιότητα;

δ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» στο διάγραμμα διασποράς μια ευθεία που θα μπορούσε να περιγράφει τη σχέση του αναμενόμενου βαθμού ποιότητας ενός ποδηλατικού κράνους με την τιμή του.

<u>Λύση</u>

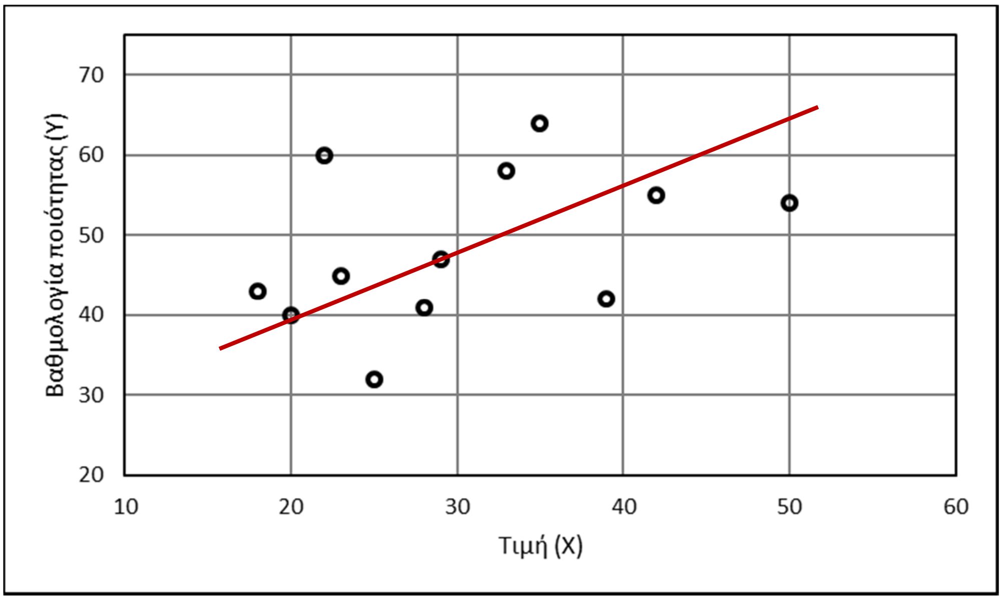
α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται παρακάτω:



β) Από το διάγραμμα φαίνεται να υπάρχει κάποια ασθενής γραμμική συσχέτιση ανάμεσα στην τιμή και την βαθμολογία ποιότητας. Υπολογίζοντας τον συντελεστή Pearson βρίσκουμε $r = 0,40$, κάτι που επιβεβαιώνει την εκτίμηση για ασθενή γραμμική συσχέτιση.

γ) Επειδή η συσχέτιση είναι ασθενής, δεν μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι χαμηλότερη τιμή σημαίνει χαμηλότερη ποιότητα. Για παράδειγμα υπάρχει κράνος με τιμή 39 € και βαθμολογία 42, και άλλο με τιμή 22 € και βαθμολογία 60.

δ) Μια ευθεία που θα μπορούσε να περιγράφει τη σχέση του αναμενόμενου βαθμού ποιότητας ενός ποδηλατικού κράνους με την τιμή του φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Άσκηση 8

Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται οι συντελεστές γραμμικής συσχέτισης των γραπτών βαθμολογιών στις εξετάσεις Ιουνίου σε 5 μαθήματα ενός τμήματος Β΄ τάξης γενικού λυκείου.

	Άλγεβρα	Βιολογία	Γλώσσα	Φυσική	Χημεία
Άλγεβρα	**1,00**				
Βιολογία	**0,54**	**1,00**			
Γλώσσα	**0,76**	**0,81**	**1,00**		
Φυσική	**0,70**	**0,73**	**0,71**	**1,00**	
Χημεία	**0,41**	**0,80**	**0,67**	**0,66**	**1,00**

Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει, ισχυρή ή όχι, γραμμική συσχέτιση ανάμεσα στις βαθμολογίες στα 5 εξεταζόμενα μαθήματα των μαθητών/τριών αυτών.

