ΕΝΟΤΗΤΑ 1.4. ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ & ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Μέρος Α΄: Διατάξεις – Μεταθέσεις

Διερεύνηση

Ένας μεγάλος δειγματικός χώρος

Σε ένα συγκεκριμένο μαιευτήριο κρατείται αρχείο γεννήσεων και, όπως είναι αναμενόμενο, καταγράφεται το φύλο κάθε νεογέννητου. Ποιο από τα δύο παρακάτω ενδεχόμενα είναι πιθανότερο;

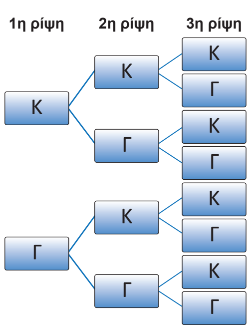
— τα 2 πρώτα παιδιά του χρόνου είναι αγόρια.

— τα 5 πρώτα παιδιά του χρόνου είναι αγόρια.

Βασικές μαθηματικές έννοιες-Ιδέες-Διεργασίες

Η Βασική Αρχή Απαρίθμησης

Σε πειράματα τύχης που οι δυνατές εκβάσεις είναι ισοπίθανες, ο υπολογισμός της πιθανότητας ενός ενδεχομένου ανάγεται στο μέτρημα του πλήθους των εκβάσεων, ευνοϊκών ή/και δυνατών. Συχνά, το πλήθος αυτό είναι πολύ μεγάλος αριθμός και είναι δύσκολο να βρεθεί με καταγραφή και καταμέτρηση των εκβάσεων, μία προς μία. Έτσι, σε αυτήν την παράγραφο θα μάθουμε τρόπους να μετράμε αποτελεσματικά το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου και θα χρησιμοποιήσουμε αυτούς τους τρόπους για να λύσουμε καθημερινά προβλήματα.



Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων τριών ρίψεων ενός αμερόληπτου κέρματος είναι ίσο με 8, όπως βλέπουμε με τη βοήθεια του διπλανού δενδροδιαγράμματος. Όμως, αν είχαμε περισσότερες ρίψεις, το δενδροδιάγραμμα θα ήταν μεγαλύτερο και η κατασκευή του δυσκολότερη. Άρα, θα ήταν σκόπιμο να είχαμε άλλον τρόπο υπολογισμού του πλήθους των δυνατών αποτελεσμάτων, χωρίς να είναι απαραίτητη η καταγραφή τους.

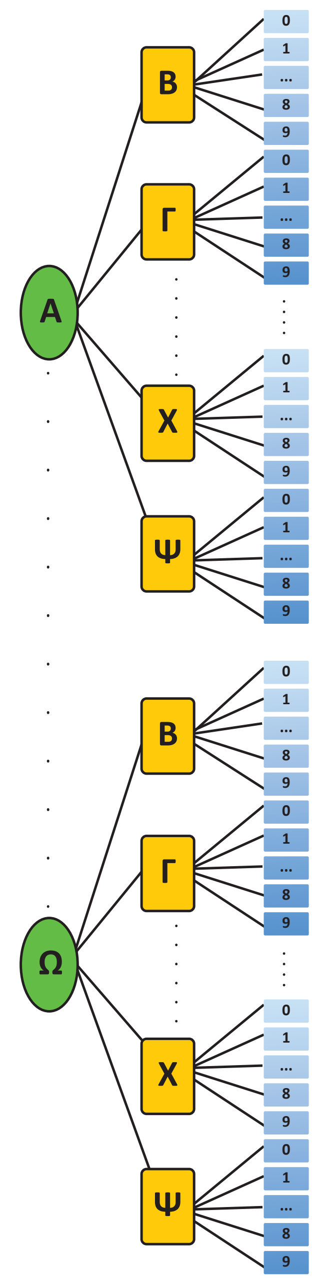
Ξεκινώντας από την περίπτωση των τριών ρίψεων, το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων υπολογίζεται και με τον εξής τρόπο:

Τα δυνατά αποτελέσματα της 1ης αλλά και κάθε ρίψης είναι 2, δηλαδή Κ (κεφαλή) ή Γ (γράμματα). Για κάθε δυνατό αποτέλεσμα της 1ης ρίψης, έχουμε 2 δυνατά αποτελέσματα της 2ης ρίψης. Συνεπώς, τα δυνατά αποτελέσματα των δύο πρώτων ρίψεων είναι $2 \cdot 2 = 4$. Για κάθε ένα από αυτά έχουμε 2 δυνατά αποτελέσματα της 3ης ρίψης.

