

σμα $\sum_{i=1}^{30} x_i y_i = 131611$. Οπότε, $r=0,98$. Αυτό σημαίνει ότι το προσδόκιμο ζωής των γυναικών και των ανδρών στο δείγμα μας είναι ισχυρά θετικά γραμμικά συσχετισμένα.

- γ) Τα σημεία $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, 30$ είναι συγκεντρωμένα γύρω από μια ευθεία, όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Η εξίσωση της ευθείας δίνεται από τη σχέση (2). Επιλέγουμε δύο σημεία, έστω τα $A(45,44)$ και $B(81,74)$ πάνω στην ευθεία που φέραμε «με το μάτι». Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες (x,y) των σημείων αυτών στην (2), οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} y_A = \alpha + \beta x_A \\ y_B = \alpha + \beta x_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 44 = \alpha + 45\beta \\ 74 = \alpha + 81\beta \end{cases}$$

- Επιλύοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε $\alpha = -173,28$ και $\beta = 1,39$, οπότε η εξίσωση της ευθείας (1) γίνεται:

$$y = 6,5 + 0,83x$$

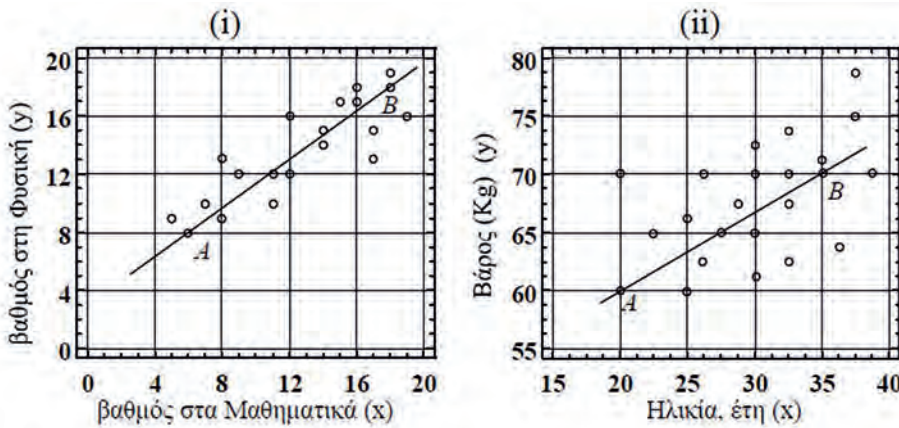
Επομένως, η ευθεία που κατά τη γνώμη μας προσαρμόζεται καλύτερα στα σημεία του διαγράμματος διασποράς διέρχεται από το σημείο $(0, 6,5)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $0,83$.

- δ) Αν για την Αλβανία, το προσδόκιμο ζωής των γυναικών είναι τα 75 έτη, χρησιμοποιώντας την παραπάνω ευθεία μπορούμε να εκτιμήσουμε το προσδόκιμο ζωής των ανδρών της Αλβανίας. Έτσι, $y=6,5+0,83 \cdot 75=68,75$, δηλαδή 69 περίπου έτη.

Η θετική συσχέτιση μεταξύ Π.Ζ.Γ και Π.Ζ.Α. δεν μπορεί να αποδοθεί σε αιτιακή σχέση μεταξύ των Π.Ζ.Γ και Π.Ζ.Α., αλλά στην ύπαρξη συγχυτικών παραγόντων όπως, το επίπεδο διαβίωσης, το ΑΕΠ, την ποιότητα των υπηρεσιών υγείας κάθε χώρας, κτλ., που επηρεάζουν και τα δύο προσδόκιμα ζωής.

Ασκήσεις - Προβλήματα - Δραστηριότητες

- 1) Να διατάξετε τις παρακάτω τιμές του r σε αύξουσα τάξη του βαθμού γραμμικής συσχέτισης δύο ποσοτικών μεταβλητών X και Y : $-0,6, 0,9, -0,7, 0,2, 0, -1$.
- 2) Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών X και Y είναι $0,96$, ενώ ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών Z και Φ είναι $-0,96$. Ποια είναι η διαφορά τους;
- 3) Δίνονται δυο διαγράμματα διασποράς με χαραγμένες «με το μάτι» δύο ευθείες από έναν μαθητή.



