

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.6 : ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΟΣΟΤΙΚΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΙΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΕΝΟΣ ΠΟΙΟΤΙΚΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

1) Στους επόμενους πίνακες δίνονται οι βαθμολογίες των μαθητών/τριών δύο τμημάτων της Β' τάξης ενός γενικού λυκείου σε μια γραπτή αξιολόγηση της Άλγεβρας:

Τμήμα Β ₁				Τμήμα Β ₂			
20	17	14	10	20	19	14	11
20	17	13	9	20	19	14	10
19	16	12	9	20	18	14	9
19	16	11	8	20	15	13	9
17	15	10	8	19	15	12	8

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της βαθμολογίας των μαθητών/τριών σε κάθε τμήμα. Ποια πρώτη εικόνα σας δίνουν τα αποτελέσματα των παραπάνω στατιστικών μέτρων για την επίδοση κάθε τμήματος;

β) Να βρείτε τους συντελεστές μεταβλητότητας (CV) και να συγκρίνετε τα δύο τμήματα ως προς την ομοιογένειά τους.

γ) Ο καθηγητής θέλει να δώσει βραβείο στους μαθητές/μαθήτριες κάθε τμήματος που πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο από το 75% των μαθητών/τριών του τμήματος και να δώσει επιπλέον εργασία για το σπίτι στους μαθητές/μαθήτριες που πήραν βαθμό μικρότερο ή ίσο από το 25% των μαθητών/τριών του τμήματος. Να βρείτε τους βαθμούς των μαθητών/τριών που θα βραβευτούν και τους βαθμούς των μαθητών/τριών που θα πάρουν επιπλέον εργασία.

δ) Να κατασκευάσετε τα θηκογράμματα για κάθε τμήμα.

Λύση

α) Για το Β₁ είναι:

$$\bar{x}_1 = \frac{20 + 17 + 14 + 10 + 20 + 17 + 13 + 9 + 19 + 16 + 12 + 9 + 19 + 16 + 12 + 8 + 17 + 15 + 10 + 8}{20}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{280}{20} = 14$$

$$s_1^2 = \frac{(20-14)^2 + (17-14)^2 + \dots + (8-14)^2}{20} = 16,3 \text{ ή αλλιώς:}$$

$$s_1^2 = \frac{2 \cdot (20-14)^2 + 2 \cdot (19-14)^2 + 3 \cdot (17-14)^2 + \dots + 2 \cdot (8-14)^2}{20} = 16,3$$

και τελικά $s_1 = \sqrt{s_1^2} \approx 4,04$

Ομοίως βρίσκουμε για το B_2 : $\bar{x}_2 = 14,95$ και $s_2 \approx 4,09$

Από τα παραπάνω, το B_2 φαίνεται να έχει ελαφρώς υψηλότερη μέση επίδοση, χωρίς όμως τα δύο τμήματα να έχουν σημαντική διαφορά στη διασπορά των βαθμολογιών τους.

β) Για το B_1 βρίσκουμε ότι $CV_1 = \frac{4,04}{14} \approx 28,8\%$ και

για το B_2 βρίσκουμε ότι $CV_2 = \frac{4,09}{14,95} \approx 27,4\%$.

Φαίνεται ότι το B_2 έχει λίγο περισσότερο ομοιογενές, κάτι που οφείλεται στη μεγαλύτερη μέση τιμή του.

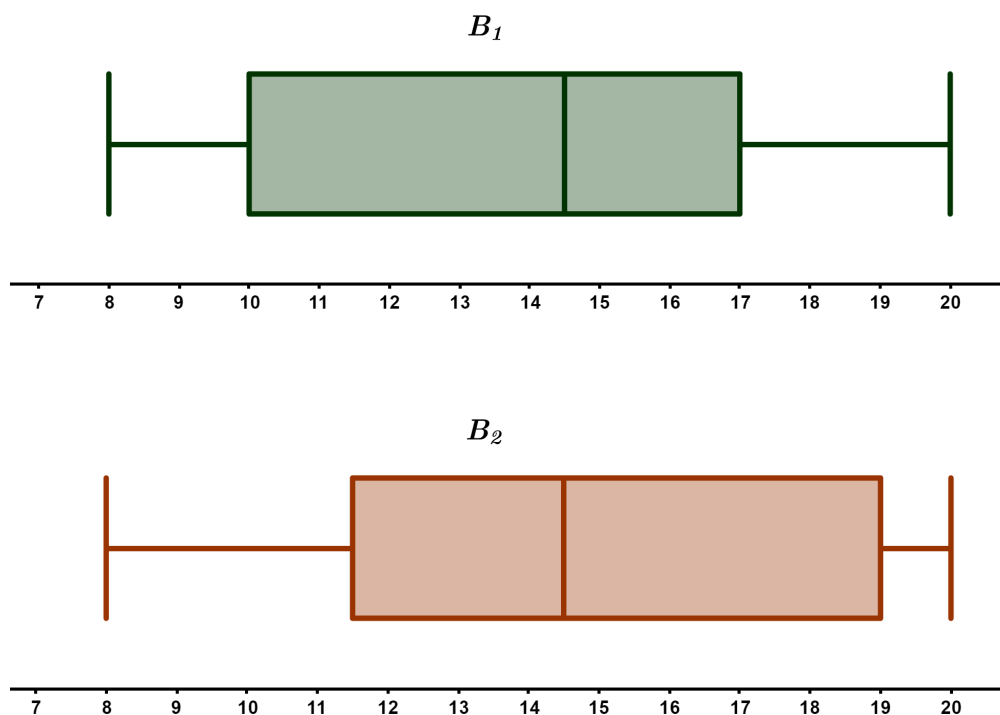
γ) Βρίσκουμε τα τεταρτημόρια για κάθε τμήμα:

για το B_1 έχουμε: $Q_1=10$, $Q_2=\delta=14,5$, $Q_3=17$, ενώ

για το B_2 έχουμε: $Q_1=11,5$, $Q_2=\delta=14,5$, $Q_3=19$

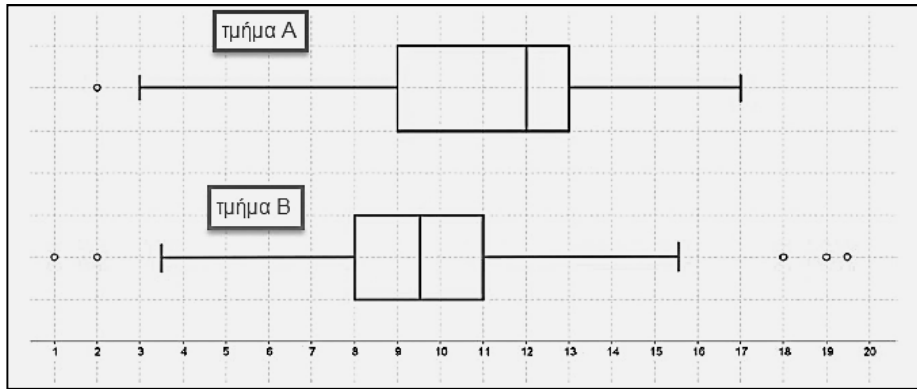
Από αυτά προκύπτει ότι οι βαθμοί των μαθητών/τριών που θα βραβευτούν θα είναι για το B_1 από 17 και πάνω, ενώ για το B_2 από 19 και πάνω. Οι βαθμοί των μαθητών/τριών που θα πάρουν επιπλέον εργασία θα είναι για το B_1 από 10 και κάτω, ενώ για το B_2 από 11 και κάτω.

δ) Τα θηκογράμματα φαίνονται παρακάτω:



Άσκηση 2

Τα παρακάτω θηκογράμματα παρουσιάζουν τους βαθμούς των μαθητών/τριών δύο τμημάτων Α και Β σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό.



- α)** Να βρείτε ποιο από τα δύο τμήματα έχει το μεγαλύτερο εύρος βαθμών.
- β)** Να βρείτε ποιο από τα δύο τμήματα έχει το μεγαλύτερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος βαθμών;
- γ)** Σε ποιο από τα δύο τμήματα φαίνεται να είναι πιο συμμετρική γύρω από τη διάμεσο η κατανομή των βαθμών;
- δ)** Να γράψετε μια μικρή αναφορά για το ποιο τμήμα θα μπορούσε να είναι το καλύτερο.
- ε)** Να βρείτε το τμήμα και τη βαθμολογία των δύο μαθητών/τριών με τον καλύτερο βαθμό.

Λύση

α) Το εύρος για το τμήμα Α είναι $R_A = 17 - 2 = 15$ και για το Β είναι $R_B = 19,5 - 1 = 18,5$. Οπότε το τμήμα Β έχει μεγαλύτερο εύρος βαθμών.

β) Για το Α έχουμε: $Q = Q_3 - Q_1 = 13 - 9 = 4$ και για το Β: $Q = Q_3 - Q_1 = 11 - 8 = 3$. Άρα, μεγαλύτερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος βαθμών έχει το τμήμα Α.

γ) Στο τμήμα Β η κατανομή των βαθμών φαίνεται να είναι πιο συμμετρική γύρω από τη διάμεσο.

