ΕΝΟΤΗΤΑ 1.4 : ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Μέρος Α΄: Διατάξεις – Μεταθέσεις

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Οι διοργανωτές αγώνων δρόμου 5 και 10 χιλιομέτρων, που θα γίνουν την ίδια ημέρα, θέλουν να δώσουν έναν μοναδικό κωδικό σε κάθε συμμετέχοντα. Επίσης, θα ήθελαν κάθε κωδικός συμμετέχοντα στα 5 χιλιόμετρα να είναι ευδιάκριτος από τον κωδικό ενός συμμετέχοντα στα 10 χιλιόμετρα. Στα 5 χιλιόμετρα υπάρχουν 2.573 συμμετέχοντες, ενώ στα 10 χιλιόμετρα υπάρχουν 1.113 συμμετέχοντες. Αποφασίστηκε για τα 5 χιλιόμετρα να δοθεί σε κάθε συμμετέχοντα ένας κωδικός από τρία διατεταγμένα σύμβολα, ώστε:
Το πρώτο και το δεύτερο να είναι τυχαίο σύμφωνο από το ελληνικό αλφάβητο και το τρίτο να είναι ένας τυχαίος μονοψήφιος αριθμός, π.χ. ΝΜ2.
α) Επαρκούν οι διατεταγμένες τριάδες αυτές για όλους τους συμμετέχοντες στα 5 χιλιόμετρα;
β) Τι θα προτείνατε στους διοργανωτές να κάνουν για τα 10 χιλιόμετρα;

Λύση

α) Οι διατεταγμένες τριάδες είναι πλήθους $17\cdot 17\cdot 10=2890$ (εφόσον υπάρχουν 17 σύμφωνα στο ελληνικό αλφάβητο), άρα επαρκούν, καθώς οι συμμετέχοντες στα 5 χιλιόμετρα είναι 2573.
β) Μια απλή λύση θα ήταν να προστεθεί ένα ακόμα σύμβολο και οι κωδικοί στα 10 χιλιόμετρα να είναι τετραψήφιοι. Όμως έτσι δημιουργούνται πολλοί κωδικοί χωρίς να χρειάζονται.
Μια άλλη λύση θα ήταν να χρησιμοποιηθούν κωδικοί με τρία διατεταγμένα σύμβολα για τους δύο αγώνες, ως εξής: στις δύο πρώτες θέσεις αξιοποιούνται όλα τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και για το τρίτο σύμβολο να χρησιμοποιηθούν τα ψηφία 0 έως 7 για τους αγώνες των 5 χιλιομέτρων και τα σύμβολά 8 και 9 για τους αγώνες των 10 χιλιομέτρων.
Συνεπώς για τα 5 χιλιόμετρα υπάρχουν $24\cdot 24\cdot 8=4608$ κωδικοί, ενώ για τον αγώνα των 10 χιλιομέτρων υπάρχουν $24\cdot 24\cdot 2=1152$ κωδικοί.

Άσκηση 2

Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα γράμματα Α, Ε, Ε, Θ, Ι, Υ το ένα μετά από το άλλο; Ποια είναι η πιθανότητα, αν τοποθετήσουμε τα γράμματα σε τυχαία σειρά, να σχηματιστεί η λέξη ΕΥΘΕΙΑ;

Λύση

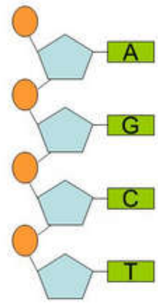
Πρόκειται για μεταθέσεις των 6 γραμμάτων, οι οποίες έχουν πλήθος $6!=$ $=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$. Άρα τοποθετούνται με 720 τρόπους.

Από όλους αυτούς τους τρόπους, 2 μόνο μας δίνουν τη λέξη ευθεία, επειδή έχουμε 2 Ε. Παρακάτω, στις κενές θέσεις τοποθετούνται τα Ε, άρα έχουμε 2 τρόπους να τα τοποθετήσουμε.

_ Υ Θ _ Ι Α

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{2}{720}=\frac{1}{360}$.

Άσκηση 3



Οι αζωτούχες βάσεις που μπορεί να έχει ένα νουκλεοτίδιο είναι η Αδενίνη (A), η Γουανίνη (G), η Κυτοσίνη (C) και η Θυμίνη (T). Τα νουκλεοτίδια, ανάλογα με την σειρά τους σε τριάδες, καθορίζουν ποιο αμινοξύ θα τοποθετηθεί στην αντίστοιχη θέση κατά τη σύνθεση των πρωτεϊνών. Οι τριάδες αυτές ονομάζονται κωδικόνια.