α) Χρησιμοποιώντας τα σημεία A και B να βρείτε τις εξισώσεις των δύο ευθειών.

β) Πώς θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε τις ευθείες του ερωτήματος α);

4) Μια εταιρεία διαφημίσεων παρουσίασε τον επόμενο πίνακα:

Αριθμός διαφημίσεων	Έσοδα από πωλήσεις
10	20000
18	28000
24	35000
32	44000
35	48000
37	50000
42	55000

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς και να εκτιμήσετε από αυτό τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ του αριθμού διαφημίσεων της εταιρείας και των εσόδων της από τις πωλήσεις.

β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ του αριθμού διαφημίσεων της εταιρείας και των εσόδων της από τις πωλήσεις.

γ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» την ευθεία που φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.

δ) Αν το πλήθος των διαφημίσεων που αγόραζε ένα κανάλι ήταν 30, πόσο εκτιμάτε ότι θα ήταν τα έσοδα της εταιρείας διαφημίσεων;

ε) Αν το πλήθος των διαφημίσεων που αγόραζε ένα κανάλι ήταν 60, θα ήταν ασφαλές να εκτιμήσετε τα έσοδα της εταιρείας διαφημίσεων, όπως στο δ);

- 5) Τα δεδομένα του επόμενου πίνακα παριστάνουν τους βαθμούς (στην κλίμακα του 100) 10 μαθητών/τριών της Β΄ τάξης του Γενικού Λυκείου στα μαθήματα της Φυσικής (X) και των Μαθηματικών (Y) κορμού σε μια γραπτή αξιολόγηση.

Βαθμός- X	Βαθμός- Y	Βαθμός- X	Βαθμός- Y
67	63	81	85
74	67	93	89
67	70	81	89
78	74	96	96
89	81	89	100

- α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς και να εκτιμήσετε από αυτό τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των βαθμών της Φυσικής (X) και των Μαθηματικών (Y) των 10 μαθητών/τριών της Β΄ τάξης του Γενικού Λυκείου.
- β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των βαθμών της Φυσικής (X) και των Μαθηματικών (Y) των 10 μαθητών/τριών της Β΄ τάξης του Γενικού Λυκείου.
- γ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» την ευθεία που φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.
- δ) Πώς θα μπορούσατε να εκτιμήσετε τον βαθμό των Μαθηματικών ενός μαθητή της Β΄ Λυκείου, εάν γνωρίζατε ότι στη Φυσική έγραψε 70;
- 6) Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ηλικίες και οι (συστολικές) πιέσεις αίματος 10 γυναικών.

Ηλικία (x)	56	42	72	36	63	47	55	49	38	60
Πίεση αίματος (y)	17	12	14	10	13	9	11	8	11	15

- α) Να σημειώσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα σημεία (x, y) σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, όπου x είναι η ηλικία των γυναικών σε έτη και y είναι η πίεση αίματος των γυναικών σε cm Hg.
- β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών της ηλικίας των γυναικών σε έτη (x) και της πίεσης τους σε cm Hg (y).
- 7) Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται στην πρώτη γραμμή οι τιμές (σε €) για διαφορετικά κράνη ποδηλασίας και στη δεύτερη γραμμή η βαθμολογία ποιότητάς τους που έγινε από ειδικούς (σε μια κλίμακα από 0 έως 100, όπου όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή τόσο πιο ποιοτικό είναι το κράνος).

Τιμή (€)	35	22	33	42	50	23	29	18	39	28	20	25
Βαθμολογία ποιότητας	64	60	58	55	54	45	47	43	42	41	40	32

- α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς.
- β) Υπάρχει γραμμική συσχέτιση ανάμεσα στην τιμή και τη βαθμολογία ποιότητας;
- γ) Θα μπορούσαμε να πούμε με βεβαιότητα ότι αν αγοράσουμε πιο φθηνό κράνος θα έχει πιο χαμηλή ποιότητα;
- δ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» στο διάγραμμα διασποράς μια ευθεία που θα μπορούσε να περιγράφει τη σχέση του αναμενόμενου βαθμού ποιότητας ενός ποδηλατικού κράνος με την τιμή του.
- 8) Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται οι συντελεστές γραμμικής συσχέτισης των γραπτών βαθμολογιών στις εξετάσεις Ιουνίου σε 5 μαθήματα ενός τμήματος Β΄ τάξης γενικού λυκείου.

