

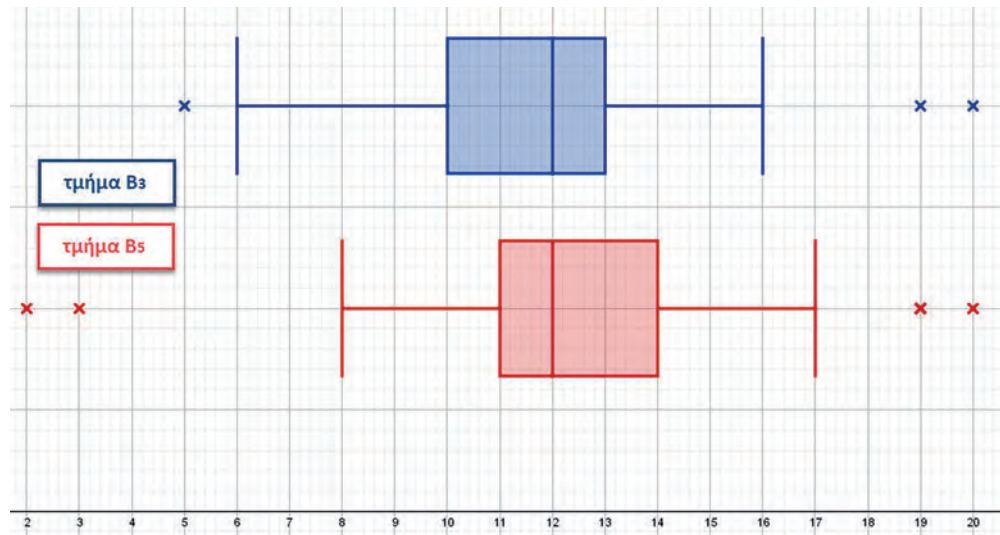
## ΕΝΟΤΗΤΑ 2.6 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΟΣΟΤΙΚΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΙΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΕΝΟΣ ΠΟΙΟΤΙΚΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ

### Διερεύνηση

*Το καλύτερο τμήμα*



Δύο τμήματα, το Β<sub>3</sub> και το Β<sub>5</sub> της Β΄ Λυκείου ενός σχολείου συμμετείχαν σε έναν μαθηματικό διαγωνισμό και οι βαθμοί τους παρουσιάζονται στα επόμενα θηκογράμματα.



- 1) Να βρείτε ποιο από τα δύο τμήματα έχει το μεγαλύτερο εύρος βαθμών;
- 2) Να βρείτε ποιο από τα τμήματα έχει το μεγαλύτερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος βαθμών;
- 3) Ποιο τμήμα πιστεύετε ότι είναι το καλύτερο από τα δύο;

### Βασικές μαθηματικές έννοιες – Ιδέες – Διεργασίες

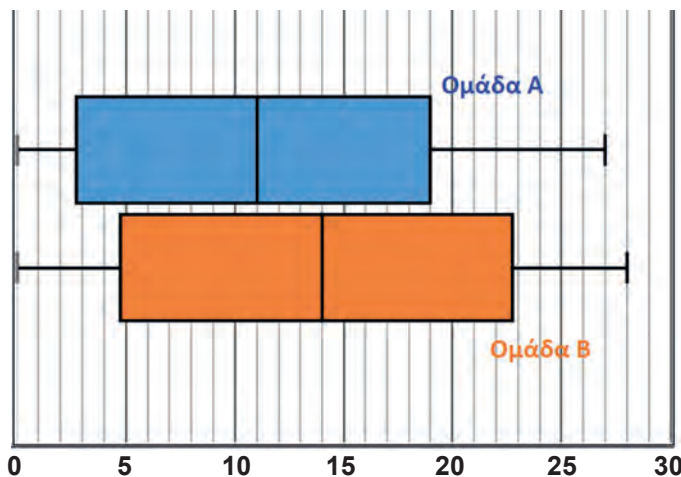
Σε προηγούμενη παράγραφο είδαμε αναλυτικά τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας για μια μεταβλητή. Εδώ, θα τα χρησιμοποιήσουμε για να συγκρίνουμε ομάδες δεδομένων.

Για παράδειγμα, παρακάτω βλέπουμε τα γκολ που έχουν σημειώσει οι παίκτες δύο ομάδων χάντμπωλ σε δέκα αγώνες. Η ομάδα Α έχει 20 παίκτες, ενώ η ομάδα Β έχει 18.

Ομάδα Α: 0, 0, 0, 1, 2, 5, 7, 8, 10, 11, 11, 17, 18, 18, 19, 19, 24, 26, 27, 27.

Ομάδα Β: 0, 0, 1, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 15, 17, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 28.

Οι δύο ομάδες έχουν σημειώσει συνολικά περίπου τα ίδια γκολ (250 η ομάδα A και 249 η ομάδα B). Επίσης, ο μέσος όρος των γκολ της ομάδας A είναι 12,5 και της ομάδας B είναι 13,83, περίπου. Η διαφορά των μέσων όρων προκύπτει από το γεγονός ότι η ομάδα B, αν και έχει δύο παίκτες λιγότερους, έχει πετύχει σχεδόν τα ίδια γκολ. Μπορούμε, όμως με μεγαλύτερη λεπτομέρεια να δούμε, πώς η ομάδα B το καταφέρνει αυτό; Στην προσπάθειά μας να συγκρίνουμε τις δύο ομάδες με κριτήριο τα γκολ που πέτυχε κάθε παίκτης, το παρακάτω θηκόγραμμα δίνει μία αρκετά σαφή εικόνα. Από τη θέση των δύο ορθογωνίων φαίνεται ότι οι «μεσαίοι σκόρερ» της ομάδας B (δηλαδή εκείνοι που πετυχαίνουν έναν ούτε μεγάλο ούτε μικρό αριθμό γκολ) έχουν πετύχει περισσότερα γκολ από τους «μεσαίους σκόρερ» της ομάδας A. Αυτό, ενδεχομένως, εξηγεί και γιατί η ομάδα B με δύο λιγότερους παίκτες έχει πετύχει σχεδόν τα ίδια γκολ. Επίσης, συγκρίνοντας τα μήκη των ορθογωνίων βλέπουμε ότι για τους «μεσαίους σκόρερ» υπάρχει μεγαλύτερη μεταβολή των γκολ στην ομάδα B (μεγαλύτερο μήκος), ενώ από τα μήκη των θηκογραμμάτων φαίνεται ότι το εύρος των γκολ της ομάδας B είναι κατά 1 γκολ μεγαλύτερο (κάτι που οφείλεται στον παίκτη που σημείωσε 28 γκολ).