δ) Το "καλύτερο" θα μπορούσε να αναζητηθεί με διαφορετικά κριτήρια.

Με κριτήριο την μέση επίδοση καλύτερο φαίνεται να είναι το Α. Με κριτήριο τη συμμετρική κατανομή των βαθμών μάλλον είναι το Β. Με κριτήριο τη μικρότερη διασπορά των βαθμών καλύτερο φαίνεται μάλλον το Α. Με κριτήριο τους υψηλότερους βαθμούς (πάνω από 17) καλύτερο είναι το Β.

Ποιο όμως από όλα αυτά τα κριτήρια θα μπορούσε να είναι επικρατέστερο; Μιλώντας για τη συμμετοχή σε μαθηματικό διαγωνισμό, το κριτήριο της υψηλότερης βαθμολογίας ίσως να είναι αυτό που θα κυριαρχήσει. Αλλά σχετικά με τη διδασκαλία και την πρόοδο των μαθητών ίσως να είναι προτιμότερη μια μεγαλύτερη ομοιογένεια του τμήματος.

Βέβαια, σε αυτή τη συζήτηση δεν λαμβάνουμε καθόλου υπόψη άλλα χαρακτηριστικά του τμήματος (πχ πολιτισμικό υπόβαθρο, φύλο των μαθητών, ιδιαίτερα ενδιαφέροντα, κλίσεις, δυσκολίες και ικανότητες των μαθητών κ.α.) που μπορεί να μετατοπίζουν τη συζήτηση από το "ποιο τμήμα είναι καλύτερο" στο "ποια είναι τα χαρακτηριστικά του κάθε τμήματος". Επιπλέον, ούτε οι επιδόσεις, ούτε τα χαρακτηριστικά είναι αναλλοίωτα στο χρόνο και στις διαφορετικές συνθήκες.

ε) Οι δύο υψηλότερες βαθμολογίες είναι 19 και 19,5 και τις πέτυχαν μαθητές/τριες από το τμήμα Β.

Άσκηση 3

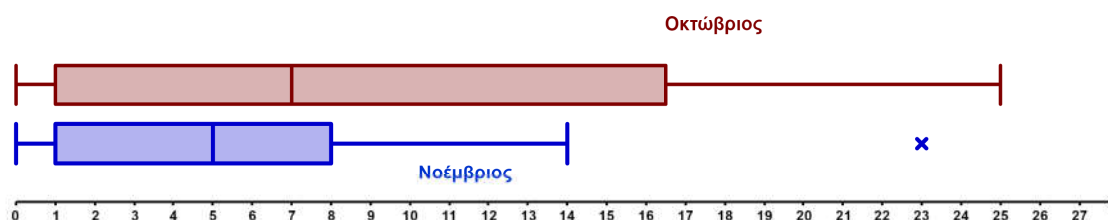
Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των απουσιών που έκαναν οι μαθητές ενός τμήματος τους μήνες Οκτώβριο και Νοέμβριο:

Απουσίες μαθητών ενός τμήματος																	
Οκτώβριος	14	7	0	19	21	7	3	0	0	25	2	9	8	7	14	20	0
Νοέμβριος	7	8	2	2	1	23	14	7	0	14	4	7	5	0	1	8	0

Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα των απουσιών των μαθητών του τμήματος για κάθε μήνα χωριστά και να συγκρίνετε τις απουσίες των μαθητών.

Λύση

Τα θηκογράμματα των απουσιών φαίνονται παρακάτω:



Από τα θηκογράμματα φαίνεται ότι τον Οκτώβριο έγιναν περισσότερες απουσίες.

Άσκηση 4

Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα σε χιλιάδες ώρες δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Μπαταρία τύπου Α	Μπαταρία τύπου Β
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

α) Να βρείτε τη δειγματική μέση τιμή της διάρκειας ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β.

β) Με βάση το παραπάνω δείγμα και το γεγονός ότι μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ, ποιου τύπου μπαταρία θα προτιμήσετε αν μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει:

ι) 40 ευρώ ιι) 42 ευρώ

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε μία από τις περιπτώσεις ι) και ιι).

γ) Να βρείτε τις δειγματικές τυπικές αποκλίσεις s_A και s_B της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.

δ) Να βρείτε ποιο από τα δύο παραπάνω δείγματα μπαταριών τύπου A και B παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής.

Λύση

α) Οι μέσες τιμές για τη διάρκεια ζωής στα δύο δείγματα είναι $\bar{x}_A = 22$ χιλιάδες ώρες και $\bar{x}_B = 24$ χιλιάδες ώρες.