Λύση

Καταρχάς φαίνεται μια θετική γραμμική συσχέτιση ανάμεσα σε όλα τα μαθήματα, αν τα πάρουμε ανά δύο. Ισχυρή συσχέτιση υπάρχει μεταξύ Γλώσσας και Βιολογίας (0,81), Χημείας και Βιολογίας (0,80), Γλώσσας και Άλγεβρας (0,76).

Άσκηση 9

Το πλήθος x των οχημάτων σε εκατομμύρια και ο αριθμός y των ατυχημάτων σε εκατοντάδες, σε 15 διαφορετικές χώρες, δίνονται από τον επόμενο πίνακα:

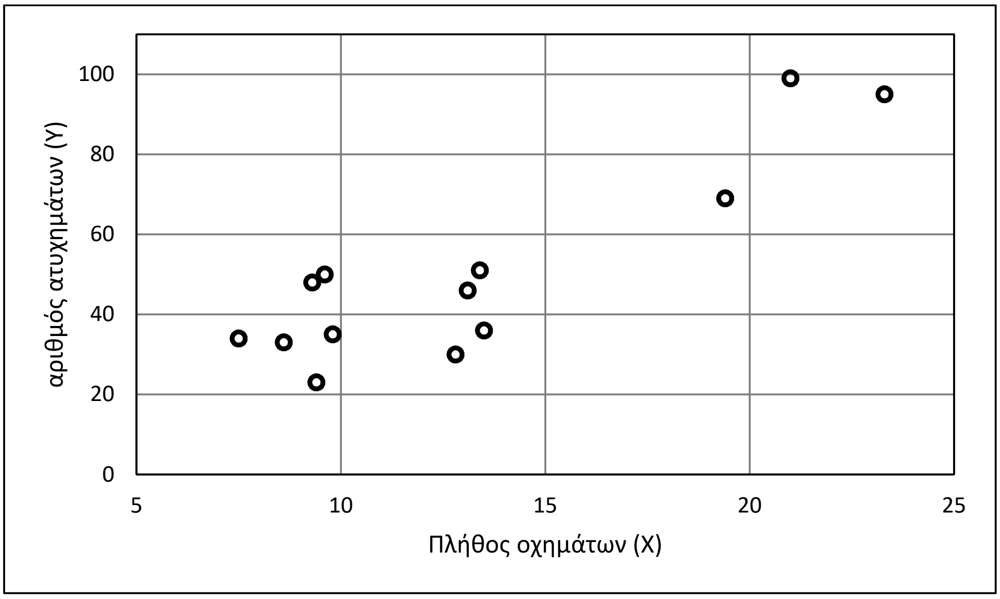
Χώρα	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο
x	8,6	13,4	12,8	9,3	1,3	9,4	13,1	4,9	13,5	9,6	7,5	9,8	23,3	21	19,4
y	33	51	30	48	12	23	46	18	36	50	34	35	95	99	69

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς μεταξύ των μεταβλητών του πλήθους των οχημάτων και του αριθμού ατυχημάτων για τις 15 χώρες.

β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών του πλήθους των οχημάτων και του αριθμού ατυχημάτων για τις 15 χώρες.

Λύση

α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται παρακάτω:



β) Υπολογίζουμε ότι $r = 0,90$. Η τιμή αυτή δείχνει ότι υπάρχει ισχυρή γραμμική συσχέτιση μεταξύ του πλήθους των οχημάτων και του αριθμού ατυχημάτων για τις 15 χώρες. Είναι ίσως αναμενόμενο μεγαλύτερος αριθμός αυτοκινήτων να συνδέεται με μεγαλύτερο αριθμό ατυχημάτων. Ωστόσο, έχει ενδιαφέρον να διερευνηθούν οι παράγοντες που κάνουν τις δύο μεταβλητές να μην είναι πλήρως γραμμικά συσχετισμένες. Αυτό θα οδηγούσε σε επέκταση της έρευνας ώστε να συμπεριλάβει και άλλες διαστάσεις του προβλήματος.

