

- 9) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά 4 αγόρια και 3 κορίτσια; Αν επιλέξουμε τη σειρά των 7 παιδιών τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια;
- 10) Δέκα παιδιά, μεταξύ των οποίων ο Κώστας και η Ελένη, θα καθίσουν τυχαία ο ένας δίπλα στον άλλον σε δέκα θέσεις. Ποια είναι η πιθανότητα ο Κώστας και η Ελένη να καθίσουν σε διπλανές θέσεις;
- 11) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου τέσσερα τυχαία επιλεγμένα άτομα από την τάξη σας (ή το σχολείο σας), να έχουν γεννηθεί σε τέσσερις διαφορετικές εποχές του έτους.

Μέρος Β': Συνδυασμοί

Διερεύνηση

Έχετε να τοποθετήσετε τρεις επιστολές σε φακέλους. Επίσης έχετε στη διάθεσή σας τέσσερις φακέλους διαφορετικού χρώματος: κίτρινο, μπλε, κόκκινο και πράσινο. Μόνο μία επιστολή μπαίνει σε κάθε φάκελο. Αν κάνετε τυχαία την επιλογή των φακέλων που θα χρησιμοποιήσετε, πόσοι τρόποι υπάρχουν να τοποθετηθούν οι επιστολές στους φακέλους;

- α) αν η πρώτη επιστολή είναι ευχαριστήρια, η δεύτερη είναι συγχαρητήρια και η τρίτη είναι πρόσκληση;
- β) αν και οι τρεις επιστολές είναι ακριβώς ίδιες;

Βασικές μαθηματικές έννοιες-Ιδέες-Διεργασίες

Συχνά είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε το πλήθος των δυνατών τρόπων να επιλεγούν k από τα n στοιχεία ενός συνόλου, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής τους. Κάθε τέτοιος τρόπος ονομάζεται συνδυασμός των n ανά k . Με στόχο να βρούμε έναν τρόπο υπολογισμού του πλήθους των συνδυασμών των n ανά k , στη γενική περίπτωση, ας δούμε πρώτα το επόμενο παράδειγμα.

Ας υποθέσουμε ότι από τους 5 παίκτες μίας σχολικής ομάδας μπάσκετ πρέπει να επιλεγούν 3 για να λάβουν μέρος στο σχολικό πρωτάθλημα μπάσκετ με τίτλο «τρεις εναντίον τριών». Ο καθηγητής Φυσικής Αγωγής του σχολείου, αφού επιλέξει τους παίκτες, πρέπει να γράψει τα ονόματά τους στο διπλανό καρτελάκι δίπλα στα νούμερα που θα έχουν στις εμφανίσεις τους. Κάθε παίκτης θα έχει

Συνδυασμοί

Συνδυασμός των n στοιχείων ενός συνόλου A ανά k λέγεται κάθε υποσύνολο του A με k στοιχεία.

Ομάδα μπάσκετ «3 εναντίον 3»	
Νούμερο	Ονοματεπώνυμο
7	
10	
19	

διαφορετικό νούμερο. Όπως φαίνεται οι εμφανίσεις έχουν το 7, το 10 και το 19.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να συμπληρωθεί το καρτελάκι;

Το καρτελάκι μπορεί να συμπληρωθεί με 60 διαφορετικούς τρόπους, αφού πρόκειται για διατάξεις των 5 ανά 3 χωρίς επανάληψη, άρα το πλήθος τους είναι

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \text{ ή αλλιώς } \frac{5!}{(5-3)!}.$$

Για μια δεδομένη επιλογή των 3 παικτών με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να συμπληρωθεί το καρτελάκι;

Ας υποθέσουμε ότι οι 3 παίκτες που έχουν επιλεγεί είναι ο Αντώνης, ο Βασίλης και ο Γιάννης. Το καρτελάκι μπορεί να συμπληρωθεί με τους εξής 6 τρόπους:

Νούμερο	Αρχικό γράμμα ονόματος του παίκτη					
7	A	A	B	B	Γ	Γ
10	B	Γ	A	Γ	A	B
19	Γ	B	Γ	A	B	A

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το πλήθος των τρόπων χωρίς την καταγραφή τους, καθώς πρόκειται για μεταθέσεις 3 στοιχείων, που το πλήθος τους είναι $3! = 6$.