Σε ένα άλλο παράδειγμα, ο οργανισμός συγκοινωνιών σε ένα νησί του Αιγαίου μετρά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου δρομολογίου σε λεπτά (min) καθημερινά για τους μήνες Μάιο και Ιούλιο του ίδιου έτους, προκειμένου να συγκρίνει το επίπεδο υπηρεσιών του μεταξύ Μαΐου και Ιουλίου. Τα δειγματικά στατιστικά μέτρα για κάθε μήνα φαίνονται στον επόμενο πίνακα 1.



	Μάιος	Ιούλιος
$\bar{x}$	106,67 min	107,33 min
$\delta(Q_2)$	101 min	106 min
$Q_1$	95 min	95 min
$Q_3$	108 min	118 min
$x_{\min}$	81 min	85 min
$x_{\max}$	167 min	155 min
S	23,57 min	16,15 min

**Σύγκριση μέτρων θέσης της διάρκειας ενός συγκεκριμένου δρομολογίου για τους μήνες Μάιο και Ιούλιο**

Πίνακας 1: Δειγματικά στατιστικά μέτρα της διάρκειας ενός συγκεκριμένου δρομολογίου για τους μήνες Μάιο και Ιούλιο

Η δειγματική μέση τιμή της διάρκειας του συγκεκριμένου δρομολογίου του Μαΐου είναι 106,67 λεπτά, ενώ η αντίστοιχη δειγματική μέση τιμή για τον Ιούλιο είναι 107,33 λεπτά. Εκ πρώτης όψεως θα μπορούσε κάποιος να πει ότι συγκρίνοντας τις δύο δειγματικές μέσες τιμές η μέση διάρκεια του συγκεκριμένου δρομολογίου δεν άλλαξε αισθητά, οπότε η εταιρεία δε χρειάζεται να προχωρήσει σε κάποια βελτιωτική ενέργεια.

Η δειγματική διάμεσος για τον μήνα Μάιο είναι 101 λεπτά, ενώ για τον Ιούλιο η αντίστοιχη τιμή είναι 106 λεπτά. Αυτό σημαίνει ότι τον Μάιο τα μισά περίπου συγκεκριμένα δρομολόγια εκτελούνται σε χρόνο το πολύ 101 λεπτά, ενώ τα υπόλοιπα σε χρόνο τουλάχιστον 101 λεπτών. Αντίστοιχα, τον Ιούλιο τα μισά περίπου δρομολόγια εκτελούνται το πολύ σε 106 λεπτά, ενώ τα υπόλοιπα σε 106 λεπτά και περισσότερο.

**Σύγκριση μέτρων μεταβλητότητας της διάρκειας ενός συγκεκριμένου δρομολογίου για τους μήνες Μάιο και Ιούλιο**

Το εύρος της διάρκειας του δρομολογίου τον Μάιο είναι 86 λεπτά και τον Ιούλιο είναι 70 λεπτά, κάτι που σημαίνει ότι η διαφορά της διάρκειας του συντομότερου με το μακρύτερο δρομολόγιο τον Μάιο είναι μεγαλύτερη. Από την άλλη μεριά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος της διάρκειας του δρομολογίου για το Μάιο είναι 13 λεπτά, ενώ για τον Ιούλιο είναι 23 λεπτά, κάτι που δηλώνει ότι το διάστημα  $[Q_1, Q_3]$  είναι κατά 10 λεπτά μεγαλύτερο, από το αντίστοιχο του Μαΐου. Επομένως, παρατηρείται πιο σημαντική μεταβολή για τη διάρκεια των δρομολογίων του Ιουλίου, που βρίσκονται στο διάστημα  $[Q_1, Q_3]$ , δηλαδή για τα δρομολόγια, τα οποία μπορούν να χαρακτηριστούν ως «μέσης διάρκειας» δρομολόγια, σε σύγκριση με τα αντίστοιχα δρομολόγια του Μαΐου.

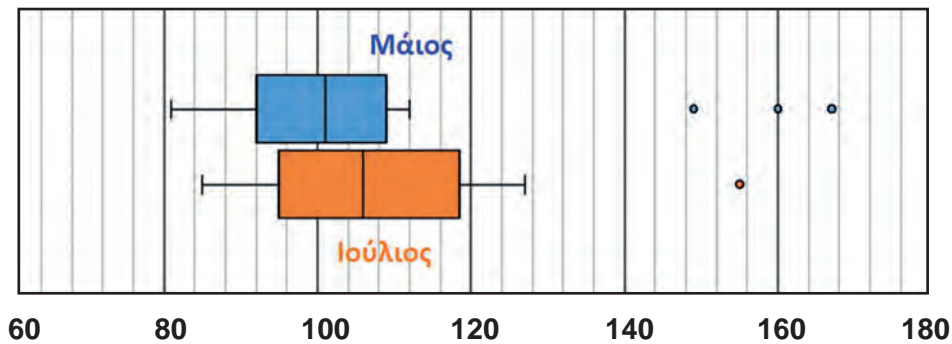
Αν δει κανείς, επιπλέον, τις τιμές των δύο δειγματικών τυπικών αποκλίσεων (23,57 λεπτά και 16,15 λεπτά), φαίνεται ότι διάρκειες των συνολικών δρομολογίων του Μαΐου ήταν πιο «διάσπαρτες» γύρω από τη μέση διάρκεια. Τέλος, αν υπολογίσουμε τους συντελεστές μεταβλητότητας για κάθε μήνα, τότε προκύπτουν  $CV_M = 22,1\%$  περίπου και  $CV_I = 15\%$ , περίπου. Άρα, φαίνεται ότι η διάρκεια των δρομολογίων του Μαΐου, συνολικά, παρουσιάζει μεγαλύτερη μεταβλητότητα και μικρότερη ομοιογένεια από αυτά του Ιουλίου.