β) Για την μπαταρία A το κόστος ανά χίλιες ώρες λειτουργίας είναι $38 : 22 \approx 1,72$ ευρώ. Για την μπαταρία B το κόστος ανά χίλιες ώρες λειτουργίας είναι για την περίπτωση (ι) $40 : 24 \approx 1,66$ ευρώ και για την περίπτωση (ιι) είναι $42 : 24 = 1,75$. Οπότε στην περίπτωση (ι) προτιμότερη είναι η μπαταρία B, ενώ στην περίπτωση (ιι) προτιμότερη είναι η A.

Τα παραπάνω βασίζονται στα δεδομένα των δύο δειγμάτων και στην υπόθεση ότι η μπαταρία που θα αγοράσουμε θα έχει τον ίδιο χρόνο ζωής που έχει το αντίστοιχο δείγμα. Αυτή η υπόθεση δεν είναι βέβαιο ότι θα επαληθευτεί.

γ) Είτε χρησιμοποιώντας τον τύπο για τη διακύμανση και βρίσκοντας την τετραγωνική ρίζα, είτε με αξιοποίηση κάποιου λογιστικού φύλλου, βρίσκουμε τις τυπικές αποκλίσεις των δύο δειγμάτων:

$$s_A \approx 2,8 \text{ και } s_B \approx 4,7$$

δ) Έχουμε αντίστοιχα: $CV_A = \frac{2,8}{22} \approx 12,7\%$ και $CV_B = \frac{4,7}{24} \approx 19,6\%$. Οπότε μεγαλύτερη ομοιογένεια παρουσιάζει το δείγμα των μπαταριών τύπου A.

Άσκηση 5

Στις 12μ.μ. η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) στη Λαμία και στη Θεσσαλονίκη το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου ήταν:

	Θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου									
	20	18	20	17	18	17	16	17	16	10
Λαμία (Λ)	20	18	20	17	18	17	16	17	16	10
Θεσσαλονίκη (Θ)	18	16	17	15	16	12	16	17	20	22

α) Να βρείτε τη μέση, τη διάμεσο και την επικρατούσα θερμοκρασία των δειγμάτων της Λαμίας και της Θεσσαλονίκης.

β) Αν η δειγματική τυπική απόκλιση (σε βαθμούς Κελσίου) για τη Λαμία και τη Θεσσαλονίκη είναι $s_\Lambda = 2,66$ και $s_\Theta = 2,59$ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε σε ποια από τα δύο δείγματα οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

γ) Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στη Λαμία παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς. Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της Λαμίας,

να βρείτε σε ποια πόλη από τις δύο το συγκεκριμένο δεκαήμερο οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Οι δύο πόλεις έχουν την ίδια μέση θερμοκρασία: $\bar{x}_\lambda = 16,9$ και $\bar{x}_\theta = 16,9$. Για τις διαμέσους έχουμε $\delta_\lambda = 17$ και $\delta_\theta = 16,5$. Επικρατούσα θερμοκρασία για τη Λαμία είναι $M_0 = 17$ και για τη Θεσσαλονίκη είναι $M_0 = 16$.

β) Εφόσον $s_\lambda > s_\theta$, μεγαλύτερη διασπορά έχουν οι θερμοκρασίες του δείγματος της Λαμίας.

γ) Οι πραγματικές θερμοκρασίες στη Λαμία θα είναι 5 βαθμούς μικρότερες από εκείνες του πίνακα, άρα θα είναι ως εξής:

	Θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου									
Λαμία (Λ)	15	13	15	12	13	12	11	12	11	5
Θεσσαλονίκη (Θ)	18	16	17	15	16	12	16	17	20	22

