

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.3. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Διερεύνηση

Οι μαθητές/τριες ενός Λυκείου έχουν τη δυνατότητα να συμμετέχουν στις παρακάτω δραστηριότητες:

- Θεατρική ομάδα
- Ομάδα στίβου
- Όμιλος μουσικής

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους μαθητές/τριες του Λυκείου. Έστω ότι η πιθανότητα να συμμετέχει ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε:

- στη θεατρική ομάδα είναι ίση με $\frac{2}{5}$,
- στην ομάδα στίβου είναι ίση με $\frac{7}{15}$,
- στον όμιλο μουσικής είναι ίση με $\frac{1}{4}$.

α) Θεωρείτε ότι σε αυτό το σχολείο απαγορεύεται ένας/μία μαθητής/τρια να συμμετέχει σε πάνω από μία δραστηριότητες;

β) Αν η πιθανότητα του ενδεχομένου «επιλέγουμε έναν/μία μαθητή/τρια που συμμετέχει στη θεατρική ομάδα ή στην ομάδα στίβου» είναι μικρότερη από $\frac{13}{15}$, τι μπορούμε να συμπεράνουμε;

γ) Αν η πιθανότητα του ενδεχομένου «επιλέγουμε έναν/μία μαθητή/τρια που συμμετέχει στη θεατρική ομάδα ή στην ομάδα στίβου» είναι ίση με $\frac{23}{30}$, τότε ποια είναι η πιθανότητα των ενδεχομένων:

- «επιλέγουμε έναν/μία μαθητή/τρια που συμμετέχει στη θεατρική ομάδα και στην ομάδα στίβου»
- «επιλέγουμε έναν/μία μαθητή/τρια που να συμμετέχει στην θεατρική ομάδα, αλλά όχι στην ομάδα στίβου»;

Βασικές μαθηματικές έννοιες-Ιδέες-Διεργασίες

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, γνωστές ως “κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων”:

$$P(A') = 1 - P(A) \tag{Π1}$$

Απόδειξη

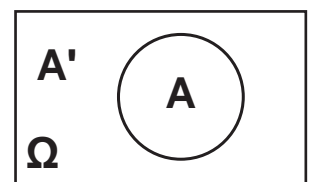
Τα A και A' είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα και ισχύει:

$$A \cup A' = \Omega$$

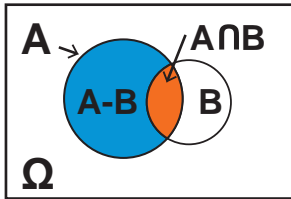
Από τον απλό προσθετικό νόμο προκύπτει ότι:

$$P(\Omega) = P(A) + P(A') \Leftrightarrow P(A) + P(A') = 1 \Leftrightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων



Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A - B) \quad (\Pi 2)$$

Απόδειξη

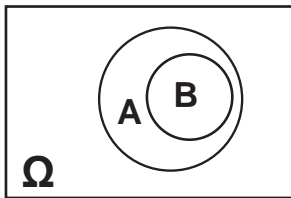
Τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και η ένωσή τους είναι το A , δηλαδή:

$$(A \cap B) \cup (A - B) = A$$

Από τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P((A \cap B) \cup (A - B)) = P(A \cap B) + P(A - B) \Leftrightarrow$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$$



$$\text{Αν } B \subseteq A \text{ τότε } P(B) \leq P(A) \quad (\Pi 3)$$

Απόδειξη

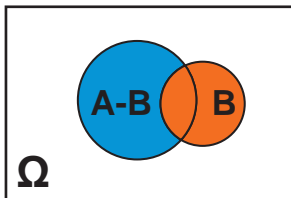
Σύμφωνα με τον (Π2): $P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$.

Εφόσον $B \subseteq A$, ισχύει ότι $A \cap B = B$, άρα:

$$P(A) = P(B) + P(A - B)$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι $P(A - B) \geq 0$ προκύπτει:

$$P(A) \geq P(B)$$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\Pi 4)$$

Απόδειξη

Τα ενδεχόμενα $A - B$ και B είναι ασυμβίβαστα και ισχύει:

$$(A - B) \cup B = A \cup B$$

Από τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P((A - B) \cup B) = P(A - B) + P(B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$$

Με τη βοήθεια του (Π2) για το $A - B$:

$$P(A \cup B) = [P(A) - P(A \cap B)] + P(B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Παρατηρούμε ότι:

— Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

— Αν $A \cap B = \emptyset$ και συνεπώς $P(A \cap B) = 0$, τότε ο (Π4) ισοδυναμεί με τον απλό προσθετικό νόμο.