Πόσες είναι οι δυνατές τριάδες παικτών που μπορούν προκύψουν από τους 5 παίκτες;

Ας υποθέσουμε ότι x είναι το πλήθος των διαφορετικών τριάδων. Και οι 6 μεταθέσεις των A, B και Γ του παραπάνω πίνακα αντιστοιχούν σε έναν από τους x αυτούς τρόπους, αφού οι παίκτες που επιλέγονται είναι οι ίδιοι (οι A, B και Γ απλώς αλλάζει το νούμερο στην εμφάνιση του κάθε ενός). Το x ισούται με το πλήθος των συνδυασμών των 5 ανά 3. Λόγω της βασικής αρχής απαρίθμησης:

$$\left(\begin{array}{c} \text{το πλήθος των} \\ \text{δυνατών τριάδων} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{το πλήθος των} \\ \text{διαφορετικών τρόπων} \\ \text{που μπορεί να} \\ \text{συμπληρωθεί} \\ \text{το καρτελάκι για} \\ \text{δεδομένη τριάδα} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{το πλήθος των} \\ \text{διαφορετικών} \\ \text{τρόπων που μπορεί} \\ \text{να συμπληρωθεί} \\ \text{το καρτελάκι} \end{array} \right)$$

Άρα:

$$x \cdot 3! = \frac{5!}{(5-3)!} \Leftrightarrow x = \frac{5!}{3!(5-3)!} \Leftrightarrow x = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = 10$$

Κάθε τρόπο από τους 10 τον ονομάζουμε **συνδυασμό των 5 ανά 3**.

Για το πλήθος των συνδυασμών των 5 ανά 3 χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

Η ισότητα $x \cdot 3! = \frac{5!}{(5-3)!}$ που σκεφτήκαμε και χρησιμοποιήσαμε για να λύσουμε

το πρόβλημα, σημαίνει ότι:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Πλήθος} \\ \text{συνδυασμών} \\ \text{των 5 ανά 3} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{Πλήθος} \\ \text{μεταθέσεων} \\ \text{των 3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Πλήθος} \\ \text{διατάξεων} \\ \text{των 5 ανά 3} \\ \text{χωρίς επαν.} \end{array} \right)$$

Και μπορεί να γενικευτεί:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Πλήθος} \\ \text{συνδυασμών} \\ \text{των } n \text{ ανά } k \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{Πλήθος} \\ \text{μεταθέσεων} \\ \text{των } k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Πλήθος} \\ \text{διατάξεων} \\ \text{των } n \text{ ανά } k \\ \text{χωρίς επαν.} \end{array} \right)$$

Ή αλλιώς:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Πλήθος} \\ \text{συνδυασμών} \\ \text{των } n \text{ ανά } k \end{array} \right) = \frac{\left(\begin{array}{c} \text{Πλήθος} \\ \text{διατάξεων} \\ \text{των } n \text{ ανά } k \\ \text{χωρίς επαν.} \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} \text{Πλήθος} \\ \text{μεταθέσεων} \\ \text{των } k \end{array} \right)}$$

Για το πλήθος των συνδυασμών των n ανά k ισχύει:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Το πενταμελές συμβούλιο του σχολείου αποτελείται από 4 κορίτσια και 1 αγόρι. Πρόκειται να επιλεγούν, με κλήρωση, 3 από τα 5 μέλη του συμβουλίου για να εκπροσωπήσουν την τάξη τους σε μία ενημερωτική συνάντηση με τους καθηγητές τους. Ποια είναι η πιθανότητα και τα 3 μέλη που θα επιλεγούν να είναι κορίτσια;

Λύση

Θεωρούμε το πείραμα τύχης: «Επιλέγουμε τυχαία 3 από τα 5 μέλη του πενταμελούς». Η σειρά επιλογής (ποιος/α θα επιλεγεί πρώτος/η, δεύτερος/η και τρίτος/η) δεν έχει σημασία. Οι τρόποι επιλογής είναι το πλήθος των συνδυασμών

των 5 ανά 3, δηλαδή $\binom{5}{3}=10$. Αυτό είναι και το πλήθος των αποτελεσμάτων του δ.χ. Ω του πειράματος τύχης (και αν η κλήρωση είναι δίκαια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ισοπίθανα).

Θεωρούμε ως A το ενδεχόμενο του Ω: «επιλέγονται μόνο κορίτσια». Τότε το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων του A είναι το πλήθος των συνδυασμών των 4 ανά 3. Πράγματι, εξαιρώντας το αγόρι, τότε μένει να βρούμε με πόσους τρόπους επιλέγονται 3 από τα 4 κορίτσια.