α) Πόσα διαφορετικά κωδικόνια μπορούν να σχηματιστούν;

β) Συνολικά τα κωδικόνια αντιστοιχούν στο σχηματισμό 20 αμινοξέων. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα κωδικόνιο είναι ίδια η πιθανότητα να αντιστοιχεί σε ένα από τα 20 αμινοξέα (θα χρειαστεί να αναζητήσετε πληροφορίες για την αντιστοιχία κωδικονίων και αμινοξέων για να απαντήσετε);

Λύση

α) Το πλήθος των κωδικονίων είναι το πλήθος των διατάξεων των 4 ανά 3 με επανάληψη. Άρα, $4^3=64$.

β) Αναζητώντας την αντιστοιχία κωδικονίων και αμινοξέων, βλέπουμε ότι σε κάποια αμινοξέα αντιστοιχεί 1 κωδικόνιο, σε άλλα 2 διαφορετικά κωδικόνια, 3 διαφορετικά κωδικόνια, 4 διαφορετικά κωδικόνια και 6 διαφορετικά κωδικόνια. Άρα επιλέγοντας τυχαία 1 κωδικόνιο η πιθανότητα αυτό να αντιστοιχεί σε ένα αμινοξύ, εξαρτάται από το ποιο είναι το αμινοξύ. Μπορεί να είναι $\frac{1}{64}$ ή $\frac{1}{32}$ ή $\frac{3}{64}$ ή $\frac{1}{16}$ ή $\frac{3}{32}$.

Άσκηση 4

Αν κάποιος διαθέτει 2 μπουφάν (ένα μαύρο κι ένα μπλε), 4 παντελόνια, 3 μπλούζες, 10 ζευγάρια κάλτσες και 3 ζευγάρια παπούτσια, με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί, φορώντας από όλα τα είδη; Αν ένας επιλέξει τυχαία έναν από αυτούς τους τρόπους για να ντυθεί φορώντας ένα μπουφάν, ένα παντελόνι, μία μπλούζα, ένα ζευγάρι κάλτσες και ένα ζευγάρι παπούτσια, ποια είναι η πιθανότητα να φοράει το μπλε μπουφάν;

Λύση

Στο πρώτο ερώτημα η απάντηση είναι $2\cdot4\cdot3\cdot10\cdot3=720$ τρόποι.

Οι τρόποι για να φοράει το μπλε μπουφάν είναι $4 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 3 = 360$.

Άρα οι πιθανότητες να φοράει κανείς το μπλε μπουφάν είναι $\frac{360}{720} = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 5

Αν ρίξουμε ένα αμερόληπτο ζάρι 4 φορές ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε 4 διαφορετικά αποτελέσματα;

<u>Λύση</u>

Κάθε ρίψη του αμερόληπτου ζαριού έχει 6 δυνατές εκβάσεις. Κάθε αποτέλεσμα του πειράματος τύχης των 4 διαδοχικών ρίψεων είναι μια τετράδα αριθμών.

Άρα, το πλήθος των δυνατών εκβάσεων του πειράματος τύχης είναι $6^4 = 1296$.

Το πλήθος των εκβάσεων που οι τετράδες αποτελούνται από διαφορετικούς αριθμούς είναι το πλήθος των διατάξεων των 6 ανά 4 χωρίς επανάληψη.

Άρα $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{360}{1296}$.

Άσκηση 6

α)Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας μπορούμε να κατασκευάσουμε που περιέχουν στη σειρά τρία κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από έναν τετραψήφιο αριθμό;

β) Από το σύνολο των πινακίδων που περιγράφονται στο ερώτημα (α), μπορούν να χρησιμοποιηθούν εκείνες που τα γράμματά τους ανήκουν και στο λατινικό αλφάβητο. Αν επιλέξουμε τυχαία μία πινακίδα του ερωτήματος, (α) ποια είναι η πιθανότητα να είναι κατάλληλη προς χρήση;

<u>Λύση</u>

α) Ο τετραψήφιος αριθμός μπορεί να είναι ακόμα και ο 0000.

Επομένως, τα τρία κεφαλαία γράμματα μπορούν να σχηματιστούν με $24^3 = 13824$ τρόπους, ενώ ο αριθμός με $10^4 = 10000$.

Άρα το πλήθος των πινακίδων κυκλοφορίας είναι $13824 \cdot 10000 = 138.240.000$.

β) Από τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου εκείνα που δεν ανήκουν στο λατινικό αλφάβητο είναι τα Γ, Δ, Θ, Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ, Ω. Άρα το πλήθος των γραμμάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι 24 – 10 = 14.