**Σύγκριση θηκογραμμάτων**

Βλέπουμε ότι συμπεράσματα που βγαίνουν από τη μελέτη των δειγμάτων είναι αρκετά και σε διαφορετικά επίπεδα. Για να τα αποτυπώσουμε, δίνοντας μία πλήρη και εύληπτη εικόνα, μπορούμε να σχεδιάσουμε δύο θηκογράμματα. Το θηκόγραμμα είναι μια γραφική παράσταση που μας βοηθάει να απεικονίσουμε την κατανομή μιας ποσοτικής μεταβλητής στις κατηγορίες μιας ποιοτικής μεταβλητής. Από τη διάμεσο μπορούμε να πάρουμε μια ιδέα για την κεντρική τάση των δεδομένων, ενώ από το μήκος του (ολόκληρου, αλλά και του ορθογωνίου) μπορούμε να δούμε πόσο ποικίλουν οι τιμές (μεταβλητότητα). Έτσι, λοιπόν, στο σχήμα 1 φαίνονται σχηματικά όσα περιγράψαμε προηγουμένως για τα δρομολόγια Μαΐου και Ιουνίου. Η μεταβλητότητα της διάρκειας του δρομολογίου τον Ιούλιο είναι μεγαλύτερη από τον μήνα Μάιο και για τα δρομολόγια «μέσης διάρκειας» (δηλαδή εντός ενδοτεταρτημοριακού εύρους), όπως φαίνεται από το μήκος του

ορθογωνίου, αλλά και για όλα τα «τυπικά» δρομολόγια, όπως φαίνεται από το συνολικό μήκος των οριζοντίων γραμμών των θηκογραμμάτων. Επίσης, μπορούμε να εντοπίσουμε τις ακραίες τιμές της διάρκειας των δρομολογίων. Τον Ιούλιο έχουμε μόνο μία, ενώ τον Μάιο έχουμε τρεις ακραίες τιμές (από τις οποίες οι δύο είναι μεγαλύτερες από αυτή του Μαΐου). Ενδεχομένως να συνέβη κάτι έκτακτο σε εκείνα τα δρομολόγια. Λόγω των ακραίων τιμών, το εύρος της διάρκειας των δρομολογίων τον Μάιο είναι μεγαλύτερο, κάτι που φαίνεται και στα θηκογράμματα.

Κοιτώντας μόνο τα θηκογράμματα, φαίνεται τα «τυπικά» δρομολόγια τον Ιούλιο να κρατάνε λίγο περισσότερο και η διάρκειά τους να έχει λίγο μεγαλύτερη διασπορά.



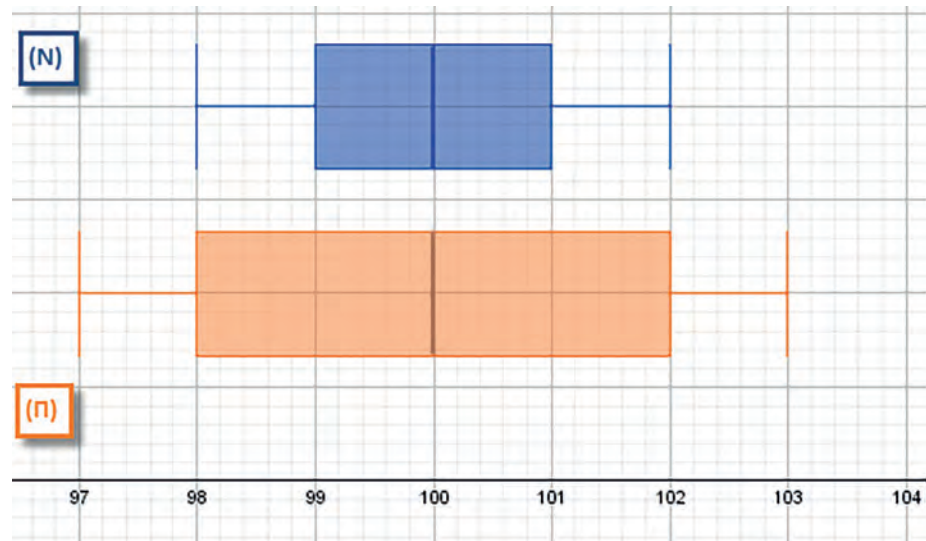
Σχήμα 1: Θηκογράμμα της διάρκειας ενός συγκεκριμένου δρομολογίου για τους μήνες Μάιο και Ιούλιο

Αυτό, ενδεχομένως συμβαίνει γιατί τον Ιούλιο το λεωφορείο είναι περισσότερο γεμάτο και χρειάζεται περισσότερος χρόνος για την επιβίβαση/αποβίβαση, ενώ και η κίνηση στο νησί μπορεί να είναι μεγαλύτερη και να κάνει τη διάρκεια των δρομολογίων απρόβλεπτη. Ωστόσο, κοιτώντας τους μέσους χρόνους των δρομολογίων τους δύο μήνες, βλέπουμε ότι δε διαφέρουν πολύ. Άρα, αν συγκρίναμε μόνο τους μέσους χρόνους, χωρίς τα θηκογράμματα, δε θα είχαμε αυτή την εικόνα. Ο λόγος που οι μέσοι χρόνοι δε διαφέρουν πολύ είναι διότι επηρεάζονται από τις ακραίες τιμές και τον Μάιο είχαμε περισσότερες, όπως είπαμε.