Άρα τα δυνατά αποτελέσματα των τριών ρίψεων είναι $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

Σκεπτόμενοι με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το πλήθος των δυνατών απότελεσμάτων 10 ρίψεων ενός κέρματος είναι ίσο με 2^{10} .

Ας δούμε ένα κάπως διαφορετικό παράδειγμα. Οι διοργανωτές ενός αγώνα δρόμου 5 χιλιομέτρων χρειάζεται να δώσουν πριν τον αγώνα σε κάθε δρομέα έναν μοναδικό κωδικό, ώστε ένα αυτοματοποιημένο σύστημα να καταγράφει τον χρόνο τερματισμού του. Ένας από τους υπεύθυνους του αγώνα πρότεινε να δοθεί σε κάθε συμμετέχοντα ένας κωδικός από τρία διατεταγμένα σύμβολα, ώστε: Το πρώτο να είναι ένα φωνήεν, το δεύτερο να είναι ένα σύμφωνο από το ελληνικό αλφάβητο και το τρίτο να είναι ένα ψηφίο του δεκαδικού συστήματος. Μία τέτοια τριάδα, για παράδειγμα, είναι ΕΜ2. Πόσοι είναι οι δυνατοί κωδικοί που μπορούν να δοθούν στους δρομείς με αυτόν τον τρόπο;



Για να απαντήσουμε, χωρίζουμε την επιλογή του κωδικού ενός δρομέα στα 5 χιλιόμετρα σε τρεις φάσεις. Στην πρώτη φάση επιλέγουμε το φωνήεν. Αυτό γίνεται με 7 τρόπους. Στη δεύτερη φάση επιλέγουμε το σύμφωνο. Τα σύμφωνα είναι 17, άρα για κάθε επιλογή φωνήεντος μπορούμε να επιλέξουμε με 17 τρόπους το σύμφωνο. Άρα τα δύο γράμματα τα επιλέγουμε με $7 \cdot 17 = 119$ διαφορετικούς τρόπους. Για κάθε έναν από αυτούς, στην τρίτη φάση επιλέγουμε έναν από τους 10 μονοψήφιους αριθμούς. Συνεπώς, οι δυνατές τριάδες είναι $119 \cdot 10 = 1190$.

Στα παραπάνω παραδείγματα εφαρμόσαμε τη **βασική αρχή απαρίθμησης**, την οποία γενικεύοντας τον προηγούμενο συλλογισμό, διατυπώνουμε ως εξής:

Βασική Αρχή Απαρίθμησης
Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ν διαδοχικές φάσεις (ή επιλογές) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$. Αν η φ_1 μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_1 τρόπους και για καθέναν από αυτούς η φ_2 μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_2 τρόπους,…, και για καθέναν από όλους αυτούς τους τρόπους η φ_ν μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_ν τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot \ldots \cdot \kappa_\nu$ τρόπους.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα των 10 ρίψεων του κέρματος, η διαδικασία πραγματοποιείται σε 10 φάσεις (όσες είναι οι ρίψεις). Κάθε φάση πραγματοποιείται με 2 τρόπους (Κ ή Γ). Ένα δυνατό αποτέλεσμα του πειράματος τύχης, για παράδειγμα, είναι το:

(Κ, Κ, Γ, Κ, Γ, Κ, Κ, Κ, Κ, Γ)

Κάθε δυνατό αποτέλεσμα είναι μία διατεταγμένη 10-άδα από τα στοιχεία του συνόλου {Κ, Γ}. Κάθε τέτοια 10-άδα ονομάζεται **διάταξη των 2 ανά 10**

Διατάξεις

Διάταξη των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε στοιχεία του Α σε μια σειρά κ θέσεων επιτρέποντας επαναλήψεις.

Το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ είναι ίσο με $ν^κ$.

ή σε δεκάδες (επιτρέποντας επαναλήψεις των στοιχείων του {Κ, Γ}). Το πλήθος των διατάξεων των 2 ανά 10 είναι ίσο με 2^{10}.