Άσκηση 10

Από 8 γάμους που έγιναν σε μια εκκλησία ενός χωριού κατά τη διάρκεια ενός μηνός , οι ηλικίες των ανδρόγυνων ήταν:

Ηλικία γαμπρού	**20**	**22**	**24**	**25**	**28**	**30**	**33**	**38**
Ηλικία νύφης	**20**	**20**	**22**	**27**	**24**	**25**	**28**	**34**

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς μεταξύ των ηλικιών της νύφης (Y) και του γαμπρού (X) και να περιγράψετε το είδος της σχέσης που φαίνεται να έχουν οι δύο μεταβλητές.

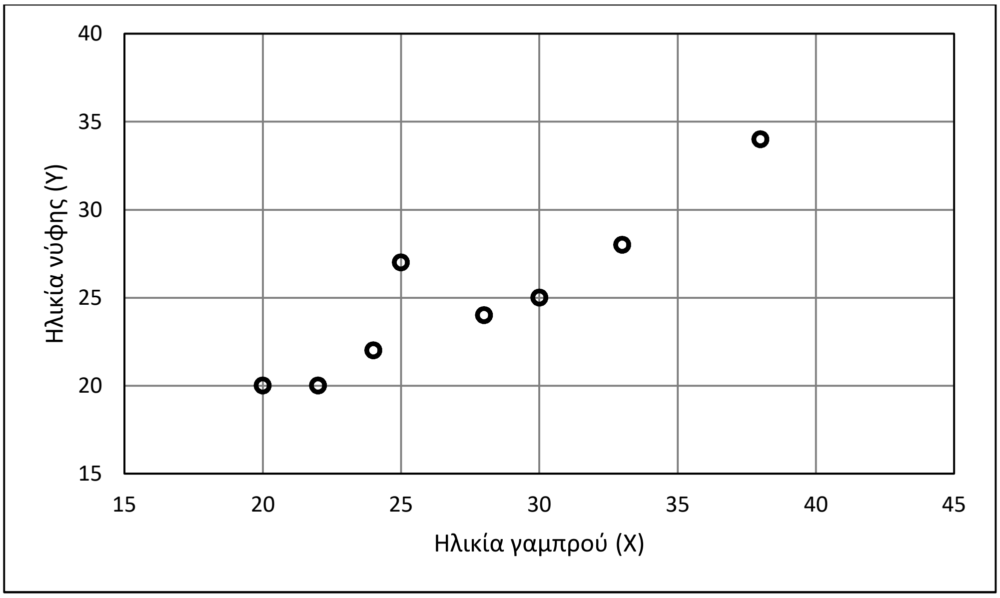
β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των ηλικιών νύφης και γαμπρού.

γ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» την ευθεία που φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.

δ) Να βρείτε την αναμενόμενη ηλικία της νύφης για έναν υποψήφιο γαμπρό ετών 34.