## Εφαρμογές

### Εφαρμογή 1

Σ' ένα εργοστάσιο κατασκευής τροφίμων πρόκειται να αγοραστεί μια καινούργια μηχανή συσκευασίας (N) για να αντικαταστήσει την παλαιού τύπου μηχανή (Π). Έγινε μια δοκιμή για να ελεγχθεί η δυνατότητα παραγωγής της νέας μηχανής. Επελέγησαν 1000 πακέτα τροφίμων από κάθε μηχανή και μετρήθηκαν τα αντίστοιχα βάρη. Για τις δύο μηχανές δίνονται οι δειγματικές μέσες τιμές  $\bar{x}_\Pi = \bar{x}_N = 100$  και τα αντίστοιχα θηκογράμματα τους.



Σχήμα 2: Θηκόγραμμα του βάρους 1000 πακέτων τροφίμων από τις μηχανές τύπου (Π) και (N).

Θα συστήνατε στον ιδιοκτήτη του εργοστασίου να αντικαταστήσει τη μηχανή (Π) με τη μηχανή (N); Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

### Λύση

Οι δειγματικές μέσες τιμές για τις δύο μηχανές τύπου (Π) και (N) είναι ίσες, όπως και οι δειγματικές διαμέσοι, όπως προκύπτει από το παραπάνω θηκόγραμμα. Αν, λοιπόν, δεν εξετάζαμε κάποιο άλλο στοιχείο, τότε δε θα είχε νόημα να συστήσουμε στον ιδιοκτήτη του εργοστασίου να αλλάξει τη μηχανή. Όμως, βλέπουμε από το θηκόγραμμα ότι η μεταβλητότητα των δεδομένων του δείγματος που πήραμε από τη μηχανή (N) είναι μικρότερη από τη μεταβλητότητα των δεδομένων του δείγματος που πήραμε από τη μηχανή (Π). Αυτό σημαίνει ότι για τα δύο δείγματα η μηχανή (Π) μας δίνει πακέτα τροφίμων που απέχουν περισσότερο από το μέσο βάρος των πακέτων της, σε σύγκριση με τη μηχανή (N). Συνεπώς, με δεδομένο ότι οι δειγματικές μέσες τιμές των πακέτων είναι ίσες για τις δύο μηχανές, θα συστήναμε στον ιδιοκτήτη του εργοστασίου να αλλάξει τη μηχανή, αν έχει σημασία η ακρίβεια του βάρους κάθε πακέτου.

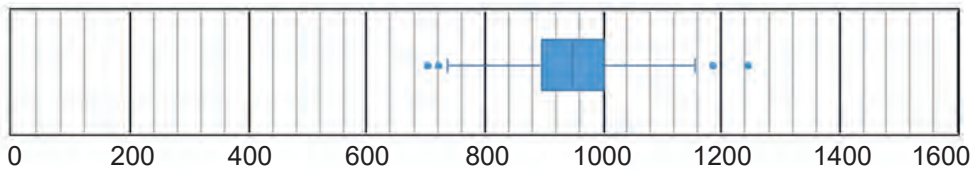
### Εφαρμογή 2

Δύο μεγάλες εταιρείες, μία αμερικάνικη και μία ευρωπαϊκή, λαμβάνουν υπηρεσίες και από εξωτερικούς συνεργάτες εκτός από τους υπαλλήλους τους (π.χ. εκπόνηση μελετών, υπηρεσίες φύλαξης, ταχυδρομικές, κτλ). Στο πλαίσιο ενός μεγάλου διαγωνισμού είχαν πολλές τέτοιες συνεργασίες. Επιλέγουμε τυχαία δύο δείγματα αμοιβών εξωτερικών συνεργατών (ένα για κάθε εταιρεία), που δόθηκαν γι' αυτό το σκοπό. Παρακάτω δίνονται οι δειγματικές μέσες τιμές και οι δειγματικές τυπικές αποκλίσεις.

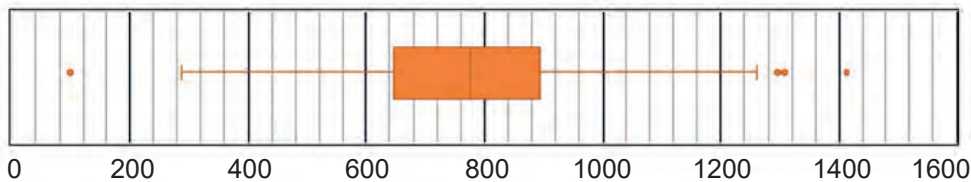
- **A (αμερικάνικη εταιρεία):**  $\bar{x}_A = 700$  δολάρια και  $s_A = 80$  δολάρια
- **E (ευρωπαϊκή εταιρεία):**  $\bar{x}_E = 550$  ευρώ και  $s_E = 125$  ευρώ.

- α) Να συγκρίνετε τους συντελεστές μεταβλητότητας των δύο δειγμάτων αμοιβών.
- β) Οι δύο εταιρείες κατάφεραν να κερδίσουν στον διαγωνισμό και να αναλάβουν ένα έργο που θα τους αποφέρει αρκετά κέρδη. Για να επιβραβεύσουν τους συνεργάτες τους, η αμερικάνικη εταιρεία αποφάσισε να προσθέσει στην αμοιβή κάθε συνεργάτη 250 δολάρια και η ευρωπαϊκή εταιρεία να αυξήσει τη μηνιαία αμοιβή κάθε συνεργάτη κατά 40%. Να βρείτε τη νέα δειγματική μέση τιμή και τη νέα δειγματική τυπική απόκλιση των αμοιβών και για τις δύο εταιρείες.
- γ) Να συγκρίνετε τους συντελεστές μεταβλητότητας των δύο δειγμάτων αμοιβών μετά τις αυξήσεις.
- δ) Παρακάτω φαίνονται τα θηκογράμματα των αμοιβών, μετά τις αυξήσεις, για τα δύο δείγματα της αμερικάνικης και της ευρωπαϊκής εταιρείας (σε δολάρια και ευρώ).

