Μέρος Β΄: Συνδυασμοί
Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Σε ένα πρωτάθλημα συμμετέχουν 7 ομάδες και αγωνίζονται όλες με όλες μία φορά. Να υπολογίσετε πόσοι αγώνες θα γίνουν.

<u>Λύση</u>

Πρόκειται για συνδυασμούς των 7 ομάδων, ανά 2 (εφόσον 2 ομάδες θα δώσουν ένα αγώνα). Δε μας ενδιαφέρει η σειρά που θα επιλέξουμε τις ομάδες.

Άρα $\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 2!} = \frac{42}{2} = 21$ αγώνες.

Άσκηση 2

α) Από ένα σύνολο 10 μαθητών επιλέγουμε 4 μαθητές τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε έναν συγκεκριμένο μαθητή;

β) Να απαντήσετε στο ίδιο ερώτημα αν έχουμε ένα σύνολο ν μαθητών και επιλέγουμε, τυχαία, κ μαθητές.

<u>Λύση</u>

α) Οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 4 από έναν κύκλο 10 μαθητών είναι ίσοι με τους συνδυασμούς των 10 ανά 4.

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!\cdot 4!} = 210$$

Η επιλογή συγκεκριμένου μαθητή ανάμεσα στους 4 σημαίνει ότι οι υπόλοιποι 3 μπορεί να είναι οποιοιδήποτε από τους υπόλοιπους 9. Άρα, οι τρόποι να επιλέξουμε τους 3 από τους 9 είναι:

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{6!\cdot 3!} = 84$$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{84}{210} = \frac{42}{105}$.

β) Ομοίως βρίσκουμε

$$\frac{\binom{\nu-1}{\kappa-1}}{\binom{\nu}{\kappa}} = \frac{\frac{(\nu-1)!}{(\nu-1-\kappa+1)!\cdot(\kappa-1)!}}{\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\cdot\kappa!}} = \frac{\frac{(\nu-1)!}{(\nu-\kappa)!\cdot(\kappa-1)!}}{\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\cdot\kappa!}} = \frac{(\nu-1)!\cdot(\nu-\kappa)!\cdot\kappa!}{(\nu-\kappa)!\cdot(\kappa-1)!\cdot\nu!} = \frac{(\nu-1)!\cdot\kappa!}{(\kappa-1)!\cdot\nu!}$$

Άσκηση 3

Σε ένα κουτί υπάρχουν 5 μπαταρίες, από τις οποίες οι 2 είναι αποφορτισμένες. Επιλέγουμε τυχαία 2 μπαταρίες από το κουτί. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου:

α) Οι μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αποφορτισμένες.

β) Το πολύ μία από τις μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αποφορτισμένη.

γ) Οι μπαταρίες που επιλέξαμε δεν είναι αποφορτισμένες.

<u>Λύση</u>

Συμβολίζουμε με A_1, A_2 τις δύο αφόρτιστες και με Φ_1, Φ_2, Φ_3 τις τρεις φορτισμένες μπαταρίες.

α) α΄ τρόπος

Θεωρούμε το π.τ. «επιλέγουμε τυχαία δύο μπαταρίες, τη μια μετά την άλλη, χωρίς επανατοποθέτηση».

Τότε μια δυνατή έκβαση είναι η A_1A_2, όταν π.χ. επιλέγουμε και στην πρώτη και στη δεύτερη φορά αφόρτιστη μπαταρία.

Ο δ.χ. του π.τ. είναι $\Omega=\{\Phi_1\Phi_2, \Phi_1\Phi_3, \Phi_2\Phi_1, \Phi_2\Phi_3, \Phi_3\Phi_1, \Phi_3\Phi_2, \Phi_1A_1, \Phi_1A_2, \Phi_2A_1, \Phi_2A_2, \Phi_3A_1, \Phi_3A_2, A_1\Phi_1, A_1\Phi_2, A_1\Phi_3, A_2\Phi_1, A_2\Phi_2, A_2\Phi_3, A_1A_2, A_2A_1\}$.