Άρα, τα τρία κεφαλαία γράμματα μπορούν να σχηματιστούν με $14^3 = 2744$.

Συνεπώς το πλήθος των πινακίδων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι $2744 \cdot 10000 = 27.440.000$.

Άρα, η πιθανότητα μια πινακίδα να είναι κατάλληλη προς χρήση είναι $\frac{27440000}{138240000} \simeq 0,2$.

Άσκηση 7

Ο Θανάσης, ο Μιχάλης, ο Κώστας, ο Αντρέι κι ο Δημήτρης είναι οι παίκτες της σχολικής ομάδας μπάσκετ των αγοριών του Γ1 και ο προπονητής της ομάδας πρόκειται να τους δώσει τις εμφανίσεις τους για τους σχολικούς αγώνες.

α) Οι διαθέσιμες εμφανίσεις έχουν τυπωμένα τα νούμερα 7, 13, 15, 20 και 27. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν οι εμφανίσεις στους μαθητές; Αν οι εμφανίσεις μοιραστούν τυχαία στους παίκτες, ποια είναι η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης τη φανέλα με το 7; Ποια είναι η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης τη φανέλα με το 7 και να μην πάρει ο Θανάσης τη φανέλα με το 13;

β) Να απαντήσετε στα ίδια ερωτήματα, αν οι διαθέσιμες εμφανίσεις είναι οι 7, 11, 13, 15, 19, 20 και 27.

Λύση

α) Οι εμφανίσεις μπορούν να μοιραστούν στους μαθητές με $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ τρόπους.

Οι τρόποι με τους οποίους ο Δημήτρης παίρνει το 7 είναι $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, εφόσον ουσιαστικά μοιράζονται μόνο οι 4 υπόλοιπες φανέλες. Άρα η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης της φανέλα με το 7 είναι $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.

Για το επόμενο ερώτημα, θα υπολογίσουμε με πόσους τρόπους παίρνει ο Δημήτρης το 7 και ο Θανάσης το 13. Οι τρόποι είναι $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Άρα από τους 24 τρόπους που ο Δημήτρης παίρνει το 7, υπάρχουν 6 τρόποι που ο Θανάσης παίρνει το 13. Άρα, οι τρόποι που ο Δημήτρης παίρνει το 7 και ο Θανάσης δεν παίρνει το 13 είναι 24 – 6 = 18.

Επομένως η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης το 7 και να μην πάρει ο Θανάσης το 13 είναι $\frac{18}{120} = \frac{3}{20}$.

β) Ο τρόπος σκέψης είναι ο ίδιος, αλλά τα αποτελέσματα είναι τα εξής.

Οι τρόποι να μοιραστούν οι 5 από τις 7 εμφανίσεις στους 5 μαθητές είναι $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ και η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης τη φανέλα με το 7 είναι $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. Επομένως η πιθανότητα είναι $\frac{360}{2520} = \frac{1}{7}$.

Ο Δημήτρης παίρνει το 7 και ο Θανάσης το 13 με $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ τρόπους. Άρα οι τρόποι ο Δημήτρης να πάρει το 7 και ο Θανάσης να μην πάρει το 13 είναι 360 – 60 = 300. Επομένως η πιθανότητα ο Δημήτρης να πάρει το 7 και ο Θανάσης να μην πάρει το 13 είναι $\frac{300}{2520} = \frac{5}{42}$.

Άσκηση 8

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 4 άτομα σε 6 θέσεις μιας σειράς; Ποια είναι η πιθανότητα η τελευταία θέση να μείνει κενή;

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε καθορίσει τη σειρά με την οποία θα τοποθετούμε τα άτομα στις θέσεις που θα επιλέγουμε για αυτά.

Θα απαντήσουμε στο εξής ερώτημα, το οποίο είναι ισοδύναμο με το ζητούμενο:

«Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 4 θέσεις από 6, όταν μας ενδιαφέρει η σειρά που θα τις επιλέξουμε;»

Οι τρόποι είναι $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Για το επόμενο ερώτημα θα βρούμε ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε τις 4 θέσεις για να καθίσουν τα άτομα, ανάμεσα από 5 θέσεις και όχι από 6 θέσεις, αφήνοντας την 6η θέση κενή.

Οι τρόποι να επιλέξουμε τις 4 θέσεις ανάμεσα από 5 θέσεις είναι $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

Επομένως η πιθανότητα είναι $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$.

Αυτή είναι η πιθανότητα να μείνει μια συγκεκριμένη θέση κενή, είτε είναι η πρώτη, είτε είναι η τελευταία.