Για το δείγμα των αμοιβών της αμερικάνικης εταιρείας



Για το δείγμα των αμοιβών της ευρωπαϊκής εταιρείας



Για τα θηκογράμματα δίνονται, βοηθητικά, οι πίνακες:

	Αμερικάνικη εταιρεία	Ευρωπαϊκή εταιρεία
$Q_1 \rightarrow$	894,8	647,9
$\delta \rightarrow$	947,1	776,1
$Q_3 \rightarrow$	1000,5	893,8
Ακραίες τιμές	720,7 , 704,3 , 1188,5 , 1243,6	97,7 , 1296,5 , 1307,35 , 1411,9

Πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα θηκογράμματα για να συγκρίνετε τη μεταβλητότητα στις αμοιβές των δύο εταιρειών;

**Λύση**

- α) Οι συντελεστές μεταβλητότητας των αμοιβών των δύο εταιρειών, για τα δείγματα, είναι:



$$CV_A = \frac{s_A}{\bar{x}_A} = \frac{80}{700} = 11\% \text{ και } CV_E = \frac{s_E}{\bar{x}_E} = \frac{125}{550} = 23\%.$$

Ισχύει ότι  $CV_A < CV_E$ , οπότε το δείγμα από την αμερικάνικη εταιρεία είναι πιο ομοιογενές από το αντίστοιχο ευρωπαϊκό δείγμα.

- β)** Οι αμοιβές των συνεργατών της αμερικάνικης εταιρείας αυξάνονται κατά 250 δολάρια, οπότε η νέα μέση τιμή θα είναι  $\bar{y}_A = \bar{x}_A + 250$ , δηλαδή  $\bar{y}_A = 950$  δολάρια. Η νέα τυπική απόκλιση θα είναι  $s'_A = s_A = 80$ .

Οι αμοιβές των συνεργατών της ευρωπαϊκής εταιρείας θα αυξηθούν κατά 40%, οπότε η νέα μέση τιμή θα είναι  $\bar{y}_E = 1,4 \cdot \bar{x}_E$ , δηλαδή  $\bar{y}_E = 770$  ευρώ. Η νέα τυπική απόκλιση θα είναι  $s'_E = 1,4 \cdot s_E$ , δηλαδή  $s'_E = 175$  ευρώ.

- γ)** Οι νέοι συντελεστές μεταβλητότητας είναι:

$$CV'_A = \frac{s'_A}{\bar{y}_A} = \frac{80}{950} = 8\% \text{ και } CV'_E = \frac{s'_E}{\bar{y}_E} = \frac{1,4 \cdot s_E}{1,4 \cdot \bar{x}_E} = CV_E = 23\%. \text{ Βλέπουμε ότι}$$

ισχύει η σχέση  $CV'_A < CV'_E$ , καθώς ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητος της νομισματικής μονάδας (δολάρια ή ευρώ).

- δ)** Κάτι που περιμένουμε να δούμε στα δύο θηκογράμματα είναι η μικρότερη μεταβλητότητα των αμοιβών του πρώτου δείγματος, δηλαδή της αμερικάνικης εταιρείας. Ωστόσο, για να συγκρίνουμε τα θηκογράμματα θα πρέπει οι αμοιβές να είναι υπολογισμένες στην ίδια νομισματική μονάδα. Θα προσαρμόσουμε το θηκόγραμμα της αμερικάνικης εταιρείας, χρησιμοποιώντας τη νομισματική ισοτιμία 1 δολάριο = 0,9 ευρώ για να το μετατρέψουμε.

Χρησιμοποιούμε τον βοηθητικό πίνακα της αμερικάνικης εταιρείας, πολλαπλασιάζοντας τους αριθμούς με 0,9. Παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:

Αμερικάνικη εταιρεία	
$Q_1 \rightarrow$	805,32
$\delta \rightarrow$	852,39
$Q_3 \rightarrow$	900,45
Ακραίες τιμές	648,612 , 633,915 , 1119,114 , 1069,668

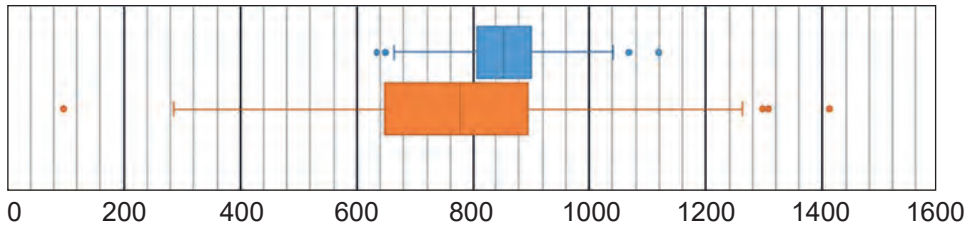
Υπολογίζουμε τα παρακάτω που μας χρειάζονται για να σχεδιάσουμε το νέο θηκόγραμμα:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 900,45 - 805,32 = 95,13$$

$$Q_1 - 1,5Q = 805,32 - 1,5 \cdot 95,13 = 662,625$$

$$Q_3 + 1,5Q = 900,45 + 1,5 \cdot 95,13 = 1043,145$$

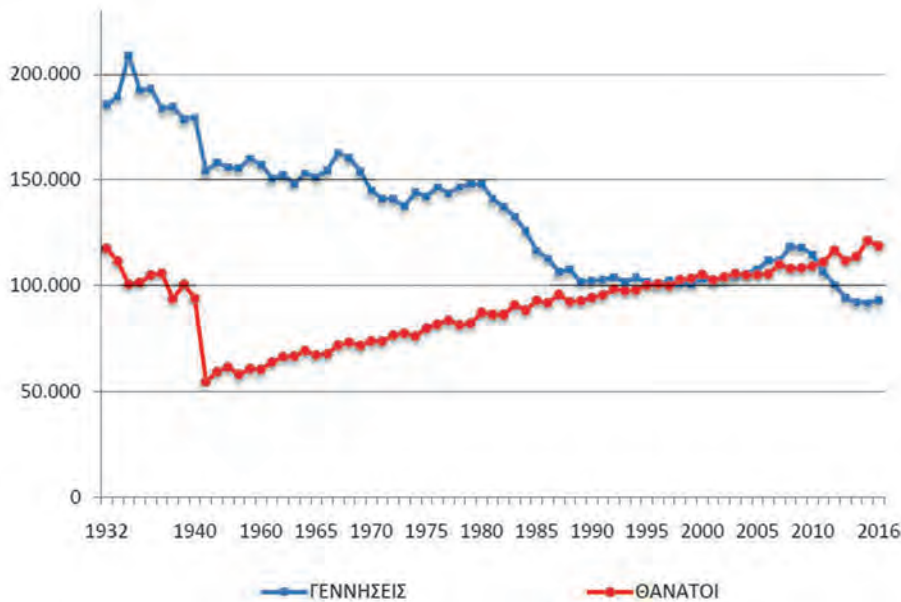
Το νέο θηκόγραμμα για το δείγμα αμοιβών της αμερικάνικης εταιρείας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, μαζί με το θηκόγραμμα της ευρωπαϊκής εταιρείας.