	Άλγεβρα	Βιολογία	Γλώσσα	Φυσική	Χημεία
Άλγεβρα	1,00				
Βιολογία	0,54	1,00			
Γλώσσα	0,76	0,81	1,00		
Φυσική	0,70	0,73	0,71	1,00	
Χημεία	0,41	0,80	0,67	0,66	1,00

Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει, ισχυρή ή όχι, γραμμική συσχέτιση ανάμεσα στις βαθμολογίες στα 5 εξεταζόμενα μαθήματα των μαθητών/τριών αυτών.

- 9) Το πλήθος x των οχημάτων σε εκατομμύρια και ο αριθμός y των ατυχημάτων σε εκατοντάδες, σε 15 διαφορετικές χώρες, δίνονται από τον επόμενο πίνακα:

Χώρα	A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ	I	K	Λ	M	N	Ξ	O
x	8,6	13,4	12,8	9,3	1,3	9,4	13,1	4,9	13,5	9,6	7,5	9,8	23,3	21	19,4
y	33	51	30	48	12	23	46	18	36	50	34	35	95	99	69

- α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς μεταξύ των μεταβλητών του πλήθους των οχημάτων και του αριθμού των οχημάτων για τις 15 χώρες.
- β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών του πλήθους των οχημάτων και του αριθμού των οχημάτων για τις 15 χώρες.

- 10) Από 8 γάμους που έγιναν σε μια εκκλησία ενός χωριού κατά τη διάρκεια ενός μηνός οι ηλικίες των ανδρόγυνων ήταν:

Ηλικία γαμπρού	20	22	24	25	28	30	33	38
Ηλικία νύφης	20	20	22	27	24	25	28	34

- α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς μεταξύ των ηλικιών της νύφης (Y) και του γαμπρού (X) και να περιγράψετε το είδος της σχέσης που φαίνεται να έχουν οι δύο μεταβλητές.
- β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των ηλικιών νύφης και γαμπρού.
- γ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» την ευθεία που φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.
- δ) Να βρείτε την αναμενόμενη ηλικία της νύφης για έναν υποψήφιο γαμπρό ετών 34.
- 11) Δίνεται δείγμα n ζευγών παρατηρήσεων (x_i, y_i) , $i=1,2,\dots,n$ δύο μεταβλητών X και Y και έστω r , ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των μεταβλητών X και Y . Να αποδείξετε ότι αν όλα τα παραπάνω σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με εξίσωση:

$$y_i = \alpha + \beta x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

τότε:

$$r = 1 \text{ αν } \alpha > 0 \text{ και } r = -1 \text{ αν } \alpha < 0.$$

Πρόσθετο Υλικό

Θέματα για διερεύνηση



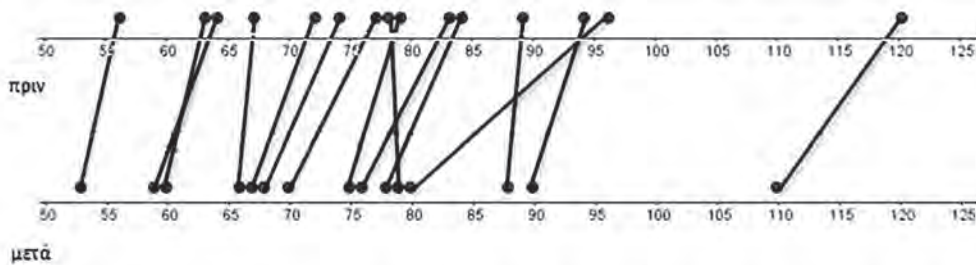
- 1) Σε μια έρευνα που έγινε με σκοπό να διερευνηθεί η αποτελεσματικότητα μιας δίαιτας, μετρήθηκε το βάρος 15 ατόμων πριν και μετά τη δίαιτα.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Πριν	89	83	78	56	96	120	67	63	72	74	79	94	84	64	77
Μετά	88	76	79	53	80	110	66	60	67	67	75	90	78	59	70