Από την ισότητα $\binom{4}{3} \cdot 3! = \frac{4!}{(4-3)!}$ προκύπτει ότι:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \cdot 3!}{3! \cdot 1!} = 4$$

Άρα, από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας:

$$P(A) = \frac{4}{10} = 0,4.$$

Εφαρμογή 2

Στην εφαρμογή 4 του μέρους A', υπολογίσαμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο Βαγγέλης και η Μαρία κληρώνονται για να ταξιδέψουν σε διπλανές θέσεις».

- α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο Βαγγέλης και η Μαρία κληρώνονται να ταξιδέψουν χωρίς να είναι σε διπλανές θέσεις».
- β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο Βαγγέλης κληρώνεται για να ταξιδέψει».

Λύση

- α) Αν A είναι το ενδεχόμενο «ο Βαγγέλης και η Μαρία ταξιδεύουν σε διπλανές θέσεις» και B είναι το ενδεχόμενο «ο Βαγγέλης και οι Μαρία κληρώνονται να ταξιδέψουν», τότε το B - A είναι το ενδεχόμενο «ο Βαγγέλης και η Μαρία ταξιδεύουν σε θέσεις που δεν είναι διπλανές». Από τον Π.4 ισχύει ότι $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.

Επίσης ισχύει ότι $A \subseteq B$, άρα $A \cap B = A$.

Άρα $P(B - A) = P(B) - P(A)$. Επομένως, έχοντας υπολογίσει ότι $P(A) = \frac{1}{21}$, αρκεί να υπολογίσουμε την P(B). Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορούν να επιλεγούν 4 επιβάτες από τους 7 για να ταξιδέψουν, χωρίς να μας ενδιαφέρει ποιος θα ταξιδέψει σε ποια θέση είναι :

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$$

Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως το πλήθος των στοιχείων του δ.χ. του πειράματος τύχης «επιλέγονται 4 επιβάτες για να ταξιδέψουν, χωρίς να μας ενδιαφέρει

η σειρά επιλογής τους». Ομοίως, τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι οι τετράδες που περιέχουν τον Βαγγέλη, τη Μαρία και ακόμα 2 άτομα επιλεγμένα από τους υπόλοιπους 5 επιβάτες:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

Άρα:

$$P(B) = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

και η πιθανότητα να ταξιδέψουν ο Βαγγέλης και η Μαρία σε όχι διπλανές θέσεις είναι ίση με:

$$P(B-A) = \frac{2}{7} - \frac{1}{21} = \frac{5}{21}$$

β) Θεωρούμε ως το ενδεχόμενο Γ: «ο Βαγγέλης κληρώνεται να ταξιδέψει». Το πλήθος των ευνοϊκών εκβάσεων του Γ υπολογίζεται ως εξής:

Θεωρούμε ότι ο Βαγγέλης έχει κληρωθεί. Με πόσους τρόπους μπορούν να κληρωθούν οι υπόλοιποι 6 επιβάτες στις 3 θέσεις που απομένουν, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά κλήρωσης;

Το πλήθος αυτών των τρόπων είναι ίσο με:

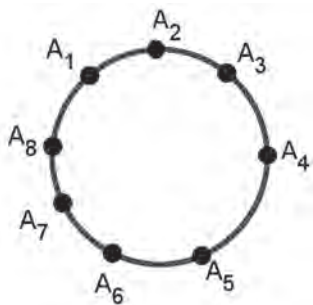
$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 20$$

Τελικά:

$$P(\Gamma) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

Ασκήσεις – Προβλήματα – Δραστηριότητες

- 1) Σε ένα πρωτάθλημα συμμετέχουν 7 ομάδες και αγωνίζονται όλες με όλες μία φορά. Να υπολογίσετε πόσοι αγώνες θα γίνουν.
- 2) **α)** Από ένα σύνολο 10 μαθητών επιλέγουμε 4 μαθητές τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε έναν συγκεκριμένο μαθητή;
β) Να απαντήσετε στο ίδιο ερώτημα αν έχουμε ένα σύνολο n μαθητών και επιλέγουμε, τυχαία, k μαθητές.
- 3) Σε ένα κουτί υπάρχουν 5 μπαταρίες, από τις οποίες οι 2 είναι αποφορτισμένες. Επιλέγουμε τυχαία 2 μπαταρίες από το κουτί. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου:
 - α)** Οι μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αποφορτισμένες.
 - β)** Το πολύ μία από τις μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αποφορτισμένη.
 - γ)** Οι μπαταρίες που επιλέξαμε δεν είναι αποφορτισμένες.