### Εφαρμογή 3

Στο χρονογράμμα που δίνεται παρακάτω φαίνονται οι γεννήσεις ζώντων και οι θάνατοι στη χώρα μας από το 1932 έως και το 2016 (Πηγή: ΕΛ.ΣΤΑΤ: Διεύθυνση Στατιστικών Πληθυσμού & Αγοράς Εργασίας, Τμήμα Φυσικής & Μεταναστευτικής Κίνησης Πληθυσμού).

- α) Ποια χρονιά είχαμε τη μεγαλύτερη αύξηση του πληθυσμού;
- β) Ποια χρονιά ο αριθμός των θανάτων ξεπερνά για πρώτη φορά τον αριθμό των γεννήσεων στη χώρα μας;
- γ) Τι παρατηρείτε την περίοδο 2005 – 2010 και τι συμβαίνει μετά το 2010;



### Λύση

- α) Από το κοινό χρονογράμμα δύο μεταβλητών (γεννήσεων και θανάτων) από το 1932 έως και το 2016, βλέπουμε ότι η μεγαλύτερη αύξηση πληθυσμού παρατηρήθηκε το 1934, δεδομένου ότι η διαφορά «γεννήσεις - θάνατοι» (στο σχήμα, η απόσταση του αριθμού των θανάτων από τον αριθμό των γεννήσεων το 1934) ήταν μεγαλύτερη από κάθε άλλη χρονιά. Από το αρχείο της ΕΛ.ΣΤΑΤ. μπορούμε να βρούμε και τους ακριβείς αριθμούς. Για το 1934 οι γεννήσεις ήταν 208.929 και οι θάνατοι 100.651 (διαφορά: 108.278) και ακολουθούν οι χρονιές 1955 (διαφορά: 99482) και 1959 (διαφορά: 99.347).



- β)** Ο αριθμός των θανάτων ξεπερνά για πρώτη φορά τον αριθμό των γεννήσεων στη χώρα μας το 1996. Ωστόσο, εκείνη τη χρονιά η διαφορά ήταν πολύ μικρή (διαφορά: -22). Αν εξαιρέσουμε το 1997, όπου είχαμε αύξηση των γεννήσεων, από το 1998 μέχρι και το 2003 οι θάνατοι ήταν περισσότεροι.
- γ)** Την περίοδο 2005 – 2010 καταγράφηκε αύξηση του πληθυσμού, όπως φαίνεται και από το χρονόγραμμα, ενώ από το 2010 και μέχρι το 2016 είχαμε σημαντική μείωση του πληθυσμού. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι διαφορές από το 2011 έως και το 2016 ήταν: -4.671, -16.297, -17.660, -21.591, -29.336 και -25.887, αντίστοιχα. Το γεγονός αυτό θα μπορούσε να αποδοθεί κατά κύριο λόγο στην οικονομική κρίση που ξεκίνησε στην Ελλάδα το 2010.

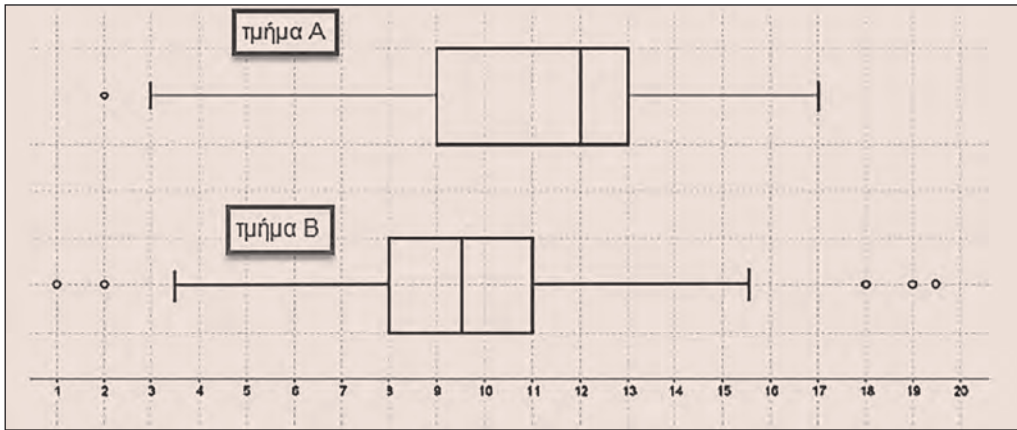
### Ασκήσεις – Προβλήματα – Δραστηριότητες

- 1) Στους επόμενους πίνακες δίνονται οι βαθμολογίες των μαθητών/τριών δύο τμημάτων της Β΄ τάξης ενός γενικού λυκείου σε μια γραπτή αξιολόγηση της Άλγεβρας:

Τμήμα Β <sub>1</sub>			
20	17	14	10
20	17	13	9
19	16	12	9
19	16	11	8
17	15	10	8

Τμήμα Β <sub>2</sub>			
20	19	14	11
20	19	14	10
20	18	14	9
20	15	13	9
19	15	12	8

- α)** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της βαθμολογίας των μαθητών/τριών σε κάθε τμήμα. Ποια πρώτη εικόνα σας δίνουν τα αποτελέσματα των παραπάνω στατιστικών μέτρων για την επίδοση κάθε τμήματος;
- β)** Να βρείτε τους συντελεστές μεταβλητότητας (CV) και να συγκρίνετε τα δύο τμήματα ως προς την ομοιογένειά τους.
- γ)** Ο καθηγητής θέλει να δώσει βραβείο στους μαθητές/μαθήτριες κάθε τμήματος που πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο από το 75% των μαθητών/τριών του τμήματος και να δώσει επιπλέον εργασία για το σπίτι στους μαθητές/μαθήτριες που πήραν βαθμό μικρότερο ή ίσο από το 25% των μαθητών/τριών του τμήματος. Να βρείτε τους βαθμούς των μαθητών/τριών που θα βραβευτούν και τους βαθμούς των μαθητών/τριών που θα πάρουν επιπλέον εργασία.
- δ)** Να κατασκευάσετε τα θηκογράμματα για κάθε τμήμα.
- 2) Τα παρακάτω θηκογράμματα παρουσιάζουν τους βαθμούς των μαθητών/τριών δύο τμημάτων Α και Β σε έναν μαθηματικό διαγωνισμό.



- α) Να βρείτε ποιο από τα δύο τμήματα έχει το μεγαλύτερο εύρος βαθμών.
  - β) Να βρείτε ποιο από τα δύο τμήματα έχει το μεγαλύτερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος βαθμών;
  - γ) Σε ποιο από τα δύο τμήματα φαίνεται να είναι πιο συμμετρική γύρω από τη διάμεσο η κατανομή των βαθμών;
  - δ) Να γράψετε μια μικρή αναφορά για το ποιο τμήμα θα μπορούσε να είναι το καλύτερο.
  - ε) Να βρείτε το τμήμα και τη βαθμολογία των δύο μαθητών/τριών με τον καλύτερο βαθμό.
- 3) Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των απουσιών που έκαναν οι μαθητές ενός τμήματος τους μήνες Οκτώβριο και Νοέμβριο:

Απουσίες μαθητών ενός τμήματος																	
Οκτώβριος	14	7	0	19	21	7	3	0	0	25	2	9	8	7	14	20	0
Νοέμβριος	7	8	2	2	1	23	14	7	0	14	4	7	5	0	1	8	0

Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα των απουσιών των μαθητών του τμήματος για κάθε μήνα χωριστά και να συγκρίνετε τις απουσίες των μαθητών.

- 4) Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα σε χιλιάδες ώρες δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Μπαταρία τύπου Α	Μπαταρία τύπου Β
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

- α) Να βρείτε τη δειγματική μέση τιμή της διάρκειας ζωής μιας μπαταρίας τύπου A και μιας μπαταρίας τύπου B.
- β) Με βάση το παραπάνω δείγμα και το γεγονός ότι μια μπαταρία τύπου A στοιχίζει 38 ευρώ, ποιου τύπου μπαταρία θα προτιμήσετε αν μια μπαταρία τύπου B στοιχίζει:

i) 40 ευρώ

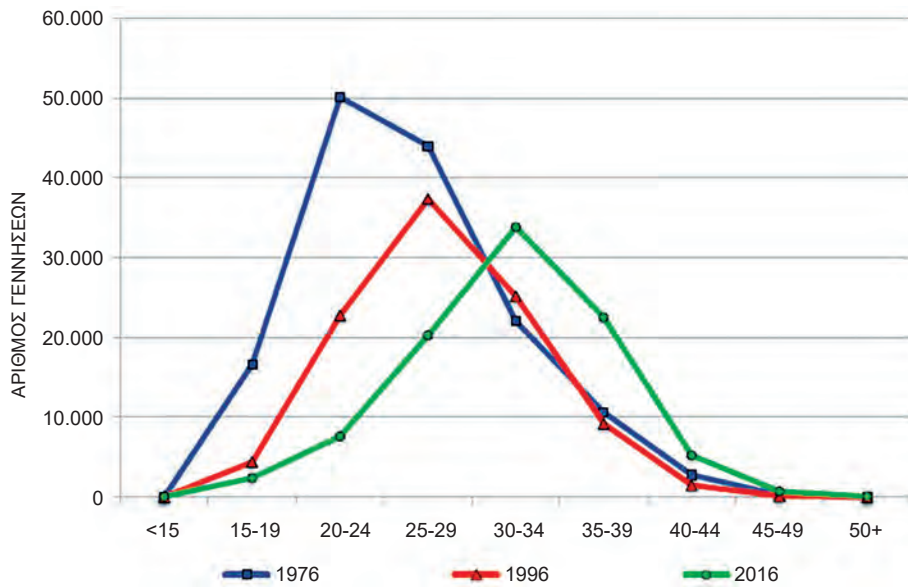
ii) 42 ευρώ

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε μία από τις περιπτώσεις i) και ii).

- γ) Να βρείτε τις δειγματικές τυπικές αποκλίσεις  $s_A$  και  $s_B$  της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.
- δ) Να βρείτε ποιο από τα δύο παραπάνω δείγματα μπαταριών τύπου A και B παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής.
- 5) Στις 12μ.μ. η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) στη Λαμία και στη Θεσσαλονίκη το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου ήταν:

	Θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου									
Λαμία (Λ)	20	18	20	17	18	17	16	17	16	10
Θεσσαλονίκη (Θ)	18	16	17	15	16	12	16	17	20	22

- α) Να βρείτε τη μέση, τη διάμεσο και την επικρατούσα θερμοκρασία των δειγμάτων της Λαμίας και της Θεσσαλονίκης.
- β) Αν η δειγματική τυπική απόκλιση (σε βαθμούς Κελσίου) για τη Λαμία και τη Θεσσαλονίκη είναι  $s_A = 2,66$  και  $s_Θ = 2,59$  αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε σε ποια από τα δύο δείγματα οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.
- γ) Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στη Λαμία παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς. Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της Λαμίας, να βρείτε σε ποια πόλη από τις δύο το συγκεκριμένο δεκαήμερο οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- 6) Στο επόμενο διάγραμμα φαίνονται τα πολύγωνα συχνότητων των γεννήσεων ζώντων κατά ομάδες ηλικιών της μητέρας για τα έτη 1976, 1996 και 2016 (Πηγή: ΕΛ.ΣΤΑΤ: Διεύθυνση Στατιστικών Πληθυσμού & Αγοράς Εργασίας, Τμήμα Φυσικής & Μεταναστευτικής Κίνησης Πληθυσμού).