Διατάξεις χωρίς επαναλήψεις

Διάταξη των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ χωρίς επανάληψη, με κ ≤ ν, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε κ στοιχεία του Α και να τα βάλουμε σε σειρά.

Το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ χωρίς επανάληψεις με κ ≤ ν συμβολίζεται με $(ν)_κ$ και είναι ίσο με $ν·(ν - 1)·...·(ν - κ + 1)$.

Ας υποθέσουμε ότι το πενταμελές μαθητικό συμβούλιο της τάξης σας συνεδριάζει για να εκλέξει 3 διαφορετικά άτομα ως πρόεδρο, γραμματέα και ταμία. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτή η εκλογή; Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορεί ένας μαθητής να εκλεγεί σε πάνω από μία θέση (π.χ. πρόεδρος και γραμματέας), άρα το πλήθος των διαφορετικών τρόπων είναι μικρότερο από το πλήθος των διατάξεων των 5 ανά 3.

Η διαδικασία εκλογής μπορεί να χωριστεί σε τρεις φάσεις: 1η φάση η εκλογή προέδρου, 2η φάση η εκλογή γραμματέα και 3η φάση η εκλογή ταμία. Η 1η φάση μπορεί να γίνει με 5 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη του πενταμελούς. Η 2η φάση μπορεί να γίνει με 4 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη του πενταμελούς που απέμειναν ύστερα από την εκλογή του προέδρου. Η 3η φάση μπορεί να γίνει με 3 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη του πενταμελούς που απέμειναν ύστερα και από την εκλογή του γραμματέα. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, το πλήθος των διαφορετικών δυνατών τριάδων είναι $5·4·3 = 60$. Κάθε τέτοια τριάδα ονομάζεται **διάταξη των 5 ανά 3 χωρίς επαναλήψεις**.

Μεταθέσεις

Μετάθεση των V στοιχείων ενός συνόλου Α, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τα βάλουμε σε σειρά.

Το πλήθος των μεταθέσεων ν στοιχείων είναι $ν · (ν - 1) · ... · 2 · 1$

Μία ειδική περίπτωση διατάξεων χωρίς επαναλήψεις είναι η περίπτωση που θέλουμε να βάλουμε σε σειρά τα στοιχεία ενός συνόλου και περιγράφεται στο επόμενο παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που μπορούν να καθίσουν 5 θεατές μίας θεατρικής παράστασης, που μόλις μπήκαν στο θέατρο, στις 5 τελευταίες κενές θέσεις. Σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης οι διαφορετικοί τρόποι είναι $5·4·3·2·1 = 120$, καθώς ο πρώτος που θα καθίσει έχει 5 επιλογές, ο δεύτερος έχει 1 λιγότερη επιλογή, δηλαδή 4, ο τρίτος έχει 3 επιλογές, ο τέταρτος 2 επιλογές και ο πέμπτος 1 επιλογή. Κάθε διαφορετικός τρόπος να καθίσουν είναι μία **μετάθεση** 5 στοιχείων.

Ένας χρήσιμος συμβολισμός: Το παραγοντικό

Όπως είδαμε (και θα φανεί ακόμα περισσότερο στη συνέχεια) είναι χρήσιμο να υπολογίζουμε γινόμενα διαδοχικών φυσικών αριθμών. Συχνά θα χρειαστεί να υπολογιστούν τέτοια μεγάλα γινόμενα. Το γινόμενο των φυσικών αριθμών 1, 2, 3,…..,ν-1, ν συμβολίζεται ως ν! και διαβάζεται «ν παραγοντικό».

Εξ ορισμού $0! = 1$

Είναι $ν! =1·2· 3·…..· (ν-1) ·ν$. Για παράδειγμα, $5! =5·4·3·2·1$.

Με τη χρήση του παραγοντικού το πλήθος των μεταθέσεων 5 στοιχείων γράφεται 5!, ενώ το πλήθος των διατάξεων των 5 ανα 3 χωρίς επαναλήψεις, δηλαδή 5·4·3 γράφεται και ως $\frac{5!}{(5-3)!}$, που σε κάποιες περιπτώσεις είναι ένας «βολικός» συμβολισμός.