— Αν $P(A \cap B) > 0$, τότε από τον (Π4) προκύπτει η ανισότητα:

$$P(A \cup B) < P(A) + P(B)$$

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα, με βάση τα δεδομένα του ερωτήματος (γ) της Διερεύνησης:

A: Ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε συμμετέχει στη θεατρική ομάδα

B: Ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε συμμετέχει στην ομάδα στίβου

- α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cap B$.
- β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε συμμετέχει στην ομάδα στίβου αλλά όχι στη θεατρική ομάδα».
- γ) Με Γ συμβολίζουμε το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε συμμετέχει στον όμιλο μουσικής». Υπάρχουν μαθητές/τριες του ομίλου μουσικής που συμμετέχουν σε κάποια από τις άλλες ομάδες; Αν ναι, μπορούμε να βρούμε σε ποια από τις άλλες ομάδες συμμετέχουν;

Λύση

- α) Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στη θεατρική ομάδα ή στην ομάδα στίβου» είναι το $A \cup B$ άρα θα είναι $P(A \cup B) = \frac{23}{30}$.
- Από τον (Π4) έχουμε $\frac{23}{30} = \frac{2}{5} + \frac{7}{15} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{10}$.
- β) Από τον (Π2) ισχύει $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{15} - \frac{1}{10} = \frac{11}{30}$, που είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου και όχι στη θεατρική ομάδα».

- γ) Παρατηρούμε ότι:

$$P(A \cup B) + P(\Gamma) > 1$$

Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν μαθητές/τριες του ομίλου μουσικής που συμμετέχουν σε κάποια από τις άλλες ομάδες, τότε θα ήταν $(A \cup B) \cap \Gamma = \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι, λόγω του απλού προσθετικού νόμου θα έχουμε $P[(A \cup B) \cup \Gamma] = P(A \cup B) + P(\Gamma)$, άρα $P[(A \cup B) \cup \Gamma] > 1$, που είναι άτοπο.

Σίγουρα, λοιπόν, η τομή $(A \cup B) \cap \Gamma$ δεν είναι κενή. Συνεπώς υπάρχουν μαθητές του ομίλου μουσικής που συμμετέχουν και σε άλλη ομάδα (ή και στις δύο άλλες ομάδες). Ωστόσο, δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν το Γ έχει μη κενή τομή με το A , με το B ή και με τα δύο. Άρα δε γνωρίζουμε σε ποια άλλη ομάδα συμμετέχουν αυτοί οι μαθητές.

Εφαρμογή 2

Σε ένα άλλο Λύκειο από αυτό του προβλήματος της Διερεύνησης οι μαθητές/τριες έχουν τη δυνατότητα να συμμετάσχουν σε θεατρική ομάδα και ομάδα στίβου. Το 28% των μαθητών/τριών συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 20% στην ομάδα στίβου και το 12% και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν/μία μαθητή/τρια. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε:

- α) να συμμετέχει σε τουλάχιστον μία από τις δύο ομάδες,
 β) να συμμετέχει μόνο στη θεατρική ομάδα,
 γ) να συμμετέχει σε μία μόνο από τις δύο ομάδες,
 δ) να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.

Λύση

Αν A είναι το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στην θεατρική ομάδα» και B «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στην ομάδα στίβου», τότε $P(A) = 0,28$, $P(B) = 0,2$. Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει και στις δύο ομάδες» είναι το $A \cap B$ και από τα δεδομένα του προβλήματος $P(A \cap B) = 0,12$.

α) Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει σε τουλάχιστον μία από τις δύο ομάδες» είναι το $A \cup B$, συνεπώς από τον (Π4) με αντικατάσταση έχουμε $P(A \cup B) = 0,28 + 0,2 - 0,12 = 0,36$.

β) Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει μόνο στη θεατρική ομάδα» είναι το $A - B$ και σύμφωνα με τον (Π2) ισχύει $P(A - B) = 0,28 - 0,12 = 0,16$.

γ) Θα χρειαστεί πρώτα να βρούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου», δηλαδή του $B - A$. Από τον (Π2) είναι $P(B - A) = 0,2 - 0,12 = 0,08$.

Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει σε μία μόνο από τις δύο ομάδες» είναι η ένωση των ασυμβίβαστων ενδεχομένων $A - B$ και $B - A$.

Σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = 0,16 + 0,08 = 0,24$$

δ) Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια δε συμμετέχει σε καμία ομάδα» είναι το $(A \cup B)'$. Από τον (Π1) είναι:

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,36 = 0,64$$

Ασκήσεις - Προβλήματα - Δραστηριότητες

1) Το 50% των δωματίων ενός ξενοδοχείου έχουν τζάκι, το 20% έχουν καλοριφέρ και το 10% και τζάκι και καλοριφέρ. Επιλέγουμε τυχαία ένα δωμάτιο του ξενοδοχείου.

Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου το δωμάτιο που επιλέξαμε:

α) να μην έχει τζάκι,

β) να μην έχει ούτε τζάκι ούτε καλοριφέρ,

γ) να έχει μόνο τζάκι;

2) Ας υποθέσουμε ότι A και B είναι ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λάθος, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

α) Αν ισχύει ότι $P(A) = 0,8$ και $P(B) = 0,1$. Ισχύει ότι $B \subseteq A$, γιατί $P(B) \leq P(A)$.

β) Αν $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ και $P(A \cup B) = 0,6$, τότε τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

- γ) Αν $P(A) = 0,4$ και $P(B) = 0,6$, τότε το συμπληρωματικό του A είναι το B.
- δ) Ισχύει πάντα ότι $P(A) + P(B) \leq 1$.
- ε) Ισχύει πάντα ότι $P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$.
- στ) Αν ισχύει $P(A) + P(B) = 1,5$, τότε τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.
- ζ) Αν ισχύει $P(A) + P(B) < 1$, τότε τα A και B είναι ασυμβίβαστα.
- η) Ισχύει ότι $P(A \cap B) \leq P(A)$.
- 3) Να απαντήσετε στα ίδια ερωτήματα με την εφαρμογή 2, αν αντί για τα ποσοστά που δίνονται, γνωρίζετε αυτή τη φορά ότι το Λύκειο έχει συνολικά 120 μαθητές/τριες, από τους/τις οποίους/ες οι 32 συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, οι 28 στην ομάδα στίβου και 16 μαθητές/τριες συμμετέχουν και στις δύο ομάδες.
- 4) Από τους/τις μαθητές/τριες της Β΄ τάξης ενός Λυκείου το 55% είναι μαθήτριες, το 40% παίζουν μπάσκετ και το 10% είναι μαθήτριες που παίζουν μπάσκετ. Επιλέγουμε τυχαία έναν/μία μαθητή/τρια. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες να είναι:
- α) μαθήτρια ή να παίζει μπάσκετ,
 β) μαθήτρια και να μην παίζει μπάσκετ,
 γ) μαθητής και να παίζει μπάσκετ,
 δ) μαθητής ή να παίζει μπάσκετ.
- 5) Όλοι οι κάτοικοι μιας μικρής επαρχιακής πόλης έχουν συμβόλαιο κινητού τηλεφώνου. Το 47% των κατοίκων έχει συμβόλαιο με την εταιρεία FONATEL, το 35% των κατοίκων έχει συμβόλαιο με την TELEVIBE. Παίρνουμε τυχαία τηλέφωνο έναν κάτοικο της πόλης. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο κάτοικος που πήραμε τηλέφωνο δεν έχει συμβόλαιο με καμία από τις FONATEL και TELEVIBE» είναι 23%. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου, ο κάτοικος που πήραμε τηλέφωνο:
- α) να έχει συμβόλαιο με την FONATEL ή με την TELEVIBE,
 β) να έχει συμβόλαιο και με τις δύο εταιρείες.
- 6) Από τον πληθυσμό μιας πόλης το 42% δεν έχουν κάνει ποτέ σκι το 58% δεν έχουν ταξιδέψει ποτέ με αεροπλάνο, αλλά το 29% έχουν ήδη κάνει σκι και έχουν ταξιδέψει με αεροπλάνο. Αν πάρουμε τυχαία έναν κάτοικο της πόλης ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει κάνει ποτε σκι και να μην έχει ταξιδέψει ποτέ με αεροπλάνο;

Πρόσθετο Υλικό

Προτεινόμενες ασκήσεις από την παράγραφο 1.2 του βιβλίου «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων» της Α΄ Λυκείου:

Α΄ ομάδας: 7, 10, 12, 13, 14.

Β΄ ομάδας: 1, 2.

Ερωτήσεις κατανόησης 1ου κεφαλαίου: 4, 5, 10.