- α) Σε ποια ηλικία των μητέρων έχουμε τις περισσότερες γεννήσεις το 1976, το 1996 και το 2016; Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;
- β) Να σχολιάσετε τον αριθμό γεννήσεων κατά ηλικιακή ομάδα των μητέρων για το 2016.
- γ) Σε ποιες ηλικιακές ομάδες των μητέρων φαίνεται ο αριθμός των γεννήσεων το 2016 να ξεπερνάει τους αντίστοιχους αριθμούς για τα έτη 1996 και 1976; Γιατί πιστεύετε ότι συνέβη αυτό;

## Πρόσθετο Υλικό

### Θέματα για διερεύνηση



- 1) Ένα από τα σοβαρά προβλήματα, που απασχολεί ολοένα και περισσότερους στην ελληνική κοινωνία, είναι η δημογραφική συρρίκνωση του συνολικού πληθυσμού της Ελλάδας. Σε συνδυασμό με την άσκηση 6 και τον επόμενο πίνακα που δίνεται, να γράψετε μια μικρή αναφορά την οποία πρόκειται να παρουσιάσετε στο σχολείο σας (ή με τα μέσα κοινωνικής δικτύωσης), εξηγώντας την πορεία των γεννήσεων και των θανάτων από το 1932 έως το 2016. Πώς μπορείτε να πείσετε την πολιτεία να λάβει κάποια μέτρα; Αναζητήστε τα στοιχεία για τη φετινή χρονιά στην Ελληνική Στατιστική Αρχή (Δημογραφικά Στοιχεία – Γεννήσεις) για να ενισχύσετε την επιχειρηματολογία σας. Η εργασία αυτή μπορεί να υλοποιηθεί στα πλαίσια κάποιας διαθεματικής – συνθετικής εργασίας. Τα πλήρη δεδομένα των ερευνών σε μορφή .xls θα τα βρείτε στον παραπάνω σύνδεσμο.

Έτος	Γεννήσεις	Θάνατοι	Έτος	Γεννήσεις	Θάνατοι
1932	185.523	117.593	2000	103.274	105.170
1940	179.500	93.830	2005	107.545	105.091
1960	157.239	60.563	2010	114.766	109.084
1965	151.448	67.269	2011	106.428	111.099
1970	144.928	74.009	2012	100.371	116.668
1975	142.273	80.077	2013	94.134	111.794
1980	148.134	87.282	2014	92.149	113.740
1985	116.481	92.886	2015	91.847	121.183
1990	102.229	94.152	2016	92.898	118.785
1995	101.495	100.158			

Πίνακας 2: Γεννήσεις και Θάνατοι από το 1932 – 2016



- 2) Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται οι αριθμοί θρησκευτικών και πολιτικών γάμων που έγιναν στην Ελλάδα από το 1991 έως το 2016. Επιπλέον, προστέθηκαν από το 2009 και μετά τα σύμφωνα συμβίωσης (Πηγή: ΕΛ.ΣΤΑΤ: Γάμοι). Να γράψετε μια μικρή αναφορά σχετικά με την εξέλιξη του θρησκευτικού και πολιτικού γάμου στη χώρα μας. Έπαιξαν κάποιο ρόλο μετά το 2009 τα σύμφωνα συμβίωσης; Ενισχύστε την επιχειρηματολογία σας αντλώντας πληροφορίες από τον πίνακα, δηλαδή:

- Βρείτε τα ποσοστά θρησκευτικών, πολιτικών γάμων και σύμφωνων συμβίωσης, ανά έτος. Συγκρίνετε τα ποσοστά κυρίως μετά το 2009. Τι παρατηρείτε τις τελευταίες χρονιές 2015 και 2016;

- Βρείτε τις μεταβολές των θρησκευτικών και πολιτικών γάμων και σύμφωνων συμβίωσης ανάμεσα στα έτη 2013-2014 και στα έτη 2015-2016.
- Κατασκευάστε τα αντίστοιχα χρονογράμματα.

ΕΤΟΣ	ΑΠΟΛΥΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ			
	Σύνολο	Θρησκευτικοί	Πολιτικοί	Σύμφωνα Συμβίωσης
1991	65.568	59.710	5.858	0
2001	58.491	48.087	10.404	0
2009	59.212	34.375	24.837	161
2010	56.338	30.327	26.011	180
2011	55.099	28.472	26.627	185
2012	49.705	23.980	25.725	314
2013	51.256	25.624	25.632	581
2014	53.105	26.152	26.953	1573
2015	53.672	26.419	27.253	2611
2016	49.632	23.778	25.854	3799

Πίνακας 3: Αριθμοί θρησκευτικών, πολιτικών γάμων και σύμφωνων συμβίωσης από το 1991 – 2016

- 3) Στα πλαίσια μιας συνθετικής εργασίας συλλέξτε δεδομένα που αφορούν πληροφορίες για τους συμμαθητές σας. Συντάξτε ένα ερωτηματολόγιο με ερωτήσεις που αφορούν τα βασικά στοιχεία των συμμαθητών σας (φύλο, τάξη, ομάδα προσανατολισμού) και ερωτήσεις (ύψος, βάρος, ώρες διαβάσματος, ώρες στο διαδίκτυο, βαθμοί σε διάφορα μαθήματα). Φροντίστε οι ερωτήσεις να είναι σαφώς διατυπωμένες και οι πιθανές απαντήσεις να μην επικαλύπτονται. Χρησιμοποιώντας αυτά που μάθατε στη συγκεκριμένη παράγραφο, γράψτε μια σύντομη ερευνητική έκθεση παρουσιάζοντας τα αποτελέσματά σας.