— *Το πλήθος των μεταθέσεων ν στοιχείων είναι ν!*

— *Με αυτόν τον συμβολισμό, το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ χωρίς επαναλήψεις είναι*

$$(\nu)_\kappa = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$$

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Σε μία τάξη υπάρχουν ακριβώς 25 καρέκλες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν σε αυτές οι 25 μαθητές/τριες μιας τάξης;

Λύση

Κάθε τρόπος είναι μία μετάθεση των 25 μαθητών/τριών. Άρα οι διαφορετικοί τρόποι να καθίσουν είναι πλήθους 25!, δηλαδή γύρω στα 15,5 πεντάκις εκατομμύρια.

Εφαρμογή 2

Ο ιδιοκτήτης ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή έχει ξεχάσει τον προσωπικό του κωδικό χρήστη για να εισέλθει στον λογαριασμό του. Το μόνο που θυμάται είναι ότι ο κωδικός αποτελείται από οκτώ πεζά γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου. Σκέφτεται να ετοιμάσει μια λίστα με όλους τους πιθανούς κωδικούς. Ο χρόνος που χρειάζεται για να γράψει σε χαρτί έναν τυχαίο τέτοιο κωδικό χρήστη είναι 3 δευτερόλεπτα.

α) Πόσο χρόνο χρειάζεται ο χρήστης για γράψει τη λίστα;

β) Ο χρήστης θυμήθηκε ότι στον οκταψήφιο κωδικό του, κανένα γράμμα δεν επαναλαμβάνεται. Πόσος χρόνος χρειάζεται για να γραφτεί η λίστα, σε αυτή την περίπτωση;

Λύση

Το αγγλικό αλφάβητο έχει 26 γράμματα.

α) Κάθε πιθανός κωδικός είναι μία διάταξη των 26 γραμμάτων σε οκτάδα, με δυνατές τις επαναλήψεις, άρα το πλήθος των πιθανών κωδικών είναι 26^8 = 208.827.064.576. Συνεπώς, ο απαιτούμενος χρόνος για να γραφτεί η λίστα είναι 3·208.827.064.576 δευτερόλεπτα. Επίσης, κάθε εικοσιτετράωρο έχει 60·60·24 = 86400 δευτερόλεπτα. Άρα για να γραφτεί η λίστα χρειάζονται 7.250.940 εικοσιτετράωρα.

β) Σε αυτή την περίπτωση κάθε κωδικός είναι μία διάταξη των 26 γραμμάτων σε οκτάδα, χωρίς να επιτρέπονται επαναλήψεις γραμμάτων, άρα το πλήθος των πιθανών κωδικών είναι $\frac{26!}{(26-8)!}$ =

$$\frac{26!}{18!} = \frac{26\cdot 25\cdot \ldots \cdot 19\cdot 18!}{18!} = 26\cdot 25\cdot \ldots \cdot 19 = 62.990.928.000$$

Ο χρόνος που χρειάζεται να γραφτεί η λίστα είναι 188.972.784.000 δευτερόλεπτα, ή 2.187.185 εικοσιτετράωρα.

Εφαρμογή 3

Μία τράπουλα έχει 52 διαφορετικά φύλλα. Αν ανακατέψουμε την τράπουλα και ανοίξουμε τα 4 πρώτα φύλλα, ποια είναι η πιθανότητα αυτά να είναι άσοι;

Λύση

Πρώτα θα υπολογίσουμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπούν σε σειρά (δηλαδή να μετατεθούν) τα 52 φύλλα μετά το ανακάτεμα. Πρόκειται για μεταθέσεις 52 στοιχείων, άρα το πλήθος είναι 52!

Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι τα 4 πρώτα φύλλα είναι άσοι. Πρώτα υπολογίζουμε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που έχουν μετατεθεί τα υπόλοιπα 48 φύλλα. Αυτό είναι ίσο με 48!.

Όμως για κάθε έναν από αυτούς τους 48! τρόπους, υπάρχουν 4! τρόποι να εμφανιστούν οι 4 άσοι, που -όπως υποθέσαμε- είναι πρώτοι, πριν τα 48 φύλλα. Συνεπώς, από τη βασική αρχή απαρίθμησης το πλήθος των διαφορετικών τρόπων να εμφανιστούν πρώτα οι 4 άσοι είναι:

$$(\text{μεταθέσεις 4 στοιχείων})\cdot(\text{μεταθέσεις 48 στοιχείων}) = 4!\cdot 48!$$

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε το πείραμα τύχης «ανακατεύουμε μία συνηθισμένη τράπουλα 52 φύλλων» το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων (δηλαδή των δυνατών μεταθέσεων των φύλλων της τράπουλας) είναι 52!. Θεωρούμε επίσης ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Έστω το ενδεχόμενο Α: «ανοίγουμε τα 4 πρώτα φύλλα της τράπουλας και αυτά είναι άσοι», τότε το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι 4!·48.

