η σειρά επιλογής τους». Ομοίως, τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι οι τετράδες που περιέχουν τον Βαγγέλη, τη Μαρία και ακόμα 2 άτομα επιλεγμένα από τους υπόλοιπους 5 επιβάτες:

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=10$$

Άρα:

$$P(B)=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$$

και η πιθανότητα να ταξιδέψουν ο Βαγγέλης και η Μαρία σε όχι διπλανές θέσεις είναι ίση με:

$$P(B-A)=\frac{2}{7}-\frac{1}{21}=\frac{5}{21}$$

β) Θεωρούμε ως το ενδεχόμενο Γ: «ο Βαγγέλης κληρώνεται να ταξιδέψει». Το πλήθος των ευνοϊκών εκβάσεων του Γ υπολογίζεται ως εξής:
Θεωρούμε ότι ο Βαγγέλης έχει κληρωθεί. Με πόσους τρόπους μπορούν να κληρωθούν οι υπόλοιποι 6 επιβάτες στις 3 θέσεις που απομένουν, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά κλήρωσης;
Το πλήθος αυτών των τρόπων είναι ίσο με:

$$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\cdot(6-3)!}=20$$

Τελικά:

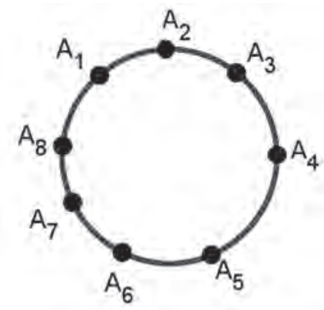
$$P(\Gamma)=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$$

Ασκήσεις – Προβλήματα – Δραστηριότητες

1) Σε ένα πρωτάθλημα συμμετέχουν 7 ομάδες και αγωνίζονται όλες με όλες μία φορά. Να υπολογίσετε πόσοι αγώνες θα γίνουν.

2) **α)** Από ένα σύνολο 10 μαθητών επιλέγουμε 4 μαθητές τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε έναν συγκεκριμένο μαθητή;
β) Να απαντήσετε στο ίδιο ερώτημα αν έχουμε ένα σύνολο ν μαθητών και επιλέγουμε, τυχαία, κ μαθητές.

3) Σε ένα κουτί υπάρχουν 5 μπαταρίες, από τις οποίες οι 2 είναι αποφορτισμένες. Επιλέγουμε τυχαία 2 μπαταρίες από το κουτί. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου:
α) Οι μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αποφορτισμένες.
β) Το πολύ μία από τις μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αποφορτισμένη.
γ) Οι μπαταρίες που επιλέξαμε δεν είναι αποφορτισμένες.



4) Σε έναν κύκλο δίνονται 8 σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_8$.
α) Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα σημεία αυτά;
β) Πόσες διαγώνιες έχει ένα κανονικό οκτάγωνο;
γ) Πόσα τρίγωνα υπάρχουν με αυτά τα σημεία ως κορυφές;
δ) Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα του ερωτήματος (α). Ποια είναι η πιθανότητα:
i) να μη διέρχεται από το σημείο A_1;
ii) να διέρχεται από το σημείο A_2;

5) Από ένα σύλλογο καθηγητών με 7 άνδρες και 6 γυναίκες επιλέγουμε τυχαία 4 άτομα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
α) τα άτομα να είναι γυναίκες,
β) ένα τουλάχιστον να είναι άνδρας,
γ) να υπάρχει μία μόνο γυναίκα.

6) Ένα κουτί περιέχει 20 ηλεκτρικές ασφάλειες, από τις οποίες οι 5 είναι ελαττωματικές. Από ένα σύστημα ελέγχου ποιότητας επιλέγονται τυχαία 4 ασφάλειες και δοκιμάζονται.
Αν βρεθούν περισσότερες από μία ελαττωματικές, το κουτί επιστρέφεται ως απαράδεκτο. Να βρείτε την πιθανότητα να επιστραφεί ως απαράδεκτο ένα κουτί που έχει 5 ελαττωματικές ασφάλειες.

7) Έχετε δύο σύμβολα το X και I. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορείτε να σχηματίσετε χρησιμοποιώντας 4 φορές το I και 3 φορές το X; Π.χ. μία συμβολοσειρά είναι η XIIXIIX. Αν κάποιος επιλέξει τυχαία μία τέτοια σειρά, ποια είναι η πιθανότητα το 1ο σύμβολο από αριστερά να είναι X;

Πρόσθετο Υλικό

1) Τι από τα παρακάτω είναι πιθανότερο;
— Να κερδίσετε στο τζόκερ έχοντας συμπληρώσει μία στήλη.
— Να καλέσετε στο τηλέφωνο έναν φίλο ή μία φίλη σας, γνωρίζοντας μόνο τρία από τα δέκα νούμερα του τηλεφώνου του και επιλέγοντας τα υπόλοιπα επτά νούμερα στην τύχη.

2) **α)** Εικοσιτρείς φοιτητές/τριες έχουν μια κοινή ομάδα συζήτησης, σε δικτυακή εφαρμογή επικοινωνίας, για ανταλλαγή σημειώσεων. Σε αυτή την ομάδα ξεκινάει μία συζήτηση για το πότε έχει καθένας/καθεμία γενέθλια. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουν δύο τουλάχιστον φοιτητές/τριες γενέθλια την ίδια ημέρα;
β) Να εκτιμήσετε το πλήθος των ατόμων μίας ομάδας, ώστε να είναι περισσότερο από 99,9% πιθανό ότι θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα που έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα.

Η τιμή της παράστασης $1-\dfrac{365\cdot 364\cdot \ldots \cdot (365-\kappa+1)}{365^{\kappa}}$, όπου κ ≤ 365 φυσικός αριθμός δίνεται (προσεγγιστικά) στον παρακάτω πίνακα, για κάποιες τιμές του κ:

κ	10	20	23	30	60	70
	0,117	0,411	0,507	0,706	0,994	0,999

3) **α)** Για δύο φυσικούς αριθμούς κ και ν με κ ≤ ν, να αποδείξετε ότι:

$$\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu}{\nu-\kappa}$$

β) Πώς ερμηνεύετε συνδυαστικά την παραπάνω ισότητα;

γ) Να αποδείξετε ότι $\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu-1}{\kappa}+\binom{\nu-1}{\kappa-1}$.

δ) Μπορείτε να ερμηνεύσετε συνδυαστικά την ισότητα του (γ) χρησιμοποιώντας το ακόλουθο πρόβλημα;

> «Από ν όμοια σφαιρίδια που βρίσκονται σε ένα δοχείο σημαδεύουμε ένα με μαρκαδόρο. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τυχαία κ από τα ν σφαιρίδια»;