Άρα, το ενδεχόμενο «οι μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αφόρτιστες» έχει πιθανότητα $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

β΄ τρόπος

Θεωρούμε το π.τ. «επιλέγουμε τυχαία δύο μπαταρίες από τις πέντε». Εδώ δεν διακρίνουμε τη σειρά επιλογής (ποια μπαταρία επιλέγουμε πρώτη και ποια δεύτερη). Υπάρχουν συνολικά $\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$ συνδυασμοί.

Ευνοϊκός είναι 1 συνδυασμός, όταν επιλέγουμε δύο αφόρτιστες μπαταρίες.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{1}{10}$.

β) α΄ τρόπος

Σύμφωνα με τη μοντελοποίηση που έχουμε χρησιμοποιήσει στον α΄ τρόπο του προηγούμενου ερωτήματος και τον αντίστοιχο δ.χ., το ευνοϊκό ενδεχόμενο είναι το $\{\Phi_1\Phi_2, \Phi_1\Phi_3, \Phi_2\Phi_1, \Phi_2\Phi_3, \Phi_3\Phi_1, \Phi_3\Phi_2, \Phi_1A_1, \Phi_1A_2, \Phi_2A_1, \Phi_2A_2, \Phi_3A_1, \Phi_3A_2, A_1\Phi_1, A_1\Phi_2, A_1\Phi_3, A_2\Phi_1, A_2\Phi_2, A_2\Phi_3\}$.

Άρα η πιθανότητά του είναι $\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$.

β΄ τρόπος

Θα βρούμε την πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχομένου του ζητούμενου.

Το συμπληρωματικό ενδεχόμενο είναι «και οι δύο από τις μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αποφορτισμένες». Ένας από τους 10 συνδυασμούς πραγματοποιεί το ενδεχόμενο. Άρα η πιθανότητα είναι $\frac{1}{10}$ και συνεπώς του συμπληρωματικού ενδεχομένου είναι $\frac{9}{10}$.

γ) Το ενδεχόμενο «οι μπαταρίες που επιλέξαμε δεν είναι αποφορτισμένες» μπορεί να γραφτεί και ως «οι μπαταρίες που επιλέξαμε είναι φορτισμένες».

α΄ τρόπος

Το ευνοϊκό ενδεχόμενο είναι το $\{\Phi_1\Phi_2, \Phi_1\Phi_3, \Phi_2\Phi_1, \Phi_2\Phi_3, \Phi_3\Phi_1, \Phi_3\Phi_2\}$.}.

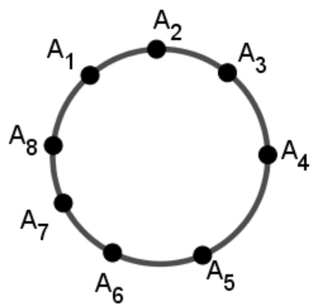
Άρα η πιθανότητα είναι $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

β΄ τρόπος

Οι φορτισμένες μπαταρίες είναι 3 από τις 5. Μπορούμε να επιλέξουμε 2 από τις 3 φορτισμένες μπαταρίες με $\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!\cdot 1!}=3$ τρόπους. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{3}{10}$.

Άσκηση 4

Σε έναν κύκλο δίνονται 8 σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_8$.



α) Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα σημεία αυτά;

β) Πόσες διαγώνιες έχει ένα κανονικό οκτάγωνο;

γ) Πόσα τρίγωνα υπάρχουν με αυτά τα σημεία ως κορυφές;

δ) Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα του ερωτήματος (α). Ποια είναι η πιθανότητα:

i) να μη διέρχεται από το σημείο A_1;

ii) να διέρχεται από το σημείο A_2;

<u>Λύση</u>

α) Ο αριθμός των ευθυγράμμων τμημάτων αντιστοιχούν στους δυνατούς συνδυασμούς των 8 ανά 2.

$$\binom{8}{2}=\frac{8!}{2!\cdot 6!}=\frac{8\cdot 7}{2}=28$$

β) Από το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων που υπολογίσαμε στο α), αφαιρούμε 8, που αντιστοιχούν στις πλευρές του οκταγώνου. Άρα, το πλήθος των διαγωνίων είναι 20.