Άρα από τον κλασικό ορισμό

$$P(A) = \frac{4!\cdot 48!}{52!} = \frac{4!\cdot 48!}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48!} = \frac{4!}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49} = \frac{6}{1.624.350} = \frac{1}{270.725}$$

Εφαρμογή 4

Δύο φοιτητές, ο Βαγγέλης και η Μαρία θέλουν να ταξιδέψουν με το λεωφορείο που εκτελεί το δρομολόγιο των 5:30 «Αθήνα-Πάτρα», αλλά υπάρχουν μόνο 4 κενές θέσεις, οι 2, 13, 14 και 56. Για τις 4 αυτές θέσεις υπάρχουν 7 υποψήφιοι επιβάτες (μαζί με το Βαγγέλη και τη Μαρία). Όμως κανείς τους δεν προηγείται· θα γίνει κλήρωση μεταξύ τους για το ποιος θα ταξιδέψει με αυτό το δρομολόγιο. Να βρείτε την πιθανότητα να ταξιδέψουν και τα δύο παιδιά:

α) ο Βαγγέλης στη θέση 56 κι η Μαρία στη θέση 2,

β) σε διπλανές θέσεις.

Λύση

α) Οι τρόποι που μπορούν να κληρωθούν 4 θέσεις σε 7 επιβάτες είναι 7·6·5·4 = 840 (διατάξεις των 7 ανά 4 χωρίς επαναλήψεις). Αν θεωρήσουμε το

Κάτοψη του λεωφορείου

πείραμα τύχης «κληρώνουμε τις 4 θέσεις στους 7 επιβάτες» και θεωρήσουμε ισοπίθανες όλες τις πιθανές εκβάσεις, τότε αυτές είναι 840.

Πρέπει να υπολογίσουμε το πλήθος ευνοϊκών εκβάσεων του ενδεχομένου «ο Βαγγέλης στη θέση 56 κι η Μαρία στη θέση 2». Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα αρκεί να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν οι θέσεις 13 και 14, δηλαδή οι 2 θέσεις που μένουν για τα υπόλοιπα 5 άτομα (διατάξεις των 5 ανά 2 χωρίς επαναλήψεις). Αυτό γίνεται με 5·4 = 20 τρόπους. Συνεπώς, από τον κλασικό ορισμό, η πιθανότητα να καθίσουν ο Βαγγέλης και η Μαρία στις θέσεις 56 και 2 είναι $\frac{20}{840}=\frac{1}{42}$.

Θέση 56	*Θέση 2*	*Θέση 13*	*Θέση 14*
Βαγγ	*Μαρ*	*;*	*;*

Για το ερώτημα (α)

β) Οι μόνες διπλανές θέσεις είναι οι 13 και 14. Οι ευνοϊκές εκβάσεις είναι εκείνες που ο Βαγγέλης και η Μαρία κληρώνονται στις θέσεις αυτές, χωρίς να έχει σημασία ποιος από τους δύο κληρώνεται στην κάθε θέση. Υποθέτουμε ότι ο Βαγγέλης και η Μαρία κληρώνονται σε αυτές τις θέσεις. Ομοίως με το (α), οι υπόλοιποι επιβάτες κληρώνονται με 20 τρόπους στις θέσεις που μένουν (56 και 2). Ωστόσο, για κάθε έναν από αυτούς τους τρόπους υπάρχουν 2 μεταθέσεις του Βαγγέλη και της Μαρίας στις θέσεις 13 και 14. Άρα από την βασική αρχή απαρίθμησης οι ευνοϊκές εκβάσεις είναι 2 · 20 = 40. Άρα η πιθανότητα ο Βαγγέλης και η Μαρία να καθίσουν σε διπλανές θέσεις είναι ίση με $\frac{40}{840}=\frac{1}{21}$.