<u>Λύση</u>

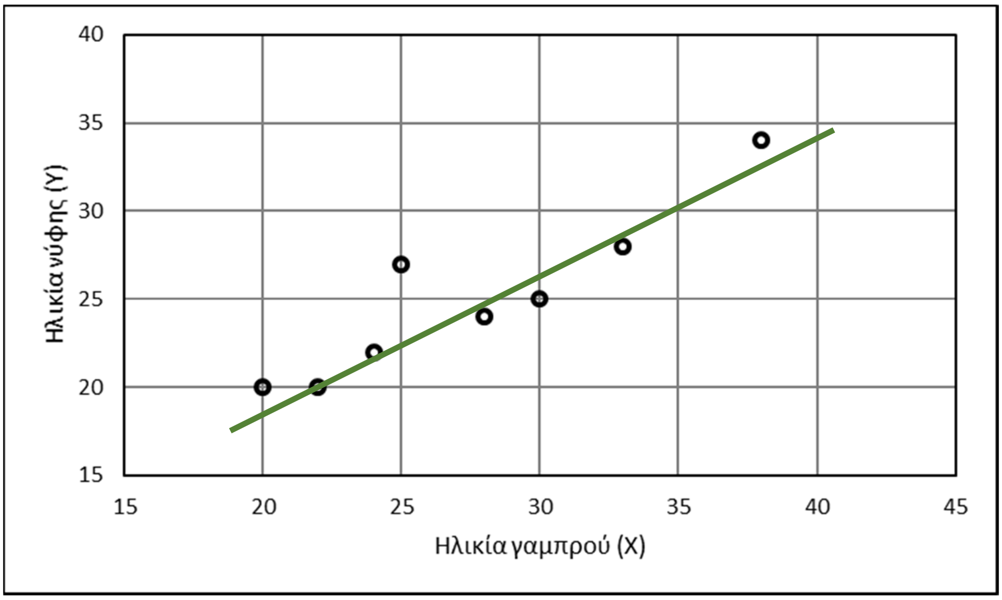
α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται παρακάτω:



Από το διάγραμμα φαίνεται να υπάρχει ισχυρή γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δύο ηλικιών.

β) Υπολογίζουμε ότι $r = 0,92$, τιμή που επιβεβαιώνει την ισχυρή γραμμική συσχέτιση της ηλικίας του γαμπρού με εκείνη της νύφης.

γ) Η ευθεία φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



δ) Αξιοποιώντας την παραπάνω ευθεία μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι αν ο γαμπρός είναι 34 ετών, η αναμενόμενη ηλικία της νύφης είναι περίπου 31 ετών.

Άσκηση 11

Δίνεται δείγμα ν ζευγών παρατηρήσεων $(x_i, y_i), i = 1,2,\dots,\nu$ δύο μεταβλητών X και Y και έστω r, ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των μεταβλητών X και Y. Να αποδείξετε ότι αν όλα τα παραπάνω σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με εξίσωση:

$y_i = \alpha + \beta x_i,\ \ i = 1,2,\dots,\nu$,

τότε:

$r = 1$ αν $\beta > 0$ και $r = -1$ αν $\beta < 0$.

<u>Λύση</u>

α) Εφόσον ισχύει ότι $y_i = \alpha + \beta x_i, i = 1,2,\dots,\nu$, σύμφωνα με την εφαρμογή 3 της §2.3 θα είναι $\overline{y} = \alpha + \beta\overline{x}$ και $s_y = |\beta| \cdot s_x$

Οπότε έχουμε:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \nu\overline{x}\,\overline{y}}{\nu s_x s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i(\alpha + \beta x_i) - \nu\overline{x}(\alpha + \beta\overline{x})}{\nu s_X |\beta| s_X} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \alpha x_i + \sum_{i=1}^{\nu} \beta x_i^2 - \nu\alpha\overline{x} - \nu\beta\overline{x}^2}{\nu|\beta| s_X^2}$$

Επειδή $\nu\alpha\overline{x} = \nu\alpha\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha x_i$, έχουμε:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \beta x_i^2 - \nu \beta \bar{x}^2}{\nu |\beta| s_X^2} = \frac{\beta}{|\beta|} \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \nu \bar{x}^2}{\nu s_X^2} \quad (1)$$

Αποδεικνύεται ότι $s_X^2 = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu} \right)$, οπότε είναι $\nu s_X^2 = \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2$

Επιπλέον, $\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \nu \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \nu\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \nu \frac{1}{\nu^2}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2$

Με βάση αυτά η (1) γίνεται $r = \frac{\beta}{|\beta|} \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2} = \frac{\beta}{|\beta|}$.