γ) Εφόσον δεν υπάρχουν πάνω από δύο συνευθειακά σημεία, ο αριθμός των τριγώνων αντιστοιχούν στους συνδυασμούς των 8 ανά 3.

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\cdot 5!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2}=8\cdot 7=56$$

δ) i) Οι συνδυασμοί ανά 2 των σημείων που περιέχουν το A_1 είναι 7 (εφόσον τα υπόλοιπα σημεία είναι 7). Οι υπόλοιποι συνδυασμοί είναι 28 – 7 = 21.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{3}{4}$.

ii) Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{1}{4}$.

Άσκηση 5

Από ένα σύλλογο καθηγητών με 7 άνδρες και 6 γυναίκες επιλέγουμε τυχαία 4 άτομα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) τα άτομα να είναι γυναίκες,

β) ένα τουλάχιστον να είναι άνδρας,

γ) να υπάρχει μία μόνο γυναίκα.

<u>Λύση</u>

Υπάρχουν συνολικά 13 άτομα. Οι δυνατοί συνδυασμοί τους, ανά 4, ανεξαρτήτως φύλου είναι πλήθους $\binom{13}{4}=\frac{13!}{4!\cdot 9!}=\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 2}=13\cdot 11\cdot 5=715$

α) Οι δυνατοί συνδυασμοί των 6 γυναικών, ανά 4 είναι $\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{15}{715}=\frac{3}{143}$.

β) Η πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχομένου «κανένας να μην είναι άνδρας» έχει υπολογιστεί στο ερώτημα (α).

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $1-\frac{3}{143}=\frac{140}{143}$.

γ) Αν υπάρχει ακριβώς μία γυναίκα, τότε τα υπόλοιπα άτομα της τετράδας είναι άνδρες. Επομένως, υπολογίζουμε τους συνδυασμούς των 7 ανδρών ανά 3.

$\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\cdot 4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}=7\cdot 5=35$.

Για κάθε μια από αυτές τις τριάδες μπορούν να προκύψουν τετράδες προσθέτοντας 1 γυναίκα από τις 6. Άρα υπάρχουν $6\cdot 35=210$ τετράδες.

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{210}{715}=\frac{42}{143}$.

Άσκηση 6

Ένα κουτί περιέχει 20 ηλεκτρικές ασφάλειες, από τις οποίες οι 5 είναι ελαττωματικές. Από ένα σύστημα ελέγχου ποιότητας επιλέγονται τυχαία 4 ασφάλειες και δοκιμάζονται. Αν βρεθούν περισσότερες από μία ελαττωματικές, το κουτί επιστρέφεται ως απαράδεκτο. Να βρείτε την πιθανότητα να επιστραφεί ως απαράδεκτο ένα κουτί που έχει 5 ελαττωματικές ασφάλειες.

<u>Λύση</u>

Υπάρχουν $\binom{20}{4}=\frac{20!}{4!\cdot 16!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{4\cdot 3\cdot 2}=5\cdot 19\cdot 3\cdot 17=4845$ συνδυασμοί που μπορούμε να επιλέξουμε τυχαία τις 4 ασφάλειες από το κουτί, τις οποίες θα δοκιμάσουμε.

Θα βρούμε το πλήθος των συνδυασμών για τους οποίους ένα κουτί χαρακτηρίζεται απαράδεκτο και επιστρέφεται. Οι συνδυασμοί είναι:

- Εκείνοι που και οι 4 ασφάλειες είναι ελαττωματικές. Έχουμε 5 ελαττωματικές, άρα σε κάθε τετράδα θα λείπει 1 ελαττωματική. Συνεπώς έχουμε 5 συνδυασμούς. Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του $\binom{5}{4}$.
- Εκείνοι που οι 3 ασφάλειες είναι ελαττωματικές. Οι δυνατοί συνδυασμοί των 5 ελαττωματικών ανά 3 είναι $\binom{5}{3}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$. Για κάθε έναν από αυτούς μπορούμε να επιλέξουμε 1 από τις 15 μη ελαττωματικές ασφάλειες, ώστε να συμπληρωθεί η τετράδα. Άρα έχουμε $15\cdot 10=150$ συνδυασμούς με 3 ελαττωματικές ασφάλειες.
- Εκείνοι που έχουν 2 ελαττωματικές ασφάλειες. Οι δυνατοί συνδυασμοί 5 ελαττωματικών ανά 2 είναι $\binom{5}{2}=10$. Για κάθε έναν από αυτούς μπορούμε να επιλέξουμε 2 μη ελαττωματικές ασφάλειες, για να συμπληρωθεί η τετράδα, με $\binom{15}{2}=105$ τρόπους.

Άρα έχουμε $10\cdot 105=1050$ συνδυασμούς με 2 ελαττωματικές ασφάλειες.
Συνολικά έχουμε $1050+150+5=1205$ συνδυασμούς για τους οποίους το κουτί επιστρέφεται ως απαράδεκτο.
Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{1205}{4845}\simeq 0,249$.

Άσκηση 7

Έχετε δύο σύμβολα το X και I. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορείτε να σχηματίσετε χρησιμοποιώντας 4 φορές το I και 3 φορές το X; Π.χ. μία συμβολοσειρά είναι η XIIXIIX. Αν κάποιος επιλέξει τυχαία μία τέτοια σειρά, ποια είναι η πιθανότητα το 1ο σύμβολο από αριστερά να είναι X;

<u>Λύση</u>

Έχουμε 7 διακριτές κενές θέσεις για να βάλουμε σύμβολα X και I. Έχουμε επίσης 4 «I» και 3 «X».
Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 4 από τις 7 θέσεις για να βάλουμε τα «I»; Δε μας ενδιαφέρει η σειρά καθώς, με όποια σειρά και να επιλέξουμε 4 από τις 7 θέσεις, θα μπει το ίδιο σύμβολο «I». Άρα: $\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}=35$.

(Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν υπολογίσουμε τους δυνατούς συνδυασμούς να επιλέξουμε 3 από τις 7 θέσεις για να βάλουμε τα «X», καθώς $\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\cdot 4!}=35$)

Για κάθε έναν από αυτούς τους τρόπους δεν υπάρχουν διαφορετικές δυνατές τοποθετήσεις των του συμβόλου «Χ», στις υπόλοιπες 3 θέσεις, καθώς πρόκειται για το ίδιο σύμβολο.
Θα υπολογίσουμε το πλήθος των συνδυασμών, που το πρώτο από αριστερά σύμβολο να είναι «Χ». Για τις υπόλοιπες 6 θέσεις έχουμε $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15$ τρόπους να τοποθετήσουμε τα «Χ» (και όπως και προηγουμένως, τα «Ι» τοποθετούνται στις υπόλοιπες θέσεις, χωρίς να υπάρχουν διαφορετικές επιλογές, για κάθε τρόπο από τους 15).
Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$.

Πρόσθετο Υλικό

Άσκηση 1
Τι από τα παρακάτω είναι πιθανότερο;
- Να κερδίσετε στο τζόκερ έχοντας συμπληρώσει μία στήλη.
- Να καλέσετε στο τηλέφωνο έναν φίλο ή μία φίλη σας, γνωρίζοντας μόνο τρία από τα δέκα νούμερα του τηλεφώνου του και επιλέγοντας τα υπόλοιπα επτά νούμερα στην τύχη.

Λύση
Ο πρώτος νικητής στο τζόκερ θα πρέπει να έχει "μαντέψει" σωστά έναν αριθμό από 20 (από το 1 έως το 20) και πέντε αριθμούς από 45 (από το 1 έως το 45). Οπότε, η πιθανότητα να κερδίσει κανείς στο τζόκερ συμπληρώνοντας μία στήλη είναι:

$$P(J) = \frac{1}{20\cdot\binom{45}{5}} = \frac{1}{20\cdot\frac{45!}{40!\cdot 5!}} = \frac{5!}{20\cdot 41\cdot 42\cdot 43\cdot 44\cdot 45} = \frac{1}{24.435.180}$$