Άσκηση 9

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά 4 αγόρια και 3 κορίτσια; Αν επιλέξουμε τη σειρά των 7 παιδιών τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια;

Λύση

Πρόκειται για 7 παιδιά. Το πλήθος των τρόπων να μπουν στην σειρά είναι $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

Για το επόμενο ερώτημα θα σκεφτούμε ως εξής. Πρώτα θα βρούμε το πλήθος των τρόπων να μπουν στη σειρά τα 4 αγόρια, δίπλα-δίπλα. Είναι $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Κάνουμε το ίδιο για τα κορίτσια. Το πλήθος είναι $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Για κάθε τρόπο να τοποθετηθούν τα αγόρια έχουμε 6 τρόπους να τοποθετηθούν τα κορίτσια. Άρα οι συνολικοί τρόποι, αν μπουν αριστερά τα αγόρια και δεξιά τα κορίτσια, είναι $24 \cdot 6 = 144$.

Αν μπουν αριστερά τα κορίτσια και δεξιά τα αγόρια έχουμε άλλους 144 τρόπους. Άρα συνολικά έχουμε 288 τρόπους να μπουν όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια.

Επομένως η πιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια είναι $\frac{288}{5040} = \frac{2}{35}$.

Άσκηση 10

Δέκα παιδιά, μεταξύ των οποίων ο Κώστας και η Ελένη, θα καθίσουν τυχαία ο ένας δίπλα στον άλλον σε δέκα θέσεις. Ποια είναι η πιθανότητα ο Κώστας και η Ελένη να καθίσουν σε διπλανές θέσεις;

Λύση

Το πλήθος των τρόπων που μπορούν να καθίσουν τα 10 παιδιά είναι $10!$. Άρα, $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=3628800$.

Θα υπολογίσουμε με πόσους τρόπους γίνεται να καθίσουν δίπλα ο Κώστας με την Ελένη. Ας υποθέσουμε ότι επιλέγουμε πρώτα τις 2 θέσεις, από τις 10, που θα καθίσουν ο Κώστας και η Ελένη, βάζοντας τον Κώστα στην πρώτη θέση που θα επιλέξουμε και την Ελένη στη δεύτερη. Για να επιλέξουμε τη θέση του Κώστα έχουμε 10 τρόπους. Αν επιλέξουμε την πρώτη από τις 10 θέσεις, τότε η Ελένη έχει μόνο μία επιλογή, τη δεύτερη θέση. Αν επιλέγουμε την τελευταία από τις 10 θέσεις, τότε η Ελένη έχει μόνο μία επιλογή, την ένατη θέση. Για κάθε μία από τις υπόλοιπες 8 ενδιάμεσες θέσεις για τον Κώστα, η Ελένη έχει 2 επιλογές, την προηγούμενη και την επόμενη.

Επομένως, συνολικά υπάρχουν $1+1+2\cdot 8=18$ διαφορετικές τοποθετήσεις του Κώστα και της Ελένης δίπλα-δίπλα.

Για κάθε μία από αυτές τις τοποθετήσεις έχουμε $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=40320$ τρόπους να καθίσουν τα υπόλοιπα 8 παιδιά, στις υπόλοιπες 8 θέσεις.

Οι τρόποι να καθίσουν τα παιδιά, ώστε ο Κώστας και η Ελένη να είναι σε διπλανές θέσεις είναι $18\cdot 40320=725760$.

Άρα, τελικά οι πιθανότητα να καθίσουν ο Κώστας και η Ελένη σε διπλανές θέσεις είναι $\frac{725760}{3628800}=\frac{1}{5}$.

Άσκηση 11

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου τέσσερα τυχαία επιλεγμένα άτομα από την τάξη σας (ή το σχολείο σας), να έχουν γεννηθεί σε τέσσερις διαφορετικές εποχές του έτους.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι ν είναι τα παιδιά της τάξης με ν>3. Οι τρόποι να έχουν γεννηθεί τα παιδιά στις 4 εποχές είναι 4^{ν}.

Αν 4 παιδιά έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές εποχές, αυτό σημαίνει ότι υπόλοιπα ν-4 παιδιά έχουν γεννηθεί στις 4 εποχές με $4^{\nu-4}$ τρόπους και τα 4 παιδιά έχουν γεννηθεί στις 4 εποχές με $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ τρόπους.

Άρα η πιθανότητα είναι $\frac{4\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 4^{\nu-4}}{4^{\nu}}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{4^4}=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$.

Η λύση είναι ανεξάρτητη του πλήθους των ατόμων που έχει η τάξης σας, αρκεί να είναι περισσότερα από 3.