- 4) Σε έναν κύκλο δίνονται 8 σημεία $A_1, A_2, \dots, A_8$.
- Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα σημεία αυτά;
 - Πόσες διαγώνιες έχει ένα κανονικό οκτάγωνο;
 - Πόσα τρίγωνα υπάρχουν με αυτά τα σημεία ως κορυφές;
- δ) Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα του ερωτήματος (α). Ποια είναι η πιθανότητα:
- να μη διέρχεται από το σημείο A_1 ;
 - να διέρχεται από το σημείο A_2 ;
- 5) Από ένα σύλλογο καθηγητών με 7 άνδρες και 6 γυναίκες επιλέγουμε τυχαία 4 άτομα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
- τα άτομα να είναι γυναίκες,
 - ένα τουλάχιστον να είναι άνδρας,
 - να υπάρχει μία μόνο γυναίκα.
- 6) Ένα κουτί περιέχει 20 ηλεκτρικές ασφάλειες, από τις οποίες οι 5 είναι ελαττωματικές. Από ένα σύστημα ελέγχου ποιότητας επιλέγονται τυχαία 4 ασφάλειες και δοκιμάζονται.
Αν βρεθούν περισσότερες από μία ελαττωματικές, το κουτί επιστρέφεται ως απαράδεκτο. Να βρείτε την πιθανότητα να επιστραφεί ως απαράδεκτο ένα κουτί που έχει 5 ελαττωματικές ασφάλειες.
- 7) Έχετε δύο σύμβολα το X και I. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορείτε να σχηματίσετε χρησιμοποιώντας 4 φορές το I και 3 φορές το X; Π.χ. μία συμβολοσειρά είναι η XIIIX. Αν κάποιος επιλέξει τυχαία μία τέτοια σειρά, ποια είναι η πιθανότητα το 1ο σύμβολο από αριστερά να είναι X;

Πρόσθετο Υλικό

- 1) Τι από τα παρακάτω είναι πιθανότερο;
- Να κερδίσετε στο τζόκερ έχοντας συμπληρώσει μία στήλη.
 - Να καλέσετε στο τηλέφωνο έναν φίλο ή μία φίλη σας, γνωρίζοντας μόνο τρία από τα δέκα νούμερα του τηλεφώνου του και επιλέγοντας τα υπόλοιπα επτά νούμερα στην τύχη.
- 2) α) Εικοσιτρείς φοιτητές/τριες έχουν μια κοινή ομάδα συζήτησης, σε δικτυακή εφαρμογή επικοινωνίας, για ανταλλαγή σημειώσεων. Σε αυτή την ομάδα ξεκινάει μία συζήτηση για το πότε έχει καθένas/καθεμία γενέθλια. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουν δύο τουλάχιστον φοιτητές/τριες γενέθλια την ίδια ημέρα;
- β) Να εκτιμήσετε το πλήθος των ατόμων μίας ομάδας, ώστε να είναι περισσότερο από 99,9% πιθανό ότι θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα που έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα.

Η τιμή της παράστασης $1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - \kappa + 1)}{365^\kappa}$, όπου $\kappa \leq 365$ φυσικός αριθμός δίνεται (προσεγγιστικά) στον παρακάτω πίνακα, για κάποιες τιμές του κ :

κ	10	20	23	30	60	70
	0,117	0,411	0,507	0,706	0,994	0,999

3) α) Για δύο φυσικούς αριθμούς κ και ν με $\kappa \leq \nu$, να αποδείξετε ότι:

$$\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu - \kappa}$$

β) Πώς ερμηνεύετε συνδυαστικά την παραπάνω ισότητα;

γ) Να αποδείξετε ότι $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu-1}{\kappa} + \binom{\nu-1}{\kappa-1}$.

δ) Μπορείτε να ερμηνεύσετε συνδυαστικά την ισότητα του (γ) χρησιμοποιώντας το ακόλουθο πρόβλημα;

«Από ν όμοια σφαιρίδια που βρίσκονται σε ένα δοχείο σημαδεύουμε ένα με μαρκαδόρο. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τυχαία κ από τα ν σφαιρίδια»;