Αν ξέρουμε τα τρία πρώτα ψηφία του τηλεφώνου του φίλου μας, μπορούμε να πληκτρολογήσουμε τα υπόλοιπα 7 με 10^7 τρόπους αλλά μόνο σε έναν από αυτούς θα απαντήσει πράγματι ο φίλος μας. Άρα η πιθανότητα να καλέσουμε το φίλο μας είναι:

$$P(\Phi) = \frac{1}{10^7} = \frac{1}{10.000.000}$$

Αν ξέρουμε τρία διαδοχικά (αλλά όχι κατ' ανάγκην τα τρία πρώτα) ψηφία, τότε μπορούμε να επιλέξουμε την τριάδα θέσεων με 8 τρόπους, άρα μπορούμε να πληκτρολογήσουμε τα 10 νούμερα με $8\cdot 10^7$ τρόπους. Άρα τώρα η πιθανότητα γίνεται:

$$P(\Phi) = \frac{1}{8\cdot 10^7} = \frac{1}{80.000.000}$$

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι αν ξέρουμε τα τρία πρώτα ψηφία του τηλεφώνου είναι πιθανότερο να "πετύχουμε" το τηλέφωνο του φίλου μας παρά να κερδίσουμε στο τζόκερ.

Το συμπέρασμα αντιστρέφεται αν ξέρουμε τρία διαδοχικά ψηφία αλλά δεν ξέρουμε τη θέση τους. Ακόμη μικρότερη είναι η πιθανότητα να μιλήσουμε με το φίλο μας αν ξέρουμε τρία τυχαία νούμερα του τηλεφώνου του χωρίς να ξέρουμε τη θέση τους.

Άσκηση 2

α) Εικοσιτρείς φοιτητές/τριες έχουν μια κοινή ομάδα συζήτησης, σε δικτυακή εφαρμογή επικοινωνίας, για ανταλλαγή σημειώσεων. Σε αυτή την ομάδα ξεκινάει μία συζήτηση για το πότε έχει καθένας/καθεμία γενέθλια. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουν δύο τουλάχιστον φοιτητές/τριες γενέθλια την ίδια ημέρα;

β) Να εκτιμήσετε το πλήθος των ατόμων μίας ομάδας, ώστε να είναι περισσότερο από 99,9% πιθανό ότι θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα που έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα.

Η τιμή της παράστασης $1-\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-\kappa+1)}{365^{\kappa}}$, όπου $\kappa\leq 365$ φυσικός αριθμός δίνεται (προσεγγιστικά) στον παρακάτω πίνακα, για κάποιες τιμές του κ:

κ	**10**	**20**	**23**	**30**	**60**	**70**
	0,117	0,411	0,507	0,706	0,994	0,999

Λύση

α) Μπορούμε ευκολότερα να υπολογίσουμε την πιθανότητα όλοι οι φοιτητές να έχουν γενέθλια σε διαφορετικές μέρες. Οι τρόποι να έχουν γενέθλια οι 23 φοιτητές είναι 365^{23} (κάθε φοιτητής μπορεί να έχει γενέθλια οποιαδήποτε από τις 365 μέρες του χρόνου). Σε διαφορετικές μέρες μπορούν να έχουν γενέθλια με $365\cdot 364\cdot 363\cdots 343=\frac{365!}{(365-23)!}$ τρόπους.

Οπότε, η πιθανότητα να έχουν γενέθλια όλοι σε διαφορετικές μέρες είναι

$$\frac{365\cdot 364\cdots(365-23+1)}{365^{23}}$$

και η πιθανότητα να υπάρχουν δύο τουλάχιστον φοιτητές με γενέθλια την ίδια μέρα είναι

$$1-\frac{365\cdot 364\cdots(365-23+1)}{365^{23}}\simeq 0,507$$

Σύμφωνα με τον πίνακα, για να είναι η πιθανότητα μεγαλύτερη από 99,9% να υπάρχουν δύο τουλάχιστον άτομα με γενέθλια την ίδια μέρα, αρκεί το πλήθος των ατόμων να είναι από 70 και πάνω.