Οπότε, αν $\beta > 0$ θα είναι $r = \frac{\beta}{\beta} = 1$,

ενώ αν $\beta < 0$ θα είναι $r = \frac{\beta}{-\beta} = -1$

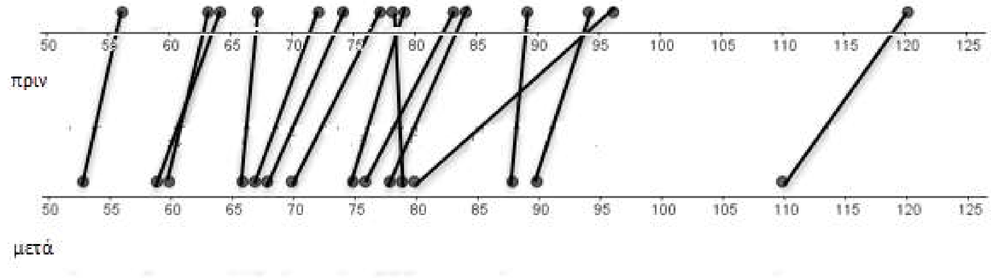
Πρόσθετο Υλικό – θέματα για διερεύνηση

1) Σε μια έρευνα που έγινε με σκοπό να διερευνηθεί η αποτελεσματικότητα μιας δίαιτας, μετρήθηκε το βάρος 15 ατόμων πριν και μετά τη δίαιτα.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Πριν	89	83	78	56	96	120	67	63	72	74	79	94	84	64	77
Μετά	88	76	79	53	80	110	66	60	67	67	75	90	78	59	70

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της μεταβλητής του βάρους των 15 ατόμων πριν ($X_{πριν}$) και μετά ($X_{μετά}$) τη δίαιτα. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.
β) Να κατασκευάσετε τα θηκογράμματα για τη μεταβλητή του βάρους των 15 ατόμων πριν και μετά τη δίαιτα. Να τα συγκρίνετε και να διατυπώσετε την άποψή σας για το αν υπάρχει διαφορά πριν και μετά και τη δίαιτα.
γ) Δίνονται τα επόμενα σημειογράμματα για τη μεταβλητή του βάρους των 15 ατόμων πριν και μετά τη δίαιτα, στα οποία έχουν ενωθεί τα βάρη των 15 ατόμων πριν και μετά τη

δίαιτα. Τι παρατηρείτε από το γράφημα; Επιβεβαιώνεται η παρατήρησή σας, συγκρίνοντας με τα αποτελέσματα των προηγούμενων ερωτημάτων;



δ) Να δημιουργήσετε τη μεταβλητή $Z = X_{πριν} - X_{μετά}$ για κάθε άτομο και να κατασκευάσετε το θηκόγραμμά της. Πώς μπορείτε να αναδείξετε τη διαφορά των τιμών του βάρους των 15 ατόμων πριν και μετά τη δίαιτα από αυτό το θηκόγραμμα;

ε) Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα διασποράς ανάμεσα στις μεταβλητές του βάρους ($X_{πριν}$) και ($X_{μετά}$) των 15 ατόμων.

στ) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών του βάρους ($X_{πριν}$) και ($X_{μετά}$) των 15 ατόμων.

ζ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» την ευθεία που φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.