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της μεταβλητής του βάρους των 15 ατόμων πριν ($X_{\text{πριν}}$) και μετά ($X_{\text{μετά}}$) τη δίαιτα. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.
- β) Να κατασκευάσετε τα θηκογράμματα για τη μεταβλητή του βάρους των 15 ατόμων πριν και μετά τη δίαιτα. Να τα συγκρίνετε και να διατυπώσετε την

άποψή σας για το αν υπάρχει διαφορά πριν και μετά και τη δίαιτα.

- γ) Δίνονται τα επόμενα σημειογράμματα για τη μεταβλητή του βάρους των 15 ατόμων πριν και μετά τη δίαιτα, στα οποία έχουν ενωθεί τα βάρη των 15 ατόμων πριν και μετά τη δίαιτα. Τι παρατηρείτε από το γράφημα; Επιβεβαιώνεται η παρατήρησή σας, συγκρίνοντας με τα αποτελέσματα των προηγούμενων ερωτημάτων;



- δ) Να δημιουργήσετε τη μεταβλητή $Z = X_{\text{πριν}} - X_{\text{μετά}}$ για κάθε άτομο και να κατασκευάσετε το θηκόγραμμά της. Πώς μπορείτε να αναδείξετε τη διαφορά των τιμών του βάρους των 15 ατόμων πριν και μετά τη δίαιτα από αυτό το θηκόγραμμα;
- ε) Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα διασποράς ανάμεσα στις μεταβλητές του βάρους ($X_{\text{πριν}}$) και ($X_{\text{μετά}}$) των 15 ατόμων.
- στ) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών του βάρους ($X_{\text{πριν}}$) και ($X_{\text{μετά}}$) των 15 ατόμων.
- ζ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» την ευθεία που φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.
- η) Θα μπορούσατε να εκτιμήσετε το βάρος ενός ατόμου που πρόκειται να ακολουθήσει αυτή τη δίαιτα, εάν το αρχικό του βάρος ήταν 91 κιλά;
- 2) Επισκεφθείτε την ιστοσελίδα της ΕΛ.ΣΤΑΤ. (www.statistics.gr) και επιλέξτε ένα κατάλληλο σύνολο δεδομένων που να περιέχει τουλάχιστον δύο ποσοτικές μεταβλητές. Αποφασίστε ποια θα είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή. Στη συνέχεια, κάντε το διάγραμμα διασποράς των δύο μεταβλητών, υπολογίστε και ερμηνεύστε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης και χαράξτε με το μάτι μια ευθεία που φαίνεται να προσαρμόζεται καλά στα δεδομένα σας. Τέλος, κάντε μια-δυο εκτιμήσεις για διάφορες τιμές της ανεξαρτητής σας μεταβλητής που να ανήκουν στο εύρος τιμών της. Καταγράψτε τα αποτελέσματά σας, συντάσσοντας μια μικρή αναφορά (μέχρι 2 σελίδες, με πίνακες και γραφήματα).
- 3) Να ετοιμάσετε ένα ερωτηματολόγιο για να μελετήσετε ορισμένα χαρακτηριστικά από την καθημερινότητά σας και να τα συσχετίσετε με τον γενικό βαθμό που πήραν κατά το τελευταίο τετράμηνο. Τα χαρακτηριστικά που μπορείτε να



καταγράψετε είναι: πόσες ώρες διαβάζετε καθημερινά κατά μέσο όρο, πόσες εξωσχολικές δραστηριότητες έχετε, πόσες ώρες κατά μέσο όρο ξοδεύετε σε αυτές και ό,τι άλλο θα επιθυμούσατε εσείς. Αναλύστε τα δεδομένα με αυτά που μάθατε σε αυτήν την παράγραφο. Περιγράψτε τη σχέση που έχει καθένα από αυτά τα χαρακτηριστικά με τον βαθμό του τετραμήνου. Καταγράψτε τα αποτελέσματά σας, συντάσσοντας μια μικρή αναφορά (μέχρι 5 σελίδες, με πίνακες και γραφήματα).