Θέση 13	*Θέση 14*	*Θέση 56*	*Θέση 2*
Βαγγ	*Μαρ*	*;*	*;*
Μαρ	*Βαγγ*		

Για το ερώτημα (β)

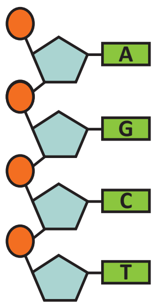
Ασκήσεις – Προβλήματα – Δραστηριότητες

1) Οι διοργανωτές αγώνων δρόμου 5 και 10 χιλιομέτρων, που θα γίνουν την ίδια ημέρα, θέλουν να δώσουν έναν μοναδικό κωδικό σε κάθε συμμετέχοντα. Επίσης, θα ήθελαν κάθε κωδικός συμμετέχοντα στα 5 χιλιόμετρα να είναι ευδιάκριτος από τον κωδικό ενός συμμετέχοντα στα 10 χιλιόμετρα. Στα 5 χιλιόμετρα υπάρχουν 2.573 συμμετέχοντες, ενώ στα 10 χιλιόμετρα υπάρχουν 1.113 συμμετέχοντες. Αποφασίστηκε για τα 5 χιλιόμετρα να δοθεί σε κάθε συμμετέχοντα ένας κωδικός από τρία διατεταγμένα σύμβολα, ώστε:
Το πρώτο και το δεύτερο να είναι τυχαίο σύμφωνο από το ελληνικό αλφάβητο και το τρίτο να είναι ένας τυχαίος μονοψήφιος αριθμός, π.χ. ΝΜ2.

α) Επαρκούν οι διατεταγμένες τριάδες αυτές για όλους τους συμμετέχοντες στα 5 χιλιόμετρα;

β) Τι θα προτείνατε στους διοργανωτές να κάνουν για τα 10 χιλιόμετρα;

2) Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα γράμματα Α, Ε, Ε, Θ, Ι, Υ το ένα μετά από το άλλο; Ποια είναι η πιθανότητα, αν τοποθετήσουμε τα γράμματα σε τυχαία σειρά, να σχηματιστεί η λέξη ΕΥΘΕΙΑ;



3) Οι αζωτούχες βάσεις που μπορεί να έχει ένα νουκλεοτίδιο είναι η Αδενίνη (A), η Γουανίνη (G), η Κυτοσίνη (C) και η Θυμίνη (T). Τα νουκλεοτίδια, ανάλογα με την σειρά τους σε τριάδες, καθορίζουν ποιο αμινοξύ θα τοποθετηθεί στην αντίστοιχη θέση κατά τη σύνθεση των πρωτεϊνών. Οι τριάδες αυτές ονομάζονται κωδικόνια.

α) Πόσα διαφορετικά κωδικόνια μπορούν να σχηματιστούν;

β) Συνολικά τα κωδικόνια αντιστοιχούν στον σχηματισμό 20 αμινοξέων. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα κωδικόνιο, είναι ίδια η πιθανότητα να αντιστοιχεί σε ένα από τα 20 αμινοξέα (θα χρειαστεί να αναζητήσετε πληροφορίες για την αντιστοιχία κωδικονίων και αμινοξέων για να απαντήσετε);

4) Αν κάποιος διαθέτει 2 μπουφάν (ένα μαύρο κι ένα μπλε), 4 παντελόνια, 3 μπλούζες, 10 ζευγάρια κάλτσες και 3 ζευγάρια παπούτσια, με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί, φορώντας από όλα τα είδη; Αν ένας επιλέξει τυχαία έναν από αυτούς τους τρόπους για να ντυθεί φορώντας ένα μπουφάν, ένα παντελόνι, μία μπλούζα, ένα ζευγάρι κάλτσες και ένα ζευγάρι παπούτσια, ποια είναι η πιθανότητα να φοράει το μπλε μπουφάν;

5) Αν ρίξουμε ένα αμερόληπτο ζάρι 4 φορές ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε 4 διαφορετικά αποτελέσματα;

6) **α)** Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας μπορούμε να κατασκευάσουμε που περιέχουν στη σειρά τρία κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από έναν τετραψήφιο αριθμό;