η) Θα μπορούσατε να εκτιμήσετε το βάρος ενός ατόμου που πρόκειται να ακολουθήσει αυτή τη δίαιτα, εάν το αρχικό του βάρος ήταν 91 κιλά;

<u>Λύση</u>

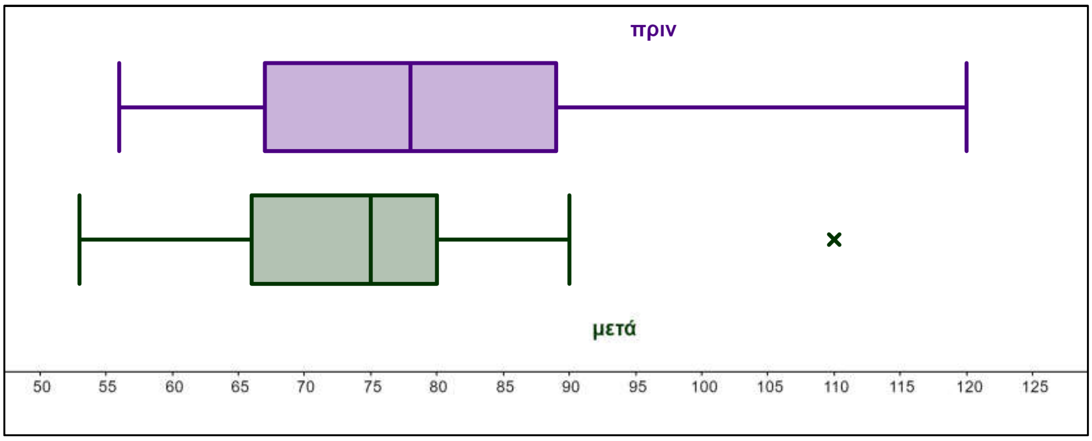
α) Με χρήση λογιστικού φύλλου βρίσκουμε

$\bar{X}_{πριν} = 79{,}7, \quad s_{πριν} = 15{,}4$ και

$\bar{X}_{μετά} = 74{,}5, \quad s_{μετά} = 13{,}8$

Κάποιος σχολιασμός θα μπορούσε να συνδέεται με τη μείωση του βάρους, αλλά πιθανόν και με τη μείωση της διασποράς.

β) Τα θηκογράμματα φαίνονται παρακάτω:



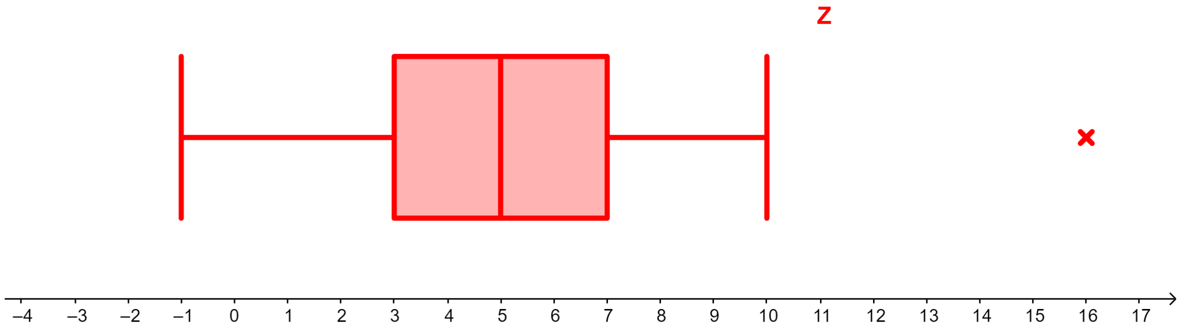
Φαίνεται να υπάρχει διαφορά μετά τη δίαιτα, ο αναγνώστης καλείται να την σχολιάσει.

γ) Ο σχολιασμός αφήνεται στον αναγνώστη.

δ) Η μεταβλητή Z φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$Z = X_{\pi\rho\iota\nu} - X_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$	1	7	-1	3	16	10	1	3	5	7	4	4	6	5	7

και το αντίστοιχο θηκόγραμμα:



Ο σχολιασμός αφήνεται στον αναγνώστη

ε), στ), ζ) και **η)** Δίνεται το διάγραμμα διασποράς και ότι ο συντελεστής Pearson είναι $r = 0,97$. Η γραμμή, ο σχολιασμός και η εκτίμηση αφήνονται στον αναγνώστη.