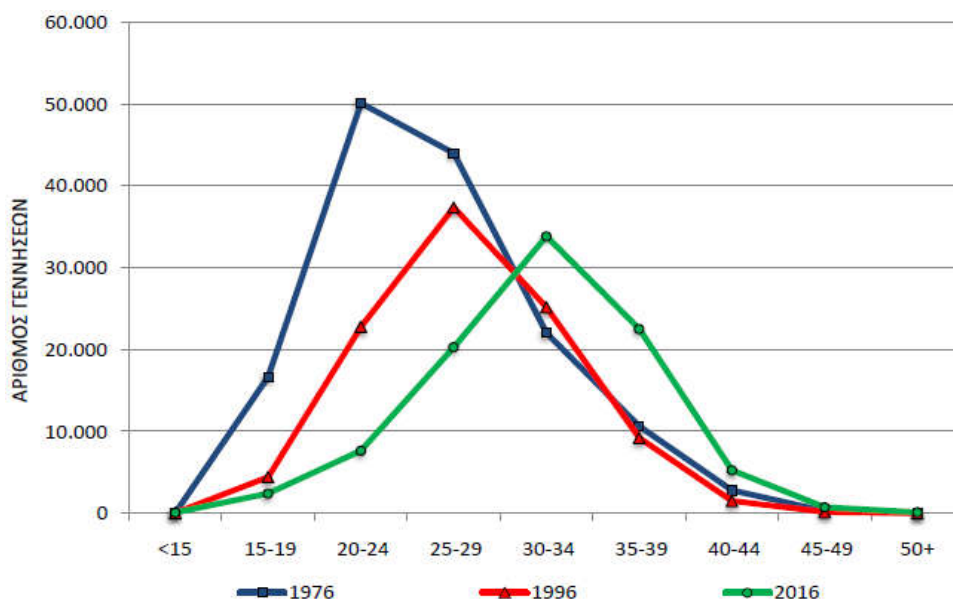
Η μέση τιμή θα είναι κατά 5 βαθμούς μικρότερη εκείνης που υπολογίστηκε, άρα $\bar{x}_\lambda = 11,9$ ενώ η τυπική απόκλιση παραμένει ίδια. Έτσι έχουμε:

$$CV_\lambda = \frac{s_\lambda}{|\bar{x}_\lambda|} = \frac{2,66}{11,9} \approx 22\% \text{ και } CV_\theta = \frac{s_\theta}{|\bar{x}_\theta|} = \frac{2,59}{16,9} \approx 15\%.$$

Οπότε, μεγαλύτερη ομοιογένεια έχουν οι θερμοκρασίες στη Θεσσαλονίκη.

Άσκηση 6

Στο επόμενο διάγραμμα φαίνονται τα πολύγωνα συχνοτήτων των γεννήσεων ζώντων κατά ομάδες ηλικιών της μητέρας για τα έτη 1976, 1996 και 2016 (Πηγή: ΕΛ.ΣΤΑΤ: Διεύθυνση Στατιστικών Πληθυσμού & Αγοράς Εργασίας, Τμήμα Φυσικής & Μεταναστευτικής Κίνησης Πληθυσμού).



α) Σε ποια ηλικία των μητέρων έχουμε τις περισσότερες γεννήσεις το 1976, το 1996 και το 2016; Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

β) Να σχολιάσετε τον αριθμό γεννήσεων κατά ηλικιακή ομάδα των μητέρων για το 2016.

γ) Σε ποιες ηλικιακές ομάδες των μητέρων φαίνεται ο αριθμός των γεννήσεων το 2016 να ξεπερνάει τους αντίστοιχους αριθμούς για τα έτη 1996 και 1976; Γιατί πιστεύετε ότι συνέβη αυτό;

Λύση

α) Τις περισσότερες γεννήσεις το 1976 έχουμε στις ηλικίες 20-24 των μητέρων, το 1996 στις ηλικίες 25-29 και το 2016 στις ηλικίες 30-34. Κάποιοι λόγοι για τους οποίους μπορεί να συμβαίνει αυτό συνδέονται με την αύξηση τη πρόσβασης των γυναικών στις σπουδές και την εργασία που μεταθέτει για αργότερα τις γεννήσεις των παιδιών. Θα μπορούσε να γίνει μια συζήτηση στην τάξη αφενός για άλλους λόγους που μπορεί να συμβαίνει αυτό και αφετέρου για την αξιολόγηση (ως θετικά ή αρνητικά, για ποιον και με τι κριτήριο) των γεγονότων αυτών (τόσο της αύξησης της ηλικίας των μητέρων κατά τη γέννηση του παιδιού τους, όσο και των λόγων που θεωρείται ότι αυτό συμβαίνει)

β) Η κορύφωση των γεννήσεων για το 2016 συμβαίνει στην ηλικία των 30-34. Το πολύγωνο συχνοτήτων φαίνεται κάπως συμμετρικό πριν και μετά την κορυφή του.

γ) Ο αριθμός των γεννήσεων για το 2016 ξεπερνάει τους αντίστοιχους αριθμούς για τα έτη 1996 και 1976 στις ηλικιακές ομάδες 30-34, 35-39, 40-44 και 45-49. Αυτό συνδέεται με το πρώτο ερώτημα, δηλαδή με τη "μετατόπιση" των γεννήσεων σε μεγαλύτερες ηλικίες των μητέρων. Έτσι, βλέπουμε οι λιγότερες γεννήσεις στις μικρότερες ηλικίες (για το 2016) να εξισορροπούνται με περισσότερες γεννήσεις στις μεγαλύτερες.