β) Από το σύνολο των πινακίδων που περιγράφονται στο ερώτημα (α), μπορούν να χρησιμοποιηθούν εκείνες που τα γράμματά τους ανήκουν και στο λατινικό αλφάβητο. Αν επιλέξουμε τυχαία μία πινακίδα του ερωτήματος, (α) ποια είναι η πιθανότητα να είναι κατάλληλη προς χρήση;

7) Ο Θανάσης, ο Μιχάλης, ο Κώστας, ο Αντρέι κι ο Δημήτρης είναι οι παίκτες της σχολικής ομάδας μπάσκετ των αγοριών του Γ1 και ο προπονητής της ομάδας πρόκειται να τους δώσει τις εμφανίσεις τους για τους σχολικούς αγώνες.

α) Οι διαθέσιμες εμφανίσεις έχουν τυπωμένα τα νούμερα 7, 13, 15, 20 και 27. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν οι εμφανίσεις στους μαθητές; Αν οι εμφανίσεις μοιραστούν τυχαία στους παίκτες, ποια είναι η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης τη φανέλα με το 7; Ποια είναι η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης τη φανέλα με το 7 και να μην πάρει ο Θανάσης τη φανέλα με το 13;

β) Να απαντήσετε στα ίδια ερωτήματα, αν οι διαθέσιμες εμφανίσεις είναι οι 7, 11, 13, 15, 19, 20 και 27.

8) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 4 άτομα σε 6 θέσεις μιας σειράς; Ποια είναι η πιθανότητα η τελευταία θέση να μείνει κενή;

9) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά 4 αγόρια και 3 κορίτσια; Αν επιλέξουμε τη σειρά των 7 παιδιών τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια;

10) Δέκα παιδιά, μεταξύ των οποίων ο Κώστας και η Ελένη, θα καθίσουν τυχαία ο ένας δίπλα στον άλλον σε δέκα θέσεις. Ποια είναι η πιθανότητα ο Κώστας και η Ελένη να καθίσουν σε διπλανές θέσεις;

11) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου τέσσερα τυχαία επιλεγμένα άτομα από την τάξη σας (ή το σχολείο σας), να έχουν γεννηθεί σε τέσσερις διαφορετικές εποχές του έτους.

Μέρος Β΄: Συνδυασμοί

Διερεύνηση

Έχετε να τοποθετήσετε τρεις επιστολές σε φακέλους. Επίσης έχετε στη διάθεσή σας τέσσερις φακέλους διαφορετικού χρώματος: κίτρινο, μπλε, κόκκινο και πράσινο. Μόνο μία επιστολή μπαίνει σε κάθε φάκελο. Αν κάνετε τυχαία την επιλογή των φακέλων που θα χρησιμοποιήσετε, πόσοι τρόποι υπάρχουν να τοποθετηθούν οι επιστολές στους φακέλους:

α) αν η πρώτη επιστολή είναι ευχαριστήρια, η δεύτερη είναι συγχαρητήρια και η τρίτη είναι πρόσκληση;

β) αν και οι τρεις επιστολές είναι ακριβώς ίδιες;

Βασικές μαθηματικές έννοιες-Ιδέες-Διεργασίες

Συνδυασμοί

Συχνά είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε το πλήθος των δυνατών τρόπων να επιλεγούν κ από τα ν στοιχεία ενός συνόλου, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής τους. Κάθε τέτοιος τρόπος ονομάζεται συνδυασμός των ν ανά κ. Με στόχο να βρούμε έναν τρόπο υπολογισμού του πλήθους των συνδυασμών των ν ανά κ, στη γενική περίπτωση, ας δούμε πρώτα το επόμενο παράδειγμα.

Συνδυασμός των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ λέγεται κάθε υποσύνολο του Α με κ στοιχεία.

Ας υποθέσουμε ότι από τους 5 παίκτες μίας σχολικής ομάδας μπάσκετ πρέπει να επιλεγούν 3 για να λάβουν μέρος στο σχολικό πρωτάθλημα μπάσκετ με τίτλο «τρεις εναντίον τριών». Ο καθηγητής Φυσικής Αγωγής του σχολείου, αφού επιλέξει τους παίκτες, πρέπει να γράψει τα ονόματά τους στο διπλανό καρτελάκι δίπλα στα νούμερα που θα έχουν στις εμφανίσεις τους. Κάθε παίκτης θα έχει